Mühendislik Bilimleri ve Tasarım Dergisi
8(5), 58-66, 2020
e-ISSN: 1308-6693
Araştırma Makalesi

Journal of Engineering Sciences and Design
DOI: 10.21923/jesd.829133
Research Article

Özel Sayı: Uluslararası Mühendislikte Yapay Zeka ve Uygulamalı Matematik Konferansı (UMYMK 2020)

Special Issue: International Conference on Artificial Intelligence and Applied Mathematics in Engineering (ICAIAME 2020)

GEZGİN SATICI PROBLEMİNİN OYUN TEORİSİ MALİYET TAHSİS YÖNTEMLERİ İLE İNCELENMESİ

Ulviye SAVAŞ [1*], Mehmet Onur OLGUN[2]

[1] Süleyman Demirel Üniversitesi, Fen Bilimleri Enstitüsü, Endüstri Mühendisliği Bölümü, Isparta, Türkiye
[2] Süleyman Demirel Üniversitesi, Mühendislik Fakültesi, Endüstri Mühendisliği Bölümü, Isparta, Türkiye

Anahtar Kelimeler
Tamsayılı Programlama,
İşbirlikçi Oyun Teorisi,
Gezgin Satıcı Problemi.

Öz
Bu çalışmada, Tamsayılı Programlama modellerinden biri olan gezgin satıcı problemi (GSP) kullanılmıştır. GSP'de amaç; dağıtım, tedarik, lojistik vb. durumlarda işlerin daha verimli olabilmesi ve fazladan maliyet oluşturmaması için gidilecek olan noktalardan her bir noktaya yalnızca bir kez uğrayarak en kısa yoldan başlangıç noktasına geri dönülmesidir. Bu rota hesaplanırken tur sonucunda elde edilecek maliyet diğer tüm rotalardan daha düşük olmalıdır. Problemle ilgili maliyet paylaşımı işbirlikçi oyun teorisi kullanılarak tahsis edilmiştir. Çalışmadan oyuncuların (firmaların) aralarında koalisyon kurarak maliyet paylaşımı yapmaları halinde her oyuncunun maliyetleri iki farklı maliyet tahsis yöntemi olan Shapley değeri ve nükleolus yöntemleri ile elde edilmiştir. Elde edilen sayısal sonuçlar karşılaştırıldığında Shapley değerinin nükleolus yöntemine kıyasla daha düşük maliyete sahip olduğu gözlemlenmiş ve üç oyuncunun sırasıyla maliyet azalma oranları %47,04, %48,74, %25,91 olarak hesaplanmıştır.

EXAMINATION OF THE TRAVELLING SALESMAN PROBLEM WITH GAME THEORY COST ALLOCATION METHODS

Keywords
Integer Programming,
Cooperative Game Theory,
Travelling Salesman Problem.

Abstract
In this study, travelling salesman problem (TSP), which is one of the Integer Programming models, is used. The purpose in TSP is to find the shortest way to return to the starting point by going to each point only once from the points to be made, in order to make the works more efficient and not create extra cost in situations such as distribution, supply and logistics. While calculating this route, the cost to be obtained as a result of the tour should be lower than all other routes. Then, cost sharing related to the problem is allocated by using cooperative game theory. In the event that players (firms) share a coalition between them, the cost of each player is obtained by two different cost allocation methods, Shapley value and nucleolus methods. Comparing the numerical results obtained, it is observed that the Shapley value has a lower cost compared to the nucleolus method and the cost reduction rates of the three players were calculated as 47.04%, 48.74%, 25.91%, respectively.

Alıntı / Cite
SAVAŞ U., OLGUN M.O., (2020). Gezgin Satıcı Probleminin Oyun Teorisi Maliyet Tahsis Yöntemleri İle İncelenmesi, Mühendislik Bilimleri ve Tasarım Dergisi, 8(5), 58-66.

Yazar Kimliği / Author ID (ORCID Number)	Makale Süreci / Article Process	
U. SAVAŞ, 0000-0001-6803-6331	**Başvuru Tarihi / Submission Date**	21.11.2020
M.O. OLGUN, 0000-0002-7568-3235	**Revizyon Tarihi / Revision Date**	16.12.2020
	Kabul Tarihi / Accepted Date	16.12.2020
	Yayım Tarihi / Published Date	29.12.2020

[*] İlgili yazar / Corresponding author: ulviyesavas@gmail.com, +90-545-863-8038

1. Giriş (Introduction)

Gelişen ve değişen küresel ekonominin bir etkisi olarak sürekli artan rekabet koşullarının, ürünlerin farklılaşması, kaynakların sınırlı olması, dağıtım giderlerinin artması gibi konularda; şirketler (üreticiler), tüketicinin taleplerine karşı en uygun hizmeti vermek adına ürün ve servis maliyeti düşürme amacına yönelik olarak lojistik (dağıtım, tedarik vb.) faaliyetlerine yönelik çalışmalarda artış göstermektedir (Ceran ve Alagöz, 2007). Bu amaç doğrultusunda en önemli unsurlardan biri olan lojistik (dağıtım, tedarik vb.) süreçlerinde meydana gelen maliyetlerin, şirketler tarafından en düşük seviyeye çekilmesi istenmektedir. Bunun sonucunda yapılan çalışmalarda süreç içerisinde en doğru şekilde lojistik hizmetinin (dağıtımın) gerçekleştirilmesi maliyeti düşürme adına etkili olmaktadır. Matematiksel olarak yapılan optimizasyon tekniklerinin arasından; yapılan bu çalışmada tamsayılı doğrusal programlama modellerinden biri olan gezgin satıcı problemine odaklanılmıştır.

Gezgin satıcı problemi (GSP), operasyonel araştırmalarda en yoğun incelenen konulardan biridir (Kendal ve Li, 2013). Burada amaç; dağıtıcının, şehirler (noktalar) arasındaki mesafeleri göz önünde tutarak gidilecek olan her bir şehri yalnızca bir defa ziyaret ederek en son başlangıç şehrine geri döndüğü en kısa mesafeyi elde etmektir. Bunun sonucu olarakta taşıma-dağıtım maliyeti de düşürülmüş olacaktır. Gezgin satıcı probleminin farklı çeşitleri de literatürde incelenmiştir. Örnek olarak çoklu GSP, asimetrik GSP, zaman pencereli GSP vb. (Kendal ve Li, 2013). Bu çalışmada uygulanmış olan asimetrik gezgin satıcı problemi genel olarak kombinatoryel optimizasyon olarak bilinen ve mühendislik problemlerini temsil eden zorlu problemlerden biridir (Bai ve diğ. 2013).

Bu çalışmalara ek olarak lojistik hizmet sağlayıcılar arasında yapılacak olan işbirliği, şirketler açısından çeşitli avantajlar sağlayabilir. Kârlılık ve rekabetçilik artışı, kapasite kullanımında en iyileme, maliyet azaltma ve ulaşımda ağ iyileştirme olanakları sunar. Koalisyonda ortaklar arasında kar dağıtımı konusu, işbirliğinin kurulmasında çok önemli bir rol oynamaktadır (Kimms ve Kozeletski, 2016a). Bu doğrultuda şirketler arasında yapılacak olan işbirliği, lojistik operasyonlarını iyileştirebilecek bir yol olarak düşünülebilir. Bunun bir örneği, iki şirketin sabit maliyetleri paylaşmak için ortak bir envanter konumu kullanmasıdır. Tüm işbirliği içinde kilit bir soru, maliyetlerin veya kârların nasıl paylaşılacağı, diğeri ise koalisyonun nasıl kurulacağı ve yönetileceğidir (Guajardo ve Rönnkvist, 2016). Bu sorulara cevap olması açısından yapılan çalışmada için işbirlikçi oyun teorisindeki maliyet tahsis yöntemleri incelenmiştir.

İşbirlikçi oyun teorisinde, oyuncular (şirketler) işbirliği durumuna girmeleri halinde ortak bir bağlayıcı anlaşma planı oluşturarak aralarındaki pazarlık durumlarını analiz etmeye ve beraber oluşturdukları kazanç ya da kayıbın dağıtımının nasıl yapılacağına odaklanırlar. Özellikle şirketler arasında oluşabilecek her bir olası koalisyon durumuna ait olarak ortak kazanç ve kayıpları her bir oyuncunun işbirliği durumuna yapmış olduğu katkılar göz önüne alınarak hesaplanır. Ardından uygulanan maliyet tahsis yöntemleri ile ortak maliyet her bir oyuncuya adil bir şekilde dağıtılır. Bu çalışmada maliyet tahsis yöntemi olarak Shapley değeri ve nükleolus kullanılmıştır. Bu iki yöntemin kıyaslaması yapılarak hangi yöntemin daha iyi sonuç elde ettiği gözlemlenerek tüm şirketler için adil bir dağıtımın gerçekleştirilmesi amaçlanmıştır.

Çalışmanın diğer bölümleri aşağıdaki gibi düzenlenmiştir. 2. bölümde gezgin satıcı problemi (GSP) ve işbirlikçi oyun teorisi ile ilgili literatür çalışması verilmiştir. 3. bölümde asimetrik gezgin satıcı problemi (AGSP) ve işbirlikçi oyun teorisi için kullanılan formüller ve modeller verilmiştir. 4. bölümde örnek olarak yapılan uygulama incelenmiştir. 5. bölümde yapılan çalışma sonucunda elde edilen veriler tartışılarak yorumlanmıştır.

2. Kaynak Araştırması (Literature Survey)

Yaygın olarak incelenen gezgin satıcı problemi (GSP), bir dizi şehir göz önüne alındığında, bellir bir noktadan başlayarak her şehri yalnızca bir defa ziyaret eden ve tekrar başlangıç noktasına dönerek turu bitiren minimum mesafeli turu (rotayı) bulma ile ilgilidir (Laporte, 1992). Öncü bir çalışma olarak Fishburn ve Pollak (1983)'te farklı kurumlar tarafından desteklenen yapılan bir turun ardından maliyetin adil bir şekilde paylaştırılması için bir maliyet tahsis problemi ele alınmıştır. Ardından Tamir (1989) çalışmasında, bir tamircinin müşteriler tarafından çağırıldığı senaryosunda tamircinin evinin olduğu şehirden başlayarak tüm müşterilerini en uygun rota ile ziyaret edip tekrar kendi evine döndüğü ele alınmaktadır. Burada tamircinin müşterilerin evlerine gitmesi ile ortaya çıkan maliyeti müşteriler arasında adil bir şekilde paylaştırılması problemi ele alınmıştır. Dror (1990), bir maliyet tahsis problemi için üçgen eşitsizliğine odaklanarak, gezgin satıcı probleminde sabit bir başlangıç şehri (noktası) olması veya olmaması durumlarını ve bu durumların maliyet tahsisini incelemiştir. Benzer bir çalışma olarak, Potters ve diğ. (1992)'de yapılan bir yolculuğun maliyetinin enstitüler arasında adil bir şekilde nasıl bölüneceği sorununu ele almışlardır. GSP'de maliyet tahsisi resmi olarak "gezgin satıcı oyunları" olarak tanıtılmış ve problemleri sabit bir rota olarak ve sabit bir rota olmamak üzere iki şekilde tanımlamıştır. Bu çalışmada, rota sabitlendiğinde; şehirlerin herhangi bir alt kümesinin maliyeti, şehirlerin orijinal turda ziyaret sırasına göre hesaplanmıştır. Rota sabit olmadığında ise, bir şehir alt kümesinin maliyeti, bu şehirleri içeren en uygun turu bulmak suretiyle hesaplanmıştır. Sabit rota üzerine ardından yapılan çalışmalardan bazıları; Derks ve Kuipers (1997), Yengin (2012) ve Sun ve diğ. (2015) ve sabit rotaları olmayan versiyonda Faigle ve diğ. (1998) ve Caprara ve Letchford (2010).

Bu çalışmalara ek olarak literatürde gezgin satıcı probleminin farklı çeşitlerde maliyet tahsisleri de incelenmiştir. Bläser ve Ram (2008), maliyet matrisinin üçgen eşitsizliğini karşıladığı durumu incelemiştir. Ayrıca farklı yaklaşık olarak maliyet tahsis problemleri de incelenmiştir. Bunun için döngü kapağı oyunları tanıtılmış ve bir döngü kapağı oyununun çekirdeğinin, polinom zamanında bir adil bir maliyet tahsis vektörü bularak boş olmadığını göstermişlerdir. Estévez-Fernández ve diğ. (2009) çalışmalarında seyahat masraflarının yanında bir şehri ziyaret ederek açık bir gelir elde edildiği durumu incelemiştir. Toriello ve Uhan (2013), simetrik özelliği ve daha önce bilinmeyen doğrusal üretim oyunlarını kullanarak, asimetrik gezici satıcı problemi için Held-Karp integralite boşluğuna eşit bütçe dengesi garantisi ile istikrarlı bir maliyet tahsisi durumunu incelemişlerdir. Engevall ve diğ. (2004), Stockholm, İsveç'te Norsk Hydro Olje AB'deki Lojistik Departmanında bir dağıtım planlama durumunda ortaya çıkan bir maliyet tahsisi problemini incelemişlerdir. Berger ve Bierwirth (2010) çalışmada, bağımsız taşıyıcılar arasında işbirliğini kolaylaştırmak için ulaşım taleplerinin değiş tokuş edilmesi için bir düzenleme üzerinde düşünmüşlerdir. Amaç, taşıyıcıların bireysel kârlarını azaltmadan toplam kârı en üst düzeye çıkarmaktır. Bu sorun için merkezi olmayan kontrol ve açık artırma temelli değişim mekanizmalarını içeren iki çözüm yaklaşımı geliştirilmiştir. Kimms ve Kozeletskyi (2016a) çalışmalarında, seyahat eden satıcıların öncelikli olarak uygulanan ve koalisyon üyeleri için beklenen maliyetleri sağlayan yatay bir işbirliği için bir maliyet tahsis şeması sunmuşlardır. Kimms ve Kozeletskyi (2016b), satıcılar arasındaki işbirliğini zaman pencereli gezgin satıcı problemi (*the traveling salesman problem with rolling horizon*) için oyun teorisi perspektifinden incelemişlerdir. Burada modellemede stokastik talepler kullanılmıştır. Amaç, Shapley değerini kullanarak bu problem için bir maliyet tahsisi belirlemektir. Problemin oyun teorisi ile formülasyonu sağlanmış ve yapısal özellikler araştırılmıştır. Bu oyunun karakteristik fonksiyonunun değerini hesaplamak için, stokastik bir dinamik program olarak formüle edilen anoptimizasyon problemi tanıtılmıştır. Platz (2019) çalışmasında, gezgin satıcı problemlerinde (GSP) çoklu depolara izin vermek ve gezgin satıcı oyunu kavramını genelleştirmeyi amaçlamıştır. Ha ve diğ. (2018) çalışmalarındada TSP-D (*traveling salesman problem with drone*)'nin farklı bir çeşitini ele almışlardır. Bu çalışma ile, toplam nakliye maliyeti ve bir aracın diğer aracı beklemesi gereken atık zaman ile meydana gelen operasyonel maliyetleri en aza indirmek amaçlanmıştır. Veenstra ve diğ. (2017) seyahat ve ceza masraflarından oluşan toplam maliyeti en aza indirilmesini amaçlayan, taşıma maliyeti ile teslim alma ve teslim yapan gezgin satıcı problemini (*pickup and delivery traveling salesman problem with handling costs- PDTSPH*) incelemişlerdir. Toriello ve diğ. (2014), Dinamik araç yönlendirme gibi uygulamaların oluşturduğu stokastik ark maliyetleri ile bir karar maliyetinin sadece önceden bilinen ama karar verilmeden önce dinamik olarak ortaya koyulduğu dinamik bir gezgin satıcı problemni incelemişlerdir.

Yapılan çalışmalarda gezgin satıcı problemi için simetrik maliyet (uzaklık) matrisi yerine asimetrik matrisinin kullanıldığı çalışmalarda vardır. Baki (2006), gezgin satıcı problemindeki en uygun turun piramit biçiminde olduğu bir asimetrik matris sınıfı tanımlamak için yeni bir yöntem kullanmıştır. Rodriguez ve Ruiz (2012), çalışmalarında karayolu ulaşım ağlarının, coğrafi konumun ve bölgenin asimetrisinin, GSP ve AGSP yöntemleri üzerindeki etkisini incelemişlerdir. Bu çalışmaların yanında sezgisel yöntemlerinde kullanıldığı çalışmalar yapılmıştır. Bai ve diğ. (2013), çalışmalarında hibritleştirme ve teorik analiz arasındaki boşluğu kapatmak için bir modele bağlı maks-min karınca kolonisi optimizasyonu (MIMM-ACO) önermişlerdir. Önerilen yöntem, hem AGSP modelinden hem de hibritleştirme için teorik temeli oluşturan karıncaların davranışını yönlendiren ACO dinamiklerinden analitik bilgiyi kullanmışlardır.

3. Materyal ve Yöntem (Material and Method)

Bu çalışmada ele alınan gezgin satıcı problemindeki maliyet tahsisi için işbirlikçi oyun teorisi kullanılmıştır (Gezgin Satıcı Oyunları). Oyunu tanımlamak için önce gezgin satıcı problemlerini açıklanıp ardından n-kişili işbirlikçi oyun teorisi konsepti anlatılmıştır. GSP farklı karar değişkenleri ile bilinen birleşimsel bir optimizasyon problemidir (Ali vd., 2020). Gezgin satıcı problemlerinde amaç, verilen her noktadan bir kez geçecek şekilde en kısa yolu hesaplayarak tekrar başladığı noktaya dönmektir. Bu yapılırken asıl amaç elde edilen rotanın en az maliyete sahip olmasıdır (Marinakis vd. 2008). Problemde verilen noktalar (düğümler) arasında yollar, uçuşlar, tren rayları vb. gibi bağlantılar ve her bağlantının kendine ait maliyeti vardır. Bu maliyetler örnek olan taşıma sürecinde gidilen yolun uzunluğu veya taşıma süresince elde edilen maliyet gibi farklı şekilde temsil edilmiş olabilir. Bu maliyetler uzaklık (maliyet) matrisi olarak verilir ve hesaplamalar bu matrise göre yapılır. Eğer matriste her i, j ikilisi için c_{ij} uzaklığı c_{ji} uzaklığına eşitse gezgin satıcı problemi simetrik bir uzaklık matrisi için uygulanır. Ancak c_{ij} değeri c_{ji} değerine eşit değilse, hesaplamalar asimetrik bir matris için yapılır ve bu problem asimetrik gezgin satıcı problemi (AGSP) olarak adlandırılır. AGSP için kullanılan tamsayılı doğrusal programlama (TDP) modeli aşağıda gösterildiği gibidir (Bakır, 2003).

Amaç fonksiyonu:

$$enk \sum_i \sum_{j \neq i} d_{ij} x_{ij} \quad (1)$$

Kısıtlar:

$$\sum_j x_{ji} = 1 \text{ , tüm i'ler için} \quad (2)$$

$$\sum_i x_{ij} = 1 \text{ , tüm j'ler için} \quad (3)$$

$$\sum_{i \in S} \sum_{j \notin S} x_{ij} \geq 1 \text{ ,tüm uygulanan S alt kümeleri için, } |S| \geq 2, \text{ tüm i ve j'ler için} \quad (4)$$

$$x_{ij} = 0 \; veya \; 1, \text{ tüm i' ve j'ler için} \quad (5)$$

Yukarıda verilen DP modeli için Eşitlik (1), i noktasından j noktasına gidilecek olan uzaklığın maliyetinin minimum olması gerektiğini belirtiyor. Eşitlik (2) ve (3), her bir nokta ile iki kez buluşmak yerine, AGSP'nin güzergahı her bir noktaya bir kez gitmesi ve bir kez ayrılması gerektiğini belirtir. Gezgin satıcı problemlerinde en çok dikkat edilmesi gereken nokta alt tur oluşumunun engellenmesidir. Eşitlik (4) ise alt tur eliminasyonunu gösterir. Yani her turun, noktalar alt kümesi olan S'i ziyaret etmesi ve ayrılması gerektiği belirtilir. Böylece her bir S alt ümesini en az bir kez ayrılacak turun oluşturulması ile alt tur eliminasyonu yapılabilir. Eşitlik (5) ise eğer tur i'den j'ye geçerse $x_{ij} = 1$ olur, aksi taktirde 0 değerini alır. Modelde d_{ij}, i'den j'ye olan uzaklığı tanımlamaktadır.

3.1. İşbirlikçi Gezgin Satıcı Oyunları (Cooperative Travelling Salesman Games)

Oyun teorisi ise, iki veya daha fazla oyuncunun birlikte aynı rekabet ortamına girmesi ile ilgili karar verme durumları ile ilgilenir. Bu tür ortamlarda oyuncular kendi çıkarlarını gözeterek, faydalarını (giderlerini) optimize etmeye çalışırlar. Bu durumda bir oyun, işbirlikçi ve işbirlikçi olmayan olarak ikiye ayrılır. İşbirlikçi oyun teorisinde oyuncuların bir koalisyon ortamında toplam maliyetlerini en aza indirmeye veya ortak olan gelirleri en üst seviyeye çıkarmaya çalışırken, işbirlikçi olmayan oyun teorisinde herhangi bir koalisyon durumu söz konusu olmadığı için her oyuncu kendi çıkarları doğrultusunda hareket eder. İşbirlikçi oyun teorisinde oyuncular toplam maliyet (veya geliri) optimize etmeye çalışırken asıl amaç kendi maliyet (giderlerini) optimize etmektir. Bu tür durumlarda, koalisyondaki oyuncuların ortak hedeflerini yansıtan bir maliyet tahsis yöntemine başvurulabilir (Marinakis vd., 2008).

İşbirlikçi bir n-kişili oyun $(N; c)$ çifti ile tanımlanır. Burada $N = \{1,2, \dots n\}$ oyuncu kümesidir ve c, $S \subseteq N$' de tanımlanan $c(\emptyset) = 0$ ile birlikte karakteristik fonksiyon adı verilen gerçek değerli bir fonksiyondur. Her bir alt küme $S \subseteq N$ bir koalisyondur ve N ise *büyük koalisyon (grand coalition)* adını alır. Bir koalisyonun kardinalitesi veya büyüklüğü $|S|$, S alt kümesindeki oyuncu sayısına eşit olur. N'nin boş alt kümesine ise *boş koalisyon* adı verilir. Bir oyun, oyuncular arasında aktarılabilir bir birim içerirse, parasal veya fiziksel olarak, bu oyunlara *aktarılabilir fayda oyunları (Transferable Utility Game, TUG)* adı verilir. Bir maliyet oyununda tanımlanan karakteristik fonksiyon, bir koalisyonun işbirliği yapmayı seçtiğinde ortaya çıkan maliyeti temsil eder (Branzei vd., 2005). N oyuncu kümesine sahip tüm işbirlikçi oyunların kümesi, G^N ile temsil edilir (Marinakis vd. 2008).

Bir ödeme vektörü olan x, R^{N}'de tanımlıdır ve x_i, i oyuncusuna ait ödeme değeridir, $\sum_{i \in N} x_i = c(N)$ (Marinakis vd. 2008). Verilen eşitlik bir oyun için verimlilik koşulu (efficiency condition) olarak adlandırılır. Ayrıca $\forall S \in K$, $\sum_{i \in S} x_i \leq c(S)$ eşitliği oyunun rasyonellik koşulunu göstermektedir. Eğer S koalisyonu tek oyunculu ise o zaman bu eşitlik bireysel rasyonellik olarak adlandırılır (Guajardo ve Rönnqvist, 2016). Eğer bir $x \in \mathbb{R}^n$ ödeme vektörü $c \in G^N$ oyunu için yukarıdaki iki koşulu da sağlarsa, $(N; c)$ oyunu bir kısıt (imputation) olarak adlandırılır.

Yazım kolaylığı açısından bu çalışmada, $\sum_{i \in S} x_i$ için $x(S)$ ve $c(\{i\})$ yerine $c(i)$ kullanılmıştır.

Bir ödeme vektörü olan x'ye göre boş olmayan bir S koalisyonunun fazlalığı $e(S - x) = c(S) - x(S)$ olarak tanımlanır.

Bir oyuncuya ait ödeme değeri (marjinal maliyet), m_i, büyük koalisyondaki o oyuncuya ait olan ödeme değerini (marjinal maliyet) temsil eder; $m_i = c(N) - c(N\{i\})$. Monoton oyunlarda her i değeri için, $m_i \geq 0$'dır.

İşbirlikçi oyunlar bazı özellikleri sağlayabilir. Bu özellikler:

- Eğer karakterisitik fonksiyon v monoton ise, oyun $(N;c)$'de monotondur, $S \subset T \subset N$ için , $c(S) \leq c(T)$.
- $\forall S,T \subset N, S \cap T = \emptyset$ için $c(S)+c(T)=c(S \cup T)$ ise oyun toplamsal (additive) olarak tanımlanır.
- Eğer, $\forall S,T \subset N, \forall S,T \subset N$ için $c(S)+c(T) \leq c(S \cup T)$ ise o zaman oyun için süper toplamsal (superadditive) tanımı yapılır. Eğer $c(S)+c(T) \geq c(S \cup T)$ ise o zaman oyun alt toplamsal (subadditive) olarak tanımlanır.
- Eğer oyunda $\forall S,T \subset N,\ c(S)+c(T) \leq c(S \cup T)+c(S \cap T)$ ise konvekstir.
- $\forall S,T \subset N, c(S)+c(T) \geq c(S \cup T)+c(S \cap T)$ ise oyun konkavdır.

Genellikle ele alınan problemlerde kazanç oyunları konveks, maliyet oyunları konkavdır (Marinakis vd. 2008). Bu çalışmada maliyet üzerine çalışıldığı için oyun türü konkavdır.

İşbirlikçi oyun teorisinde maliyet tahsisi için birden fazla farklı çözüm yöntemi vardır (Guajardo ve Rönnqvist, 2016). Bunlardan en yaygın kullanılanları; çekirdek (core), Shapley değeri (Shapley, 1953), nükleolus, τ değeri (Tijs, 2003)'dir . Çekirdek (core) ve Weber kümesi yöntemleri yöntemleri küme çözüm olarak belirlenmiştir ve Shapley değeri, nükleolus, τ değeri de tek nokta çözüm yöntemleridir. Bu çalışmada maliyet tahsisi için Shapley değeri ve nükleolus kullanılmıştır. Shapley değeri kısaca bir oyuncunun karşılaştığı her bir alternatifin beklenen faydasını tek bir değer ile temsi etmesinin ve oyunda bir koalisyonun karşı karşıya olduğu fırsatları aktarılabilir fayda birimlerindeki değerini temsil eder (Thomson ve Roth, 1991).

Shapley değerinin arkasındaki asıl mantık her koalisyon art arda büyük koalisyonu oluştururken marjinal maliyetlerini yansıtmasıdır. Bir $(N;c)$ oyununda N büyük koalisyonu sırasıyla $p_1, p_2, \dots, p_{|N|}$ oyuncularının eklenmesi ile oluştuğunu varsayalım. Burada, $(|S|-1)!\,(|N|-|S|)!$ farklı ekleme yolu bulunmaktadır, bu da $i = p_s$. Ayrıca belirli bir S koalisyonu $\{p_1, p_2, \dots, p_s\}$ ile tanımlanır. S koalisyonundaki i oyuncusu için marjinal maliyet $(c(S) - c(S \setminus \{i\})$ olarak tanımlanır (Hausken ve Mohr, 2001). Oyunun Shapley değeri, $G =< N, c(i) > i \in N$'de her oyuncuya Eşitlik (6) kullanılarak hesaplanabilir. Burada c karakteristik fonksiyonu belirtir ve n adet oyuncu olduğu varsayılmaktadır (Nowak ve Radzık, 1994).

$$\varphi_i(G) = \frac{1}{|N|!} \sum_{S \subseteq N \setminus \{i\}} |S|!\,(|N|-|S|-1)!\,[c(S \cup \{i\}) - c(S)] \tag{6}$$

Diğer bir maliyet tahsis yöntemlerinden biri olan nükleolus, oyundaki koalisyonların memnuniyetsizliğini en aza indiren bir çözüm konseptidir. Nükleolusu hesaplamak için, ilk olarak P ile gösterilmiş aşağıdaki doğrusal programlama (DP) modelini düşünelim. Bu model, tüm koalisyonlar arasındaki en düşük fazlalık değeri olan ε'u maksimum seviyeye çıkarmayı amaçlamaktadır (Guajardo and Jörnsten, 2015).

$$(P) \qquad \max \varepsilon \tag{7}$$

$$\varepsilon + \textstyle\sum_{j \in S} x_j \leq c(S) \qquad \forall S \subset N, S \neq \emptyset \tag{8}$$

$$\sum_{j \in N} x_j = c(N) \tag{9}$$

$$\varepsilon \in \mathbb{R}, x_j \in \mathbb{R} \ \ \forall j \in N \tag{10}$$

Bu P doğrusal programlama modeli şu şekilde açıklanabilir: Eşitlik (7), karakteristik fonksiyonu gösterir ve minimum olan ε fazlalık değerini maksimize eder. Eşitlik (8), ε değerinin herhangi bir koalisyondaki fazlalık değerinden daha büyük olamayacağını gösterir. Yani, Eşitlik (7) ve (8) birlikte kullanıldığında ε'nin minimum fazlalık değeri olmasını sağlar. Eşitlik (9) tüm koalisyon değerlerinden elde edilen büyük koalisyon değerinin, $c(N)$, x tahsisine göre oyuncular arasında adil bir şekilde dağıtılmasını sağlayan verimlilik koşuludur. Eşitlik (10) DP modelinde kullanılan değişkenlerin yapısını gösterir. Elde edilen minimum fazlalık değerin maksimizasyonu sadece ilk fazlalık değeri için hesaplanır. Yani DP modeli olan P ikinci veya üçüncü fazlalığı hesaplamaz. Bu yüzden P, DP modeli yalnızca ilk dizi için kullanılır.

P'nin optimal karakteristik fonksiyonu olan ε_1'i tanımlayıp, bu sayede $k > 1$ olmak üzere her k. sıra için DP modelini aşağıdaki gibi formüle edebiliriz. (Guajardo and Jörnsten, 2015).

$$\max \varepsilon_k \tag{11}$$

$$\varepsilon_k + \sum_{j \in S} x_j \leq c(S) \qquad \forall S \subset N: S \notin \mathcal{F}_k \tag{12}$$

$$\varepsilon_i + \sum_{j \in S} x_j = c(S) \qquad \forall S \in \mathcal{F}_i, i \in \{1, \dots, k-1\} \tag{13}$$

$$\sum_{j \in N} x_j = c(N) \tag{14}$$

$$\varepsilon \in \mathbb{R}, x_j \in \mathbb{R} \ \forall j \in N \tag{15}$$

Burada *k.* DP modelinde; Eşitlik (11) karekteristik fonksiyonu, Eşitlik (12) ile birlikte *k.* minimum fazlalık değeri olan ε_k'nın maksimize olduğu gösterilir. Eşitlik (13), koalisyonların fazlalık değerlerinin kümesi olan F_i'deki değerlerin, *i.* DP'daki ε_i'ye eşit olması gerektiğini belirtir. Eşitlik (14) ve (15) sırasıyla verimlilik koşulunu ve değişkenlerin yapısını gösterir. F_i kümesi, Eşitlik (12) yani fazlalık kısıtlamasının *i.* DP'deki tüm çözümler için eşitlik işaretini sağladığı tüm koalisyonların kümesidir. Böylece, Eşitlik (13)'de de ifade edildiği gibi, $k > i$ olan tüm diziler için *k.* DP içerisindeki tüm F_i koalisyonların fazlalık değerleri, ε_i olarak düzeltilmelidir. $\mathcal{F}_k$ kümesi, kısaca, fazlalıkların dizideki önceki bir DP'ye sabitlendiği tüm koalisyonların birleşimidir, yani; $\mathcal{F}_k = \bigcup_{i<k} Fi$.

4. Deneysel Sonuçlar (Experimental Results)

Uygulanan örnekte bir seyahat şirketi havayolu ile Londra, Paris, Roma, Madrid, İstanbul, Lizbon ve Frankfurt şehirleri arasında bir tur düzenlemek istemektedir. Bu ulaşımda uçak yolculuğu kullanılacak ve şehirler için en uygun fiyatlar üç farklı uçuş firması tarafından sağlanmıştır. Firma bilgileri Tablo 1'de verilmektedir. Gidilecek tüm şehirler arasındaki uçak bilet fiyatları, mesafe matrisi olarak kabul edilmiş Tablo 2'de gösterilmektedir. Gidilecek olan şehirler arasında en kısa mesafenin ve en uygun rotanın hesaplanması gezgin satıcı problemi ile hesaplanmıştır.

Tablo 1. Şehirlere en uygun fiyatlı giden uçuş firmaları

Başlangıç	1.Londra
1. firma (1.oyuncu)	2.Paris
	3.Roma
2. firma (2.oyuncu)	4.Madrid
3. firma (3.oyuncu)	5.İstanbul
	6.Lizbon
	7.Frankfurt

Tablo 2. Şehirler arası uzaklık (maliyet) matrisi

	1	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**	**7**
1	0	200	400	300	120	150	600
2	160	0	340	380	130	240	160
3	140	120	0	260	360	140	120
4	100	80	60	0	200	100	240
5	200	400	200	300	0	800	1000
6	600	800	240	600	380	0	320
7	160	1000	200	400	160	140	0

Eşitlik (1)-(5) arasındaki doğrusal programlama modeli uygulanarak uygun rota elde edilmiştir. Ancak firmaların her birinin ayrı çalışması yerine aralarında koalisyonlar kurulması bu koalisyonun toplam maliyetini ve firmaları bu toplam maliyet içerisindeki bireysel maliyet paylarını düşürecektir. Bu çözüm, bağımsız olanlardan daha düşük bir maliyet getirisiyle işbirliğini kolaylaştıracaktır.

Kurulacak olan oyunu tanımlarken, AGSP'yi Eşitlik (1)-(5) ile her koalisyon ve o koalisyona ait olan şehirlerin alt ağları için ayrı çözmek gerekir. Bu sayede her koalisyona ilişkin minimum uzaklık (maliyet) ve elde edilen rota Tablo 3'te verilmektedir.

Tablo 3. S koalisyonları ve $c(s)$ maliyet değerleri

$\boldsymbol{S}$	$\boldsymbol{c(S)}$	***Rota***
$\boldsymbol{c(1)}$	680	1-2-3-1
$\boldsymbol{c(2)}$	400	1-4-1
$\boldsymbol{c(3)}$	830	1-6-7-5-1
$\boldsymbol{c(12)}$	640	1-4-3-2-1
$\boldsymbol{c(13)}$	1030	1-6-3-2-7-5-1
$\boldsymbol{c(23)}$	1000	1-5-4-6-7-1
$\boldsymbol{c(123)}$	1180	1-5-4-2-7-6-3-1

Elde edilen koalisyon değerleri ile Eşitlik (6)'da verilen formül uygulanarak her oyuncu (uçuş firması) için Shapley değeri hesaplanmıştır. Oyuncuların Shapley değerleri Tablo 4'te gösterilmektedir.

Tablo 4. Uçuş Firmalarının Shapley Değerleri

	$c(S)$	$\varphi(S)$
1. Oyuncu	680	360
2. Oyuncu	400	205
3. Oyuncu	830	615

Oyunun nükleolus değerlerinin hesaplanması için Eşitlik (7)-(15) arasındaki LP modeli çözülerek Tablo 5'deki sonuçlar elde edilmiştir.

Tablo 5. Uçuş Firmalarının Nükleolus Değerleri

	$c(S)$	$x(S)$
4. Oyuncu	680	283,3
5. Oyuncu	400	253,3
6. Oyuncu	830	643,3

5. Sonuç ve Tartışma (Result and Discussion)

Bu çalışmada gezgin satıcı probleminin bir uygulaması olan, tur rotası belirleme sorunu bir vaka çalışması ile ele alınmıştır. Sorunun amacı ülkeler arası seyahat eden bir gezginin en uygun rotayı minimum maliyetle elde etmesidir. Bunun için ilk olarak asimetrik gezgin satıcı problemi ile en uygun rotanın elde edilmesi için matematiksel modeller kullanılmıştır. Böylece maliyet en düşük seviyede tutulmuştur. Buna ek olarak gezginin uçuş sırasında kullandığı farklı firmalar arasındaki işbirliği durumlarının incelenmesi ve koalisyon oluşturulması sonucunda koalisyon maliyetleri hesaplanarak oyuncular arasında maliyetin tahsisi işbirlikçi oyun teorisi ile yapılmıştır. Maliyet tahsisi için Shapley değeri ve nükleolus yöntemleri kullanılmıştır. İlk olarak uygulanan Shapley değeri yöntemi sonucunda elde edilen değerler incelendiğinde firmaların koalisyon durumlarında, tek başlarına sahip oldukları maliyetten daha düşük maliyetlere sahip olduğu gözlemlenmiştir. Özetle her firma için Shapley değeri yöntemi sonucunda Tablo 6'da gösterildiği oranda maliyetlerinde azalma elde etmiştir.

Tablo 6. Oyuncuların (firmaların) Shapley Değerine Göre Maliyet Azalma Oranları

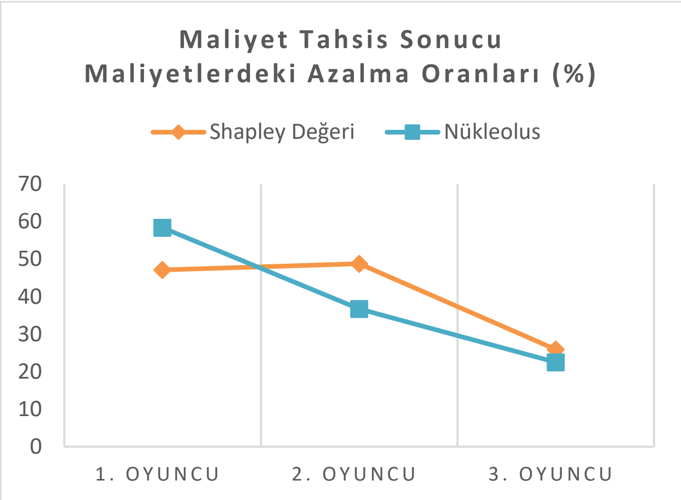
Oyuncular	İşbirliği Yapılmadan Önce Şirketlerin Maliyetleri	İşbirliği Sonrasında Şirketlerin Maliyetleri – Shapley Değeri	Maliyet Azalma Yüzdesi (%)
1.oyuncu	680	360	47,06
2.oyuncu	400	205	48,75
3.oyuncu	830	615	25,91

Shapley Değerinin ardından uygulanan nükleolus yöntemi ile elde edilen maliyet azalma oranları ise Tablo 7'de gösterildiği gibidir.

Tablo 7. Oyuncuların (firmaların) Nükleolus'a Göre Maliyet Azalma Oranları

Oyuncular	İşbirliği Yapılmadan Önce Şirketlerin Maliyetleri	İşbirliği Sonrasında Şirketlerin Maliyetleri - Nükleolus	Maliyet Azalma Yüzdesi (%)
1.oyuncu	680	283.3	58,34
2.oyuncu	400	253.3	36,68
3.oyuncu	830	643.3	22,5

İşbirliği kurulması ile elde edilen koalisyonlar sonucu her bir oyuncunun maliyeti iki farklı maliyet tahsis yöntemi kullanılarak hesaplanmıştır ve elde edilen veriler ile iki yöntemin sonuçları Şekil 1'de gösterildiği gibidir.



Şekil 1. Maliyet Tahsis Sonuçlarının Karşılaştırması

Tablo 6 ve 7 incelendiğinde işbirliği sayesinde her iki maliyet tahsis yönteminde de üç firma için de maliyetlerin iyi bir oranda azaldığı gözlemlenmektedir. Ancak Şekil 1 incelendiğinde bu iki yöntemin kıyaslaması yapıldığında 1. firma için maliyet azalma oranı Shapley değerinde daha az olmuş olsa da diğer iki oyuncuya bakıldığında nükleolus yöntemi ile elde edilen maliyet azalma oranları daha düşüktür. Bu nedenle genel bir kıyaslama sonucu Shapley değerinin maliyeti düşürmede faydası nükleolus yöntemine göre daha fazla olduğu ve oyuncuların memnuniyetinin daha yüksek olduğu sonucu elde edilmiştir.

Çıkar Çatışması (Conflict of Interest)

Yazarlar tarafından herhangi bir çıkar çatışması beyan edilmemiştir. No conflict of interest was declared by the authors.

Kaynaklar (References)

Ali, I.M., Essam, D., Kasmarik, K., 2020. A Novel Design of Differential Evolution for Solving Discrete Traveling Salesman Problems. Swarm and Evolutionary Computation, 52.

Bai, J., Jang, G.K., Chen, Y.W., Hu, L.S., Pan, C.C., 2013. A Model Induced Max-Min Ant Colony Optimization for Asymmetric Traveling Salesman Problem. Applied Soft Computing, 13, 1365–1375

Bakır, M.A., 2003. Tamsayılı Programlama Teori, Modeller ve Algoritmalar, Nobel Yayın Dağıtım, Ankara.

Baki, M.F., 2006. A New Asymmetric Pyramidally Solvable Class of the Traveling Salesman Problem. Operations Research Letters 34, 613–620.

Berger, S., Bierwirth, C., 2010. Solutions to the Request Reassignment Problem in Collaborative Carrier Networks. Transportation Research, Part E, 46 (5) 627–638.

Bläser, M., Ram, L.S., 2008. Approximately Fair Cost Allocation in Metric Traveling Salesman Games. Theory of Computing Systems, 43 (1) 19–37.

Branzei, R., Dimitrov, D., Tijs, S., 2005. Models in Cooperative Game Theory. Springer-Verlag Berlin Heidelberg, 556, VIII, 135.
Caprara, A., Letchford, A.N., 2010. New Techniques for Cost Sharing in Combinatorial Optimization Games. Mathematical Programming, 124 (1–2) 93–118.
Ceran, Y., Alagöz, A., 2007. Lojistik Maliyet Yönetimi: Lojistik Maliyetler Ve Lojistik Maliyet Muhasebesi. Yönetim Bilimleri Dergisi (*Journal of Administrative Sciences*), 5 (2).
Derks, J., Kuipers, J., 1997. On the Core of Routing Games. International Journal of Game Theory, 26 (2) 193–205.
Dror, M., 1990. Cost allocation: The Traveling Salesman, Binpacking, and the Knapsack. Applied Mathematics and Computation, 35 (2) 191–207.
Engevall, S., Göthe-Lundgren, M., Värbrand, P., 2004. The Heterogeneous Vehicle Routing Game. Transportation Science, 38 (1) 71–85.
Estévez-Fernández, A., Borm, P., Meertens, M., Reijnierse, H., 2009. On the Core of Routing Games With Revenues. International Journal of Game Theory, 38 (2) 291–304.
Faigle, U., Fekete, S.P., Hochstättler, W., Kern, W., 1998. On Approximately Fair Cost Allocation in Euclidean TSP Games. OR Spektrum, 20 (1) 29–37.
Fishburn, P., Pollak, H., 1983. Fixed-Route Cost Allocation. American Mathematical Monthly, 90 (6) 366–378.
Guajardo, M., Jörnsten, K., 2015. Common Mistakes in Computing the Nucleolus. European Journal of Operational Research, 241, 931–935.
Guajardo, M., Rönnkvist, M., 2016. A Review on Cost Allocation Methods in Collaborative Transportation. International Transactions in Operational Research, 23 (3), 371-392.
Ha, K.M., Deville, Y., Pham, Q.D., Ha, M.H., 2018. On the Min-Cost Traveling Salesman Problem with Drone. Transportation Research, Part C, 86, 597–621.
Hausken, K., Mohr, M., 2001. The Value of a Player in n-Person Games. Social Choice and Welfare, 18 (3), 465-483.
Kendal, G., Li, J., 2013. Competitive Gravelling Salesmen Problem: A Hyper-Heuristic Approach. Journal of the Operational Research Society, 64 (2), 208-216.
Kimms, A., Kozeletskyi, I., 2016a. Core Based Cost Allocation in the Cooperative Traveling Salesman Problem. European Journal of Operational Research, 248(3), 910–916.
Kimms, A., Kozeletskyi, I., 2016b. Shapley Value Based Cost Allocation in the Cooperative Traveling Salesman Problem Under Rolling Horizon Planning. Working paper. University of Duisburg-Essen.
Laporte, G., 1992. The Traveling Salesman Problem: An Overview of Exact and Approximate Algorithms. European Journal of Operational Research, 59 (2) 231–247.
Marinakis Y., Migdalas A., Pardalos P.M., 2008. Cost Allocation in Combinatorial Optimization Games. In: Chinchuluun A., Pardalos P.M., Migdalas A., Pitsoulis L. (eds) Pareto Optimality, Game Theory And Equilibria. Springer Optimization and Its Applications, 17. Springer, New York, NY.
Nowak, A. S., & Radzik, T., 1994. The Shapley Value for n-Person Games in Generalized Characteristic Function Form. Games and Economic Behavior, 6(1), 150–161.
Platz, T. T., 2019. On the Submodularity of Multi-Depot Traveling Salesman Games. Discrete Applied Mathematics, *255*, 75-8.
Potters, J.A., Curiel, I.J., Tijs, S.H., 1992. Traveling Salesman Games. Mathematical Programming, 53 (1–3) 199–211.
Quant, M., Borm, P., Reijnierse, H., 2006. Congestion Network Problems And Related Games. European Journal of Operational Research, 172 (3) 919–930.
Rodriguez, A., Ruiz, R., 2012. The Effect of the Asymmetry of Road Transportation Networks on the Traveling Salesman Problem. Computers & Operations Research, 39 (7), 1566-1576.
Shapley, L.S., 1953. A Value for n-PersonGames. Contributions to the Theory of Games, II (Annals of Mathematics Studies 28), H. W. Kuhn and A. W. Tucker (eds.), Princeton University Press, Princeton, 307-17.
Sun, L., Rangarajan, A., Karwan, M.H., Pinto, J.M., 2015. Transportation Cost Allocation on a Fixed Route. Computers & Industrial Engineering, 83, 61–73.
Tamir, A., 1989. On the Core of a Traveling Salesman Cost Allocation Game. Operations Research Letters, 8 (1), 31–34.
Thomson, W., Roth, A. E., 1991. The Shapley Value: Essays in Honor of Lloyd S. Shapley. Economica, 58(229), 123.
Tijs, S., 2003. Introduction to Game Theory, Hindustan Book Agency.
Toriello, A., Haskell, W.B., Poremba, M., 2014. A Dynamic Traveling Salesman Problem with Stochastic Arc Costs. Operation Research, 62 (5), 1107-1125.
Toriello, A., Uhan, N.A., 2013. Technical Note: On Traveling Salesman Games with Asymmetric Costs. Operations Research, 61 (6), 1429–1434.
Veenstra, M., Roodbergen, K.J., Vis, I.F.A., Coelho, L.C., 2017. The Pickup and Delivery Traveling Salesman Problem with Handling Costs. European Journal of Operational Research, 257, 118–132.
Yengin, D., 2012. Characterizing the Shapley Value in Fixed-Route Traveling Salesman Problems with Appointments. International Journal of Game Theory 41 (2), 271–299.