


Araştırma Makalesi

DÖRTGENSEL BİR YÜZEYİN TİTREŞİMİ VE ÜRETİLEN SESİN SİMÜLASYONU

Elif EKŞİ[†], Fatma Nur AKI^{††}, Rifat YAZICI[‡][†] İstanbul Ticaret Üniversitesi, Fen Bilimleri Enstitüsü, İstanbul, Türkiye^{††, ‡} İstanbul Ticaret Üniversitesi, Bilgisayar Mühendisliği Bölümü, İstanbul, Türkiye

elifeksi95@gmail.com, fnaki@ticaret.edu.tr, ryazici@ticaret.edu.tr

 0000-0003-4011-9578,**Atf/Citation:** Ekşi, E., Akı, F., N., YAZICI, R., (2021). Dörtgenel Bir Yüzeyin Titreşimi ve Üretilen Sesin Simülasyonu, *Journal of Technology and Applied Sciences* 4(1), 129-135.

ÖZET

Günümüzde, havacılık, otomotiv, inşaat gibi bir çok endüstri ince plaka türü malzemeleri kullanmaktadır. Bu malzemelerin titreşimleri halinde oluşturacakları ses radyasyonu istenmeyen gürültülere de sebep olmaktadır. Bu çalışmada dörtgenel ince bir plakanın titreşim hareketi ve bu titreşim ile üreteceği sesin matematiksel denklemleri düzlemsel iki boyutlu dalga denklem çözümleri ve Kirchoff İnce Plaka teoremi ile birlikte türetilmiştir. İnce plakanın titreşimi MATLAB programı kullanılarak görselleştirilmiş ve ses işareti eklenmiştir. Elde edilen modelin geliştirilerek, titreşen ince bir levhadan yayılan sesi (gürültüyü) azaltmak gibi daha ileri analizler için kullanılabilmesi amaçlanmıştır.

Anahtar Kelimeler: Fizik tabanlı simülasyon, İnce plaka titreşimi, İnce plaka titreşimi ile yayılan ses.

SIMULATION OF A RECTANGULAR THIN PLATE VIBRATION AND PRODUCED SOUND

ABSTRACT

Nowadays, many industries such as aviation, automotive and building industries use thin plate type materials. The sound radiation from these materials create in the form of vibrations also causes unwanted noises. In this study, the vibrational motion of a thin rectangular plate and the mathematical equations of the sound produced by two dimensional wave equations and the Kirchoff Thin Plate theorem. Thin plate vibration was visualized and produces sound has been obtained by using MATLAB. It is aimed that the model obtained can be developed and used for further analysis such as reducing the sound (noise) producing from a vibrating thin plate surfaces.

Keywords: Physics based simulation, Thin plate vibration, Thin plate vibration sound simulation.

Not: Bu yayın İstanbul Ticaret Üniversitesi, Fen Bilimleri Enstitüsü Bilgisayar Mühendisliği Bölümü Yüksek Lisans öğrencisi Elif Ekşi'nin yüksek lisans tezinden üretilmiştir.

Geliş/Received : 16.01.2021

Gözden Geçirme/Revised : 27.01.2021

Kabul/Accepted : 28.01.2021

1. GİRİŞ

Fiziksel Tabanlı Ses Sentezi, katı cisim hareketleri aracılığıyla çarpışma seslerini sentezleme işlemidir. Temelleri titreşim teorisinin derinliklerinde yatmaktadır. Kısaca, bir nesneye vurulduğunda, üzerine uygulanan kuvvetler iki ana bileşene ayrılabilir. Birincisi, nesnenin tepki olarak nasıl hareket edeceğini (*yani devrilir mi, yerde yuvarlanır mı, havaya fırlatılır mı?*) belirleyen "dinamik kuvvet" dir. Bu "dinamik kuvvetler" tipik olarak modern etkileşimli uygulamalarda "fizik motorları" kullanılarak modellenir. İkinci bileşen elastik tepkidir (*örneğin, germe, sıkıştırma veya titreşim*). Sesin gerçek zamanlı olarak üretilmesi bu elastik kuvvetler aracılığıyla gerçekleşir. Tipik olarak bir nesneye vurulduğunda cisim titrer.

Fiziksel tabanlı ses sentezi yöntemleri, çarpışma gibi fiziksel etkileşimler esnasında oluşan sesi, cisimlerin malzeme cinsine ve geometrisine dayanan bazı faktörlere bağlı olarak ton ve tınların değişikliğini otomatik olarak üretebilmektedir (Ekşi E. vd, 2020).

Birçok farklı cismin fizik tabanlı animasyonu oluşturulabilir. Bunlar; Katı cisimler, Deforme olabilen nesnelere (*kas, kauçuk...*), Kabuklar/tabaklar (*Kumaş, kâğıt, sac metal ...*), Çubuklar (*Saç teli, teller, kordonlar ...*), Gazlar (*Hava, ateş, duman, kabarcıklar ...*), Sıvılar (*Su, yağ, bal, dalgalar ...*)'dir. Fizik tabanlı modellerde, cisimler gerçek hayattaki gibi kütle, ivme, hız gibi fiziksel özelliklere sahiptir.

Zhang vd. (2005) makalesine göre, günümüzde mevcut olan tüm ses sentezi yaklaşımları arasında, fizik tabanlı yöntemler önemli bir rol oynamaktadır. (Raghuvanshi ve Lin, 2006)'in makalesine göre cisimlerin yüzey titreşimlerini gerçek zamanlı olarak ayrıklaştırılmış fiziksel modeller kullanarak modelleme kavramı ilk olarak Florens ve Cadoz (1991) tarafından önerilmiştir.

Doğrusal modsal ses modeli, bilgisayar animasyonunda ve sanal ortamlarda çarpışan katı cisimlerin sesini çözmek için en popüler yaklaşımdır [van den Doel et al. 2001; O'Brien vd. 2002]. Bu yöntem, çok çeşitli nesnelere tarafından üretilen çarpışmanın neden olduğu çınlama sesini verimli ve doğru bir şekilde yakalar. Akustik aktarım işlevlerini değerlendirmek için çok sayıda yöntem- Helmholtz denkleminin titreşimli nesnelere nasıl ses ürettiğini karakterize eden çözümleri, daha gerçekçi sonuçlar elde etmek için modal ses algoritmalarıyla birleştirilmiştir. (Chadwick,2012).

Zhou vd. (2006) makalesine göre, dikdörtgen bir bölgede düzgün dağılmış yay kütlelerine sahip dikdörtgen plakaların serbest titreşimi incelenmiştir. Yüksek doğrulukta sayısal sonuçlar elde edilmiştir. Bir plakanın ve dağıtılmış yay kütleli sisteminin bazı benzersiz dinamik özellikleri gözlemlenmiş ve tartışılmıştır.

Zhou vd. (2012) makalesi ise, yaylı kütlelerle tutturulmuş ince dikdörtgen bir levhanın serbest titreşiminin tam bir çözümünü sunar. Levha, iki zıt kenarda basitçe desteklenir ve diğer kenarlarda elastik olarak desteklenir.

Tanaka vd. (1998), esnek levha şeklinde cisimlerin serbest titreşimlerini integral denklem sürecini kullanarak çözmüştür. Elde edilen integral denklemler kümesi, sınır alan elemanı yöntemi ile ayrıştırılır ve cebirsel özdeğer denklemleri sistemine indirgenir. Önerilen yöntemin potansiyel faydası bazı örnek hesaplamalarla gösterilmiştir.

Myung (2003), plaka yapılarının serbest titreşim analizi için sonlu elemanlar transfer sertlik katsayısı yöntemini geliştirmiştir. Bu yöntem, sonlu elemanlar modelleme teknikleri ile transfer sertlik katsayısı yöntemindeki sertlik katsayısının transfer tekniğinin kombinasyonuna dayanmaktadır.

Kumar vd. (2018), ince plakanın doğal frekans ve mod şekillerini çıkarmak için dinamik sertlik yöntemini kullandı. Dinamik sertlik matrisini formüle etmek için fonksiyonel olarak derecelendirilmiş plakanın fiziksel nötr yüzeyi konseptiyle birlikte klasik plaka teorisi kullanılır.

Zaman vd. (2017), çalışmalarında ince bir plakanın titreşimi ile üretilen ses basıncı için matematik denklemleri türetmişler, ANYS simülasyon programında analiz etmişler ve MATLAB ile görselleştirmişlerdir. Dört rezonans frekansı tespit etmişler ve matematiksel modelin hatasının %10'un altında olduğunu tespit etmişlerdir.

Chauhan vd. (2019) ,dinamik sertlik yöntemi, işlevsel olarak derecelendirilmiş ince bir dikdörtgen plakanın serbest titreşimini analiz etmek için kullanılmıştır. Klasik plaka teorisi, işlevsel olarak derecelendirilmiş bir malzeme plakasının dinamik sertlik matrisini geliştirmek için kullanılır.

Ganesh vd. (2019), kenarlarından sabitlenmiş, dörtgenel bir yüzeyin titreşimini analiz etmişler ve farklı titreşim modları için frekans karşılaştırması yapmışlardır. Bu çalışmada bir ses simülasyonu yoktur.

Bir çok ses kaynağı yüzey titreşimi ile kendisini çevreleyen akışkan (hava ya da sıvı) içerisinde ses radyasyonunun yayılmasını sağlar. Bu sesler müzik aletleri ya da hoparlör gibi cisimlerden geliyor ise üretilmesi istenen ses iken, bir makine ya da insanların içinde yolculuk yaptığı bir taşıt ise üretilmesi arzu edilmeyen bir ses türüdür. Üretilen sesin kalitesinin artırılması ya da sönümlendirilmesi gerektiği durumlarda tasarımcılar tarafından ses üretim mekanizmalarının iyi anlaşılması gerekmektedir.

Bu çalışmada dörtgenel ince bir yüzeyin titreşiminin fiziksel modeli, iki boyutlu yüzey titreşim denklemleri ve Kirchoff İnce Plaka Teorisi kullanılarak, yüzey titreşimi ile oluşacak sesin simülasyonu ise sönümlü-kütle yay sistemi eklenerek ve aynı anda çalıştırılarak oluşturulmuştur. Bu hibrit modelin diğer benzeri çalışmalar ile karşılaştırılması yapılmıştır.

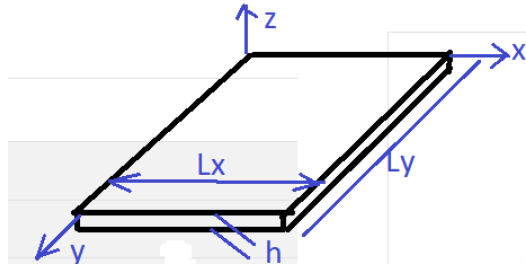
2. Yöntem

Matematiksel Model ve Uygulama

Bu bölümde, kenarlarından sabitlenen dörtgenel bir levhanın titreşimini modelleyen ve bu titreşim ile oluşan ses radyasyonunun hesaplanmasına izin veren matematiksel bir modelin türetilmesi açıklanmaktadır. İlk olarak, levhanın titreşimi sırasındaki dinamik tepkisi için ve ardından yayılan ses radyasyonu için matematiksel denklemler türetilir.

Düzlem Plakanın Serbest Titreşim Modlarının bulunması

L_x ve L_y boyutlarında (x,y) düzlemi içinde yer alan dikdörtgen şekilde bir düzlem plakanın serbest titreşim modlarının hesaplaması şu şekildedir,



Şekil 2.1. L_x , L_y , h boyutlarında ince dörtgenel levha.

L_x ve L_y boyutlarında kenarları olan dikdörtgen bir levhanın (yerçekiminin olmadığı durumlarda) hareketini bulmak için iki boyutlu dalga denklemi (1) ile verilmiştir,

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = \frac{1}{v^2} \frac{\partial^2 z}{\partial t^2} \quad (1)$$

burada $z(x, y, t)$ levha üzerindeki bir noktanın (x, y) konumunda ve t zamanında dikey yer değiştiğidir.

$$z(x, y, t) = X(x)Y(y)T(t) \quad (2)$$

$$YT \frac{d^2 X}{dx^2} + XT \frac{d^2 Y}{dy^2} = \frac{1}{v^2} \frac{d^2 T}{dt^2} \quad (3)$$

Burada kısmi türevler tam türevlere dönüşmektedir. Denklem (3) v^2 / XYT ile çarpılarak elde edilir.

$$\frac{v^2}{X} \frac{d^2 X}{dx^2} + \frac{v^2}{Y} \frac{d^2 Y}{dy^2} = \frac{1}{T} \frac{d^2 T}{dt^2} \quad (4)$$

Sol ve sağ tarafların her ikisi de bir sabite eşit olmalıdır, böylece sağ tarafı şu şekilde yazarak denklemi ayrabiliriz

$$\frac{1}{T} \frac{d^2 T}{dt^2} = -\omega^2 \quad (5)$$

$$\frac{v^2}{X} \frac{d^2 X}{dx^2} + \frac{v^2}{Y} \frac{d^2 Y}{dy^2} = -\omega^2 \quad (6)$$

$$\frac{1}{X} \frac{d^2 X}{dx^2} = \frac{1}{Y} \frac{d^2 Y}{dy^2} - \frac{\omega^2}{v^2} = -k_x^2 \quad (7)$$

Sol ve sağ tarafların her ikisi de bir sabite eşit olması gerektiğinden, $Y(y)$ için (8) elde edilir.

$$\frac{1}{Y} \frac{d^2 Y}{dy^2} = k_x^2 - \frac{\omega^2}{v^2} = -k_y^2 \quad (8)$$

$$k_x^2 + k_y^2 = \frac{\omega^2}{v^2} \quad (9)$$

Benzer şekilde, $z(L_x, y, t) = 0$ ve $z(x, L_y, t) = 0$ koşulları, $\sin(k_x L_x) = 0$ ve $\sin(k_y L_y) = 0$ verir, dolayısıyla $k_x L_x = m\pi$ ve $k_y L_y = n\pi$, burada p ve q tamsayılardır.

$$k_x = \frac{m\pi}{L_x} \quad k_y = \frac{n\pi}{L_y} \quad (10)$$

$$z_{mn}(x, y, t) = [A_{mn} e^{J\omega_{mn}t} + B_{mn} e^{-J\omega_{mn}t}] \sin\left(\frac{m\pi x}{L_x}\right) \sin\left(\frac{n\pi y}{L_y}\right) \quad (11)$$

Genel çözüm, tüm olası m ve n değerlerinin toplamıdır, dolayısıyla nihai çözüm:

$$z(x, y, t) = \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} \sin\left(\frac{m\pi x}{L_x}\right) \sin\left(\frac{n\pi y}{L_y}\right) (A_{mn} e^{J\omega_{mn}t} + B_{mn} e^{-J\omega_{mn}t}) \quad (12)$$

$$\omega_{mn} = \pi v \sqrt{\left(\frac{m}{L_x}\right)^2 + \left(\frac{n}{L_y}\right)^2} \quad (13)$$

Sistemin doğal frekansları ω_{mn} (13) ile bulunur. Denklem 12'deki A_{mn} ve B_{mn} değerleri de şöyledir:

$$A_{mn} = \frac{4}{L_x L_y} \int_0^{L_y} \left[\int_0^{L_x} z(x, y, 0) \sin\left(\frac{m\pi x}{L_x}\right) dx \right] \sin\left(\frac{n\pi y}{L_y}\right) dy \quad (14)$$

$$B_{mn} = \frac{4}{\omega_{mn} L_x L_y} \int_0^{L_y} \left[\int_0^{L_x} \frac{\partial z}{\partial t}(x, y, 0) \sin\left(\frac{m\pi x}{L_x}\right) dx \right] \sin\left(\frac{n\pi y}{L_y}\right) dy \quad (15)$$

Klasik Kirchoff İnce Plaka teorisinde denklem (13) yerine, cismin fiziksel parametrelerine bağlı olarak denklem (16) ile dörtgenel plakanın titreşim frekansları bulunmaktadır.

$$\omega_{mn} = \sqrt{\frac{D}{\rho h}} \left[\left(\frac{m\pi}{a}\right)^2 + \left(\frac{n\pi}{b}\right)^2 \right] \quad (16)$$

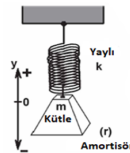
$$D = \frac{Eh^3}{12(1-\theta^2)} \quad (17)$$

E = Young Modülü, ρ = maddenin yoğunluğu, θ Poisson oranı, $a=L_x$, $b=L_y$ ve h plakanın kenar uzunlukları ve kalınlığıdır.

Bu çalışmada yukarıdaki varsayımlara sahip kenarlarından sabitlenen dörtgenel bir plakanın düzlemsel titreşim modları, analitik olarak izlenebilir bir denklem haline getirilmiştir.

Elde edilen her bir titreşim modu için MatLab programındaki sound fonksiyonu ile titreşen dörtgenel yüzey görüntüsü üzerine bir ses işareti eklenmiştir. Bu ses işareti sönümlü kütle yay sistemi kullanılarak oluşturulmuştur.

Kütle Yay Damper Sistemi ile Ses Simülasyonu



Şekil 2.2 Kütle-yay damper sistemi

Basitçe Şekil 2.2'de yaya bağlı bir kütlelen oluşan mekanik bir sistem gösterilmektedir. Kütle m ile gösterilmiştir. İdeal bir yay, onu dinlenme konumundan çıkarmak için gerekli kuvvet ile karakterize

edilir: Birim mesafe başına bu kuvvet k ile gösterilir. Kütlelerin yer değiştirmesi, yukarı doğru yer değiştirme için pozitif ve aşağı doğru yer değiştirme için negatif değer alan bir y değişkeni ile gösterilir.

Yayın sıkışması ve gerilmesi ısı kaybına ve kütle-yay üzerinde hava direnci gibi kayıplara yol açar. Toplam kayıplar r ile gösterilir.

$$F=ma$$

$$-ky - mg - rv = ma \quad (18)$$

$-ky$ terimi F kuvveti altında hareket eden yay kuvvetini temsil eder. $-mg$ terimi kütleyle etkileyen yerçekimidir. $-rv$ terimi ise, v hızıyla orantılı olarak hareket eden sistemin kayıp kuvvetlerini yansıtır. Hız ve ivme için matematiksel ifadeler denklem 19'da verilmiştir.

$$v = dy/dt \quad a = \frac{dv}{dt} = d^2y/dt^2 \quad (19)$$

Değişim oranı ifadeleri,

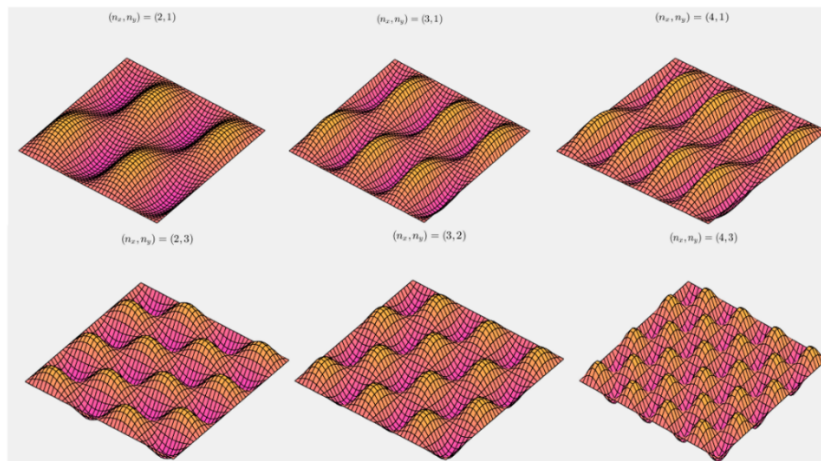
$$-ky - r \frac{dy}{dt} = m \frac{d^2y}{dt^2} \quad (20)$$

$$d^2y/dt^2 + (r/m) dy/dt + (k/m)y = 0.$$

Kütle Yay Damper Sisteminin Çözümü

$$y(t) = y_0 e^{(-\frac{rt}{2m})} \cos \left(t \sqrt{\left(\frac{k}{m} - \left(\frac{r}{2m} \right)^2 \right)} \right) \quad (21)$$

Düzlemsel yüzeyi temsil eden, sönümlü kütle yay sisteminin titreşimi için oluşturulan denklem takımı MATLAB programında "sound" fonksiyonu ile çalıştırılmış ince plaka titreşim görüntüsü ile aynı anda ses üretimi yapılmıştır. Kütle yay sistemindeki M , r , k parametreleri, cismin geometrisine uygun olacak şekilde seçilmiştir.



Şekil 4. Üretilen altı-mod değeri için dikdörtgenel düzlem yüzeyin titreşim grafikleri görülmektedir

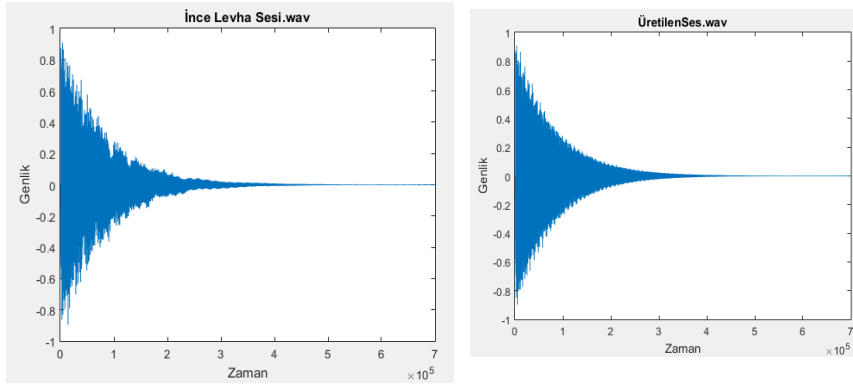
3. Bulgular

Titreşen dörtgenel yüzey için doğal frekans sonuçları, literatürde mevcut olanlarla karşılaştırılmıştır. Tablo 3.1 ince dikdörtgen plakanın ilk altı doğal frekansını göstermektedir. Bu sonuçlar Ramu (2012) sonuçları ile birbirine yakındır. Ancak üretilen sonuçlarda, bu hibrit model için hata oranı yüksek bulunmuştur.

Tablo 3.1. 6,25 mm kalınlığında sabitlenmiş dikdörtgen ince levha için doğal frekans parametresinin çözümlerinin karşılaştırması

Sonuçlar	Mod sayıları					
	1	2	3	4	5	6
Analitik	136,56	262,75	420,41	472,96	546,53	756,7
Ramu	135,8	259,9	417,6	466,8	535,9	758,07
Uygulama	110	215	358	412	490	650

Levha kalınlığı değiştirilerek iki boyutlu yüzey titreşim denklemleri kullanılarak, analitik çözümler elde edilmiştir. Bu doğal frekans sonuçlarının bildirilen literatürlere yakın olduğu bulunmuştur. Ancak dikdörtgen plakanın kalınlığı arttıkça, değerler analitik değerlerden uzaklaşmaktadır.



Şekil 3.1 Quoc Bao Nguyen (2019)'in çalışmasındaki 7mm kalınlığındaki ince plaka wav ses dosyasının grafiği (solda) ve üretilen ses wav dosyası (sağda).

4. Sonuçlar

Bu araştırmada, kenarlarından sabitlenmiş ince dikdörtgen bir levhanın serbest titreşimi ile oluşacak görüntü ve oluşacak ses işareti simüle edilmeye çalışılmıştır. Matematiksel denklem takımlarının sayısal analizi yapılmıştır. Mevcut. 6,25 mm kalınlığında sabitlenmiş dikdörtgen ince levha için Şekil 4'te görülen altı titreşim modu durumu için, doğal frekans parametresinin çözümleri Tablo3.1'de gösterilmiştir ve literatürde mevcut olanlarla, kesin çözümlerle karşılaştırılmıştır. Üretilen ses dosyası, yaklaşık aynı kalınlıktaki çalışmanın web sayfasında yayınlanan wav dosyası grafiği çizdirilerek karşılaştırılmıştır.

Gelecek çalışmada yöntemin iyileştirilmesi, hata analizi, literatürdeki örnekler ile karşılaştırılması yapılacaktır. Aynı boyutlarda ve aynı fiziksel parametrelere sahip düzlemsel yüzey titreşimi ile üretilen ses şiddeti dB ölçümleri deneysel verisi ile karşılaştırma yapılmalıdır.

KAYNAKLAR

- Chadwick, J. N., Zheng, C., & James, D. L. (2012). Precomputed acceleration noise for improved rigid-body sound. *ACM Transactions on Graphics (TOG)*, 31(4), 1-9.
- Chauhan, M., Ranjan, V., & Sathujoda, P. (2019). Dynamic stiffness method for free vibration analysis of thin functionally graded rectangular plates. *Vibroengineering PROCEEDIA*, 29, 76-81.
- Ekşi E., Akı F. N., & Yazıcı, R. (2020). Fizik Tabanlı Ses Sentezi Uygulamaları Üzerine Bir İnceleme. *Haliç Üniversitesi Fen Bilimleri Dergisi*, 3(2), 289-305.
- Florens, J. L., & Cadoz, C. (1991). The physical model: modeling and simulating the instrumental universe. In *Representations of musical signals* (pp. 227-268).
- Guguloth, G. N., Singh, B. N., & Ranjan, V. (2019). Free vibration analysis of simply supported rectangular plates. *Vibroengineering PROCEEDIA*, 29, 270-273.
- Kumar S., Vinayak Ranjan, Jana P. (2018), Free vibration analysis of thin functionally graded rectangular plates using the dynamic stiffness method. *Composite Structures*, Vol. 197, p. 39-53.
- Myung Soo Choi (2003), Free vibration analysis of plate structures using finite element-transfer stiffness coefficient method. *KSME International Journal*, Vol. 17, Issue 6, 2003, p. 805-815.
- O'Brien, J. F., Shen, C., & Gatchalian, C. M. (2002, July). Synthesizing sounds from rigid-body simulations. In *Proceedings of the 2002 ACM SIGGRAPH/Eurographics symposium on Computer animation* (pp. 175-181).
- Raghuvanshi, N. and Lin, M. (2006). Symphony: Real-time physically based sound synthesis. In *Proceedings of Symposium on Interactive 3D Graphics and Games*.
- Ramu I., Mohanty S. C. (2012), Study on free vibration analysis of rectangular plate structures using finite element method. *Procedia Engineering*, Vol. 38, 2012, p. 2758-2766.
- Tanaka M., Yamagiwa K., Miyazaki K., Ueda T. (1988), Free vibration analysis of elastic plate structures by boundary element method. *Engineering Analysis*, Vol. 5, Issue 4, 1988, p. 182-188.
- Van Den Doel, K., Kry, P. G., & Pai, D. K. (2001, August). FoleyAutomatic: physically-based sound effects for interactive simulation and animation. In *Proceedings of the 28th annual conference on Computer graphics and interactive techniques* (pp. 537-544).
- Quoc Bao Nguyen (2019), <https://perso.ensta-paris.fr/~touze/tapercymbals.html>
- Zaman, I., Rozlan, S. A. M., Yusoff, A., Madlan, M. A., & Chan, S. W. (2017). Theoretical modelling of sound radiation from plate. In *IOP Conference Series: Materials Science and Engineering* (Vol. 165, No. 1, p. 012023). IOP Publishing.
- Zhang, Q., Ye, L., & Pan, Z. (2005, September). Physically-based sound synthesis on GPUs. In *International Conference on Entertainment Computing* (pp. 328-333). Springer, Berlin, Heidelberg.
- Zhou, D., & Ji, T. (2006). Free vibration of rectangular plates with continuously distributed spring-mass. *International journal of solids and structures*, 43(21), 6502-6520.
- Zhou, D., & Ji, T. (2012). Free vibration of rectangular plates with attached discrete sprung masses. *Shock and Vibration*, 19(1), 101-112.