Ahi Evran Üniversitesi Kırşehir Eğitim Fakültesi Dergisi (KEFAD)
Cilt 16, Sayı 1, Nisan 2015, Sayfa 341-356

Matematik Öğretmeni Adaylarının İrrasyonel Sayılarla İlgili Anlayışları*

Zeynep ÇİFTÇİ[1], Levent AKGÜN[2], Yasin SOYLU[3]

ÖZ

Bu çalışmanın amacı matematik öğretmeni adaylarının, literatürde var olan ancak ders kitaplarında (Calculus, Analiz, Cebir, vb…) pek yer verilmeyen ve bir sayının irrasyonel olup olmadığını göstermek için kullanılan farklı çözüm yolları ile ilgili anlayışlarını ve yaklaşımlarını belirlemektir. Bu bağlamda çalışmanın katılımcılarını 40 matematik öğretmeni adayı (the fourth-year students) oluşturmaktadır. Çalışma betimsel niteliktedir. Çalışmanın verileri açık uçlu sorulardan oluşan bir testten elde edilmiştir. Elde edilen sonuçlardan matematik öğretmeni adaylarına ilk etapta uygulanan testin analiziyle, bir sayının irrasyonelliğinin gösterimi noktasında sınırlı sayıda yolun kullanıldığı ortaya çıkmıştır. İkinci testin sonuçlarından ise katılımcıların irrasyonel sayıların gösterimi ile ilgili farklı çözüm yollarını tercih ettikleri görülmüştür.

Anahtar kelimeler: İrrasyonel Sayılar, Matematik Öğretmeni Adayı, Farklı Çözüm Yolları.

Pre-service Mathematics Teachers' Understandings of Irrationality Numbers

ABSTRACT

The aim of this study is to determine pre-service mathematics teachers' understandings and approaches of different methods of solution which exist in literature but are not featured much in textbooks (Calculus, Analysis, Algebra, etc.), and which are used to show whether or not a number is irrational. In this regard, the participants of the study are composed of 40 pre-service mathematics teachers. The study is of descriptive quality. The data of the study were obtained via a test composing of open-ended questions. In view of the obtained data and via analysis of the test that was administered to the pre-service mathematics teachers in the first step, it was found that a limited number of methods were used to represent the irrationality of a number. In view of the results of the second test, it was observed that the participants preferred different methods of solution regarding the representation of irrational numbers.

Keywords: Irrational numbers, Pre-service mathematics teacher, Different methods of solution.

GİRİŞ

Sayılar sistemi, ilköğretim ve ortaöğretim matematik öğretim programlarının temel öğrenme alanlarını oluşturan konulardan birisidir (Baki, 2008).

* Bu çalışma 10. Ulusal Fen ve Matematik Eğitimi Kongresinde özet bildiri olarak sunulan çalışmanın genişletilmiş halidir.

[1] Arş.Gör., Atatürk Üniversitesi, e-posta: zbayrakdar@atauni.edu.tr
[2] Yrd.Doç.Dr., Atatürk Üniversitesi, e-posta: levakgun@atauni.edu.tr
[3] Doç.Dr., Atatürk Üniversitesi, e-posta:yasinsoylu@atauni.edu.tr

Matematiğin birçok konusunda var olduğu gibi temel konu alanı olan Sayılar sisteminde de, doğası gereği epistemolojik zorluklar ya da engeller mevcuttur. Epistemolojik engeller o kavramların öğretimini zorlaştırmaktadır (Soylu, Akgün, Dündar, & İşleyen, 2011). Bunların yanında, sayılar sistemini oluşturan doğal, rasyonel, irrasyonel ve reel sayı kavramlarının öğretiminde sadece teknik bilgilere ve tanımlamalara ağırlık verilmesi de öğretim engellerinin diğer bir boyutudur. Yani öğrenciler, sistematik ve açık bir şekilde düşündürülmeyince sayı sistemlerinin içselleştirilmesi de zorlaşmaktadır. Sadece sınırlı örneklerle ($\sqrt{2}, \sqrt{3}, \pi$) açıklanan irrasyonel sayılar bu zorlukların yaşandığı sayı sistemleri arasındadır (Fischbein, Jehiam, & Cohen, 1995). Sertöz' e (2002) e göre, eski insanlar tüm sayıları tamsayıların oranları olarak yazabileceklerini düşünüyorlardı. Fakat daha sonraları, örneğin kenarları 1'er cm olan dik üçgenin hipotenüsünün hesaplanması söz konusu olduğunda insanlar eldeki sayılarla, ifade edemeyecekleri bir sayı ile karşılaştılar. Köklü olarak ($\sqrt{2}$ şeklinde) ifade edilecek olan bu sayı, aslında sonsuz basamağa sahip olan 1,4142135… sayısıdır. Pisagor ve öğrencileri tarafından bulunan bu türden sayıların kabul görmesi sanıldığı kadar kolay olmamıştır. Öyle ki, bu tür sayılar akla aykırı bulunmuş ve akla ve mantığa aykırı anlamına gelen "irrasyonel" terimi ile isimlendirilmiştir. Varılan sonuç $\sqrt{2}$, bir tamsayı ile ifade edilemez, ancak geometrik olarak gösterilebilir. Pythagoras okulunun kutsal sayı anlayışı ile çelişen bu buluş, uzun zaman gizli tutulmuş, bunu açıklayan Hippasos okuldan kovulmuştur (Gözen, 2006). İrrasyonel sayıların doğasından kaynaklanan bu tür zorluklar, bu sayıların öğretiminde dikkate alınmalıdır.

Literatürde sayıların irrasyonelliğinin anlaşılması ile ilgili çalışmalara daha çok calculus, ispat, limit ve sonsuzluk üzerine yapılan araştırmalarla (Berge, 2008; Tall, 2001; Tall & Schwarzenberger, 1978; Tirosh & Tsamir, 2006) yer verilmiştir.

Arcavi, Bruckheimer ve Ben-Zvi (1987) matematik tarihi dersinde öğretmen adayları ve öğretmenlerin irrasyonel sayılarla ilgili anlayışlarını ve kavram yanılgılarını araştırmışlardır. Çalışmalarını 84 katılımcıyla birlikte yürütmüşlerdir. Bu araştırmacılar katılımcıların çoğunun sayıları rasyonel ve irrasyonel olarak tanımada zorluk yaşadıklarını tespit etmişlerdir. Fischbein, Jehiam, ve Cohen (1995) lise öğrencileri ve öğretmen adaylarının irrasyonel sayılarla ilgili sahip oldukları bilgi düzeylerini araştırmışlardır. Bu araştırmacılar 62 lise öğrencisi (9. ve 10. sınıf) ve 29 öğretmen adayıyla çalışmalarını yürütmüşlerdir. Çalışmalarında irrasyonel sayı kavramı ile ilgili iki önemli sezgisel engelle (irrasyonel büyüklüklerin karşılaştırılamazlığı =incommensurability of irrational magnitudes ve reel sayılar kümesinin sayılamaz olduğu =nondenumerability of the set of real numbers) karşılaşmışlardır. Bu araştırmacılar tüm katılımcıların rasyonel, irrasyonel ve reel sayı kavramlarını doğru bir şekilde tanımlayamadıkları sonucuna ulaşmışlardır. Yine birçok öğrencinin de sayıların tam, rasyonel, irrasyonel veya reel gibi değişik örneklerini doğru bir şekilde belirleyemediklerini tespit etmişlerdir. Benzer sonuçlara Tirosh vd. (1998) ilköğretim öğretmen adayları ile yürüttükleri rasyonel sayı anlayışları ile ilgili çalışmalarında ulaşmışlardır. Peled ve Hershkovitz (1999) 70 öğretmen adayıyla irrasyonel sayıların anlaşılması üzerine bir çalışma yürütmüşlerdir. Bu araştırmacılar öğretmen adaylarının irrasyonel sayıların tanımlarını ve özelliklerini bildiklerini fakat irrasyonel sayıların farklı temsillerini içeren örneklerde başarısız olduklarını tespit etmişlerdir. Onlar bu zorluğun temel kaynağı olarak öğretmen adaylarının limit işlemi ile ilgili sahip oldukları kavram yanılgıları olduğu sonucuna varmışlardır. Zazkis (2005) asal ve irrasyonel sayıların öğrenciler tarafından nasıl tanımlandığı ve algılandığı ile ilgili olarak bu sayılar arasındaki bir analojiyi resmetmeye çalışmıştır. Araştırmacı çalışmasını ilköğretim ve ortaöğretim öğretmeni adayları ile yürütmüştür. Elde edilen sonuçlar öğretmen adaylarının asal ve irrasyonel sayılar arasındaki geçişi yeterince kavrayamadıklarını göstermiştir. Lee (2006) Freudenthal'ın Gerçekçi Matematik Öğretim Teorisi'ne dayanarak irrasyonel sayılarla ilgili bir durum çalışması yürütmüştür. Bu araştırmacı çalışmasının verilerini yaptığı sınıf içi gözlemlerle, video-kayıtlarıyla, görüşmelerle ve alan notlarıyla elde etmiştir. Elde edilen bulgulardan uygulanan bu öğretim yönteminin öğrencilerin irrasyonel sayı anlayışlarını geliştirdiği sonucuna ulaşılmıştır. Sirotic ve Zazkis (2007a) yaptıkları çalışmada ortaöğretim matematik öğretmeni adaylarının irrasyonel sayılarla ilgili anlayışları üzerine odaklaşmışlardır. Araştırmacılar katılımcıların sezgileri ve bilginin çeşitli boyutları (formal ve algoritmik) açısından rasyonel ve irrasyonel sayılarla ilgili anlayışlarını analiz etmişlerdir. Elde edilen sonuçlar katılımcıların sezgileri ve formal ve algoritmik bilgileri arasında irrasyonellik anlayışlarında tutarsızlıkların olduğunu göstermiştir. Giannakoulias, Souyoul and Zachariades (2007) calculus dersini alan üniversite birinci sınıf öğrencileriyle yürüttükleri çalışmada öğrencilerin reel sayılar ve temel calculus kavramları ile ilgili anlayışlarındaki zorlukları araştırmışlardır. Bu araştırmacılar çalışmalarında özellikle rasyonel ve irrasyonel sayıların tanımlanması ve bu süreçte reel sayıların yoğunluğu kadar ondalık ve kesir temsillerinin önemi üzerinde de durmuşlardır. Araştırmanın sonuçları katılımcıların büyük çoğunluğunun rasyonel ve irrasyonel sayıların tanımlanmasında zorluklara sahip olduklarını göstermiştir. Güven, Çekmez ve Karataş (2011) ilköğretim matematik öğretmeni adaylarının irrasyonel sayılarla ilgili anlayışlarını araştırmışlardır. Bu araştırmacılar yaptıkları çalışmada irrasyonel sayılarla ilgili üç boyutu (rasyonel ve irrasyonel sayıları tanımlama, rasyonel ve irrasyonel sayıları sayı doğrusu üzerinde gösterme (yerini bulma) ve rasyonel ve irrasyonel sayılarla işlemler) ele almışlardır. Çalışma 10 açık uçlu sorudan oluşan bir test kullanılarak toplam 80 öğretmen adayıyla yürütülmüştür. Araştırmacılar katılımcıların irrasyonel sayıların tanımları, rasyonel ve irrasyonel sayılar arasındaki işlemler ve bu sayıların sayı doğrusu üzerindeki ilişkileri ile ilgili yanlış anlayışlara sahip olduklarını göstermişlerdir. Zachariades, Christou ve Pitta-Pantazi (2013) öğretmen adaylarının rasyonel ve irrasyonel sayılarla ilgili muhakeme becerilerini ve bilgilerini değerlendirmek için bir model önermişlerdir. Önerdikleri bu model Sierpinska'nın kuramsal (teorik) düşünme (yansıtıcı, sistemli veya analitik düşünme) teorisine dayanmaktadır. Araştırmanın verileri 59 öğretmen adayından yazılı bir test ve görüşmeler vasıtasıyla toplanmıştır. Sonuçlar katılımcıların sistemli ve analitik düşünme gerektiren etkinliklerde daha başarılı olduklarını göstermiştir ve sadece bu başarıldığında, onlar yansıtıcı düşünme gerektiren problemleri çözebilmekteydiler. Moseley (2005) öğrencilerin reel sayılarla ilgili bilgilerinin genellikle bölümlere ayrıldığını ve bu bilgilerini daha üst düzey matematiksel bilgilerle birleştiremediklerini göstermiştir. Öğretmen adayları ve öğrencilerin bu kavramı anlamaları üzerine yapılan çalışmalarda, ait olunan kümenin tanımlanması, bir sayının rasyonel ya da irrasyonel olduğunun tespiti, farklı temsillerinin kullanımı gibi durumlarda zorlukların yaşanıldığı rapor edilmiştir. Özellikle öğretmen adaylarıyla yapılan çalışmalarda irrasyonel sayıların tanımında eksikliklerin olduğu ortaya çıkmıştır. Bu eksikliklerin de öğretmen adaylarında kavram yanılgılarının oluşmasına neden olduğu ileri sürülmüştür. İrrasyonel sayı kavramının tam anlamıyla anlaşılması için rasyonel sayılardan reel sayılara kadar tüm sayı sistemlerinin öğrenci zihninde yapılandırılmış olması gerekliliğine değinilmiştir (Fischbein vd., 1995; Giannakoulias, Souyoul, & Zachariades, 2007; Moseley, 2005; Shinno, 2007; Sirotic, & Zazkis, 2007a, 2007b; Tirosh, Fischbein, Graeber, & Wilson, 1998; Vamvakoussi & Vosniadou, 2004, 2007; Zazkis, 2005; Zazkis & Sirotic, 2004;). Reel sayıların yapısını anlamak üniversite matematiği için önceden bilinmesi gerekli bir bilgidir (Giannakoulias, Souyoul and Zachariades, 2007). Reel sayıların yapısının tam olarak anlaşılamaması ve ayrıca reel sayıların sırası ve yoğunluğu birçok bilişsel probleme sebep olmaktadır (Merenluoto & Lehtinen, 2004; Vamvakoussi & Vosniadou, 2006).

Bir sayının irrasyonelliğinin gösterilmesi üzerine yapılan çalışma sayısı oldukça azdır. Sayılar kavramını içeren ders kitaplarında bir sayının irrasyonel sayı olduğunun gösterimi sınırlı sayıda örneklerle ve iki yolla ifade edilmektedir. Bu yolu da karmaşık bulan öğrenciler, karşılaştığı başka sayıların irrasyonelliğini göstermede zorlanmaktadır (Soylu vd., 2011). Fischbein, Jehiam, ve Cohen (1995) sadece lise öğrencilerinin bu konuda belli eksikliklere sahip olmadığını öğretmen adaylarının da özellikle sayı sistemleri konusundaki matematiksel fikirlerinin ne kadar tutarsız, belirsiz ve bölük-pörçük olduğunu vurgulamıştır. Eğer öğrencilerin ve öğretmen adaylarının matematiksel kavramlar üzerindeki bakış açıları geliştirilemezse, matematik yapmalarının veya matematik deki sezgilerini geliştirmelerinin önüne geçilmiş olur.

Ders kitaplarının (Calculus, Analiz, Cebir, vb.) birçok kavram için farklı çözüm yollarına veya bakış açılarına yeterince yer vermediğini söyleyebiliriz. Literatürde var olan irrasyonel sayılarla ilgili araştırmalar ışığında bu çalışmada matematik öğretmeni adaylarının, ders kitaplarında (Calculus, Analysis, Algebra, vb…) pek yer verilmeyen ve bir sayının irrasyonel olup olmadığını göstermek için kullanılan farklı çözüm yolları ile ilgili anlayışlarının ve yaklaşımlarının belirlenmesi amaçlanmıştır.

YÖNTEM

Araştırmanın Deseni

Bu araştırma matematik öğretmeni adaylarının, literatürde var olan ancak ders kitaplarında (Calculus, Analiz, Cebir, vb…) pek yer verilmeyen ve bir sayının irrasyonel olup olmadığını göstermek için kullanılan farklı çözüm yolları ile ilgili anlayışlarını ve yaklaşımlarını belirlemek amacıyla betimsel türde tasarlanmıştır.

Katılımcılar

Çalışmanın katılımcılarını 40 matematik öğretmeni adayı oluşturmaktadır. Dördüncü sınıf öğrencilerini seçmemizin nedeni bu öğrencilerin sayı sistemleri ile ilgili yeterli oranda ders almış olmalarıdır. Öğretmen adayları lisans öğrenim hayatları boyunca aldıkları alan dersleri sayesinde sayı sistemleri konusunda donanımlı olarak yetiştirilmek istenmektedir. Özellikle Analiz I ve Soyut Cebir-Sayılar Teorisi I, II derslerinde öğretmen adayları sayılar konusunda bilgilendirilmektedirler.

Veri Toplama Araçları ve Verilerin Analizi

Matematik öğretmeni adaylarına ilk etapta araştırmacılar tarafından hazırlanan ve farklı sayıların irrasyonel olup olmadıklarının gösterilmesini içeren, açık uçlu soruların yer aldığı bir test uygulanmıştır. Daha sonra Tikekar (2007) tarafından literatüre kazandırılan ve bir tanesi sadece $\sqrt{2}$, diğer altı tanesi de tüm irrasyonel sayıların gösterimi için kullanılan farklı yollar iki ders saati boyunca (100 dakika) öğretmen adaylarına anlatılmıştır. Bu çözüm yollarının katılımcılar tarafından daha iyi anlaşılmasını sağlamak amacıyla çözüm yollarına Teklik – çiftlik, Denklemin eşitsizliği, Geometrik (sadece $\sqrt{2}$), Asal çarpanlar, Tamsayı-1, En küçük değer, Tamsayı-2 gibi isimler verilmiştir. Bu çözüm yollarının hepsinde ispat yöntemlerinden çelişki bulma yöntemi kullanılarak çözüme ulaşılmıştır. Bu çalışmada Tamsayı-1 ve Tamsayı-2 çözüm yolları aynı kabul edilerek sonuçlar değerlendirilmiştir. Bu çözüm yolları öğretmen adaylarına anlatıldıktan yaklaşık bir hafta sonra yine araştırmacılar tarafından hazırlanan ve birinci uygulamayla benzer özellikleri taşıyan test öğretmen adaylarına uygulanarak sonuçlar analiz edilmiştir. İkinci testte ek olarak öğretmen adaylarının bu çözüm yolları hakkındaki düşünceleri de yazılı olarak sorgulanmıştır. Verilerin analizinde kod ve kategori oluşturulmamıştır. Öğretmen adaylarının bu yedi farklı çözüm yolunu öğrenmeden önceki ve sonraki cevapları değerlendirilerek, bu cevaplar betimsel olarak sunulmuştur. Bu sayede bir sayının irrasyonel sayı olup olmadığının gösterilmesinde kullanılan ve öğretmen adayları tarafından en çok benimsenen çözüm yolları belirlenmeye çalışılmıştır.

BULGULAR

Bu bölümde öğretmen adaylarından elde dilen bulgular ilk ve son testteki her biri soru için ayrı ayrı değerlendirilerek sunulmuştur. Uygulanan İlk testteki birinci soru öğrencilerin ders kitaplarından sıkça aşina oldukları $\sqrt{2}$ sayısının irrasyonelliğidir. Ders kitaplarında ve derslerde $\sqrt{2}$ sayısının irrasyonelliğini göstermek için kullanılan yollar Teklik-Çiftlik ve Gauss yöntemidir. Katılımcıların büyük çoğunluğu da yaygın olarak kullanılan bu iki çözüm yolunu ve çalışmamızda da yer alan Tikekar (2007)' nin çözüm yollarından biri olan Tamsayı-2 (Tamsayı-1) diye adlandırdığımız yolu tercih etmişlerdir. Teklik-çiftlik yöntemini tercih eden katılımcılar $\sqrt{2}$ nin rasyonel sayı olduğunu düşünerek (çelişki ile ispat yöntemi) ve rasyonel sayı tanımını kullanarak $\sqrt{2}$ nin irrasyonelliğini göstermeye başlamışlardır. Fakat öğretmen adaylarının yaptıkları çözümlerde rasyonel sayı tanımlarında eksikliklerinin olduğu görülmüştür. Rasyonel sayıyı $\frac{a}{b}$ $(a \in Z, b \in Z)$ şeklinde tanımlayıp $(a, b) = 1$ aralarında asal olma noktasını eksik bırakmışlardır. Bazı adaylar ise rasyonel sayıyı $\frac{a}{b}$ $(a \in R, b \in R)$ şeklinde tanımlamışlardır. Ayrıca teklik-çiftlik yöntemini tercih eden katılımcıların çok büyük bir kısmının bu yöntemin sonunu getiremedikleri görülmüştür. Öğretmen adayları bu yöntemi tercih etmiş fakat çözüme ulaşamamışlardır. Ders kitaplarında ve derslerinde bu yöntemle $\sqrt{2}$ nin irrasyonelliği gösterildiği için bu çözüm yolunu hatırladıkları fakat sonuca ulaşamadıklarını söyleyebiliriz. Bu çözümlerle ilgili iki öğrencinin cevabı aşağıda verilmiştir.

$\sqrt{2}$ sayısının irrasyonel olup olmadığını gösteriniz.

$\frac{a}{b}$ şeklinde yazılamayan sayılara irrasyonel sayı denir. $(a,b \in \mathbb{R}$ ve $b \neq 0)$

$\sqrt{2}$ rasyonel sayı olsun.

$\sqrt{2} = \frac{a}{b} \Rightarrow a = \sqrt{2}b$

şartını sağlayan $a,b \in \mathbb{R}$ bulunamaz. Bu durumda irrasyonel sayıdır.

$\sqrt{2}$ sayısının irrasyonel olup olmadığını gösteriniz.

Bir sayı $\frac{a}{b}$ $(b \neq 0)$ şeklinde yazılabiliyorsa bu sayıya rasyonel sayı denir. $(a,b \in \mathbb{Z})$

$\sqrt{2} = \frac{a}{b}$ olduğunu kabul edelim

$(\sqrt{2})^2 = \left(\frac{a}{b}\right)^2 \Rightarrow 2 = \frac{a^2}{b^2} \Rightarrow 2b^2 = a^2$

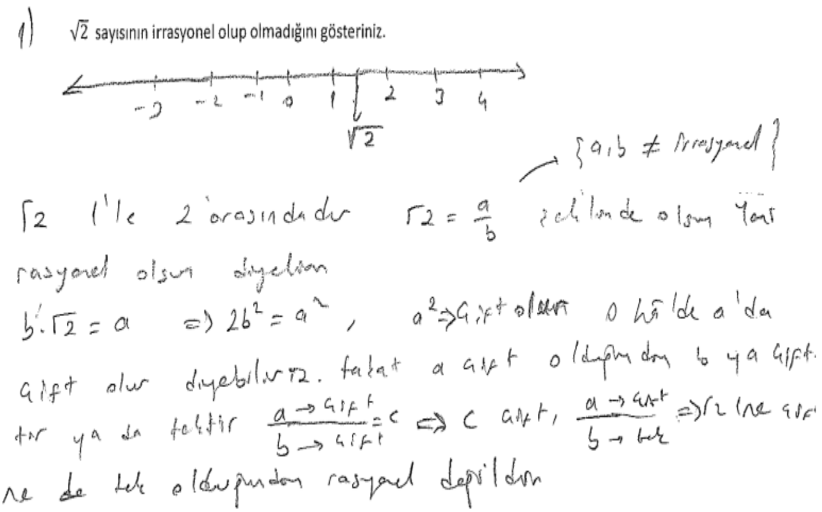
eşitliğini sağlayacak $a,b \in \mathbb{Z}$ olmadığından $\sqrt{2}$ sayısı irrasyoneldir

Katılımcıların tercih ettikleri diğer yöntem ise ders kitaplarında ve derslerinde karşılaştıkları Gauss yöntemidir:

[$a_0, a_1, a_2, a_3, \ldots, a_n$ birer tamsayı olmak üzere $a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0 = 0$

$denkleminin\ \frac{p}{q}\ şeklinde\ rasyonel\ kökü\ varsa\ p\ \ a_0\ ı\ ve\ q\ a_n\ yi\ tam\ olarak\ böler.$
]

Bu yöntemi tercih eden katılımcıların büyük bir çoğunluğu $\sqrt{2}$ nin irrasyonelliğini doğru bir biçimde göstermişlerdir. Katılımcıların tercih ettiği diğer bir yol ise ders kitaplarında yer verilmeyen Tikekar (2007) nin Tamsayı-2 (Tamsayı-1) diye adlandırdığımız çözüm yoludur. Bu çözüm yolunu tercih eden öğretmen adaylarının çoğunluğu da yine sonuca ulaşmışlar ve doğru bir çözüm yapmışlardır. Katılımcılardan üçü $\sqrt{2}$ sayısını üslü biçimde ($2^{\frac{1}{2}}$) yazıp logaritmasını alarak irrasyonelliği göstermeye çalışmış ve irrasyonel olduğunu söylemiştir. Fakat bu çözüm yollarına mantıklı bir gerekçe sunamamışlardır. İki katılımcı reel sayı doğrusunu çizerek $\sqrt{2}$ nin 1 ile 2 arasında bir değer alacağını belirtmişlerdir, fakat bu adaylarda cevaplarını mantıklı bir gerekçeye dayandıramamışlardır. Bu çözümler ile ilgili iki öğrencinin cevabı aşağıda verilmiştir.



$\sqrt{2}$ sayısının irrasyonel olup olmadığını gösteriniz.

$\sqrt{2^1} = 2^{1/2}$ sayısı rasyonel sayının rasyonel üssü olup

$\sqrt{2}$ irrasyoneldir. $\left(\sqrt{2^1} = 2^{1/2} = a \ , \ \log_2^a = \frac{1}{2}\right)$

İlk testin ikinci sorusu $\sqrt{4}$ sayısının irrasyonel olup olmadığının gösterilmesidir. Bu sorunun amacı katılımcıların tüm köklü sayıların irrasyonel olup olmayacağı hususundaki algılarını ortaya çıkarmaktır. Öğretmen adaylarının verdikleri cevaplardan tüm köklü sayıların irrasyonel sayı olacağı ile ilgili genelleme algısına sahip olmadıkları bulgusuna ulaşılmıştır. Adaylar bu soruyu cevaplarken de en fazla Gauss yöntemini tercih etmişler ve doğru çözüme ulaşmışlardır. Katılımcılar çelişki ile ispat yönteminden faydalanıp sayının rasyonel olmadığı kabulüyle başlayıp sonuçta bir çelişkiye ulaşmadıklarından, bu sayının rasyonel olduğu sonucuna varmışlardır. İlk testin üçüncü ve dördüncü sorusu ders kitaplarında örnek olarak yer verilmeyen $\sqrt{3}$ ve $\sqrt{17}$ sayılarının irrasyonelliğidir. Katılımcıların büyük çoğunluğu bu soruları cevaplarken $\sqrt{2}$ nin irrasyonelliğinde olduğu gibi Tikekar (2007) nin Teklik-Çiftlik, Tamsayı-2 (Tamsayı-1) diye adlandırdığımız ve ders kitaplarındaki Gauss yöntemini tercih etmişlerdir. Gauss ve Tamsayı-2 (Tamsayı-1) yöntemini tercih eden adaylar doğru çözüme ulaşmışlardır. Fakat Teklik-Çiftlik yöntemini tercih eden adaylar $\sqrt{2}$ de olduğu gibi rasyonel sayı tanımını kullanarak çözüme başlamışlar fakat çözümün sonunu getirememişlerdir. Bu örneklerde de katılımcıların rasyonel sayı tanımlarında eksikliklerin olduğu görülmüştür. Bununla ilgili iki öğrencinin cevabı aşağıda verilmiştir.

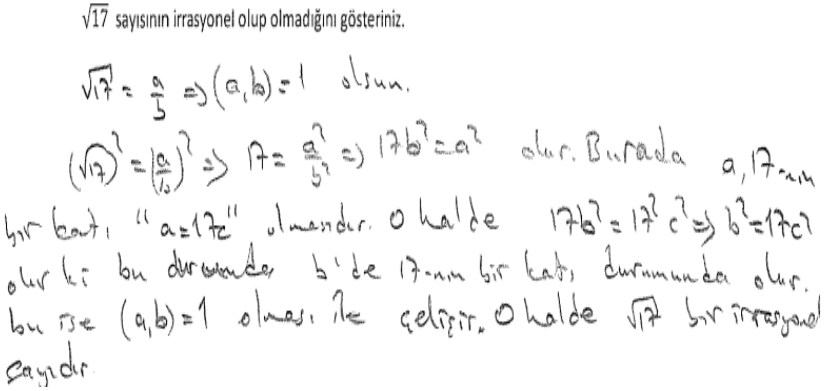
$\sqrt{3}$ sayısının irrasyonel olup olmadığını gösteriniz.

$\sqrt{3}$ rasyonel sayı kabul edelim;

$\sqrt{3} = \frac{a}{b}$ $(a, b \in \mathbb{R}$ ve $b \neq 0)$

$a = \sqrt{3}b$

$a, b \in \mathbb{R}$ bulunamaz. Bu durumda $\sqrt{3}$ irrasyoneldir.

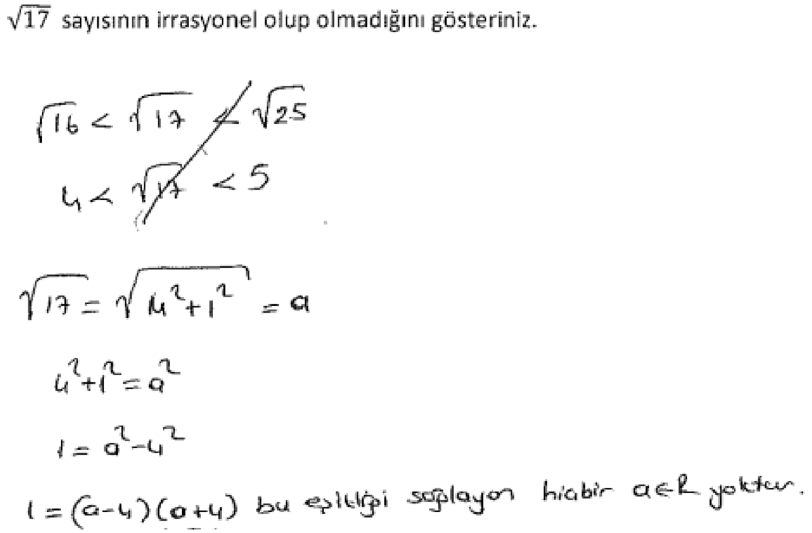


$\sqrt{17}$ sayısının irrasyonel olup olmadığını gösteriniz.

$\sqrt{17} = \frac{a}{b} \Rightarrow (a,b)=1$ olsun.

$(\sqrt{17})^2 = \left(\frac{a}{b}\right)^2 \Rightarrow 17 = \frac{a^2}{b^2} \Rightarrow 17b^2 = a^2$ olur. Burada a, 17-nin bir katı "$a=17c$" olmalıdır. O halde $17b^2 = 17^2c^2 \Rightarrow b^2 = 17c^2$ olur ki bu durumda b'de 17-nin bir katı durumunda olur. bu ise $(a,b)=1$ olması ile çelişir. O halde $\sqrt{17}$ bir irrasyonel sayıdır.

Öğretmen adaylarından dördü $\sqrt{3}$ ve $\sqrt{17}$ sayılarını bilinmeyen bir sayıya eşitleyerek ($x = \sqrt{3}\ ve\ x = \sqrt{17}$) diskriminanttan yararlanarak denklem çözmeye çalışmışlar ve buldukları köklerden sayıların irrasyonel olduklarını söylemişlerdir. Sadece bir katılımcı ise $\sqrt{17}$ sayısının reel sayı doğrusunda $\sqrt{16} < \sqrt{17} < \sqrt{25} \Rightarrow 4 < \sqrt{17} < 5$ olduğunu belirterek sayının irrasyonel olduğunu söylemiştir. Bu çözümlerle ilgili iki öğrencinin cevabı aşağıda verilmiştir.



$\sqrt{17}$ sayısının irrasyonel olup olmadığını gösteriniz.

$\sqrt{16} < \sqrt{17} \not< \sqrt{25}$

$4 < \sqrt{17} < 5$

$\sqrt{17} = \sqrt{4^2+1^2} = a$

$4^2+1^2 = a^2$

$1 = a^2-4^2$

$1 = (a-4)(a+4)$ bu eşitliği sağlayan hiçbir $a \in R$ yoktur.

$\sqrt{17}$ **sayısının irrasyonel olup olmadığını gösteriniz.**

$x = \sqrt{17}$

$x^2 = 17$

$x^2 - 17 = 0$

$(x - \sqrt{17})(x + \sqrt{17}) = 0$

$x_1 = \sqrt{17} \qquad x_2 = -\sqrt{17}$

* kökler $x = \sqrt{17}$ nin tam böleni olduğu için irrasyoneldir.

Öğretmen adaylarına uygulanan ilk testteki beşinci soruda ise $\sqrt{2} + \sqrt{3}$ gibi iki sayının toplamının irrasyonel olup olmadığı sorulmuştur. Öğretmen adaylarının büyük çoğunluğu herhangi bir çözüm yolunu kullanmadan iki irrasyonel sayının toplamının irrasyonel olacağı ile ilgili yanlış bir genellemeye vararak cevaplarını vermişlerdir. Katılımcılardan ikisi diskriminanttan denklemin köklerini bularak soruyu cevaplandırmaya çalışmış fakat doğru çözüme ulaşamamıştır. Tikekar (2007) nin kullandığı çözüm yolları öğretmen adaylarına anlatıldıktan sonra birinci teste benzer olan ikinci test uygulanmıştır. İkinci testin birinci testten farklı olan tarafı aynı soruların bu kez araştırmacının istediği yollardan çözümünün istenmesidir. İkinci testin birinci sorusunda sadece $\sqrt{2}$ için yapılan geometrik ispat yöntemini kullanarak katılımcıların $\sqrt{2}$ nin irrasyonelliğini göstermeleri istenmiştir. Öğretmen adaylarından 10 u geometrik ispatı kullanarak $\sqrt{2}$ nin irrasyonelliğini bulmuşlardır. Daha önce böyle bir çözüm yolundan haberi olmayan katılımcıların bu oranda doğru çözüme ulaşmaları dikkate değerdir. İkinci testin ikinci sorusunda $\sqrt{2} + \sqrt{3}$ toplamının irrasyonelliğinin Denklemin Eşitsizliği çözüm yolu kullanılarak çözülmesi istenmiştir. Katılımcıların 30 unun bu çözümü yapmaya çalıştıkları bunlardan 20 sinin doğru çözüme ulaştığı fakat 10 unun bu yolu denemesine rağmen doğru çözüme ulaşamadıkları görülmüştür. Denklemin Eşitsizliği adını verdiğimiz çözüm yolunda rasyonel sayı tanımında var olan $(a, b) = 1$ aralarında asal olma durumu kullanılarak çözüme ulaşılmaktadır. Başlangıçta rasyonel sayı tanımında eksiklikleri olan katılımcıların bu çözüm yolunda bu eksiklikleri de giderdiklerini söyleyebiliriz. İkinci testin üçüncü sorusu $\sqrt{3}$ sayısının irrasyonelliğinin Asal Çarpanlar yöntemi kullanılarak çözülmesidir. Bu çözüm yolu bir sayının çarpanlara ayrılmış halinin tek şekilde yazılabileceği üzerinde durmaktadır. Öğretmen adaylarının 23 ü bu yolu denemişler ve doğru sonuca ulaşmışlardır. İkinci testin son sorusu $\sqrt{17}$ sayısının irrasyonelliğinin katılımcıların istedikleri herhangi bir yöntemle çözebilmeleridir. Öğretmen adaylarının cevapları incelendiğinde, 8 inin Teklik-çiftlik (6 doğru çözüm, 2 yanlış çözüm), 10 unun Denklemin eşitsizliği (7 doğru çözüm, 3 yanlış çözüm), 11 inin Asal çarpanlar (10 doğru çözüm, 1 yanlış çözüm), 9 unun Tamsayı-2 (Tamsayı-1) (7 doğru çözüm, 2 yanlış çözüm) çözüm yolarını tercih ettikleri görülmüştür. Ayrıca öğretmen adaylarından hiçbiri Geometrik yolu tercih etmemiştir (çünkü geometrik çözüm yolu sadece $\sqrt{2}$ için geçerlidir) ve iki öğretmen adayı da bu soruyu boş bırakmıştır. Elde edilen sonuçlardan; öğretmen adayları bir sayının irrasyonelliğini göstermede kullanılan farklı çözüm yaklaşımlarını benimsemiş ve büyük bir oranda da bu çözüm yaklaşımlarını kullanarak doğru çözüme ulaşmışlardır.

İkinci testte yukarıdaki sorulara ek olarak öğretmen adaylarının ispat yöntemleri hakkındaki düşüncelerini almak için sorular yöneltilmiştir. Katılımcılara ilk olarak "irrasyonel sayılar için kullanılan bu çözüm yolları hakkındaki düşünceleriniz nelerdir?" şeklinde bir soru yöneltilerek, düşüncelerini yazılı olarak ifade etmeleri istenmiştir. Öğretmen adaylarının neredeyse tamamı şimdiye kadar bir sayının irrasyonelliği için iki çözüm yolunu kullandıklarını ifade etmişlerdir. Bunun da bir konu hakkındaki çok yönlü düşünmeyi, mantıksal çıkarımlar yapmayı engellediğini ve ezbere yönelttiğini söylemişlerdir. Katılımcılar bu çözüm yollarının bazılarının daha pratik, bazılarının ise üst düzey zihinsel beceri gerektiren yollar olduğunu düşünmektedirler. Öğretmen adayları bu çözüm yollarının ilgi çekici, anlamlı ve açıklayıcı olduğunu dile getirmişlerdir. Üniversitedeki ilgili derslerde ve ders kitaplarında bu çözüm yollarına yer verilmesi gerektiğini vurgulamışlardır. Ayrıca katılımcılar bu çözüm yollarından geometrik çözüm yolunun ilgi çekici olmasına rağmen zor olduğunu belirtmişlerdir. Bununla ilgili olarak iki öğrencinin düşüncesi aşağıda verilmiştir.

Hepside kolay anlaşılır ve kavrayıcı nitelikte. Sonucun aslında hangi kaynaktan geldiğini daha iyi anlayabildik. Geometrik birazcık uğraştırıcı, hepsi soyut düşünmeye dayalı olduğu için derste dinlenmeli ve tekrar etmek önemli.

Şimdiye kadar tek bir şekilde ispat yöntemini kullanmıştık Bu da bir konu hakkında çok yönlü düşünmeyi mantıksal çıkarsamalar yapmayı engellemektedir. Ezbere yöneltmekte farklı ispat yöntemlerinin bazılarını daha pratik bazılarının çok daha zihinsel gelişme gerektiğini düşünüyorum.

Katılımcılara ikinci olarak "bu çözüm yollarından hangisini daha pratik buluyorsunuz?" şeklinde bir soru yöneltilmiştir. Öğretmen adaylarından 7 si Denklemin eşitsizliği, 12 si Tamsayı-2 (Tamsayı-1), 14 ü Asal çarpanlar, 5 i Teklik-çiftlik, 2 si Geometrik çözüm yolunun daha pratik olduğunu söylemişlerdir. Öğretmen adaylarından hiçbirinin En küçük değer çözüm yolunu tercih etmemiş olmaları ilgi çekicidir. Ayrıca geometrik çözüm yolunu pratik bulan katılımcılar bu çözüm yolunun somutlaştırmayı sağladığı ve görsel olduğu için daha pratik olduğunu ifade etmişlerdir. Bununla ilgili olarak bir öğrencinin düşüncesi aşağıda verilmiştir.

Geometrik ispat yöntemidir. ispatı şekil üzerinde ispat yapmak daha somutlaştırıyor. Uzun sürebiliyor ama anlaması daha kolay oluyor.

Öğretmen adaylarının yazılı olarak düşüncelerini aldığımız son soru ise "sayıların irrasyonelliğinin gösterimi için ders kitaplarında yer alan çözüm yolları yeterlimi dir? Neden?"Sorusudur. Öğretmen adayları ders kitaplarında yer alan çözüm yöntemlerinin kesinlikle yeterli olmadığı görüşündedirler. Katılımcılar farklı bakış açılarına sahip olmak, daha pratik yollar denemek, yaratıcı düşünmeyi geliştirmek ve daha üst düzey zihinsel becerilere ulaşmak için farklı çözüm yollarının verilmesi gerektiğini düşünmektedirler. Bununla ilgili olarak bir öğrencinin düşüncesi aşağıda verilmiştir.

Yeterli değildir. Çünkü ispatta önemli olan farklı düşünceler ortaya koyarak sonuca ulaşmaktır. Notasyonları doğru kullanırsan, doğru sonuca ulaşırsan ve yolun mantıklıysa her yol ispat olabilir. Bunları ders kitabındaki gibi tek bir yolla sınırlamayı doğru bulmuyorum.

SONUÇ, TARTIŞMA ve ÖNERİLER

Öğretmen adaylarının uygulanan ilk testte ders kitaplarında olan ve derslerinde öğrendikleri yöntemlerin dışına pek çıkamadıkları görülmüştür. Ayrıca katılımcıların rasyonel ve irrasyonel sayı algılarının ve tanımlarının da eksik olduğu verdikleri cevaplardan görülmüştür. Elde edilen bu sonuç literatürde var olan diğer araştırma (Arcavi et al. 1984; Fischbein, Jehiam, and Cohen,1995; Güven, Çekmez & Karataş, 2011; Moseley 2005; Tirosh et al. 1998) sonuçlarıyla benzerdir. Tikekar (2007) tarafından oluşturulan yedi farklı çözüm yolunun anlatılmasından sonra uygulanan testin sonuçları öğretmen adaylarının bir önceki testte kullandıkları yollardan farklı olan bu yolları kullanmaya başladıklarını göstermiştir. İkinci testin sonuçlarından; ders kitaplarında yer almayan bu farklı çözüm yollarının öğretmen adayları tarafından tercih edilmesi, bu yöntemlerin anlaşılırlığının ve kullanışlılığının yüksek olduğunun göstergesidir diyebiliriz. Ayrıca katılımcılar, bu çözüm yollarıyla ilk kez karşılaştıklarını ve oldukça mantığa uygun ve akılda kalıcı yollar olduklarını belirtmişlerdir.

Her bireyin bir olayı anlama yolu farklıdır. Bu sebeple özellikle matematikle alakalı kavramların ya da çözüm yollarının öğretiminde de sınırlı sayıda yolu benimsemek birçok öğrencinin düşünce yapısını göz önüne almamak anlamına gelebilir. Bu durum, doğası gereği epistemolojik engellere sahip olan konularda daha büyük önem kazanmaktadır. Özellikle ders kitaplarında irrasyonel sayılara ait kısımlar artık kalıplaşmış sayı örnekleri üzerinden anlatılıp geçilmektedir. Bu nedenle öğrenciler farklı çözüm yollarından haberdar değildirler. Araştırma sırasında irrasyonel sayıların gösterimine ait yedi farklı çözüm yolunu öğrenen öğretmen adayları bu sayede çok daha farklı düşünebildiklerini, kendilerini tam bir matematikçi gibi hissettiklerini belirtmişlerdir. Matematiği sıkıcı ve anlaşılmaz olmaktan çıkaran bu tarz çözüm yollarının ders kitaplarında yer alması, öğrencilerin matematiksel akıl yürütme güçlerini arttırabilir. Böylece sadece ders kitabı yazarının veya öğretmenin anladığı çözüm yollarına değil, değişik düşünce yapısına sahip kişilerinde kolayca anlayabileceği çözüm yollarına yer verilmelidir.

KAYNAKLAR

Arcavi, A., Bruckheimer, M. and Ben-Zvi, R. (1987). History of mathematics for teachers: The case of irrational numbers. *For the Learning of Mathematics,* 7(2), 18–23.

Baki, A. (2008). *Kuramdan uygulamaya matematik eğitimi*. Ankara: Harf Yayınları.

Berge, A. (2008). The completeness property of the set of real numbers in the transition from calculus to analysis. *Educational Studies in Mathematics*, 67, 217 –235.

Fischbein, E., Jehiam, R. & Cohen, D. (1995). The concept of irrasyonel numbers in high school students and prospective teachers. *Educational Studies in Mathematics*, 29(1), 29-44.

Giannakoulias, E., Souyoul, A. & Zachariades, T. (2007). Students' thinking about fundamental real numbers properties. In D. Pitta-Pantazi & G. Philippou (Eds.), *Proceedings of the Fifth Congress of the European Society for Research in Mathematics Education* (pp.416-425), Cyprus: CERME, Department of Education, University of Cyprus.

Gözen, Ş. (2006). *Matematik ve öğretimi,* İstanbul: Evrim Yayınevi.

Güven, B., Çekmez, E. & Karataş, I. (2011). Examining preservice elementary mathematics teachers' understandings about irrational numbers. *PRIMUS: Problems, Resources, and Issues in Mathematics Undergraduate Studies*, 21(5), 401-416.

Lee, Y. R. (2006). A case study on the introducing methods of the irrational numbers based on the Freudenthal's Mathematising Instruction. In Novotná, J., Moraová, H., Krátká, M. & Stehlíková, N. (Eds). *Proceedings 30th Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education*, (1), (p. 277), July 16-21, Prague, Czech Republic.

Merenluoto, K. & Lehtinen, E. (2004). Number concept and conceptual change towards systemic model of the processes of change. *Learning and Instruction,* 14, 519-539.

Moseley, B. (2005). Students' early Mathematical Representation knowledge: The effects of emphasizing single of multiple perspectives of the rational number domain in problem solving, *Educational Studies in Mathematics*, 60(1), 37-69.

Peled, I. & Hershkovitz, S. (1999). Difficulties in knowledge integration: Revisiting Zeno's paradox with irrational numbers. *International Journal of Mathematical Education in Science and Technology*, 30(1), 39–46.

Sertöz, S. (2002). *Matematiğin aydınlık dünyası*, TÜBİTAK popüler bilim kitapları 36, Ankara: Semih ofset.

Shinno, Y. (2007). On the teaching situation of conceptual change: Epistemological considerations of irrational numbers. In J. H. Woo, K. S. Park, & D. Y. Seo (Eds.), *Proceedings of the 31st. Annual General Meeting of the International Group for the Psychology of Mathematics Education (PME31),* 4, 185-192.

Sirotic, N. & Zazkis, R. (2007a). İrrational numbers: The gap between formal and intuitive knowledge. *Educational Studies in Mathematics*, 65, 49-76.

Sirotic, N. & Zazkis, R. (2007b). İrrational numbers on the number line – where are they? *International Journal of Mathematical Education in Science and Tecnology, 38*(4), 477-468.

Soylu, Y., Akgün, L., Dündar, S. & İşleyen, T. (2011). Bir sayının irrasyonel sayı olduğunu farklı bir metotla gösterme. *Procedia Social and Behavioral Sciences* 15, 3277–3280, http://dx.doi.org/10.1016/j.sbspro.2011.04.285

Tall, D. O. (2001). Natural and formal infinities. *Educational Studies in Mathematics,* 48(2-3), 199-238.

Tall, D. O. & Schwarzenberger, R. L. E. (1978). Conflicts in the learning of real numbers and limits. *Mathematics Teaching*, 82, 44–49.

Tiketar, V. G. (2007). Seven different proofs of the irrationality of $\sqrt{2}$. *Resonance, 12*(12), 31-39.

Tirosh, D., Fischbein, E., Graeber, A. & Wilson, J. (1998). Prospective elementary teachers' conceptions of rational numbers. Retrieved March 5th, 2012 from the World Wide Web: http://jwilson.coe.uga.edu/Texts.Folder/Tirosh/Pros.El.Tchrs.html.

Tirosh, D. & Tsamir, P.(2006). Conceptual change in mathematics learning: The case of infinite sets. *Proceedings 30th Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education*, 1, p.159, July 16-21, Prague, Czech Republic.

Vamvakoussi, X. & Vosniadou, S .(2004). Understanding the structure of the set of rational numbers: a conceptual change approach. *Learning and Instruction*, 14, 453–467.

Vamvakoussi, X. & Vosniadou, S. (2007). How many numbers are there in a rational numbers interval? Constrains, synthetic models and the effect of the number line. In S. Vosniadou, V. Baltas, & X. Vamvakoussi, (Eds), *Re-framing the conceptual change approach in learning and instruction* (pp. 265-282). Amsterdam: Elsevier.

Zachariades, T., Christou, C. & Pitta-Pantazi, D. (2013). Reflective, systemic and analytic thinking in real numbers. *Educational Studies in Mathematics,* 82, 5-22.

Zazkis, R. (2005). Representing numbers: Prime and irrational. *International Journal of Mathematical Education in Science and Technology, 36*(2–3), 207–218.

Zazkis, R. & Sirotic, N. (2004). Making sense of irrational numbers: Focusing on representation. In M.J. Hoines, A.B. Fuglestad (eds.), *Proceedings of 28th International Conference for Psychology of Mathematics Education*, 4, 497–505, Bergen, Norway.

SUMMARY

The number of studies conducted to show the irrationality of a number is considerably scarce. Representation of the irrationality of a number is expressed with a limited number of examples and via two methods in the textbooks that feature the concept of numbers. Students also find this method complicated, and they experience difficulty in showing the irrationality of other numbers (Soylu et al, 2011). Fischbein, Jehiam, and Cohen (1995) emphasized that not only high school students have certain deficiencies in this regard, but also pre-service teachers' mathematical ideas are very vague, incoherent, ambiguous, and fragmentary; especially in regards to number systems. If understandings of students and pre-service teachers on mathematical concepts are not improved, they are prevented from performing mathematics or improving their intuitions in mathematics. We can state that textbooks or mathematics curriculums do not adequately feature different methods of solution or viewpoints for many concepts. In view of studies on irrational numbers within the literature, the aim of this study is to identify pre-service mathematics teachers' understandings and approaches of different methods of solution which are not much featured in textbooks (Calculus, Analysis, Algebra, etc.) and curriculums, and which are used to show whether or not a number is irrational.

The participants of the study are composed of 40 pre-service mathematics teachers (the fourth-year students). The reason for choosing fourth-year students is that these students took an adequate number of courses on number systems. In the first stage, pre-service mathematics teachers were administered a test prepared by the researchers which featured the representation of whether or not different numbers are irrational, and which contained open-ended questions. Then, different methods offered to the literature by Tikekar (2007) [Appendix], one of which is used to represent only $\sqrt{2}$ whereas the other six are used to represent all irrational numbers, were given to the pre-service teachers for two course hours (100 minutes). In order to enable the participants to understand these solution methods better, the methods were given names, such as Oddness-Evenness, Inequality of the Equation, Geometric (only $\sqrt{2}$), Prime Factors, Whole Number-1, The Smallest Value, and Whole Number-2. They reached the solution using the proof by contradiction method, which is among the methods of proof, in all the above-mentioned methods of solution. Whole Number-1 and Whole Number-2 ways of solution were taken as the same, and results were evaluated accordingly. These methods of solution were explained to the pre-service teachers, and a test that was also prepared by the researchers and that had similar features with the first implementation was administered to the pre-service

teachers approximately one week later, and the results were analyzed. In the second test, pre-service teachers' understandings on these methods of solution were also questioned in written form. In the analysis process, pre-service teachers' responses given before and after learning these seven different methods of solution were evaluated, and answers were presented descriptively. Thus, an attempt was made to identify the methods of solution, which are used to show whether or not a number is irrational, and which are most embraced by the pre-service teachers.

The results of the test that was administered after giving seven different methods of solution formed by Tikekar (2007) showed that the pre-service teachers began using these methods, and that these are different from the methods they used in the previous test. In view of the results of the first test that was conducted in this research, it was observed that the participants had deficiencies in the definitions of rational and irrational numbers. This result is similar to the results of other research existing within the literature (Arcavi et al. 1984; Fischbein, Jehiam, and Cohen,1995; Güven, Çekmez & Karataş 2011; Moseley 2005; Tirosh et al. 1998). In view of the results of the second test, we can state that pre-service teachers' preference of these different methods of solution is an indication of the understandability and practicality of these methods. Moreover, the participants stated in their written opinions that they encountered these methods of solution for the first time, and that they were quite logical and retention methods. Everyone has a distinctive way of understanding a situation. For that reason, embracing a limited number of ways in especially teaching mathematical concepts or ways of solution may mean overlooking the mentality of many students. This condition has a greater importance in the subjects that have epistemological obstacles by their nature. In textbooks, in particular, the sections on irrational numbers are given via conventional examples on numbers, and they were not given emphasis. Therefore, students are not aware of different methods of solution. Pre-service teachers who learned seven different methods of solution regarding the representation of irrational numbers during the research stated that they were able to think much more differently; they felt like a mathematicians. Featuring such methods of solution that rid mathematics of its boringness and vague in textbooks may increase students' power of mathematical reasoning. Thus, methods of solution that can be understood by everyone must be featured as distinct from methods of solution that can be understood by only writers of textbooks or teachers.