



Effect of singular value decomposition based preconditioning on compressive classification

Özgür Devrim Orman¹ , Derya Yılmaz^{2*} 

¹Department of Electrical and Electronics Engineering, Institute of Science and Engineering, Başkent University, 06790, Ankara, Turkey

²Department of Electrical and Electronics Engineering, Faculty of Engineering, Gazi University, 06570, Ankara, Turkey

Highlights:

- Analytical proof of singular value decomposition-based preconditioning in compressive sensing.
- Monte Carlo simulations for singular value decomposition-based preconditioning.
- Classifier performances using the singular value decomposition-based preconditioning in compressive classification.

Keywords:

- Preconditioning
- Singular value decomposition
- Compressive sampling
- Compressive classification
- Wieland inequality

Article Info:

Research Article
Received: 11.12.2020
Accepted: 19.11.2021

DOI:

10.17341/gazimmfd.839206

Correspondence:

Author: Derya Yılmaz
e-mail:
deryayilmaz@gazi.edu.tr
phone: +90 312 582 3319

Graphical/Tabular Abstract

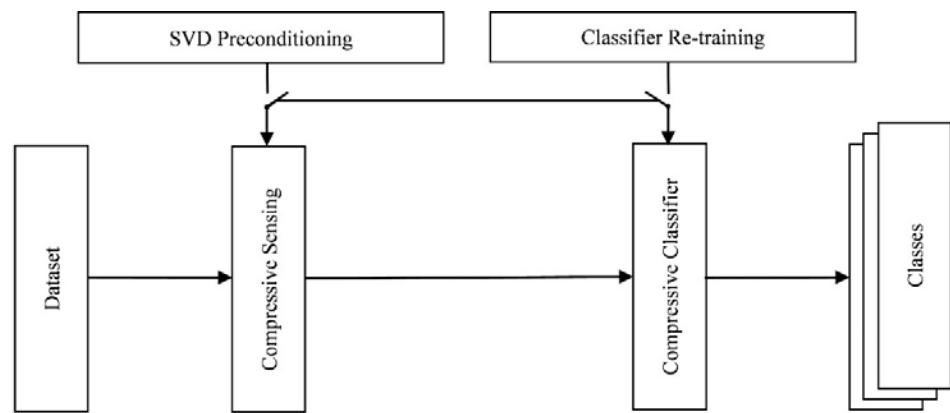


Figure A. Block diagram of the proposed approach

Purpose: The aims of this work are; providing analytical proof of Singular Value Decomposition based-preconditioning (SVD-PC) of observation matrix with two supportive Monte Carlo (MC) simulations and experimentally evaluating the effects of this preconditioning on Compressive Classification (CC) by using K-Nearest Neighbours (KNN), Random Forest (RF), and Support Vector Machine (SVM) classifiers on MNIST and WARD datasets.

Theory and Methods:

Analytically shown via the Wieland inequality that SVD-PC increases reconstruction performance in Compressive Sensing (CS) by decreasing the coherence of the observation matrix. This result is also supported by developed two MC simulations showing the change in the coherence and the change in the restricted isometry property coefficient under SVD-PC and different compression ratio constraints. The effect of SVD-PC on CC assessed via implemented classification studies on two different data sets with different well-known classifiers, and calculated precision and recall values of the classification experiments presented in the text.

Results:

It is analytically shown that SVD-PC of the observation matrix in CS improves reconstruction performance. However, in the experimental evaluation of the effects of SVD based preconditioning on CC; RF gives the most stable gain in classification performance for all compression ratios, in contrary to that observed performance change for the other classifiers varies from positive to negative without any tractable pattern.

Conclusion:

The proof of SVD-PC of the observation matrix in CS, which is a novel work in the field, is generated. Despite the mentioned positive effect of the SVD preconditioning in reconstruction available in the literature, the outcome of SVD-PC on CC varies according to our observations, and it depends on the compression ratio and classifier in use. Thus, we can state that re-evaluation of the classifier selection or retraining of the classifier should be taken into account for CC in case of the SVD-PC is in use.



Tekil değer ayrışımına dayalı ön koşullamanın sıkıştırılmalı sınıflamaya etkisi

Özgür Devrim Orman¹ , Derya Yılmaz^{2*} 

¹Başkent Üniversitesi, Fen Bilimleri Enstitüsü, Elektrik-Elektronik Mühendisliği Ana Bilim Dalı, 06790, Ankara, Türkiye

²Gazi Üniversitesi, Mühendislik Fakültesi, Elektrik-Elektronik Mühendisliği Bölümü, 06570, Ankara, Türkiye

Ö N E Ç I K A N L A R

- Tekil değer ayrışımına dayalı ön koşullama ile sıkıştırılmalı örnekleme matematiksel ispatı
- Tekil değer ayrışımı ile yapılan ön koşullamanın Monte-Carlo benzetimleri
- Sıkıştırılmış sınıflamada tekil değer ayrışımına dayalı ön koşullama kullanımında sınıflayıcı performansları

Makale Bilgileri

Araştırma Makalesi

Geliş: 11.12.2020

Kabul: 19.11.2021

DOI:

10.17341/gazimmfd.839206

Anahtar Kelimeler:

Ön koşullama,
tekil değer ayrışımı,
sıkıştırılmalı örnekleme,
sıkıştırılmalı sınıflama,
wielandt eşitsizliği

ÖZ

Dünyada depolanmakta ve işlenmekte olan veri miktarının hızla artması nedeniyle, veri saklama ve veriden bilgi üretimi alanlarında yenilikçi çözümlere her geçen gün daha fazla gereksinim duyulmaktadır; Sıkıştırılmalı Örnekleme (SÖ) ve Sıkıştırılmalı Sınıflama (SS) sırasıyla her iki alan için çözüm sunan iki yaklaşımdır. Veriden sınıflama yoluyla bilgi edinilmesinde SS kullanımı, sınıflamanın doğrudan SÖ ile elde edilen ölçüm uzayında gerçekleştirilebilmesini sağladığı için işlem yükünü düşürür. SÖ, Shannon örnekleme teoreminde gerek duyulan miktardan daha az sayıda örnekle kayıpsız bir geri çatum yüksek olasılıkla mümkün kılmakta olup, kullanılan ölçüm matrisine Ön koşullama (ÖK) uygulanmasıyla geri çatum için gerekli örnek sayısı, dolayısıyla saklanması gereken veri miktarı daha da azaltılabilmektedir. SÖ'de ölçüm matrisi olarak, ölçüm matrisinden Tekil Değer Ayrışımı (TDA) ile türetilen matrisin kullanımının geri çatum başarımına katkısı literatürde salt deneysel olarak incelenmiştir. Bu çalışmada, literatürde bir ilk olarak, TDA'ya dayalı söz konusu yaklaşımın bir ÖK olduğu (TDA-ÖK) ve SÖ'de geri çatum için gerekli örnek sayısını düşüreceği analitik olarak gösterilmiş olup, bu bulguya ilişkin iki farklı Monte Carlo (MC) benzetimi gerçekleştirilmiştir. Benzetimlerle desteklenen TDA-ÖK başarımı deneysel olarak da iki farklı veri kümesi üzerinde ve üç farklı sınıflayıcı kullanılarak gerçekleştirilen SS uygulamaları ile değerlendirilerek, TDA-ÖK kullanımının SS başarımına etkisi yine literatürde ilk defa bu çalışmada incelenmiştir.

Effect of singular value decomposition based preconditioning on compressive classification

H I G H L I G H T S

- Analytical proof of singular value decomposition-based preconditioning in compressive sensing
- Monte-Carlo simulations for singular value decomposition-based preconditioning
- Classifier performances using the singular value decomposition-based preconditioning in compressive classification

Article Info

Research Article

Received: 11.12.2020

Accepted: 19.11.2021

DOI:

10.17341/gazimmfd.839206

Keywords:

Preconditioning,
singular value
decomposition,
compressive sampling,
compressive classification,
wielandt inequality.

ABSTRACT

Due to the rapid increase in the amount of data being stored and processed in the world, innovative solutions in the fields of data storage and data processing are increasingly needed; Compressive Sampling (CS) and Compressive Classification (CC) are two approaches that provide solutions for both areas, respectively. The use of CC to obtain information from the data through classification reduces the processing load as it enables the classification to be performed directly in the measurement domain obtained by CS. CS makes possible a lossless reconstruction with a high probability of less samples than the amount required by the Shannon sampling theorem, and by applying Preconditioning (PC) to the measurement matrix used, the amount of data required for reconstruction can be further reduced due to the number of samples required for reconstruction. The contribution of the use of the matrix derived from the measurement matrix by Singular Value Decomposition (SVD) as the measurement matrix in the CS, on the reconstruction performance has been studied only experimentally in the literature. In this study, as a first, it has been shown analytically that this approach based on SVD is a PC (SVD-PC) and will reduce the number of samples required for reconstruction in CS, meanwhile two different Monte Carlo (MC) simulations were carried out regarding to this finding. The SVD-PC performance supported by simulations is evaluated experimentally with SS applications performed on two different data sets and using three different classifiers, moreover the effect of SVD-PC on CC performance is investigated for the first time in the literature in this study.

1. GİRİŞ (INTRODUCTION)

Dünya kadar sadece sayısallaştırılmış konuşma, metin ya da kısıtlı veri gönderimi yapan mobil telefonun; konuşma, görüntü, video, konum, ivme, eğim gibi pek çok veriyi ileten akıllı telefona dönüşmesinde olduğu gibi günlük hayat pratiklerinin her geçen gün daha fazla sayısal veri üretir hale gelmesi [1], nesnelerin internetinin son kullanıcı ve endüstri uygulamalarının yaygınlaşması [2], eğitim ve iş yazılımlarının veri odaklı yapıya geçmesi [3] gibi gelişmeler neticesinde dünyada işlenmekte ve depolanmakta olan veri miktarı her geçen gün daha da yüksek hızla artmaktadır. International Data Corporation'un (IDC) hazırladığı rapora göre [4] 2018 yılında 33 zetabyte (ZB) olan küresel veri miktarının 2025 yılında 175 ZB olması beklenmektedir. Bu öngörüye, bireylerin uzaktan çalışma, uzaktan eğitim gibi daha da çok veri üretecekleri tercihlere yönelmeleriyle veri üretim hızında meydana gelecek artışı da ilave etmek mümkündür. Arşivlenecek büyük miktardaki verinin saklanması ve veriden bilgiye dönüşümde Sıkıştırılabilir Örneklem (SÖ) ve Sıkıştırılabilir Sınıflama (SS) maliyet azaltıcı iki önemli araç olarak karşımıza çıkmaktadır. SÖ, işareti yüksek frekansla örnekleyip elde edilen çok sayıda örneği sıkıştırmak yerine işaretin örneklem frekansını düşürecek şekilde doğrudan sıkıştırılmış formda elde edilebilmesini sağlarken; SS sınıflama işlemini, geri çatımı yapılmaksızın, doğrudan seyrek veriyi kullanarak gerçekleştirir.

Veriden bilgi üretimi için kullanılan sınıflama uygulamalarında SÖ yaklaşımının kullanılması, sınıflandırıcı girdisi olan nitelik vektörlerinin boyutunu küçülteceğinden, sınıflama işlem yükü ve süresinde önemli ölçüde kazanç sağlar. Literatürde SS olarak adlandırılan bu yöntemde, sınıflamanın doğrudan giriş işareti üzerinde değil de daha düşük boyutlu ölçüm uzayında yapılması ve SÖ ile boyut düşümünün işaretin niteliklerinden bağımsız olması önemli üstünlüklerdir. SS'nin gerçekleştirilebilmesi için düşük boyutlu ölçüm uzayında öğrenmenin mümkün olması gerekir. Calderbank'ın yer aldığı çalışmalarda, sıkıştırılabilir öğrenmeyle doğrudan sıkıştırılmış alanda öğrenmenin mümkün olduğu gösterilmiş [5], ölçüm matrisinin ölçüm uzayında Destek Vektör Makineleri (DVM) ile yapılacak yaklaşık en iyi sınıflamayı garanti edebilmesi için sağlaması gereken koşullar formüle edilmiş [6], Gauss katışım modellerin SS'sinde hatalı sınıflama olasılığının üst limiti ortaya konmuştur [7]. Davenport vd. [8] çalışmalarında yüksek işaret gürültü oranı bölgesinde çok az ölçümle dahi farklı sınıfların ayrıştırılabileceğini belirtmiş, Wimalajeewa vd. [9] de seyrek işaretlerin az sayıda sıkıştırılabilir ölçümle herhangi bir sınıflama yöntemi kullanılarak güvenli şekilde sınıflanabileceğini ortaya koymuştur.

Shannon örneklem teoremine göre [10] sınırlı frekans bantlı bir işaretin kayıpsız geri çatımı için işaretin içerdiği en yüksek frekans bileşeninin iki katı frekansta örneklenmesi gerekir. Yüksek frekans bileşeni barındıran işaretlerin Shannon'un teoremine göre kayıpsız olarak geri çatılacak

biçimde örneklenmesi için kullanılması gereken örneklem frekansı, teknik olarak gerçekleşmesi mümkün olmayacak kadar büyük olabilmektedir. SÖ, seyrek ya da sıkıştırılabilir işaretler için salt frekans izdüşümüne dayalı olmayan bir örnek sayısı belirlenimiyle, Shannon örneklem teoreminin gerektirdiğinden daha az sayıda örnekle kayıpsız bir geri çatımı mümkün kılmaktadır [11]. SÖ'nün gelişiminde temel olarak Candes vd. [12], Donoho [13] ve Brannik'un [14] çalışmaları öne çıkmaktadır; söz konusu çalışmalar seyrek ya da sıkıştırılabilir gösterimi mümkün sınırlı boyutlu işaretlerin doğrusal ve uyarlanımsız az sayıdaki ölçümden geri çatılabileceğini göstermiştir [11]. SÖ, başlangıcı yüz yıldan daha eski olan Seyrek Gösterimin (SG) bir alt koludur; SG'ye ilişkin ilk örneğe Schmidt'in [15] 1907 tarihli makalesinde rastlanır [16]. SG uygulamada sinyal işleme, görüntü işleme, makine öğrenmesi vb. alanlarda yaygın olarak kullanılmaktadır. SG'de mevcut geri çatım metodları arasında açgözlü algoritmalar uygulama kolaylıkları yanında geri çatımda diğer yöntemlere yakın başarımlarından dolayı önem arz etmektedir, bu algoritmalara örnek olarak Dik Eşleme Arayış (DEA) algoritması verilebilir [17, 18]. DEA'nın başarımı için ölçüm sözlüğünün uyumunun düşük olması kritik önemdedir, uyum yüksek olduğunda DEA algoritması doğru bileşenleri seçmede başarısız olabilir [19]. Schnass ve Vandergheynst'in [20] 2008 yılında yayınlanmış çalışmalarında daha önce literatürde kullanılmamış olan sezme sözlükleri kavramı tanıtılmakta, birisi DEA olmak üzere iki açgözlü algoritmanın karmaşıklıklarını arttırmadan seyrek işaret gösterimlerini bulma başarımlarını yükselten ve sözlük ön koşullaması olarak tabir edilen yöntem sunulmaktadır. Ön koşullama (ÖK), SÖ literatüründe ilk defa Tsiliagianni ve arkadaşlarının [21] çalışmasıyla yer almıştır, aynı çalışmada gösterilmiştir ki ikili rasgele matrisler kullanıldığında ÖK, aktarım donanımının etkinliğini büyük ölçüde iyileştirmektedir. Chen ve Peng [22] 2018 yılındaki çalışmalarında DEA'nın rastgele ve gürültülü ölçümlerden geri çatım başarımını, ispatlanmış yüksek bir olasılıkla arttıracak bir ÖK metodu önermiştir.

SÖ'de işlem yükünü arttırmadan geri çatımda gerekli örnek sayısında düşüş sağlayan ÖK yaklaşımı, SÖ'nün kullanımını içeren SS uygulamalarında da önemli bir konu haline gelmektedir. Bu çalışmada, SÖ için Tekil Değer Ayrışımı'na (TDA) dayalı bir ÖK (TDA-ÖK) tanımlanmaktadır. Ölçüm matrisinin TDA ile türetilmiş olmasının DEA'ya katkısı Zhang tarafından deneysel olarak incelenmiş olmakla birlikte [23], deneysel bulgular analitik bir temele dayandırılmamıştır. Bu nedenle bu çalışmada literatürde bir ilk olarak, SÖ'de ölçüm matrisinin TDA ile türetildiği yaklaşım bir ÖK olarak belirlenip TDA-ÖK olarak tanımlanmıştır, TDA-ÖK yaklaşımının geri çatım için gerekli örnek sayısını azaltacağı yine çalışmamızın literatüre getirdiği yenilikle teorik olarak ispatlanmış ve bu bulgu iki farklı Monte Carlo (MC) benzetimi ile elde edilen sonuçlarla desteklenmiştir. TDA-ÖK'nin SS'nin başarımına etkisi de yine literatürde daha önce mevcut olmayıp ilk defa bu çalışmada iki farklı veri seti (MNIST ve WARD) üzerinde;

Rasgele Orman (RO), En Yakın K-Komşuluk (EYKK) ve DVM olmak üzere üç farklı sınıflama algoritması kullanılarak deneysel olarak incelenmiştir. Metnin devamında sırasıyla SÖ, ÖK, TDA-ÖK ve SS'nin temelleri anlatılmakta, TDA-ÖK'nin SÖ'de geri çatım başarımını iyileştirdiğinin analitik gösterimi yapılmakta, iki farklı MC benzetiminin sonuçları sunulmakta ve TDA-ÖK'nin SS'ye etkisine ilişkin deneysel bulgular paylaşılmaktadır.

2. SÖ, ÖK, TDA-ÖK VE SS'NİN TEMELLERİ (FUNDAMENTALS OF CS, PC, SVD-PC AND CC)

Bu bölümde SG'den yola çıkarak, SÖ, ÖK, TDA-ÖK ve SS'nin temelleri sunulmaktadır. Doğadaki pek çok yerde olduğu gibi insan görsel korteksinin davranışında da gözlemlediğimiz seyreklik büyük ve karmaşık veri kümelerinin etkin bir şekilde işlenmesini mümkün kılabilir [24]. Sinyal işlemedeki pek çok uygulamada (gürültü giderme, sıkıştırma, örüntü sınıflama gibi) seyreklik performans artışı sağlamaktadır [25]. SG'nin bir alt kolu olan SÖ'de de seyreklikten yararlanılarak işaretler, Shannon örnekleme teoreminin gerektirdiğinden çok daha düşük frekansla örneklenip, işaret uzunluğundan çok daha az sayıda ölçümden geri kazanılabilmektedir. SG'nin ve bağlı olan SÖ'nün çıkış noktası Eş. 1'de gösterilen eksik belirtilmiş doğrusal sistem kavramıdır.

$$b = Fx, x \in \mathbb{R}^N, b \in \mathbb{R}^m, F \in \mathbb{R}^{m \times N}, m < N \quad (1)$$

Elimizdeki bilinmeyen sayısı denklem sayısından daha çok olduğu için Eş. 1'in ya çözümü yoktur ya da sonsuz sayıda çözümü mevcuttur. Çözüm olmama durumunu elimine etmek için F matrisinin tam mertebeden olduğunu varsayarsak, seyreklik mertebesi m'den çok daha düşük olan x işaretinin eldesi için Eş. 2'deki en iyileme probleminin çözülmesi gerekir.

$$\text{en küçük } \|x\|_0, \text{ öyle ki } b = Fx \quad (2)$$

Eş. 2'deki denklemin çözümü 0 normu için NP-zor olduğundan, bu karmaşıklıktan kurtulmak için problemin doğrusal programlamayla çözülmesine olanak sağlayan 1 normuna göre eniyilemeyi tercih etmek mümkündür [26]. Geri çatma için içbükey eniyileme yaklaşımı kullanılabilirle birlikte bunun getirdiği işlem yükü göz önüne alındığında Eşleme Arayış [27] veya DEA [17] gibi ağgözlü algoritmalar uygulamada tercih edilebilmektedir. F matrisinin birim normda bağdaşmaz sıkı bir çerçeve olması durumunda her iki aç gözlü algoritmanın da başarımları güvencededir [28]. Bir matrisin bağdaşmazlık derecesi matrisin kolonları arasındaki uyumun azlığıdır, söz konusu uyumun hesabı kolonlarını f_j ile gösterdiğimiz kolon normalleştirilmiş F matrisi için Eş. 3'teki gibidir.

$$u(F) = \text{en büyük}_{1 \leq j \leq k \leq N} \frac{|(f_j, f_k)|}{\|f_j\|_2 \|f_k\|_2} \quad (3)$$

SÖ'de seyrek işaretlerin sıkıştırma ve edinimi birlikte gerçekleşmektedir. İşaret seyrek olmadığı halde, bir D

dönüşümüyle seyrekleştirilebilirse, ölçüm matrisi F ve dönüşüm matrisi D bağdaşmaz ya da az ilintili olduğu takdirde, SÖ, D dönüşümü neticesinde elde edilen seyrek işarete uygulanabilmektedir. Bu durumda SÖ'nün ifadesi Eş. 4'te verildiği gibi olur.

$$b = Fx = FDC \quad (4)$$

x'in kayıpsız olarak geri çatılabilmesi için F matrisinin Eş. 5'te gösterilen Kısıtlı Eş Ölçüm Özelliği'ni (KEÖÖ) sağlaması gerekir.

$$\forall x \in S_k, o_k \in (0,1) \quad (5)$$

$$(1 - o_k) \|x\|^2 \leq \|F \cdot x\|^2 \leq (1 + o_k) \|x\|^2$$

KEÖÖ'yü 2k mertebesinde sağlayan bir F matrisi, herhangi k-seyrek vektör çifti arasındaki uzaklığı korumaktadır.

o_k 'nin hesabı F matrisinin en büyük ve en küçük k seyrek tekil değerleri göz önüne alınarak Eş. 6'daki gibi hesaplanır [29].

$$o_k = \text{en büyük} \{1 - s_{\text{enk}}^k, s_{\text{enb}}^k - 1\} \quad (6)$$

G, k sütununu indeks kümesi olmak üzere $s_{\text{enk}}^k = \text{en küçük}_{G: |G| \leq k} (s_{\text{enk}}(F_G^T F_G))$ ve $s_{\text{enb}}^k = \text{en büyük}_{G: |G| \leq k} (s_{\text{enb}}(F_G^T F_G))$ 'dir.

Kayıpsız geri çatım için önemli bir kriter olan k-seyreklik değeriyle Eş. 3'de tanımladığımız uyum arasında Eş. 7'de tanımlandığı gibi bir bağıntı mevcuttur [11], söz konusu bağıntının bulunuşu Stankovic'in çalışmasında [30] ayrıntılı olarak yer almaktadır.

$$k < \frac{1}{2} \left(1 + \frac{1}{u(F)}\right) \quad (7)$$

Gösterilebilir ki bir matrisin uyumu daima $\left[\sqrt{\frac{N-m}{m(N-1)}}, 1\right]$ aralığında kalmaktadır, buradan hareketle benzersizliği sağlayan k-seyreklik değeri için bir üst sınır öngörülebilir; $k = O(\sqrt{m})$ [11].

Eş. 7'de sunduğumuz bağıntıyı göz önüne aldığımızda F matrisinin uyumunu düşürdüğümüz takdirde kayıpsız geri çatım üst sınırını daha yukarıya çekmek mümkündür. Kayıpsız geri çatım yetkinliğindeki olan bir F matrisinin uyumunu daha da düşürmek için izlenebilecek bir yaklaşım, söz konusu F matrisinin belirli bir G matrisiyle soldan çarpılarak ön koşullanmasıdır [31]. ÖK yaklaşımını, incelemekte olduğumuz eksik belirtilmiş doğrusal sistem üzerinde ilerletecek olursak, Eş. 8 elde edilir.

$$Gb = GFx \Rightarrow w = GFx \Rightarrow w = Gb \quad (8)$$

G matrisi tersinir olduğu takdirde Eş. 8 ve Eş. 1'deki ifadeler eşittir. Böylelikle Eş. 2'deki eniyileme problemini Eş. 9'daki gibi güncellemek mümkün olur, Eş. 9'un çözümü aynı zamanda Eş. 2'nin de çözümüdür [21].

$$\text{en küçük } \|x\|_0, \text{ öyle ki } w = GFx \quad (9)$$

Chen ve Peng'in [31] çalışmasında teorik olarak gösterilmiştir ki, $G = (FF^T)^{-\frac{1}{2}}$ olarak tanımlı bir G matrisiyle ön koşullanmış F matrisinin uyumu salt F matrisinin uyumundan daha küçüktür.

Geri çatım başarımı öngörölmüş bir $F \in R^{m \times N}$ matrisinin TDA'sı Eş. 10'da verilmiştir.

$$F = USV^T \quad (10)$$

TDA'nın tanımı gereği I birim matrisi göstermek üzere, $UU^T = I_{m \times m}$ ve $VV^T = I_{N \times N}$ dir [32].

Yine TDA'nın tanımı gereği kare olmayan bir F matrisi için S matrisi Eş. 11'de gösterildiği gibidir.

$$S = [S_1 \ 0], S_1 \in R^{m \times m} \quad (11)$$

Kare olmayan F matrisi için V matrisi de Eş. 12'de gösterildiği gibi ifade edilebilir.

$$V = [V_1 \ V_2], V_1 \in R^{N \times m}, V_2 \in R^{N \times (N-m)} \quad (12)$$

Eş. 11 ve Eş. 12'yi kullanarak Eş. 10, Eş. 13'de gösterildiği gibi yeniden düzenlenebilir.

$$F = US_1 V_1^T \quad (13)$$

Eş. 13'deki gösterimi Eş. 1'de kullandığımızda, eksik belirtilmiş doğrusal denklem sistemi Eş. 14'deki hali alır.

$$b = US_1 V_1^T x \quad (14)$$

Eş. 14'deki eşitliğin her iki tarafını soldan $(US_1)^{-1}$ ile çarptığımızda Eş. 15'de gösterilen duruma gelir.

$$(US_1)^{-1} b = V_1^T x \quad (15)$$

$(US_1)^{-1} b$ 'yi b_{TDA} ve V_1^T 'yi F_{TDA} olarak tanımladığımızda Eş. 15'deki eşitlik Eş. 16'daki eşitliğe dönüşür [23].

$$b_{TDA} = F_{TDA} x \quad (16)$$

Zhang [23], açgözlü algoritmalarla geri çatımda F_{TDA} 'nın F 'ye göre daha başarılı olduğunu deneysel olarak göstermekle birlikte söz konusu bulgunun genellemesini sağlayacak bir ispat sunmamaktadır.

Sınıflama başarımından ödün vermeden veri setinin boyutunu düşürerek sınıflamayı gerçekleştirmek, sınıflamada ortaya çıkacak işlem yükünü azaltmak açısından çok etkilidir. Doğrusal ayrışım analizi ve temel bileşen analizi verinin boyutunu düşürmek için sıklıkla kullanılan iki yaklaşım olup her ikisinde de boyut düşümü için öncelikle eldeki mevcut verinin işlenmesi gerekmektedir, öte yandan eğer veri seti güncellenecek olursa her iki algoritma için de söz konusu veri işleminin yinelenmesi gerekmektedir. SÖ'nün eldeki veriden bağımsız boyut düşümü sağladığını göz önüne aldığımızda, sınıflamada kullanılan boyut

düşümü yöntemlerine bir alternatif teşkil edebilmesi için, ölçüm uzayındaki sınıflama hatasının işaret uzayında yapılan sınıflamadaki hata miktarına nazaran, kabul edilebilir miktarda olması yeterlidir. Calderbank'ın [6] çalışmasında gösterilmiştir ki, işaret uzayının boyutu N çok büyük olduğu takdirde, SÖ kullanarak boyutta gerçekleştirilecek $O(k \cdot \log N)$ kadarlık bir azaltım, sınıflayıcının başarımına sadece $O(\sqrt{e})$ kadar hata eklemektedir. Yine aynı çalışmaya göre SS'de işaretleri geri çatmayı değil de sınıflamayı amaçladığımızdan Eş. 4'te yer alan FD çarpımını, hatta D matrisini bilmemize gerek olmadan F matrisiyle ölçüm yapılabilir.

3. TDA-ÖK'NİN TEORİK İSPATI VE DESTEKLEYİCİ BENZETİMLER (THEORETICAL PROOF OF SVD-PC AND SUPPORTIVE SIMULATIONS)

Bu çalışmada, SÖ'de açgözlü algoritmalar kullanılarak geri çatımda F_{TDA} 'nın F 'ye göre daha başarılı olduğunun teorik ispatı için TDA yaklaşımı bir ÖK olarak ele alınmakta, daha önce Chen ve Peng'in [31] Gauss ve Bernoulli rasgele matrisleri için yapmış oldukları ispattan yararlanılarak söz konusu matris tiplerinde TDA yaklaşımının bağdaşmazlık derecesini artıracağı gösterilmektedir.

$G = (FF^T)^{-\frac{1}{2}}$ olan bir ÖK matrisi seçildiği takdirde $(GF)(GF)^T = I_{m \times m}$ bulunduğundan, m adet ortonormal satır içeren GF matrisinin uyumu F matrisinin uyumundan daha düşük olabilir [31]. İspata geçmeden önce Eş. 13'deki gösterime dair iki hususun belirtilmesi gerekir; ilki $S_1 =$ köşegen $\{s_1 \geq s_2 \geq \dots \geq s_m \geq 0\}$ olduğu, ikincisi de V_1 matrisinin k . satırının $v_k^{(1)}$ olarak gösterileceğidir, bu bağlamda Eş. 13'deki gösterimi göz önüne aldığımızda F matrisinin k . sütunu a_k Eş. 17'deki gibi bulunabilir.

$$a_k = US_1 v_k^{(1)T} \quad (17)$$

Ölçüm matrisi boyut özelliklerinde ve gösterilmiş pozitif sınırlı tekil değerlere sahip Gauss ve Bernoulli matrisleri için Eş. 18 - Eş. 22'de tanımlı O_1 , O_2 ve O_3 olayları göz önüne alındığında, ayrı ayrı O_2 ve O_3 olaylarının O_1 ile birlikte gerçekleşme olasılıkları karşılaştırılarak (O_i^c i olayının tümleyenini belirtir) ÖK'nin uyumu düşürücü etkisi ortaya konabilir.

$$O_1 = \{(1-t)\|v\|_2^2 \leq \|Fv\|_2^2 \leq (1+t)\|v\|_2^2, \exists t \in (0,1)\} \quad (18)$$

$$O_2 = \{u(F) \leq e, e \in (0,1)\} \quad (19)$$

$$O_3 = \{u(GF) \leq e, e \in (0,1)\} \quad (20)$$

$$P\{O_1 \cap O_2\} = P\{O_1\} - P\{O_1 \cap O_2^c\} \quad (21)$$

$$P\{O_1 \cap O_3\} = P\{O_1\} - P\{O_1 \cap O_3^c\} \quad (22)$$

a_k ve a_1 F matrisinin farklı iki sütunu olmak üzere $\langle a_k, a_1 \rangle$ Eş. 23'de gösterildiği gibi bulunur [31]. Eş. 3'deki $u(F)$ tanımını göz önüne aldığımızda, $\langle a_k, a_1 \rangle_{k \neq 1}$ 'nin belirlenecek üst sınırı $u(F)$ 'nin de üst sınırı olacaktır.

$$|\langle a_k, a_l \rangle|_{k \neq l} = \left| (US_1 v_k^{(1)T})^T (US_1 v_l^{(1)T}) \right| = |v_k^{(1)T} S_1^{-2} v_l^{(1)T}| \quad (23)$$

Benzer şekilde GF matrisinin uyumunun üst sınırını incelemek için birbirinden farklı k ve l sütunları için $\frac{|\langle Ga_k, Ga_l \rangle|}{\|Ga_k\|_2 \|Ga_l\|_2}$ 'nin hesaplanmasından yola çıkabiliriz; GF matrisinin k . sütunu $Ga_k = UV_k^{(1)T}$, dir, $|\langle Ga_k, Ga_l \rangle|$ Eş. 24'deki gibi elde edilebilir, buradan yola çıkarak da $\frac{|\langle Ga_k, Ga_l \rangle|}{\|Ga_k\|_2 \|Ga_l\|_2}$ Eş. 25'de gösterildiği gibi tanımlanabilir.

$$|\langle Ga_k, Ga_l \rangle| = \left| (UV_k^{(1)T})^T (UV_l^{(1)T}) \right| = |v_k^{(1)T} U^T U v_l^{(1)T}| \quad (24)$$

$$|v_k^{(1)T} U^T U v_l^{(1)T}| = |v_k^{(1)T} v_l^{(1)T}| = |\langle v_k^{(1)T}, v_l^{(1)T} \rangle|$$

$$\frac{|\langle Ga_k, Ga_l \rangle|}{\|Ga_k\|_2 \|Ga_l\|_2} = \frac{|\langle v_k^{(1)T}, v_l^{(1)T} \rangle|}{\|v_k^{(1)}\|_2 \|v_l^{(1)}\|_2} \triangleq u_{GF} \quad (25)$$

Üst sınırların tanımlaması için Wielandt eşitsizliğinden [33] türetilmiş sonuçlardan yararlanacağız. Yang [34] çalışmasında Wielandt eşitsizliğini reel ve simetrik matrislere genişletmiş olup, söz konusu çalışmada yer alan Teorem 3.1'de sunulmuş eşitsizliği Eş. 18'de gösterilmiş olan $|\langle a_k, a_l \rangle|_{k \neq l}$ üzerinde uyguladığımız takdirde Eş. 26'da gösterilmiş eşitsizlik elde edilir.

$$|\langle a_k, a_l \rangle|_{k \neq l} = |v_k^{(1)T} S_1^{-2} v_l^{(1)T}| \leq \frac{K + \cos f}{1 + K \cos f} \quad (26)$$

Eş. 26'da yer alan $\cos f = \frac{|\langle v_k^{(1)T}, v_l^{(1)T} \rangle|}{(\|v_k^{(1)}\|_2 \|v_l^{(1)}\|_2)}$ ve $K = \frac{(d(S_1^2) - 1)}{(d(S_1^2) + 1)}$ olup pozitif tanımlı Hermityen S_1^{-2} matrisi için durum numarası $d(S_1^2) = s_1^2 / s_m^2$ 'dir. Bu bilgilerle Eş. 26'daki eşitsizliği güncelleyecek olursak Eş. 27 elde edilir.

$$S_v = \frac{s_1^2 - s_m^2}{s_1^2 + s_m^2} + \frac{|\langle v_k^{(1)T}, v_l^{(1)T} \rangle|}{\|v_k^{(1)}\|_2 \|v_l^{(1)}\|_2} \quad (27)$$

$$|\langle a_k, a_l \rangle|_{k \neq l} \leq (S_v)(1 + S_v)^{-1} \triangleq u_F$$

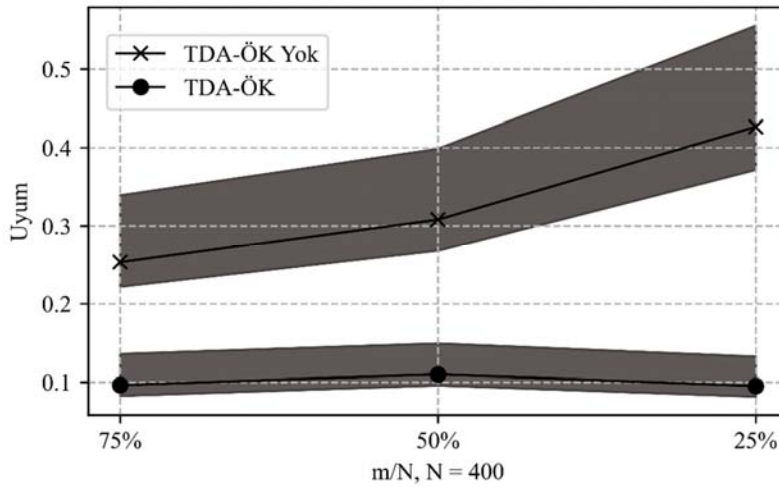
Lin ve Sinnamon'un [35] çalışmasında yer alan Wielandt eşitsizliğine dayalı Teorem 3.2'ye göre $u_{GF} \leq u_F$ 'dir. (Eş. 28, Eş. 29)

$$P\{O_1 \cap O_2^c\} \leq n(n-1)P\{e \leq u_F\} \triangleq p_F \quad (28)$$

$$P\{O_1 \cap O_3^c\} \leq n(n-1)P\{e \leq u_{GF}\} \triangleq p_{GF} \quad (29)$$

$u_{GF} \leq u_F$ olduğundan $P\{m(GF) \leq e\}$ olasılığı için $P\{m(F) \leq e\}$ olasılığından ($e \in (0,1)$) daha iyi bir alt sınır tanımlayabildiğimiz için, ÖK uygulanmış matrisin uyumu uygulanmamış matrisin uyumundan daha düşüktür. Elimizdeki mevcut bu ispatı TDA yaklaşımı özelinde kullanmak için F matrisinden F_{TDA} matrisini elde etmemizi sağlayan $(US_1)^{-1}$ matrisini Eş. 8'de G ile gösterdiğimiz ÖK matrisi olarak tanımlamamız yeterli olur, böylelikle $(GF)(GF)^T = I$ mümkün kılınmaktadır. Söz konusu yaklaşım literatürde bir ilk olarak TDA için bizim çalışmamızda sergilenmiş olup, TDA için elde edilmiş deneysel bulguların daha önce tanımlanmamış analitik temelini oluşturmaktadır.

TDA-ÖK'nin ispata uygun davranış gösterdiğini belirlemek için Gauss dağılımlı matrisler üzerinde MC benzetimiyle uyum değeri ölçümü yapılmıştır. Gerçekleştirilen benzetimde 400 boyutlu giriş uzayı için incelenen her bir m/N oranında (%25, %50 ve %75 olmak üzere) 10.000 adet Gauss dağılımlı matris üretilip, bu matrislerin TDA-ÖK ile ön koşullanmış ve ön koşullanmamış uyum değerleri belirlenmiştir. Elde edilen sonuçların grafikleri ölçülen uyumun medyan değeri doğrusal gösterilmiş olarak en büyük ve en küçük uyum değer bandında aşağıda sunulmaktadır (Şekil 1).



Şekil 1. TDA-ÖK Yok (-x-) ve TDA-ÖK durumlarında (-•-) $N=400$ olmak üzere %75, %50 ve %25 m/N oranları için Gauss dağılımlı matrislerin uyum değişimi (Coherence variation of the Gaussian distribution matrices for the m/N ratios of 75%, 50% and 25% with $N=400$ in cases of No SVD-PC (-x-) and SVD-PC (-•-))

Grafiklerden görüldüğü gibi m/N oranı ile TDA-ÖK uygulanmamış matrislerin uyum değerleri arasında negatif bir korelasyon mevcuttur, boyut sayısındaki azalmaya ters orantılı olarak artan uyum değeri Eş. 7'deki bağıntıdan da görüleceği gibi k -seyreklik üst sınırını aşağıya çekmektedir, TDA-ÖK uygulandığında uyum değeri dolayısıyla da k -seyreklik üst sınırı yaklaşık olarak aynı kalabilmektedir.

TDA-ÖK'nin etkisini incelemek için izlediğimiz bir diğer yaklaşım da TDA-ÖK etkisiyle KEÖÖ (izometri sabiti) değerindeki değişimin gözlenmesidir. Bunun için Pope'nin [29] çalışmasında yer alan MC benzetimi temel alınarak, TDA-ÖK uygulanmış ve uygulanmamış matrislerin KEÖÖ değerleri hesaplanmış olup, Şekil 2'de KEÖÖ medyan değeri doğrusal olarak en küçük ve en büyük KEÖÖ değer bandında sunulmaktadır. Benzetimlerde $N=400$, $m=200$ seçilmiş olup, 10 farklı seyreklik değerinin her biri için 100 matris üretilerek bu matrisler üzerinde 10.000 defa sütun permütasyonu yapılmıştır. Şekil 2'den görüleceği gibi TDA-ÖK uygulanmamış matrislerde KEÖÖ değeri artan seyreklikle birlikte neredeyse doğrusal artmakta olup TDA-ÖK uygulanmış matrislerde söz konusu değişim gittikçe azalan miktarlarda gerçekleşmektedir. Aynı seyreklik değerlerinde TDA-ÖK uygulandığında KEÖÖ'de iyileşme gözlenmektedir, bu Zhang'ın [23] çalışmasındaki deneysel bulguları da destekler niteliktedir.

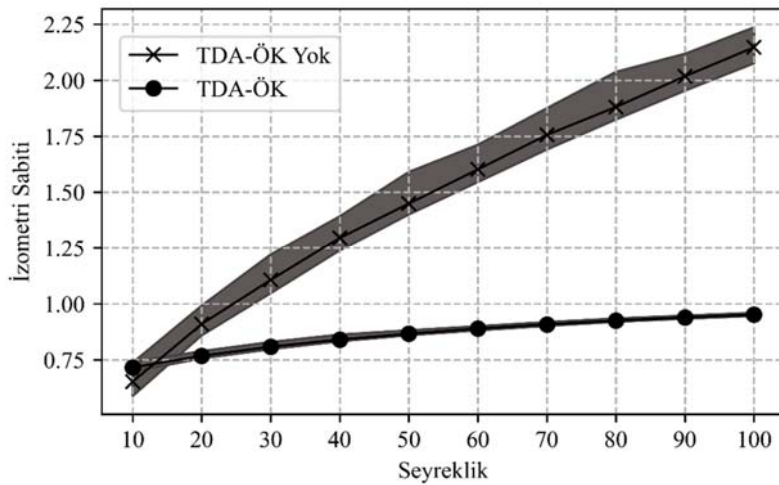
4. TDA-ÖK'NİN SS'YE ETKİSİNİN İNCELENMESİ: UYGULAMA VE SONUÇLAR

(INVESTIGATION OF THE EFFECT OF SVD-PC ON CC: APPLICATION AND RESULTS)

TDA-ÖK'nin mevcutta açgözlü algoritmaların geri çatma başarımına katkısının teorik gösterimi ve bunu destekler nitelikteki iki farklı benzetimin sonuçları bir önceki bölümde sunulmuştu. Bu bölümde TDA-ÖK yaklaşımının, SÖ'nün geri çatımı amaçlamayan bir uygulaması olan SS üzerindeki etkisi, En Yakın K Komşu (EYKK), Rassal Orman (RO) ve Destek Vektör Makineleri (DVM) olmak üzere üç farklı

sınıflayıcı kullanılarak, iki farklı veri seti (MNIST ve WARD) üzerinde deneysel olarak incelenmektedir. Denemeler için yazılım geliştirmede Python dili kullanılmış ve sınıflayıcılar için Scikit-Learn makine öğrenmesi yazılım kütüphanesinden [36] yararlanılmıştır.

Uygulama için seçilen sınıflayıcılar; istatistiksel örüntü tanıma, veri madenciliği, el yazısı ve yüz tanıma, görüntü işleme vb. gibi hemen her türlü alanda tanıma ve sınıflama çalışmalarında sıklıkla kullanılmaktadırlar. EYKK, mevcut tüm girdileri (örnekleri) benzerlik ölçütlerine göre sınıflandıran örnek tabanlı basit bir yöntemdir [37]. Sınıflandırılması gereken yeni girdileri en yakın komşularının ait olduğu sınıfa atayarak sınıflama yapar. Dolayısıyla eğitime aşamasındaki girdi sayısının artmasının, sınıflama hatasını azaltmada olumlu etkileri vardır. Sınıflama doğruluğu büyük ölçüde K (en yakın komşu sayısı) değerine ve en yakın mesafeyi bulmak için kullanılan mesafe ölçütünün türüne bağlıdır. RO, çok sayıda karar ağacı oluşturarak, elde edilen sonuçların birlikte değerlendirildiği topluluk öğrenmesi sağlayan bir yöntemdir [38]. Kullanılan karar ağacı modellerinden her biri, ana girdi kümesinden rastgele olarak seçilen alt girdi kümeleri üzerinde çalışır ve bu nedenle modeller arasındaki korelasyon azdır. Her bir modelden elde edilen sonuçların korelasyonunun az olması, tüm sonuçlara göre verilecek kararın daha doğru olmasını sağlar. Başka bir tabirle küçük modeller birleştirilerek daha güçlü bir karar verme modeli oluşturulmuş olur. Böylece aşırı öğrenme ve aykırı değer problemleri azalır. Genelleştirilmiş doğrusal sınıflayıcılar ailesinin bir üyesi olan DVM ise temelleri Vapnik [39] tarafından geliştirilen ve zamanla arttırılan deneysel performansı ile popülerlik kazanmış olan denetimli bir öğrenme yöntemidir. DVM, istatistiksel öğrenme kuramından türetilen bilgiyle ve eniyileme sağlayan bir öğrenme algoritması ile yüksek boyutlu özellik uzayını ve doğrusal fonksiyonları kullanarak eğitilen bir sistemdir. Düşük girdi sayılarında bile iyi performans sağlar.



Şekil 2. Gauss dağılımlı matrisler için TDA-ÖK uygulanmış (-●-) ve uygulanmamış (-x-) durumlarda KEÖÖ değerinin değişimi (Change of RIC-restricted isometry constant value for Gaussian distributed matrices in cases of SVD-PC (-●-) or No SVD-PC (-x-))

4.1. MNIST Veri Seti Üzerindeki SS Uygulamasında TDA-ÖK'nin Etkisi

(Effect of SVD-PC on CC Application over MNIST Data Set)

MNIST [40], elle yazılmış rakam imgelerini içermekte olup eğitim kümesinde 60.000, test kümesinde de 10.000 örnek mevcuttur. NIST'in üretmiş olduğu siyah-beyaz imgeler orantıları korunarak 20x20 piksel boyutuna normalize edilmiştir. Normalizasyonda kullanılmış anti-aliasing yöntemi neticesinde imgeler önce gri skalasına dönüştürülmüş, daha sonra piksellerin kütle merkezlerine uygun şekilde 28x28 piksellik ölçeğe taşınmıştır. MNIST veri seti üzerinde kullanılan üç farklı sınıflayıcı, grid araştırma yöntemi [41] 5-katlı çapraz geçerlilikle birlikte kullanılarak eniyelenmiş ve bu sınıflayıcılarla farklı sıkıştırma oranlarındaki Gauss dağılımlı ölçüm matrisleri kullanılarak gerçekleştirilen SS uygulamalarının neticesinde bulgular; kesinlik değerleri Tablo 1'de, hassasiyet değerleri de Tablo 2'de, parantez içinde SÖ ölçüm matrisi uyum değerleriyle birlikte, yüzde olarak sunulmaktadır. Bu uygulamada karşılaştırılmak istenen TDA-ÖK'nin sınıflamaya etkisi olduğu için her üç sınıflayıcı Scikit-Learn yazılım kütüphanesindeki genel tanımlı özellikleriyle kullanılmış ve her sınıflayıcının sadece temel bir değişkeni üzerinde grid araştırma yapılmıştır. En iyi başarımın elde edildiği değişken değerleri Tablo 3'de sunulmaktadır.

TDA-ÖK'nin uygulandığı ve uygulanmadığı durumlarda elde edilen sınıflayıcı başarım değerlerinin (Tablo 1 ve Tablo 2), DD'nin kullanılmadığı durumda elde edilen değerlere göre değişimleri Şekil 3a ve Şekil 4a'da, TDA-ÖK

uygulaması ile elde edilen başarımların TDA-ÖK'nin kullanılmadığı duruma göre değişimleri de Şekil 3b ve Şekil 4b'de yer almaktadır.

Tablo 1 ve Tablo 2'den ve bu tablolarda yer alan değerlerin yüzdelik değişimlerinin yer aldığı Şekil 3 ve Şekil 4'den gözleneceği gibi; TDA-ÖK uygulanmadan gerçekleştirilen sınıflama uygulamalarında RO ve EYKK için tüm sıkıştırma oranlarında elde edilen sınıflama başarım değerleri, DD uygulanmadan elde edilen değerlere göre sıkıştırma oranı arttıkça artan bir düşme eğilimindedir. TDA-ÖK uygulaması ile başarım değerlerindeki bu düşüş miktarı azalmaktadır. DVM'de ise benzer durum %75 ve %25 m/N oranları için söz konusudur. TDA-ÖK uygulanması durumunda elde edilen sonuçlar TDA-ÖK uygulanmadan elde edilenlerle karşılaştırılacak olursa; RO ve EYKK sınıflayıcılar için TDA-ÖK'nin SS kesinlik ve hassasiyet değerlerine olumlu etkisi söz konusudur. DVM'de ise TDA-ÖK'nin, %75 ve %25 m/N oranlarında sınıflayıcı değerlerine olumlu bir etkisi görülmekle birlikte, benzer etki %50 sıkıştırma oranında elde edilmediğinden, bu etkinin kararlı olduğu söylenemez. Öte yandan tüm SS uygulamalarında başarım değerleri en çok azalan sınıflayıcı RO iken, EYKK'nin başarımlarındaki azalma miktarı RO'da görülene kıyasla oldukça azdır. DVM'nin ise tüm sıkıştırma oranlarında performansını koruduğu söylenebilir.

MNIST veri seti için başarım sonuçlarının elde edildiği hata matrislerinden, tüm sınıflayıcılar için, DD uygulanmadan ve m/N oranı %50 iken TDA-ÖK'nin uygulanmış olduğu durumlara ilişkin olanlar Tablo 4 - Tablo 9'da verilmektedir.

Tablo 1. MNIST veri setinde üç sınıflayıcı için DD uygulanmadan ve Gauss dağılımlı ölçüm matrislerinin TDA-ÖK olmadan (F) ve TDA-ÖK uygulandığında (GF) gözlenen SS kesinlik değerleri (%)

(Observed CC precision values for the three classifiers over the MNIST dataset; without LT and, Gaussian distribution measurement matrices without SVD-PC (F) and when SVD-PC (GF) was applied (%))

m/N	%100	%75	%50	%25			
	DD Yok	F (0,2024)	GF (0,0705)	F (0,2328)	GF (0,0849)	F (0,3202)	GF (0,0741)
RO	97,12	95,10	95,35	94,97	95,25	94,55	94,83
EYKK	97,20	96,99	97,12	96,92	96,99	96,83	97,05
DVM	98,37	98,34	98,35	98,37	98,34	98,29	98,36

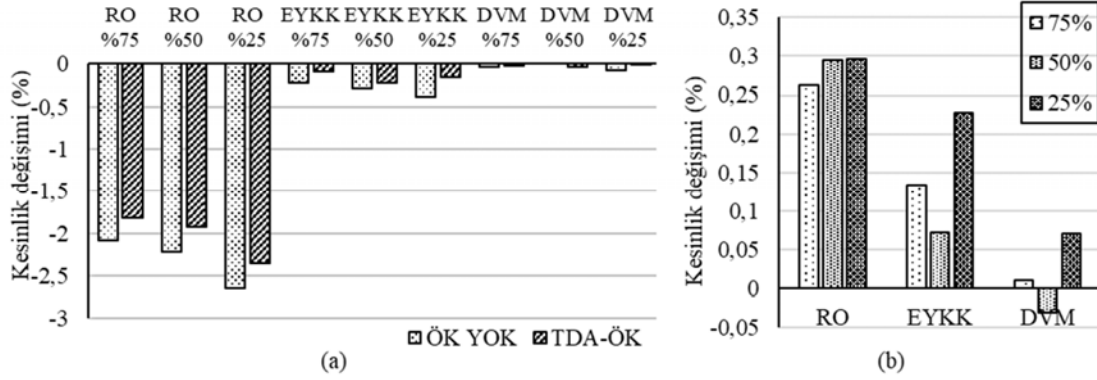
Tablo 2. MNIST veri setinde üç sınıflayıcı için DD uygulanmadan ve Gauss dağılımlı ölçüm matrislerinin TDA-ÖK olmadan (F) ve TDA-ÖK uygulandığında (GF) gözlenen SS hassasiyet değerleri (%)

(Observed CC sensitivity values for the three classifiers over the MNIST dataset; without LT and, Gaussian distribution measurement matrices without SVD-PC (F) and when SVD-PC (GF) was applied (%))

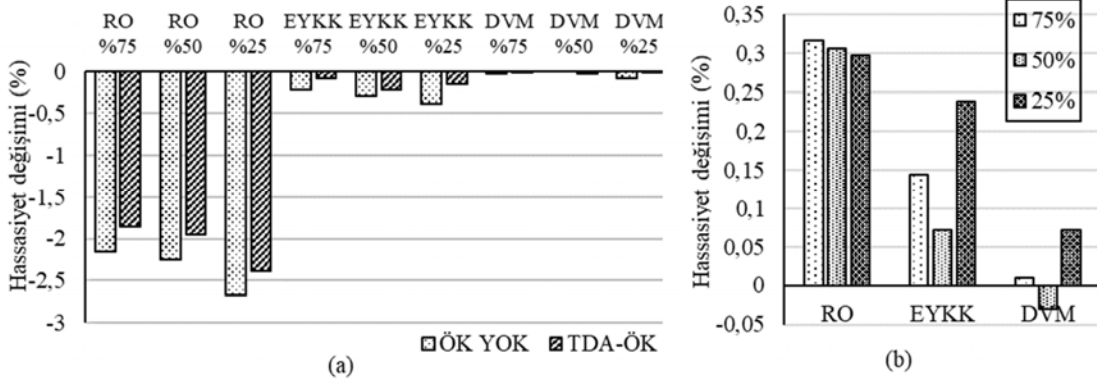
m/N	%100	%75	%50	%25			
	DD Yok	F (0,2024)	GF (0,0705)	F (0,2328)	GF (0,0849)	F (0,3202)	GF (0,0741)
RO	97,12	95,02	95,32	94,94	95,23	94,52	94,80
EYKK	97,17	96,95	97,09	96,89	96,96	96,79	97,02
DVM	98,37	98,34	98,35	98,37	98,34	98,29	98,36

Tablo 3. MNIST veri setinde üç sınıflayıcı için grid araştırma neticesinde en iyi başarımın elde edildiği değişken değerleri (Grid search optimized parameter values of the three classifiers on MNIST dataset)

m/N	%100	%75	%50	%25			
	DD Yok	F (0,2024)	GF (0,0705)	F (0,2328)	GF (0,0849)	F (0,3202)	GF (0,0741)
RO: "n_estimators"	600	1000	600	1000	1000	800	900
EYKK: "n_neighbors"	3	3	3	3	3	3	3
DVM: "C"	10	100	10	10	10	10	10



Şekil 3. MNIST veri seti için Tablo 1’de verilen kesinlik değerlerindeki değişimler (%) a) TDA-ÖK uygulandığında ve uygulanmadığında elde edilen değerlerin, DD uygulanmadığı durumdaki değerlere göre değişimi b) TDA-ÖK uygulandığında elde edilen değerlerin TDA-ÖK uygulanmadığı durumdaki değerlere göre değişimi
(Variations in precision values given by Table 1 for the MNIST data set (%) a) Variation of the values obtained when SVD-PC is applied and not applied, respect to the values in the case when the LT is not used b) Variation of the values obtained when SVD-PC is applied, respect to the values in the case when SVD-PC is not used)



Şekil 4. MNIST veri seti için Tablo 2’de verilen hassasiyet değerlerindeki değişimler (%) a) TDA-ÖK uygulandığında ve uygulanmadığında elde edilen değerlerin, DD uygulanmadığı durumdaki değerlere göre değişimi b) TDA-ÖK uygulandığında elde edilen değerlerin TDA-ÖK uygulanmadığı durumdaki değerlere göre değişimi
(Variations in sensitivity values given by Table 2 for the MNIST data set (%) a) Variation of the values obtained when SVD-PC is applied and not applied, respect to the values in the case when the LT is not used b) Variation of the values obtained when SVD-PC is applied, respect to the values in the case when SVD-PC is not used)

Tablo 4. DD uygulanmadığında RO sınıflama hata matrisi (RF classification confusion matrix without LT)

		Karar Verilen Rakam									
		0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
Yazılmış Rakam	0	968	0	6	0	1	3	7	1	3	6
	1	0	1122	0	0	0	0	3	3	0	5
	2	1	3	999	11	1	0	0	18	5	2
	3	0	3	5	976	0	10	0	0	8	11
	4	0	0	3	0	958	3	2	0	2	12
	5	2	2	0	3	0	861	4	0	5	2
	6	4	3	4	0	4	5	939	0	2	1
	7	1	0	9	9	0	3	0	995	4	4
	8	4	1	6	8	3	5	3	1	933	5
	9	0	1	0	3	15	2	0	10	12	961

Tablo 5. m/N oranı %50 iken TDA-ÖK uygulandığında RO sınıflama hata matrisi
(RF classification confusion matrix with SVD-PC when the ratio of m/N is 50%)

		Karar Verilen Rakam									
		0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
Yazılmış Rakam	0	960	0	9	0	1	7	9	1	5	6
	1	0	1119	0	0	0	1	3	10	0	6
	2	2	2	975	10	3	2	2	24	8	3
	3	0	3	8	951	0	22	1	0	21	9
	4	0	1	6	1	946	3	4	2	7	20
	5	6	1	1	12	0	835	3	0	11	6
	6	9	5	5	3	10	9	934	0	2	1
	7	1	0	12	11	0	2	0	966	7	14
	8	2	3	15	16	3	6	2	3	899	6
	9	0	1	1	6	19	5	0	22	14	938

Tablo 6. DD uygulanmadığında EYKK sınıflama hata matrisi (KNN classification confusion matrix without LT)

		Karar Verilen Rakam									
		0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
Yazılmış Rakam	0	974	0	9	0	0	4	4	0	7	3
	1	1	1133	7	1	5	1	3	18	0	4
	2	1	2	997	4	0	0	0	4	3	2
	3	0	0	2	975	0	12	0	0	13	7
	4	0	0	0	1	948	2	4	2	5	9
	5	1	0	0	13	0	860	3	0	11	4
	6	2	0	1	1	5	5	944	0	3	1
	7	1	0	14	7	4	1	0	994	4	8
	8	0	0	2	4	1	3	0	0	923	2
	9	0	0	0	4	19	4	0	10	5	969

Tablo 7. m/N oranı %50 iken TDA-ÖK uygulandığında EYKK sınıflama hata matrisi
(KNN classification confusion matrix with SVD-PC when the ratio of m/N is 50%)

		Karar Verilen Rakam									
		0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
Yazılmış Rakam	0	976	0	9	0	0	5	5	0	5	4
	1	1	1132	5	2	5	1	3	19	0	5
	2	1	1	996	3	0	0	0	6	3	1
	3	0	1	2	970	0	13	0	1	15	7
	4	0	1	0	1	941	1	3	1	4	7
	5	1	0	0	18	0	858	3	0	11	4
	6	0	0	1	1	5	5	944	0	4	1
	7	1	0	15	7	4	1	0	990	4	11
	8	0	0	4	3	0	2	0	0	922	2
	9	0	0	0	5	27	6	0	11	6	967

Tablo 8. DD uygulanmadığında DVM sınıflama hata matrisi (SVM classification confusion matrix without LT)

		Karar Verilen Rakam									
		0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
Yazılmış Rakam	0	973	0	5	0	0	2	5	0	3	1
	1	0	1129	1	0	0	0	2	3	0	3
	2	2	2	1014	2	4	0	0	9	2	0
	3	0	1	0	996	0	8	0	2	4	7
	4	0	0	1	0	966	1	2	1	3	9
	5	2	1	0	2	0	873	3	0	1	3
	6	0	0	1	0	2	3	945	0	1	1
	7	1	1	6	3	0	0	0	1007	2	5
	8	2	1	4	4	0	3	1	0	954	0
	9	0	0	0	3	10	2	0	6	4	980

Tablo 9. m/N oranı %50 TDA-ÖK uygulandığında DVM sınıflama hata matrisi
(SVM classification confusion matrix with SVD-PC when the ratio of m/N is 50%)

		Karar Verilen Rakam									
		0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
Yazılmış Rakam	0	973	1	3	0	1	2	4	0	3	2
	1	0	1128	1	0	0	0	2	3	0	3
	2	1	2	1016	2	3	0	0	7	2	0
	3	0	1	0	997	0	7	0	2	5	5
	4	0	0	1	0	966	1	2	2	2	8
	5	2	1	0	2	0	872	4	0	2	2
	6	1	0	2	0	2	4	944	0	1	1
	7	1	1	5	3	0	0	0	1004	3	4
	8	2	1	3	4	0	4	2	1	952	2
	9	0	0	1	2	10	2	0	9	4	982

4.2. WARD Veri Seti Üzerindeki SS Uygulamasında TDA-ÖK'nin Etkisi

(Effect of SVD-PC on CC Application over WARD Data Set)

WARD veri seti [42, 43] 13 farklı hareket için, 20 kişiden, 5 ayrı seansta toplanmış vücut sensör verilerini içermektedir. Veri toplamada vücudun 5 farklı yerine yerleştirilmiş sensörler kullanılmıştır. Bu çalışmada eğitim için her bir hareket dosyasından 40 örneklik 10 farklı çerçeve rasgele seçilmiştir. Her kullanıcı ayrı olarak test edilmiş, test edilirken de o kullanıcıya ait veriler eğitim kümesinden çıkartılarak eğitim gerçekleştirilmiştir. Test çerçeveleri oluşturulurken her hareketin anlık her durumu kendisini yansıtır varsayıldığı için dosyaların başından sonuna birer örnek atlayarak test çerçeveleri oluşturulmuştur. Sınıflamada her sensör verisi üzerinde ayrı sınıflama yapıp sonuçlara çokluk oylaması uygulanarak karar verilmektedir. Bu veri setinde yer alan sensör verilerinde kullanılan üç farklı sınıflayıcı için grid araştırma yöntemi [41] 5-katlı çapraz geçerlilikle birlikte kullanılarak elde edilen modellerin TDA-ÖK'nin SS'ye etkisini gösterir bulgular, yüzde olarak, aşağıdaki kesinlik (Tablo 10) ve hassasiyet (Tablo 11) tablolarında, parantez içinde SÖ ölçüm matrisi (Gauss dağılımlı) uyum değerleriyle birlikte sunulmaktadır.

WARD veri seti için de her üç sınıflayıcı Scikit-Learn yazılım kütüphanesindeki genel tanımlı özellikleriyle kullanılmış ve yine her sınıflayıcının sadece temel bir değişkeni üzerinde grid araştırma yapılmıştır, en iyi başarımın elde edildiği değişken değerlerinin tüm sensörler üzerinden hesaplanmış ortalama değerleri ve standart sapmaları (parantez içinde sunulmuştur) Tablo 12'de gösterilmektedir.

TDA-ÖK'nin uygulandığı ve uygulanmadığı durumlarda elde edilen sınıflayıcı başarım değerlerinin (Tablo 10 ve Tablo 11), DD'nin uygulanmadığı durumda elde edilen değerlere göre değişimleri Şekil 5a ve Şekil 6a'da, TDA-ÖK uygulaması ile elde edilen başarımın TDA-ÖK'nin kullanılmadığı duruma göre değişimleri de Şekil 5b ve Şekil 6b'de verilmektedir.

Tablo 10 ve Tablo 11 ile Şekil 5 ve Şekil 6 incelenecek olursa, TDA-ÖK uygulaması olmaksızın elde edilen

sınıflama performansları DD uygulanmadan alınan sonuçlara göre, yalnızca RO sınıflayıcısı için sıkıştırma miktarı arttıkça azalmakta olup, diğer sınıflayıcılar için benzer bir ilişki gözlenmemiştir. TDA-ÖK uygulanmasıyla elde edilen sonuçlar TDA-ÖK'nin kullanılmadığı durumdaki verilerle karşılaştırılırsa; RO sınıflayıcı için TDA-ÖK'nin SS kesinlik ve hassasiyet değerlerine olumlu etkisi söz konusu iken, diğer sınıflayıcılar için performanslar farklı sıkıştırma oranlarında artış (%50 için) veya azalış (%25 ve %75 için) biçiminde elde edilmiş olduğundan, kararlı değildir, bu davranışa çokluk oylaması uygulanarak karar alınmasının sebep olabileceği düşünülebilir. WARD verisi için yapılan SS'de de MNIST veri seti üzerindeki uygulamada olduğu gibi SS uygulamalarında sıkıştırma oranı arttıkça başarımların çok düşen sınıflayıcı yine RO'dur. EYKK ve DVM'nin SS performans kayıplarının tüm sıkıştırma oranlarında RO'ya göre oldukça düşük olduğu görülmekte olup, sınıflama başarımlarının %75 ve %50 m/N oranlarında korunmuş olduğu anlaşılmaktadır.

Sınıflandırma bulgularının daha iyi anlaşılabilmesi için bu veri seti için sensör bazlı K-Ortalama Kümeleme [44] başarım analizleri gerçekleştirilmiş olup, farklı kriterler açısından elde edilen sonuçlar Tablo 13'de sunulmaktadır. Tablo 13'de uygulanan metod bazında kullanılan Gauss örnekleme matrislerinin uyum değerleri parantez içinde gösterilmiştir. Log-eylemsizlik en yakın öbek merkezlerine örneklerin uzaklıklarının kareleri toplamının 10 tabanında logaritması alınarak hesaplanmaktadır. Saflık; öbeklerin gerçek sınıflarından örnek içerme miktarını gösterir, 0 ile 1 arasında değer almaktadır, 1 tam saflıkta etiketleme yapıldığını gösterir. Bütünlük; aynı sınıfların aynı öbekte bulunma miktarını gösterir, 0 ile 1 arasında değer almaktadır, 1 tam bütünlüklü etiketleme yapıldığını gösterir. Siluet değeri her örnek için ayrı ayrı hesaplanan örnek siluet değerlerinin aritmetik ortalamasıdır, örnek siluet (s) değeri hesabı Eş. 30'da verildiği gibi yapılır, burada a, örnek ile aynı sınıftaki diğer tüm örnekler arasındaki ortalama mesafeyi, b ise örnek ile en yakın kümedeki diğer tüm örnekler arasındaki ortalama mesafeyi göstermektedir.

$$s = \frac{(b-a)}{\max(a,b)} \quad (30)$$

Tablo 10. WARD veri setinde üç sınıflayıcı için DD uygulanmadan ve Gauss dağılımlı ölçüm matrislerinin TDA-ÖK olmadan (F) ve TDA-ÖK (GF) uygulandığında gözlenen SS kesinlik değerleri (%)

(Observed CC precision values for the three classifiers over the WARD dataset; without LT and, Gaussian distribution measurement matrices without SVD-PC (F) and when SVD-PC (GF) was applied (%))

m/N	%100	%75		%50		%25	
	DD Yok	F (0,3288)	GF (0,1388)	F (0,3763)	GF (0,1483)	F (0,5443)	GF (0,1255)
RO	90,55	88,26	88,89	87,89	88,48	87,00	87,23
EYKK	85,79	85,75	85,52	85,68	85,75	85,18	84,69
DVM	90,05	90,29	90,10	89,91	90,01	89,18	88,70

Tablo 11. WARD veri setinde üç sınıflayıcı için DD uygulanmaksızın ve Gauss dağılımlı ölçüm matrislerinin TDA-ÖK olmadan (F) ve TDA-ÖK (GF) uygulandığında gözlenen SS hassasiyet değerleri

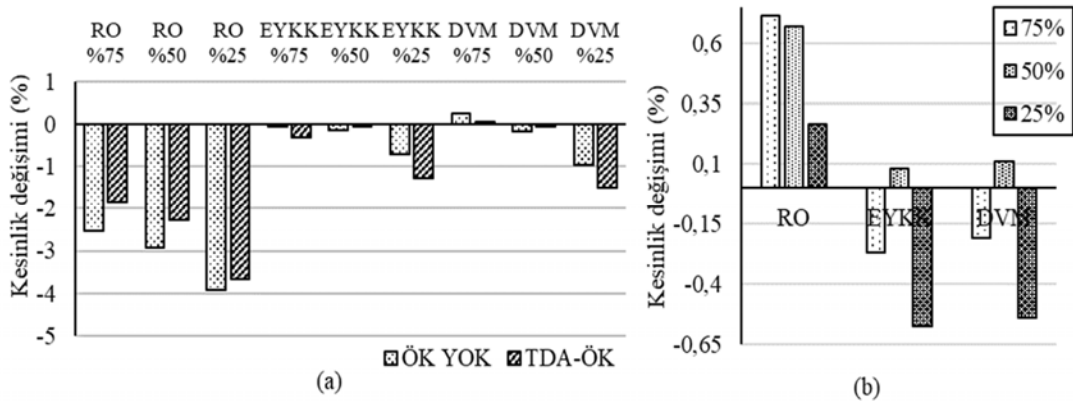
(Observed CC sensitivity values for the three classifiers over the MNIST dataset; without LT and, Gaussian distribution measurement matrices without SVD-PC (F) and when SVD-PC (GF) was applied (%))

m/N	%100	%75		%50		%25	
	DD Yok	F (0,3288)	GF (0,1388)	F (0,3763)	GF (0,1483)	F (0,5443)	GF (0,1255)
RO	90,23	87,76	88,43	87,39	87,93	86,43	86,61
EYKK	83,77	83,91	83,72	83,90	84,07	83,48	83,20
DVM	89,35	89,68	89,42	89,31	89,37	88,53	88,02

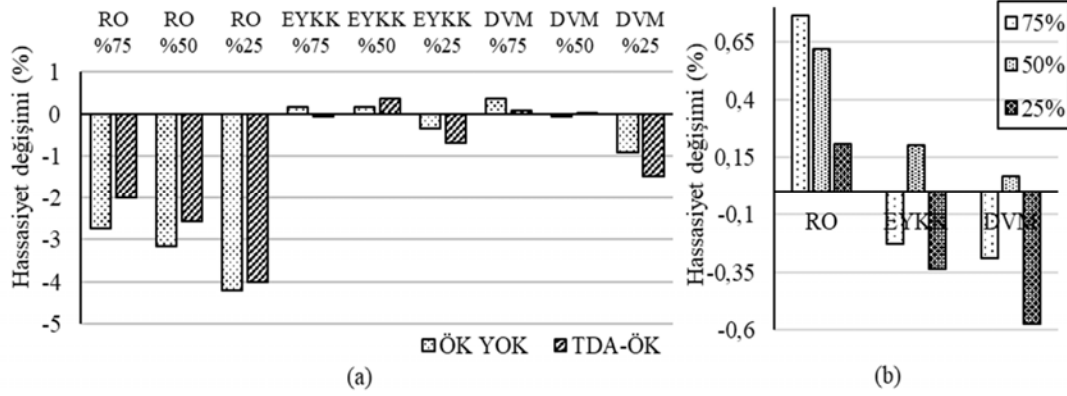
Tablo 12. WARD veri setinde üç sınıflayıcı için grid araştırma neticesinde en iyi başarımın elde edildiği değişken değerleri

(Grid search optimized parameter values of the three classifiers on WARD dataset)

m/N	%100	%75		%50		%25	
	DD Yok	F (0,2024)	GF (0,0705)	F (0,2328)	GF (0,0849)	F (0,3202)	GF (0,0741)
RO: "n_estimators"	904,00 (256,09)	884,00 (242,78)	944,00 (232,52)	896,00 (243,28)	912,00 (222,39)	920,00 (214,48)	884,00 (267,85)
EYKK: "n_neighbors"	3,06 (0,34)	3,00 (0,00)	3,02 (0,02)	3,08 (0,39)	3,02 (0,02)	3,10 (0,44)	3,16 (0,54)
DVM: "C"	108,10 (209,18)	100,90 (188,57)	90,10 (169,90)	91,90 (165,51)	131,50 (241,96)	109,00 (186,41)	192,70 (314,47)

**Şekil 5.** WARD veri seti için Tablo 3’de verilen kesinlik değerlerindeki değişimler (%) a) TDA-ÖK uygulandığında ve uygulanmadığında elde edilen değerlerin, DD uygulanmadığı durumdaki değerlere göre değişimi b) TDA-ÖK uygulandığında elde edilen değerlerin TDA-ÖK uygulanmadığı durumdaki değerlere göre değişimi

(Variations in precision values given by Table 3 for the WARD data set (%) a) Variation of the values obtained when SVD-PC is applied and not applied, respect to the values in the case when the LT is not used b) Variation of the values obtained when SVD-PC is applied, respect to the values in the case when SVD-PC is not used)



Şekil 6. WARD veri seti için Tablo 4’de verilen hassasiyet değerlerindeki değişimler (%) a) TDA-ÖK uygulandığında ve uygulanmadığında elde edilen değerlerin, DD uygulanmadığı durumdaki değerlere göre değişimi b) TDA-ÖK uygulandığında elde edilen değerlerin TDA-ÖK uygulanmadığı durumdaki değerlere göre değişimi

(Variations in sensitivity values given by Table 4 for the WARD data set (%) a) Variation of the values obtained when SVD-PC is applied and not applied, respect to the values in the case when the LT is not used b) Variation of the values obtained when SVD-PC is applied, respect to the values in the case when SVD-PC is not used)

Tablo 13. WARD veri seti için sensör bazlı K-ortalama kümeleme başarımlarını analizleri (Sensor based K-mean clustering performance analysis for WARD data set)

m/N	Metod	Log-eylemsizlik	Saflık	Bütünlük	Siluet
100%	DD Yok	11,2876	0,2888	0,3500	0,1362
75%	ÖK Yok (0,3288)	11,2876	0,3004	0,3552	0,1328
	TDA-ÖK (0,1388)	11,1577	0,2984	0,3558	0,1336
50%	ÖK Yok (0,3763)	11,2882	0,2966	0,3530	0,1338
	TDA-ÖK (0,1483)	10,9885	0,3054	0,3670	0,1300
25%	ÖK Yok (0,5443)	11,2885	0,2790	0,3412	0,1530
	TDA-ÖK (0,1255)	10,6794	0,2848	0,3394	0,1422

Artan sıkıştırma oranlarında TDA-ÖK uygulandığı durumda veri bulutundaki örneklerin birbirine yaklaştıkları hesaplanmış Log-eylemsizlik değerlerinden görülmektedir. TDA-ÖK’nin saflık, bütünlük ve siluet üzerindeki etkisi farklı sıkıştırma oranlarında farklı şekillerde elde edilmiş olup kararlı değildir.

5. SONUÇLAR (CONCLUSIONS)

Bu çalışmada öncelikle SÖ’de ölçüm matrisinin TDA ile türetildiği yaklaşımın bir ÖK olduğu gösterilerek söz konusu yaklaşım TDA-ÖK olarak tanımlanmış ve TDA-ÖK’nin literatürde mevcut olmayan teorik temeli oluşturulmuştur. Teorik bulguların, bu çalışmada gerçekleştirmiş olduğumuz ve yine daha önce TDA-ÖK için yapılmamış olan uyum ve KEÖ MC benzetimleri sonuçlarıyla örtüşüyor olması da teori ve benzetim açısından birbirini doğrular niteliktedir. Gerçekleştirilen MC benzetimleri göstermektedir ki TDA-ÖK örnekleme matrisinin uyumunu azaltıp, benzersiz geri çatım için seyreklik üst sınırını yukarıya çekmektedir.

SÖ’de kullanılan açgözlü algoritmaların başarımlarını iyileştireceğini teorik olarak göstermiş olduğumuz TDA-ÖK’nin SS üzerindeki etkisinin incelenmesi çalışmamızın içermekte olduğu diğer bir özgünlüktür; ölçümlenecek

işaretlerin sınıflama başarımlarının iyi ya da kötü yönde değişeceğine dair bir çalışma literatürde bulunmamaktadır. Bu nedenle yapmış olduğumuz çalışmada MNIST ve WARD veri setlerinde farklı sınıflayıcılar (RO, EYKK ve DVM) kullanılarak gerçekleştirilen benzetimlerle, işaretlerin TDA-ÖK neticesinde sınıflama başarımlarının değişimleri incelenmiştir. TDA-ÖK, SÖ’deki geri çatıma olumlu etkisinin yanında SS’de; MNIST veri setinde RO ve EYKK sınıflayıcılarıyla, WARD veri setindeyse RO sınıflayıcısı için tüm sıkıştırma oranlarında gözlenen kararlı bir etkiye sahiptir. Her iki veri setinde bunların dışındaki diğer sınıflayıcı/sınıflayıcılar için TDA-ÖK’nin etkisinin, tüm sıkıştırma oranlarında olumlu ya da olumsuz yönde bir kararlılığa sahip olduğu gözlemlenmemiştir. Bu bulgu doğrultusunda TDA-ÖK uygulanmış veri üzerinde SS gerçekleştirilirken, başarımların, TDA-ÖK uygulanmamış veri için elde edilecek sınıflama başarımlarına göre, tüm sıkıştırma oranları için hep aynı yönde etkilenmediği, sınıflayıcıya ve veri setine göre değişiklik gösterebildiği sonucuna ulaşılmıştır. Bu durumun TDA-ÖK kullanımını içeren SS uygulamalarında öngörülmesi yararlı olacaktır. İzleyen çalışmalarda, TDA-ÖK’nin SS’ye etkisinin teorik temellendirilmesi yapılarak söz konusu etkinin sınırları ve olumlu ya da olumsuz olduğu şartların belirlenmesi üzerinde durulabilir.

KAYNAKLAR (REFERENCES)

1. Pustokhina I.V., Pustokhin D.A., Gupta D., Khanna A., Shankar K., Nguyen G.N., An effective training scheme for deep neural network in edge computing enable internet of medical things (IoMT) systems, *IEEE Access*, 8 (2020), 107112-107123, 2020.
2. Younan M., Houssein E.H., Elhoseny M., Ali A.A., Challenges and recommended technologies for the industrial internet of things: A comprehensive review, *Measurement*, 151 (2020) 107198, 1-16, 2020.
3. Yıldırım G., Tatar Y., Remote user supported IoT-WSN laboratory and testbed platform: FiratWSN, *Journal of the Faculty of Engineering and Architecture of Gazi University*, 34 (4), 1831-1846, 2019.
4. Reinsel D., Gantz J., Rydning J., *Data Age 2025, The digitization of the world from edge to core*, IDC White Paper, #US44413318, 2-5, 2018.
5. Calderbank R., Jafarpour S., *Finding Needles in Compressed Haystacks*, *Compressed Sensing: Theory and Applications*, Eldar Y.C., Kutyniok G., Cambridge University Press, Cambridge, 439-484, 2012.
6. Calderbank, R., *Compressed Learning: Universal Sparse Dimensionality Reduction and Learning in the Measurement Domain*, 2009.
7. Reboredo H., Renna F., Calderbank R., Rodrigues M.R.D., *Projections designs for compressive classification*, 2013 IEEE Global Conference on Signal and Information Processing, Austin, 1029-1032, 3-5 Aralık, 2013.
8. Davenport M.A., Boufounos P.T., Wakin M.B., Baraniuk R.G., *Signal processing with compressive measurements*, *IEEE Journal of Selected Topics in Signal Processing*, 4 (2), 445-460, 2010.
9. Wimalajeewa T., Chen H., Varshney P.K., *Performance limits of compressive sensing-based signal classification*, *IEEE Transactions on Signal Processing*, 60 (6), 2758-2770, 2012.
10. Shannon C.E., *Communication in the presence of noise*, *Proc. IEEE*, 86 (2), 447-457, 1998.
11. Davenport M.A., Duarte M.F., Eldar Y.C., Kutyniok G., *Introduction to Compressed Sensing*, *Compressed Sensing: Theory and Applications*, Eldar Y.C. ve Kutyniok G., Cambridge Uni. Press, Cambridge, 1-64, 2012.
12. Candès E., Romberg J., Tao T., *Robust uncertainty principles: Exact signal reconstruction from highly incomplete frequency information*. *IEEE Trans Inform Theory*, 52 (2), 489-509, 2006.
13. Donoho D., *Compressed sensing*, *IEEE Trans Inform Theory*, 52 (4), 1289-1306, 2006.
14. Baraniuk R., *Compressive sensing*, *IEEE Signal Proc Mag*, 24 (4), 118-120, 2007.
15. Schmidt R., *Zur theorie der linearen und nichtlinearen integralgleichungen*, *Math. Ann.*, 63, 433-476, 1907.
16. Holtz O.V., *Compressive Sensing: A Paradigm Shift in Signal Processing*. ArXiv. <https://arxiv.org/abs/0812.3137>. Yayın tarihi Aralık16, 2008. Erişim tarihi Ağustos 2, 2020.
17. Pati Y.C., Rezaifar R., Krishnaprasad P.S., *Orthogonal matching pursuit: Recursive function approximation with applications to wavelet decomposition*, 27th Annual Asilomar Conference on Signals Systems and Computers, California, 1-3 Kasım, 1993.
18. Atar E., Ersoy O., Özyılmaz L., *Hybrid data compression and optical cryptography with orthogonal matching pursuit*, *Journal of the Faculty of Engineering and Architecture of Gazi University*, 32 (1), 131-139, 2017.
19. Zhao J., Bai X., Bi S., Tao R., *Coherence-based analysis of modified orthogonal matching pursuit using sensing dictionary*, *IET Signal Processing*, 9 (3), 218-225, 2015.
20. Schnass K., Vandergheynst P., *Dictionary preconditioning for greedy algorithms*, *IEEE Transactions on Signal Processing*, 56(5), 1994-2002, 2008.
21. Tsiligiani E., Kondi L.P., Katsaggelos A.K., *Preconditioning for underdetermined linear systems with sparse solutions*, *IEEE Signal Processing Letters*, 22 (9), 1239-1243, 2015.
22. Chen Y., Peng J., Yue S., *Preconditioning for orthogonal matching pursuit with noisy and random measurements: The Gaussian case circuits*, *Systems, and Signal Processing*, 37, 4109-4127, 2018.
23. Zhang C., *An orthogonal matching pursuit algorithm based on singular value decomposition*, *Circuits, Systems, and Signal Processing*, 39, 492-501, 2020.
24. Olshausen B., Field D., *Emergence of simple-cell receptive field properties by learning a sparse code for natural images*, *Nature*, 381, 607-609, 1996.
25. Elad M., *Sparse and Redundant Representations: From Theory to Applications in Signal and Image Processing*, Springer, New York, A.B.D., 2010.
26. Candès E.J., Wakin M.B., *An introduction to compressive sampling*, *IEEE Signal Processing Magazine*, 25 (2), 21-30, 2008.
27. Mallat S.G, Zhang Z., *Matching pursuits with time-frequency dictionaries*, *IEEE Transactions On Signal Processing*, 41 (12), 3397-3415, 1993.
28. Tropp J.A., *On the conditioning of random subdictionaries*, *Applied and Computational Harmonic Analysis*, 25 (1), 1-24, 2008.
29. Pope G., *Compressive Sensing a Summary of Reconstruction Algorithms*, Yüsek Lisans Tezi, ETH Zürich, Department of Computer Science, Zürich, 2009.
30. Stankovic L., Mandic D.P., Dakovic M., Kisil I., *Demystifying the Coherence Index in Compressive Sensing [Lecture Notes]*, *IEEE Signal Processing Magazine*, 37 (1), 152-162, 2020.
31. Chen Y., Peng J., *Influences of preconditioning on the mutual coherence and the restricted isometry property of Gaussian/Bernoulli measurement matrices*, *Linear and Multilinear Algebra*, 64 (9), 1750-1759, 2016.
32. Strang G., *Introduction to Linear Algebra*, Wellesley-Cambridge Press, 5. Basım, 2016.
33. Householder A.S., *The Theory of Matrices in Numerical Analysis*, Blaisdell, New York, 1964.

34. Yan Z., A Unified version of Cauchy-Schwarz and Wielandt inequalities, *Linear Algebra and Its Applications*, 428 (8), 2079-2084, 2008.
35. Lin M., Sinnamon G., The generalized wielandt inequality in inner product spaces, *Eurasian Mathematical Journal*, 3 (1), 72-85, 2012.
36. Pedregosa F., Varoquaux G., Gramfort A., Michel V., Thirion B., Grisel O., Blondel M., Prettenhofer P., Weiss R., Dubourg V., Vanderplas J., Passos A., Cournapeau D., Brucher M., Perrot M., Duchesnay E., Scikit-Learn: Machine learning in Python, *The Journal of Machine Learning Research*, 12, 2825-2830, 2011.
37. Cover T., Hart P., Nearest neighbor pattern classification, *IEEE Trans. Inf. Theory*, 13 (1), 21-27, 1967.
38. Brieman L., Random Forest, *Machine Learning*, 45, 5-32, 2001.
39. Vapnik V.N., *The Nature of Statistical Learning Theory*, Springer-Verlag, New York, A.B.D., 1995.
40. LeCun Y., Bottou L., Bengio Y., Haffner P., Gradient-based learning applied to document recognition, *Proc. IEEE*, 86 (11), 2278-2324, 1998.
41. Luo G., A review of automatic selection methods for machine learning algorithms and hyper-parameter values, *Netw Model Anal Health Inform Bioinforma*, 5, 18, 2016.
42. Yang A., Kuryloski P., Bajcsy R., WARD: A Wearable Action Recognition Database, *CHI Conference on Human Factors in Computing Systems*, Boston, MA, ABD, 4-9 Nisan, 2009.
43. Xiao L., Li R., Luo J., Xiao Z., Energy-efficient recognition of human activity in body sensor networks via compressed classification, *International Journal of Distributed Sensor Networks*, 12 (12), 1-8, 2016.
44. Wu J., Xiong H., Chen J., Adapting the right measures for K-means clustering. In *Proceedings of the 15th ACM SIGKDD International Conference on Knowledge Discovery and Data Mining (KDD '09)*, Paris-France, 877-886, 28 Haziran-1 Temmuz, 2009.

