Afyon Kocatepe Üniversitesi Fen ve Mühendislik Bilimleri Dergisi
Afyon Kocatepe University Journal of Science and Engineering

AKÜ FEMÜBİD **21** (2021) 031301 (549-558) AKU J. Sci. Eng. **21** (2021) 031301 (549-558)
DOI: 10.35414/akufemubid.870593

Araştırma Makalesi / Research Article

$A_{p_1,q_1}^{p_2,q_2}(G,w)$ Uzayı Üzerinde Öteleme Operatörünü İçeren Fonksiyonların Sürekliliği Üzerine

Nilay DEĞİRMEN[1*], İbrahim DEĞİRMEN[2]
[1] *Ondokuz Mayıs Üniversitesi, Fen Edebiyat Fakültesi, Matematik Bölümü, Samsun.*
[2] *Ondokuz Mayıs Üniversitesi, Lisansüstü Eğitim Enstitüsü, Matematik Anabilim Dalı, Samsun.*

Sorumlu Yazar e-posta: *[1]nilay.sager@omu.edu.tr, ORCID ID: http://orcid.org/0000-0001-8192-8473*
[2]ibrahimdgrmn01@gmail.com, ORCID ID: http://orcid.org/0000-0001-5669-1881

Geliş Tarihi: 29.01.2021 Kabul Tarihi: 10.05.2021

Öz

G ünimodüler yerel kompakt grup ve $p=\min\{p_1,p_2\}$ olmak üzere $w\in B_p$ olsun. Bu makalede, ilk olarak, $W\in\Delta_2(G)$ şartını sağlayan ve $L^1(G)$ uzayına ait olan ya da olmayan her w ağırlığı için $A_{p_1,q_1}^{p_2,q_2}(G,w)$ uzayında $|||.|||$ normuna göre her yerde yoğun olan bir küme bulunabildiği ve bu kümelerdeki herhangi bir h elemanı için G grubundan $A_{p_1,q_1}^{p_2,q_2}(G,w)$ uzayına tanımlı $s\to L_sh$ fonksiyonunun sürekli olduğu ispatlanmıştır. Burada, G üzerinde tanımlı basit fonksiyonların kümesi ve bu kümenin sonlu ölçümlü bir kümede desteğe sahip bir alt kümesi kullanılır. Ayrıca bu iki sonuç yardımıyla her $h\in A_{p_1,q_1}^{p_2,q_2}(G,w)$ için G grubundan $A_{p_1,q_1}^{p_2,q_2}(G,w)$ uzayına tanımlı $s\to L_sh$ ve G grubundan $\mathbb{R}^+\cup\{0\}$ kümesine tanımlı $s\to |||L_sh|||$ fonksiyonlarının sürekli olduğu elde edilmiştir.

Anahtar kelimeler
Yoğunluk;
Süreklilik;
Ağırlıklı Lorentz uzayı;
Girişim operatörü;
Tensör çarpımı

On Continuity of Functions Involving the Translation Operator on the Space $A_{p_1,q_1}^{p_2,q_2}(G,w)$

Abstract

Let G be a unimodular locally compact group and $w\in B_p$ where $p=\min\{p_1,p_2\}$. In this paper, it has been proved that for every weight w that satisfies the condition $W\in\Delta_2(G)$ and belongs to the space $L^1(G)$ or not, there can be a dense set everywhere in the space $A_{p_1,q_1}^{p_2,q_2}(G,w)$ with respect to the norm $|||.|||$ and for any element h in these sets the function $s\to L_sh$ from the group G to the space $A_{p_1,q_1}^{p_2,q_2}(G,w)$ is continuous. Here, the set of simple functions in G and a subset of this set with support in a set of finite measure is used. Also, by using these two results, it has been obtained that for any $h\in A_{p_1,q_1}^{p_2,q_2}(G,w)$ the mapping $s\to L_sh$ from G to $A_{p_1,q_1}^{p_2,q_2}(G,w)$ and the mapping $s\to |||L_sh|||$ from G to $\mathbb{R}^+\cup\{0\}$ are continuous.

Keywords
Density;
Continuity;
Weighted Lorentz space;
Convolution operator;
Tensor product

1. Giriş

Avcı ve Gürkanlı (2007), Yap (1969) tarafından tanımlanan Lorentz uzaylarını kullanarak G yerel kompakt Abel grup, $1<p_1,p_2<\infty$ ve $1\leq q_1,q_2\leq\infty$ olmak üzere bir $A_{p_1,q_1}^{p_2,q_2}(G)$ uzayı ve bu uzay üzerinde bir norm tanımlamıştır. Ayrıca yine Avcı ve Gürkanlı (2007) aynı çalışmada, $L(p,q)(G)$ Lorentz uzayında yoğun olan bir küme kullanılarak elde edilen ve $A_{p_1,q_1}^{p_2,q_2}(G)$ uzayında yoğun olan bir kümenin bulunabileceğini ifade etmiş ve bu kümedeki herhangi bir h elemanı için G grubundan $A_{p_1,q_1}^{p_2,q_2}(G)$ uzayına tanımlı $s\to L_s h$ fonksiyonunun sürekli olduğunu göstermiştir.

Li ve Sun (2012), Carro vd. (2007) tarafından tanımlanan ağırlıklı Lorentz uzaylarını ele alarak G ünimodüler yerel kompakt grup, $0<p<\infty$, $0<q<\infty$ ve $W\in\Delta_2(G)$ olmak üzere $L^1(G)$ uzayına ait olan ya da olmayan her w ağırlığı için $\Lambda_G^{p,q}(w)$ ağırlıklı Lorentz uzayında yoğun olan kümelerin varlığını ispatlamış ve bunun sonucunda da her $f\in\Lambda_G^{p,q}(w)$ için G grubundan $\Lambda_G^{p,q}(w)$ uzayına tanımlı $s\to f_s$ fonksiyonunun sürekli olduğunu elde etmiştir. Li ve Sun (2012) aynı çalışmada, ağırlıklı Lorentz uzaylarını kullanarak G ünimodüler yerel kompakt grup olmak üzere bazı özel w ağırlıkları için bir $A_{p_1,q_1}^{p_2,q_2}(G,w)$ uzayı tanımlamış ve birkaç özelliğini incelemiştir. Ancak her yerde yoğun kümenin varlığı ve süreklilik problemlerini incelememiştir.

Buradan yola çıkarak, bu çalışmada, Avcı ve Gürkanlı (2007) nın kullandığı yöntemlerle G ünimodüler yerel kompakt grup, $p=\min\{p_1,p_2\}$ ve $w\in B_p$ olmak üzere Li ve Sun (2012) tarafından tanımlanan $A_{p_1,q_1}^{p_2,q_2}(G,w)$ uzayının yukarıda bahsedilen yoğunluk ve süreklilik problemlerinin ele alınması amaçlanmaktadır.

2. Materyal ve Metot

Tanım 2.1 X,Y ve Z aynı F cismi üzerinde üç normlu lineer uzay olsun. Bir $\phi: X\times Y\to Z$ dönüşümü verilsin. Eğer aşağıdaki özellikler sağlanırsa ϕ dönüşümüne bilineer dönüşüm denir.

i) Her $y\in Y$ için $x\to\phi(x,y)$ dönüşümü lineerdir.

ii) Her $x\in X$ için $y\to\phi(x,y)$ dönüşümü lineerdir.

Eğer her $x\in X$ ve her $y\in Y$ için $\|\phi(x,y)\|\leq M\|x\|\|y\|$ olacak şekilde pozitif bir M sayısı varsa ϕ bilineer dönüşümüne sınırlıdır denir. ϕ dönüşümünün normu;

$$\|\phi\|=\sup\left\{\|\phi(x,y)\|:\|x\|\leq 1,\|y\|\leq 1\right\}$$

ile tanımlanır (Bonsall and Duncan 1973).

Tanım 2.2 X ve Y, F cismi üzerinde iki normlu uzay, X' ve Y' de sırasıyla X ve Y nin dual uzayları olsun. $X'\times Y'$ uzayından F cismine tanımlı bütün sınırlı, bilineer dönüşümlerin Banach uzayını $BL(X',Y';\mathrm{F})$ ile gösterelim. Herhangi bir $x\in X$ ve $y\in Y$ verilsin. $x\otimes y$, $BL(X',Y';\mathrm{F})$ nin $f\in X'$ ve $g\in Y'$ olmak üzere $(x\otimes y)(f,g)=f(x).g(y)$ ile tanımlı elemanı olsun. $\{x\otimes y: x\in X, y\in Y\}$ kümesinin $BL(X',Y';\mathrm{F})$ uzayında gerdiği uzaya X ve Y nin cebirsel tensör çarpımı denir ve $X\otimes Y$ ile gösterilir (Bonsall and Duncan 1973).

Teorem 2.3 Bir $\phi: X\times Y\to Z$ bilineer dönüşümü verildiğinde her $x\in X$ ve her $y\in Y$ için $\sigma(x\otimes y)=\phi(x,y)$ olacak şekilde bir tek $\sigma: X\otimes Y\to Z$ lineer dönüşümü vardır (Bonsall and Duncan 1973).

Tanım 2.4 X ve Y iki normlu uzay olsun. $X\otimes Y$ cebirsel tensör çarpımı üzerinde γ projektif tensör normu; $\gamma(u)=\inf\left\{\sum_i\|x_i\|\|y_i\|: u=\sum_i(x_i\otimes y_i)\right\}$ ile tanımlanır. Burada infimum u nun tüm sonlu gösterimleri üzerinden alınır. $X\otimes Y$ uzayının γ normuna göre tamlamasına X ve Y uzaylarının projektif tensör çarpımı denir ve $X\otimes_\gamma Y$ ile gösterilir. Projektif tensör çarpım uzayının her u elemanı $\sum_{i=1}^{\infty}\|x_i\|\|y_i\|<\infty$ olmak üzere

$u=\sum_{i=1}^{\infty}\left(x_i \otimes y_i\right)$ şeklindedir (Bonsall and Duncan 1973).

Tanım 2.5 $(X,\mu),(\overline{X},\overline{\mu})$ ve (Y,ϑ) üç ölçüm uzayı olsun. Bir T operatörü X ve $\overline{X}$ üzerinde tanımlı basit fonksiyon çiftlerini Y üzerinde tanımlı negatif olmayan ölçülebilir fonksiyonlara dönüştürsün. Eğer f, f_1, f_2 ve g, g_1, g_2 basit fonksiyonları için aşağıdaki koşullar sağlanırsa bu T operatörüne pozitif girişim operatörü denir (Yap 1969).

i) $\|T(f,g)\|_1 \le \|f\|_1 \|g\|_1$

ii) $\|T(f,g)\|_\infty \le \|f\|_1 \|g\|_\infty$

iii) $\|T(f,g)\|_\infty \le \|f\|_\infty \|g\|_1$

iv) $T(f_1+f_2,g)=T(f_1,g)+T(f_2,g)$

v) $T(f,g_1+g_2)=T(f,g_1)+T(f,g_2)$.

Tanım 2.6 (X,μ) bir ölçüm uzayı ve $\mathcal{M}(X,\mu)$, X üzerinde hemen hemen her yerde sonlu olan ölçülebilir fonksiyonların sınıfı olsun. $f\in\mathcal{M}(X,\mu), 0<\lambda<\infty$ için

$$\mu_f(\lambda)=\mu\left(x\in X:|f(x)|>\lambda\right)$$

f fonksiyonunun dağılım (veya distribüsyon) fonksiyonu olmak üzere $0<t<\infty$ için

$$f^*(t)=\inf\left\{\lambda:\mu_f(\lambda)\le t\right\}=\sup\left\{\lambda:\mu_f(\lambda)>t\right\}$$

eşitliği ile tanımlı f^* fonksiyonuna f fonksiyonunun rearrangementi, $0<t<\infty$ için

$$f^{**}(t)=\frac{1}{t}\int_0^t f^*(s)\,ds$$

ile tanımlı f^{**} fonksiyonuna da f fonksiyonunun ortalama (averaj) fonksiyonu denir. μ_f, f^* ve f^{**} fonksiyonları pozitif tanımlı, artmayan, sağdan sürekli fonksiyonlardır.

$0<p,q<\infty$ olduğunu kabul edelim. $L^{p,q}(X)$ Lorentz uzayı,

$$\|f\|_{L^{p,q}(X)}=\left(\int_0^\infty\left(t^{1/p}f^*(t)\right)^q\frac{dt}{t}\right)^{1/q}<\infty$$

olacak şekildeki tüm $f\in\mathcal{M}(X,\mu)$ fonksiyonlarının sınıfı olarak tanımlanır. $0<p\le\infty$ için $L^{p,\infty}(X)$ uzayı ise,

$$\|f\|_{L^{p,\infty}(X)}=\sup_{t>0}t^{\frac{1}{p}}f^*(t)<\infty$$

olacak şekildeki tüm $f\in\mathcal{M}(X,\mu)$ fonksiyonlarının sınıfı olarak tanımlanır (Hunt 1966).

$L^{p,q}(X)$ Lorentz uzayı üzerinde

$$\|f\|^*_{L^{p,q}(X)}=\begin{cases}\left(\dfrac{q}{p}\displaystyle\int_0^\infty\left(t^{1/p}f^{**}(t)\right)^q\frac{dt}{t}\right)^{1/q}, & 0<p<\infty, 0<q<\infty\\ \sup\limits_{t>0}t^{\frac{1}{p}}f^{**}(t), & 0<p\le\infty, q=\infty\end{cases}$$

ile tanımlı $\|.\|^*_{L^{p,q}(X)}$ fonksiyonu bir normdur. Ayrıca $L^{1,1}(X)$ ve $1<p\le\infty, 1\le q\le\infty$ için $L^{p,q}(X)$ uzayı $\|.\|^*_{L^{p,q}(X)}$ normuna göre bir Banach uzayıdır (Hunt 1966).

Üstelik $1<p<\infty$, $0<q\le\infty$ için $C(p,q)$, p ve q ya bağlı bir sabit olmak üzere $\|f\|_{L^{p,q}(X)}\le\|f\|^*_{L^{p,q}(X)}\le C(p,q)\|f\|_{L^{p,q}(X)}$ eşitsizliği gerçeklenir (Yap 1969).

Tanım 2.7 $\mathbb{R}^+$ üzerinde tanımlı negatif olmayan yerel integrallenebilir fonksiyona, yani hemen hemen her yerde $(0,\infty)$ da değerler alan fonksiyona $\mathbb{R}^+$ da bir ağırlık fonksiyonu denir ve w ile gösterilir (Carro *et al.* 2007).

$(X,\mu)=\left(R^+,w(t)dt\right)$ alırsak; $0\le\lambda<\infty$ için

$$\begin{aligned}\mu_f(\lambda)&=\mu\left(x\in R^+:|f(x)|>\lambda\right)\\&=w\left(x\in R^+:|f(x)|>\lambda\right)\\&=\int_{\left\{x\in R^+:|f(x)|>\lambda\right\}}w(x)\,d\mu(x)\end{aligned}$$

ve $0<t<\infty$ için $f^*(t)=\inf\{\lambda:\mu_f(\lambda)\le t\}$ olur. Böylece $L^{p,q}(X,\mu)=L^{p,q}(R^+,w(t)dt)$ uzayı elde edilir ve bu uzay $L^{p,q}(w)$ ile gösterilir. $0<p,q<\infty$ veya $0<p\le\infty, q=\infty$ için $\Lambda_X^{p,q}(w)$ ağırlıklı Lorentz uzayı Carro vd. (2007) tarafından $\|f\|_{\Lambda_X^{p,q}(w)}=\|f^*\|_{L^{p,q}(w)}$ olmak üzere

$$\Lambda_X^{p,q}(w)=\left\{f\in\mathcal{M}(X,\mu):\|f\|_{\Lambda_X^{p,q}(w)}<\infty\right\}$$

ile tanımlanır. $p=q$ olması durumunda

$$\Lambda_X^{p,p}(w)=\left\{f\in\mathcal{M}(X,\mu):\|f\|_{\Lambda_X^{p,p}(w)}<\infty\right\}$$

uzayı elde edilir. Burada

$$\begin{aligned}\|f^*\|_{L^p(R^+,w)}&=\left[\int_{R^+}|f^*(t)|^p\,(w(t))^p\,dt\right]^{\frac{1}{p}}\\ &\neq\left[\int_X|f(x)|^p\,(w(x))^p\,dx\right]^{\frac{1}{p}}\\ &=\|f\|_{L^p(X,w)}\end{aligned}$$

olduğundan $\Lambda_X^{p,p}(w)\neq L^p(X,w)$ dır. $\Lambda_X^{p,p}(w)$ uzayı $\Lambda_X^p(w)$ ile gösterilir. $w=1$ olması durumunda

$$\Lambda_X^{p,q}(1)=\left\{f\in\mathcal{M}(X,\mu):\|f\|_{\Lambda_X^{p,q}(1)}<\infty\right\}$$ ve

$\mu_{f^*}=\mu_f$ eşitliği kullanıldığında

$$\begin{aligned}\|f^*\|_{L^{p,q}(\mathbb{R}^+,1)}&=\|f^*\|_{L^{p,q}(\mathbb{R}^+,\mu)}\\ &=\left(\int_0^\infty\left(t^{1/p}\left(f^*\right)^*(t)\right)^q\frac{dt}{t}\right)^{1/q}\\ &=\left(\int_0^\infty\left(t^{1/p}f^*(t)\right)^q\frac{dt}{t}\right)^{1/q}\\ &=\|f\|_{L^{p,q}(X)}\end{aligned}$$

olduğundan $\Lambda_X^{p,q}(1)=L^{p,q}(X)$ dir (Carro *et al.* 2007).

$\Lambda_X^{p,q}(w)$ uzayının dualini ifade etmek için Lorentz uzaylarının başka bir çeşidi olan Γ tanımlanmıştır.

Tanım 2.8 A operatörü; $f\in\mathcal{M}^+(0,\infty)$ ve $t>0$ olmak üzere $Af(t)=\frac{1}{t}\int_0^t f(s)ds$ ile tanımlı Hardy operatörü olsun. $\Gamma_X^p(w)$ uzayı $0<p<\infty$ için

$$\|f\|_{\Gamma_X^p(w)}=\left(\int_0^\infty\left(f^{**}(t)\right)^p w(t)dt\right)^{1/p}$$ olmak üzere

$$\Gamma_X^p(w)=\left\{f\in\mathcal{M}(X,\mu):\|f\|_{\Gamma_X^p(w)}<\infty\right\}$$

ile ve $\Gamma_X^{p,q}(w)$ uzayı $0<p,q<\infty$ için $W(t)=\int_0^t w(s)ds$ olmak üzere

$$\Gamma_X^{p,q}(w)=\Gamma_X^q\left(W^{\frac{q}{p}-1}w\right)$$

ile tanımlanır. Burada

$$\begin{aligned}\|f\|_{\Gamma_X^{p,q}(w)}&=\|f\|_{\Gamma_X^q\left(W^{\frac{q}{p}-1}w\right)}\\ &=\left(\int_0^\infty\left(f^{**}(t)\right)^q W^{\frac{q}{p}-1}(t)w(t)dt\right)^{1/q}\end{aligned}$$

dur (Carro *et al*. 2007).

Tanım 2.9 $0<p<\infty$, L_{dec}^p; L^p de negatif olmayan artmayan fonksiyonların sınıfı olmak üzere $A:L_{dec}^p(w)\to L^p(w)$ Hardy operatörü sınırlı ise $w\in B_p$ ile gösterilir (Carro *et al.* 2007).

Arino ve Muckenhoupt (1990) $1\le p<\infty$ olmak üzere $w\in B_p$ olması için gerekli ve yeterli şartın $\int_t^\infty\frac{w(x)}{x^p}dx\le\frac{c}{t^p}\int_0^t w(x)dx$ eşitsizliğinin sağlanması olduğunu göstermiştir.

Örnek 2.10 $w(x)=x^{\frac{1}{3}}$ ile tanımlı w ağırlık fonksiyonu B_2 sınıfına aittir.

Tanım 2.11 $W(t)=\int_0^t w(s)ds$ olmak üzere $\mu(A\cup B)>0$ olan her ölçülebilir $A,B\subset X$ küme ikilisi için

$$0<W(\mu(A\cup B)) \leq C(W(\mu(A))+W(\mu(B)))$$

eşitsizliği sağlanırsa $W\in\Delta_2(X)$ yazılır. Buna denk koşul; her t için $W(2t)\leq K.W(t)$ eşitsizliğinin sağlanmasıdır (Carro *et al.* 2007).

Örnek 2.12 $p\geq 1$ olmak üzere $w(t)=p.t^{p-1}$ için $W(t)=t^p$ fonksiyonu $\Delta_2(X)$ sınıfına aittir.

Tanım 2.13 G bir yerel kompakt grup olmak üzere G üzerinde tanımlı ve aşağıdaki koşulları sağlayan pozitif, regüler μ Borel ölçümüne sol (sağ) Haar ölçümü denir.

i) Her $E\subset G$ kompakt kümesi için $\mu(E)<\infty$ dir.

ii) Her $E\subset G$ Borel kümesi ve her $x\in G$ için $\mu(xE)=\mu(E)$ $(\mu(Ex)=\mu(E))$ dir (Folland 1995).

Her yerel kompakt grup bir sol Haar ölçümüne sahiptir (Folland 1995).

Tanım 2.14 G bir yerel kompakt grup ve μ, G üzerinde tanımlı sol Haar ölçümü olsun. Eğer μ sol Haar ölçümü aynı zamanda sağ Haar ölçümü ise G grubuna ünimodüler grup denir (Folland 1995).
G değişmeli, diskret veya kompakt bir grup ise ünimodülerdir (Folland 1995).

Tanım 2.15 (X,Σ,μ) bir ölçüm uzayı ve $A\in\Sigma$ olsun. Eğer aşağıdaki koşullar sağlanırsa A kümesine bir atom denir.

i) $\mu(A)>0$ dır.

ii) $B\subset A$ olan herhangi bir $B\in\Sigma$ için $\mu(B)=0$ veya $\mu(A)=\mu(B)$ dır.

Eğer pozitif ölçümlü her ölçülebilir küme bir atom içerirse μ ölçümüne atomik ölçüm, μ için Σ de hiçbir atom bulunamıyorsa μ ölçümüne atomik olmayan ölçüm denir. μ atomik bir ölçüm ise (X,Σ,μ) ölçüm uzayına atomik ölçüm uzayı, μ atomik olmayan bir ölçüm ise (X,Σ,μ) ölçüm uzayına atomik olmayan ölçüm uzayı denir (Halmos 1974).

Örnek 2.16 μ sayma ölçümü olmak üzere $(N,\wp(N),\mu)$ ölçüm uzayı atomik ölçüm uzayı ve Σ Borel cebiri, η de Lebesgue ölçümü olmak üzere (R,Σ,η) ölçüm uzayı atomik olmayan ölçüm uzayıdır.

Tanım 2.17 (X,Σ,μ) bir ölçüm uzayı olmak üzere her $n\in N$ için $\mu(E_n)<\infty$ ve $X=\bigcup_{n=1}^{\infty}E_n$ olacak şekilde bir $(E_n)\subset\Sigma$ küme dizisi varsa (X,Σ,μ) uzayına $\sigma-$sonlu ölçüm uzayı denir (Halmos 1974).

Lemma 2.18, Lemma 2.19, Önerme 2.20, Lemma 2.21 da G bir yerel kompakt grup, λ, G nin bir sol Haar ölçümü ve (G,λ), $\sigma-$sonlu atomik olmayan ölçüm uzayı olarak alınacaktır.

Lemma 2.18 G bir ünimodüler yerel kompakt grup, T bir girişim operatörü, $0<p_1,p_2,q_1,q_2<\infty$, $\frac{1}{p_1}+\frac{1}{p_2}>1$, c bir sabit olmak üzere $w\geq c>0$, $p=\min\{p_1,p_2\}$ olmak üzere $w\in B_p$ ve $f\in\Lambda^{p_1,q_1}(w)$, $g\in\Lambda^{p_2,q_2}(w)$ için $k=T(f,g)=f*g$ olsun. O halde $\frac{1}{p_1}+\frac{1}{p_2}=1+\frac{1}{r}$, $s\geq 1$ ve $\frac{1}{q_1}+\frac{1}{q_2}\geq\frac{1}{s}$ olmak üzere $k\in\Lambda^{r,s}(w)$ ve $\|k\|_{\Lambda^{r,s}(w)}\leq C.\|f\|_{\Lambda^{p_1,q_1}(w)}\|g\|_{\Lambda^{p_2,q_2}(w)}$ dır (Li and Sun 2012).

Lemma 2.19 $0<p,q<\infty$ ve $W\in\Delta_2(G)$ olsun. O halde aşağıdaki ifadeler doğrudur.

i) Eğer $w\in L^1(G)$ ise G deki basit fonksiyonlar kümesi S, $\Lambda_G^{p,q}(w)$ da yoğundur.

ii) Eğer $w\notin L^1(G)$ ise S nin sonlu ölçümlü bir kümede desteğe sahip olan S_0 alt kümesi $\Lambda_G^{p,q}(w)$ da yoğundur (Li and Sun 2012).

Önerme 2.20 $0<p,q<\infty$ olmak üzere her $f\in\Lambda_G^{p,q}(w)$ ve her $s\in G$ için $L_s f\in\Lambda_G^{p,q}(w)$, $R_s f\in\Lambda_G^{p,q}(w)$ dır. Dolayısıyla $\Lambda_G^{p,q}(w)$ uzayı ötelemeler altında invaryanttır (Li and Sun 2012).

Lemma 2.21 $0<p,q<\infty$ olmak üzere her $f\in\Lambda_G^{p,q}(w)$ için $G\to\Lambda_G^{p,q}(w), s\to L_s f$ dönüşümü süreklidir (Li and Sun 2012).

Bu kesimin devamında ve bulgular bölümünde G bir ünimodüler yerel kompakt grup, λ, G nin bir sol Haar ölçümü ve (G,λ), $\sigma-$sonlu atomik olmayan ölçüm uzayı,

$$1<p_1,p_2<\infty,\ \ 1\le q_1,q_2<\infty,$$
$$\frac{1}{p_1}+\frac{1}{p_2}>1,\ \ \frac{1}{p_1}+\frac{1}{p_2}=1+\frac{1}{r},\ \ r>0,$$
$$\frac{1}{q_1}+\frac{1}{q_2}\ge\frac{1}{s},\ \ s\ge 1,$$

$c>0$ olmak üzere $w\ge c>0$, $p=\min\{p_1,p_2\}$ olmak üzere $w\in B_p$ olsun.

$\tilde f(x)=f(-x)$ olmak üzere her $\lambda\ge 0$ için $\mu_f(\lambda)=\mu_{\tilde f}(\lambda)$ olduğundan $\|f^*\|_{L^{p,q}(w)}=\left\|\left(\tilde f\right)^*\right\|_{L^{p,q}(w)}$ ve dolayısıyla $\|f\|_{\Lambda_G^{p,q}(w)}=\|\tilde f\|_{\Lambda_G^{p,q}(w)}$ dır. Yani $f\in\Lambda_G^{p_1,q_1}(w)$ iken $\tilde f\in\Lambda_G^{p_1,q_1}(w)$ olur. Böylece Lemma 2.18 gereği her $f\in\Lambda_G^{p_1,q_1}(w), g\in\Lambda_G^{p_2,q_2}(w)$ için

$$\begin{aligned}\left\|T\left(\tilde f,g\right)\right\|_{\Lambda_G^{r,s}(w)}&\le C.\|\tilde f\|_{\Lambda_G^{p_1,q_1}(w)}\|g\|_{\Lambda_G^{p_2,q_2}(w)}\\&=C.\|f\|_{\Lambda_G^{p_1,q_1}(w)}\|g\|_{\Lambda_G^{p_2,q_2}(w)}\end{aligned}$$

eşitsizliği yazılır. O halde $\Lambda_G^{p_1,q_1}(w)\times\Lambda_G^{p_2,q_2}(w)$ uzayından $\Lambda_G^{r,s}(w)$ uzayına bir k bilineer dönüşümünü $f\in\Lambda_G^{p_1,q_1}(w), g\in\Lambda_G^{p_2,q_2}(w)$ olmak üzere $k(f,g)=\tilde f*g$ şeklinde tanımlayabiliriz. Bu k dönüşümü iyi tanımlıdır. Ayrıca $\|f\|_{\Lambda_G^{p_1,q_1}(w)}\le 1, \|g\|_{\Lambda_G^{p_2,q_2}(w)}\le 1$ olan her $f\in\Lambda_G^{p_1,q_1}(w), g\in\Lambda_G^{p_2,q_2}(w)$ için

$$\begin{aligned}\|k\|&=\sup\left\{\frac{\|k(f,g)\|_{\Lambda_G^{r,s}(w)}}{\|f\|_{\Lambda_G^{p_1,q_1}(w)}\|g\|_{\Lambda_G^{p_2,q_2}(w)}}\right\}\\&=\sup\left\{\frac{\|\tilde f*g\|_{\Lambda_G^{r,s}(w)}}{\|f\|_{\Lambda_G^{p_1,q_1}(w)}\|g\|_{\Lambda_G^{p_2,q_2}(w)}}\right\}\\&\le\sup\left\{\frac{C.\|f\|_{\Lambda_G^{p_1,q_1}(w)}\|g\|_{\Lambda_G^{p_2,q_2}(w)}}{\|f\|_{\Lambda_G^{p_1,q_1}(w)}\|g\|_{\Lambda_G^{p_2,q_2}(w)}}\right\}=C\end{aligned}$$

olduğundan k dönüşümü sınırlıdır. O halde Teorem 2.3 gereği bu sınırlı k bilineer dönüşümüne her $f\in\Lambda_G^{p_1,q_1}(w)$, $g\in\Lambda_G^{p_2,q_2}(w)$ için $K(f\otimes g)=\tilde f*g$ olacak şekilde $\Lambda_G^{p_1,q_1}(w)\otimes_\gamma\Lambda_G^{p_2,q_2}(w)$ uzayından $\Lambda_G^{r,s}(w)$ uzayına tanımlı bir tek K lineer dönüşümü karşılık gelir. Yine $\|K\|\le C$ olup K dönüşümü de sınırlıdır (Li and Sun 2012).

Tanım 2.22 K lineer dönüşümü altında $\Lambda_G^{p_1,q_1}(w)\otimes_\gamma\Lambda_G^{p_2,q_2}(w)$ uzayının görüntüsünü $A_{p_1,q_1}^{p_2,q_2}(G,w)$ ile gösterelim. Böylece

$$A_{p_1,q_1}^{p_2,q_2}(G,w)=\left\{\begin{array}{l}h=\sum_{i=1}^{\infty}\left(\tilde f_i*g_i\right):\\ f_i\in\Lambda_G^{p_1,q_1}(w), g_i\in\Lambda_G^{p_2,q_2}(w),\\ K\left(\sum_{i=1}^{\infty}\left(\tilde f_i\otimes g_i\right)\right)=\sum_{i=1}^{\infty}\left(\tilde f_i*g_i\right),\\ \sum_{i=1}^{\infty}\left(\|f_i\|_{\Lambda_G^{p_1,q_1}(w)}\|g_i\|_{\Lambda_G^{p_2,q_2}(w)}\right)<\infty\end{array}\right\}$$

olur. Her $h\in A_{p_1,q_1}^{p_2,q_2}(G,w)$ için $f_i\in\Lambda_G^{p_1,q_1}(w)$, $g_i\in\Lambda_G^{p_2,q_2}(w)$ ve $h=\sum_{i=1}^{\infty}\left(\tilde f_i*g_i\right)$ olmak üzere

$$|||h|||=\inf\left\{\sum_{i=1}^{\infty}\|f_i\|_{\Lambda_G^{p_1,q_1}(w)}\|g_i\|_{\Lambda_G^{p_2,q_2}(w)}\right\}$$

ile tanımlanan $|||.|||$ fonksiyonu bir normdur. Böylece $A_{p_1,q_1}^{p_2,q_2}(G,w)$ uzayı bir normlu uzay olur (Li and Sun 2012).

Sonuç 2.23 Her $s \in G$ ve her $h \in A_{p_1,q_1}^{p_2,q_2}(G,w)$ için $|||L_s h||| \le c|||h|||$ eşitsizliği vardır (Değirmen ve Değirmen 2021).

3. Bulgular

S, G de tanımlı basit fonksiyonların kümesi ve P, S nin sonlu ölçümlü bir kümede desteğe sahip bir alt kümesi olsun.

Önerme 3.1 $W \in \Delta_2(G)$ olsun. O halde aşağıdaki ifadeler doğrudur.

i) Eğer $w \in L^1(G)$ ise $K(S \otimes_\gamma S)$ kümesi $A_{p_1,q_1}^{p_2,q_2}(G,w)$ uzayında $|||.|||$ normuna göre her yerde yoğundur.

ii) Eğer $w \notin L^1(G)$ ise $K(P \otimes_\gamma P)$ kümesi $A_{p_1,q_1}^{p_2,q_2}(G,w)$ uzayında $|||.|||$ normuna göre her yerde yoğundur.

İspat:

i) Herhangi bir $h \in A_{p_1,q_1}^{p_2,q_2}(G,w)$ alalım. Bu durumda $f_i \in \Lambda_G^{p_1,q_1}(w), g_i \in \Lambda_G^{p_2,q_2}(w)$ olmak üzere

$$h = \sum_{i=1}^{\infty}\left(\tilde{f}_i * g_i\right), \sum_{i=1}^{\infty}\|f_i\|_{\Lambda_G^{p_1,q_1}(w)}\|g_i\|_{\Lambda_G^{p_2,q_2}(w)} < \infty$$

yazılır. $h_n = \sum_{i=1}^{n}\left(\tilde{f}_i * g_i\right)$ diyelim. $\sum_{i=1}^{\infty}\tilde{f}_i * g_i$ serisi h fonksiyonuna yakınsadığından herhangi bir $\varepsilon > 0$ sayısı verildiğinde her $n \ge n_0$ olduğunda

$$\begin{aligned}|||h-h_n||| &= \left|\left|\left|\sum_{i=1}^{\infty}\left(\tilde{f}_i * g_i\right) - \sum_{i=1}^{n}\left(\tilde{f}_i * g_i\right)\right|\right|\right| \\ &= \left|\left|\left|\sum_{i=n+1}^{\infty}\left(\tilde{f}_i * g_i\right)\right|\right|\right| \\ &\le c\sum_{i=n+1}^{\infty}\|f_i\|_{\Lambda_G^{p_1,q_1}(w)}\|g_i\|_{\Lambda_G^{p_2,q_2}(w)} \\ &< \frac{\varepsilon}{3}\end{aligned}$$

olacak şekilde $n_0 \in N$ vardır.

Şimdi n_0 sayısına eşit veya n_0 sayısından büyük olan bir v_0 doğal sayısı seçelim ve sabitleyelim.

$c_1 = \max_{1\le i\le v_0}\|g_i\|_{\Lambda_G^{p_2,q_2}(w)}$ ve $c_2 = \max_{1\le i\le v_0}\|s_i\|_{\Lambda_G^{p_1,q_1}(w)}$ olsun. Lemma 2.19 i) gereği $\overline{S} = \Lambda_G^{p_1,q_1}(w)$ olduğundan verilen aynı $\varepsilon > 0$ sayısı ve her $i \in N$ için

$$\|f_i - s_i\|_{\Lambda_G^{p_1,q_1}(w)} < \frac{\varepsilon}{3v_0c_1t_1}$$

ve

$$\|g_i - k_i\|_{\Lambda_G^{p_2,q_2}(w)} < \frac{\varepsilon}{3v_0c_2t_2}$$

olacak şekilde $s_i, k_i \in S$ vardır. Bu durumda $s_i \otimes k_i \in S \otimes_\gamma S$ olup $\sum_{i=1}^{v_0}\left(\tilde{s}_i * k_i\right) \in K(S \otimes_\gamma S)$ yazılır. Yine aynı $\varepsilon > 0$ için

$$\left\|\left\| h-\sum_{i=1}^{v_0}\left(\tilde{s}_i * k_i\right)\right\|\right\|$$
$$=\left\|\left\| \begin{array}{l} h-h_{v_0}+h_{v_0}-\sum_{i=1}^{v_0}\left(\tilde{s}_i * g_i\right) \\ +\sum_{i=1}^{v_0}\left(\tilde{s}_i * g_i\right)-\sum_{i=1}^{v_0}\left(\tilde{s}_i * k_i\right)\end{array}\right\|\right\|$$
$$\leq \left\|\left\| h-h_{v_0}\right\|\right\| + \left\|\left\| h_{v_0}-\sum_{i=1}^{v_0}\left(\tilde{s}_i * g_i\right)\right\|\right\|$$
$$+\left\|\left\| \sum_{i=1}^{v_0}\left(\tilde{s}_i * g_i\right)-\sum_{i=1}^{v_0}\left(\tilde{s}_i * k_i\right)\right\|\right\|$$
$$<\frac{\varepsilon}{3}+\left\|\left\| \sum_{i=1}^{v_0}\left(\tilde{f}_i * g_i\right)-\sum_{i=1}^{v_0}\left(\tilde{s}_i * g_i\right)\right\|\right\|$$
$$+\left\|\left\| \sum_{i=1}^{v_0}\left(\tilde{s}_i *\left(g_i-k_i\right)\right)\right\|\right\|$$
$$\leq \frac{\varepsilon}{3}+\left\|\left\| \sum_{i=1}^{v_0}\left(\left(\tilde{f}_i-\tilde{s}_i\right) * g_i\right)\right\|\right\|$$
$$+\sum_{i=1}^{v_0} t_2\left(\left\|s_i\right\|_{\Lambda_G^{p_1,q_1}(w)}\left\|g_i-k_i\right\|_{\Lambda_G^{p_2,q_2}(w)}\right)$$
$$\leq \frac{\varepsilon}{3}+\sum_{i=1}^{v_0} t_1\left(\left\|f_i-s_i\right\|_{\Lambda_G^{p_1,q_1}(w)}\left\|g_i\right\|_{\Lambda_G^{p_2,q_2}(w)}\right)$$
$$+\sum_{i=1}^{v_0} t_2\left(\left\|s_i\right\|_{\Lambda_G^{p_1,q_1}(w)}\left\|g_i-k_i\right\|_{\Lambda_G^{p_2,q_2}(w)}\right)$$
$$<\frac{\varepsilon}{3}+\sum_{i=1}^{v_0} t_1 \frac{\varepsilon}{3 v_0 c_1 t_1} c_1$$
$$+\sum_{i=1}^{v_0} t_2 \frac{\varepsilon}{3 v_0 c_2 t_2} c_2=\varepsilon$$

olur. O halde $K\left(S \otimes_\gamma S\right)$ kümesi $A_{p_1,q_1}^{p_2,q_2}(G,w)$ uzayında $|||.|||$ normuna göre her yerde yoğundur. Böylece ispat tamamlanır.

ii) i) şıkkının ispatında S yerine P alınarak ve Lemma 2.19 ii) kullanılarak ispat yapılır.

Önerme 3.2

i) Eğer $w \in L^1(G)$ ise her $h \in K\left(S \otimes_\gamma S\right)$ için G grubundan $A_{p_1,q_1}^{p_2,q_2}(G,w)$ uzayına tanımlı $s \rightarrow L_s h$ fonksiyonu süreklidir.

ii) Eğer $w \notin L^1(G)$ ise her $h \in K\left(P \otimes_\gamma P\right)$ için G grubundan $A_{p_1,q_1}^{p_2,q_2}(G,w)$ uzayına tanımlı $s \rightarrow L_s h$ fonksiyonu süreklidir.

İspat:

i) $s \rightarrow L_s h$ lineer olduğundan bu fonksiyonun G üzerindeki sürekliliğini göstermek için G grubunun biriminde sürekli olduğunu göstermek yeterlidir. Herhangi bir $h \in K\left(S \otimes_\gamma S\right)$ alalım. O halde Önerme 3.1 i) gereği $f_k \in \Lambda_G^{p_1,q_1}(w), g_k \in \Lambda_G^{p_2,q_2}(w)$ olmak üzere
$$h=\sum_{k=1}^{\infty}\left(\tilde{f}_k * g_k\right), \sum_{k=1}^{\infty}\left(\left\|f_k\right\|_{\Lambda_G^{p_1,q_1}(w)}\left\|g_k\right\|_{\Lambda_G^{p_2,q_2}(w)}\right)<\infty$$
yazılır. Buradan her $s \in G$ için
$$\left\|\left\| L_s h-L_e h\right\|\right\|=\left\|\left\| L_s h-h\right\|\right\|$$
$$=\left\|\left\| L_s \sum_{k=1}^{\infty}\left(\tilde{f}_k * g_k\right)-\sum_{k=1}^{\infty}\left(\tilde{f}_k * g_k\right)\right\|\right\|$$
$$=\left\|\left\| \sum_{k=1}^{\infty} L_s\left(\tilde{f}_k * g_k\right)-\sum_{k=1}^{\infty}\left(\tilde{f}_k * g_k\right)\right\|\right\|$$
$$=\left\|\left\| \sum_{k=1}^{\infty}\left(\left(L_s \tilde{f}_k\right) * g_k\right)-\sum_{k=1}^{\infty}\left(\tilde{f}_k * g_k\right)\right\|\right\|$$
$$=\left\|\left\| \sum_{k=1}^{\infty}\left(\left(L_s \tilde{f}_k-\tilde{f}_k\right) * g_k\right)\right\|\right\|$$
$$=\left\|\left\| \sum_{k=1}^{\infty}\left(\left(\left(R_s f_k\right)^{\sim}-\tilde{f}_k\right) * g_k\right)\right\|\right\|$$
$$=\left\|\left\| \sum_{k=1}^{\infty}\left(\left(R_s f_k-f_k\right)^{\sim} * g_k\right)\right\|\right\|$$
$$\leq c \sum_{k=1}^{\infty}\left(\left\|R_s f_k-f_k\right\|_{\Lambda_G^{p_1,q_1}(w)}\left\|g_k\right\|_{\Lambda_G^{p_2,q_2}(w)}\right)$$
elde edilir.

Önerme 2.20 den $\Lambda_G^{p_1,q_1}(w)$ uzayının ötelemeler altında invaryant olduğu ve Lemma 2.21 den $f \in \Lambda_G^{p_1,q_1}(w)$ için G grubundan $\Lambda_G^{p_1,q_1}(w)$ uzayına giden $s \rightarrow L_s f$ fonksiyonunun sürekliliği biliniyor. $\tilde{f}_k \in \Lambda_G^{p_1,q_1}(w)$ olduğundan $s \rightarrow 0$ için $\left\|L_s \tilde{f}_k-\tilde{f}_k\right\|_{\Lambda_G^{p_1,q_1}(w)} \rightarrow 0$ dır.

$$\left\| L_s \tilde{f}_k - \tilde{f}_k \right\|_{\Lambda_G^{p_1,q_1}(w)} = \left\| \left(R_s f_k \right)^{\sim} - \tilde{f}_k \right\|_{\Lambda_G^{p_1,q_1}(w)}$$
$$= \left\| R_s f_k - f_k \right\|_{\Lambda_G^{p_1,q_1}(w)}$$

olduğundan $\left\| R_s f_k - f_k \right\|_{\Lambda_G^{p_1,q_1}(w)} \to 0$ olur. Yine

$$\sum_{k=1}^{\infty} \left(\left\| R_s f_k - f_k \right\|_{\Lambda_G^{p_1,q_1}(w)} \left\| g_k \right\|_{\Lambda_G^{p_2,q_2}(w)} \right)$$
$$\leq \sum_{k=1}^{\infty} \left(\left(\left\| R_s f_k \right\|_{\Lambda_G^{p_1,q_1}(w)} + \left\| f_k \right\|_{\Lambda_G^{p_1,q_1}(w)} \right) \left\| g_k \right\|_{\Lambda_G^{p_2,q_2}(w)} \right)$$
$$= 2 \sum_{k=1}^{\infty} \left(\left\| f_k \right\|_{\Lambda_G^{p_1,q_1}(w)} \left\| g_k \right\|_{\Lambda_G^{p_2,q_2}(w)} \right) < \infty$$

elde edilir. Böylece $\sum_{k=1}^{\infty} \left(\left\| R_s f_k - f_k \right\|_{\Lambda_G^{p_1,q_1}(w)} \left\| g_k \right\|_{\Lambda_G^{p_2,q_2}(w)} \right)$ toplamı sınırlı olur. Bu durumda

$$\left\|\left\| L_s h - h \right\|\right\| \leq c \sum_{k=1}^{\infty} \left\| R_s f_k - f_k \right\|_{\Lambda_G^{p_1,q_1}(w)} \left\| g_k \right\|_{\Lambda_G^{p_2,q_2}(w)}$$

eşitsizliğinde $s \to 0$ için limit alınırsa $\left\|\left\| L_s h - h \right\|\right\| \to 0$ elde edilir. Bu ise $s \to L_s h$ fonksiyonunun G grubunun biriminde sürekli olması demektir. Buradan her $h \in K\left(S \otimes_\gamma S \right)$ için G grubundan $A_{p_1,q_1}^{p_2,q_2}(G,w)$ uzayına tanımlı $s \to L_s h$ fonksiyonunun sürekli olduğu elde edilir.

ii) i) şıkkının ispatında S yerine P alınarak ve Önerme 3.1 ii) kullanılarak ispat yapılır.

Önerme 3.3 Her $h \in A_{p_1,q_1}^{p_2,q_2}(G,w)$ için G grubundan $A_{p_1,q_1}^{p_2,q_2}(G,w)$ uzayına tanımlı $s \to L_s h$ fonksiyonu süreklidir.

İspat: Herhangi bir $h \in A_{p_1,q_1}^{p_2,q_2}(G,w)$ alalım.

$w \in L^1(G)$ olsun. Bu durumda $K\left(S \otimes_\gamma S \right)$ kümesi $A_{p_1,q_1}^{p_2,q_2}(G,w)$ uzayında her yerde yoğundur. O halde herhangi bir $\varepsilon > 0$ verildiğinde $\left\|\left\| h - k \right\|\right\| < \frac{\varepsilon}{3}$ olacak şekilde $k \in K\left(S \otimes_\gamma S \right)$ vardır. Sonuç 2.23 kullanılırsa

$$\left\|\left\| L_s h - h \right\|\right\| = \left\|\left\| L_s h - L_s k + L_s k - k + k - h \right\|\right\|$$
$$\leq \left\|\left\| L_s h - L_s k \right\|\right\| + \left\|\left\| L_s k - k \right\|\right\| + \left\|\left\| k - h \right\|\right\|$$
$$= \left\|\left\| L_s \left(h - k \right) \right\|\right\| + \left\|\left\| L_s k - k \right\|\right\| + \left\|\left\| k - h \right\|\right\|$$
$$= \left\|\left\| k - h \right\|\right\| + \left\|\left\| L_s k - k \right\|\right\| + \left\|\left\| k - h \right\|\right\|$$
$$= 2 \left\|\left\| k - h \right\|\right\| + \left\|\left\| L_s k - k \right\|\right\|$$
$$< \frac{2\varepsilon}{3} + \left\|\left\| L_s k - k \right\|\right\|$$

yazılır. Diğer yandan Önerme 3.2 i) şıkkından dolayı $s \to L_s k$ fonksiyonu sürekli olduğundan aynı $\varepsilon > 0$ sayısı verildiğinde her $s \in U$ için $\left\|\left\| L_s k - k \right\|\right\| < \frac{\varepsilon}{3}$ olacak şekilde $U \in U(e)$ komşuluğu vardır. Bu durumda aynı $\varepsilon > 0$ sayısı ve her $s \in U$ için $\left\|\left\| L_s h - h \right\|\right\| < \frac{2}{3}\varepsilon + \frac{1}{3}\varepsilon = \varepsilon$ elde edilir. Bu durumda $s \to L_s h$ fonksiyonu süreklidir.

$w \notin L^1(G)$ olması durumunda ilk kısımda $K\left(S \otimes_\gamma S \right)$ yerine $K\left(P \otimes_\gamma P \right)$ alınarak ve Önerme 3.2 ii) kullanılarak devam edilir. Bu durumda $s \to L_s h$ fonksiyonu süreklidir. Böylece ispat tamamlanır.

Sonuç 3.4 Her $h \in A_{p_1,q_1}^{p_2,q_2}(G,w)$ için G grubundan $\mathbb{R}^+ \cup \{0\}$ kümesine tanımlı $s \to \left\|\left\| L_s h \right\|\right\|$ fonksiyonu süreklidir.

İspat: Her $h \in A_{p_1,q_1}^{p_2,q_2}(G,w)$ elemanı için $s \to L_s h$ fonksiyonunun sürekli olduğunu Önerme 3.3 den biliyoruz. Bu durumda $s \to L_s h$ fonksiyonu herhangi bir $s_0 \in G$ noktasında sürekli olur. Böylece herhangi bir $\varepsilon > 0$ sayısı verildiğinde her $s \in U$ için $\left\|\left\| L_s h - L_{s_0} h \right\|\right\| < \varepsilon$ olacak şekilde $U \in U(s_0)$ komşuluğu vardır. Buradan aynı $\varepsilon > 0$ sayısı ve her $s \in U$ için $\left| \left\|\left\| L_s h \right\|\right\| - \left\|\left\| L_{s_0} h \right\|\right\| \right| \leq \left\|\left\| L_s h - L_{s_0} h \right\|\right\| < \varepsilon$ elde edilir. Dolayısıyla $s \to \left\|\left\| L_s h \right\|\right\|$ fonksiyonu süreklidir. Böylece ispat tamamlanır.

4. Tartışma ve Sonuç

Bu makalede, G ünimodüler yerel kompakt grup olmak üzere Li ve Sun (2012) tarafından tanımlanan $A_{p_1,q_1}^{p_2,q_2}(G,w)$ uzayındaki Avcı ve Gürkanlı (2007) nın ele aldığı yöntemlerle yoğunluk ve süreklilik gibi temel özellikler incelenmiştir. Böylece $A_{p_1,q_1}^{p_2,q_2}(G,w)$ uzayı ile $A_{p_1,q_1}^{p_2,q_2}(G)$ ve $\Lambda_G^{p,q}(w)$ uzaylarındaki sonuçların benzerlik gösterdiği ve bu uzaylarda bu sonuçlara dayanan ve literatürde var olan bazı özelliklerin de $A_{p_1,q_1}^{p_2,q_2}(G,w)$ uzayında araştırılabileceği saptanmıştır.

5. Kaynaklar

Arino, M. A. and Muckenhoupt, B., 1990. Maximal functions classical Lorentz spaces and Hardy' s inequality with weights for nonincreasing functions. *Transactions of the American Mathematical Society*, **320**(2), 727-735.

Avcı, H. and Gürkanlı, A. T., 2007. Multipliers and tensor products of $L(p,q)$ Lorentz spaces. *Acta Mathematica Scientia*, **27**(B)(1), 107-116.

Bonsall, F. F. and Duncan, J., 1973, Complete Normed Algebras, 80, Springer Verlag, Berlin, 230-237.

Carro, M. J., Raposo, J. A. and Soria, J., 2007, Recent Developments in the Theory of Lorentz Spaces and Weighted Inequalities, 187, no. 877, Managing editor Robert Guralnick, Memoirs of the American Mathematical Society.

Değirmen, N. ve Değirmen, İ., 2021. A_{p1,q1}^{p2,q2}(G,w) uzayı ve bazı topolojik özellikleri üzerine. *Iğdır Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü Dergisi,* **11**(2), 1468-1480.

Folland, G. B., 1995, A Course in Abstract Harmonic Analysis, CRS Press, Boca Raton, Florida, 36-47.

Halmos, P. R., 1974, Measure Theory, Second edition, Springer Verlag, New York, 73-183.

Hunt, R. 1966. On $L(p,q)$ spaces. *L'Enseignement Mathématique*, **12**, 249-276.

Li, H. and Sun, Q., 2012. Multipliers and tensor products of the weighted Lorentz spaces $\Lambda_G^{p,q}(w)$. *Georgian Mathematical Journal*, **19**, 721-740.

Yap, L. Y. H., 1969. Some remarks on convolution operators and $L(p,q)$ spaces. *Duke Mathematical Journal*, **36**, 647-658.