

## Sabun Baloncuğu Modeli ve Menelaus ile Gösterimi

Soap Bubble Model and Its Illustration with Menelaus



ANTALYA  
İL MİLLÎ EĞİTİM MÜDÜRLÜĞÜ

Tolgahan BOSTAN<sup>1\*</sup> Aliye BOSTAN<sup>1</sup> Uğur EROĞLU<sup>1</sup>

<sup>1</sup>Adana Bilim ve Sanat Merkezi, Adana, Türkiye

<sup>1</sup>Adana Science and Art Center, Adana, Turkey

\*tolgahanbostan@gmail.com  
ORCID: 0000-0002-9913-2796

aliyebostan@gmail.com  
ORCID: 0000-0001-6631-8749

ugureroglu2002@gmail.com  
ORCID: 0000-0002-3641-7196

### MAKALE BİLGİSİ / ARTICLE INFORMATION

**Geliş Tarihi / Date Received**

12.02.2021

**Kabul Tarihi / Date Accepted**

30.12.2021

**Yayın Tarihi / Date Published**

Aralık / December 2021

**Yayın Sezonu / Pub Date Season**

Aralık - Haziran / December - June

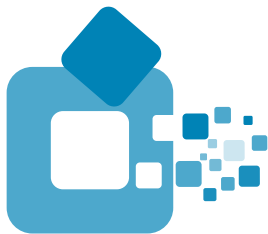
### ATIF / CITE as

Bostan, T., Bostan, A., Eroğlu, U. (2021). "Sabun Baloncuğu Modeli ve Menelaus ile Gösterimi" / "Soap Bubble Model and its Illustration With Menelaus". bilar: Bilim Armonisi Dergisi, 4 (2): 29-35. doi: 10.37215/bilar.879370

<https://dergipark.org.tr/tr/pub/bilar>

Copyright © Published by Antalya İl Millî Eğitim Müdürlüğü Since 2018, Antalya, 07100 Turkey. All rights reserved.





## Sabun Baloncuğu Modeli ve Menelaus ile Gösterimi

Soap Bubble Model and Its Illustration with Menelaus



ANTALYA  
İL MİLLÎ EĞİTİM MÜDÜRLÜĞÜ

### ÖZET

İki ve daha fazla sabun baloncuğu birleştirilip sabit bir duruma getirildiğinde, farklı yarıçaplara sahip sabun baloncuklarını düzlem üzerinde modellemek, elde edilen modeli Menelaus Teoremi ile açıklamak araştırmaya değer görülmüştür.

Bu çalışmada Plateau Yasaları ve Menelaus Teoremi göz önüne alınmıştır. Farklı yarıçaplara sahip; iki baloncuğun, üç baloncuğunun ve dört baloncuğunun birleşimlerinden oluşan geometrik şekil düzlemde ifade edilmiş ve Menelaus Teoremi ile açıklanmıştır.

Ayrıca birinci baloncuğa eklenen ikinci, üçüncü ve dördüncü baloncukların 3 boyutlu koordinat ekseninde baloncukların birbiri ile durumları incelenmiştir. Farklı yarıçaplara sahip beş baloncuğun birbiri ile yüzey temaslarının olmayacağı ispatlanmıştır.

**Anahtar Sözcükler:** Sabun baloncuğu, Plateau Yasaları, Menelaus, minimal yüzey.

### ABSTRACT

When two or more soap bubbles are combined and stabilized, modeling the soap bubbles with different radius on the plane and explaining the obtained model with Menelaus's Theorem has been considered worth researching.

In this study, Plateau's Laws and Menelaus Theorem are considered. The geometric figure consisting of the combination of two bubbles ,three bubbles and four bubbles with different radius is expressed on the plane and explained by the Menelaus Theorem.

In addition, the position of the bubbles with each other in the 3D coordinate axis of the second, third and fourth bubbles added to the first bubble was examined. It has been proven that five bubbles with different radius will not have surface contact with each other.

**Keywords:** Soap bubble, Plateau's Laws, Menelaus, minimal surface.

## 1. GİRİŞ

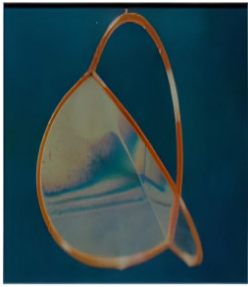
Belçikalı fizikçi Joseph Plateau sabun baloncuklarının yapısı ve özellikleri üzerine pek çok deney yürütmüş ve dört basit sonuca ulaşmıştır (Özsöylev 1998). Bunlar;

1. Bir sabun zarı (sabun köpüğünden elde edilen zar) düzgün parçacıklar topluluğundan oluşur.

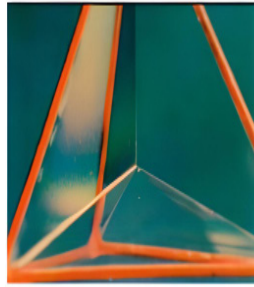
2. Her bir düzgün parçanın ortalama eğriliği (yani yüzeylerinin ortalama eğimi) sabittir

3. Üç sabun baloncuğunun yüzeyleri, birleştikleri yerde düzgün bir eğri meydana getirir ve  $120^\circ$  lik bir açıyla her bir yüzeyi böler (Şekil 2).

4. Ortaya çıkan altı eğri birbirlerine yaklaştıkları yerde bir nokta oluştururlar ve bu noktada her çift eğri arasındaki açı eşittir (yaklaşık  $109.28^\circ$ ) (Şekil 3).



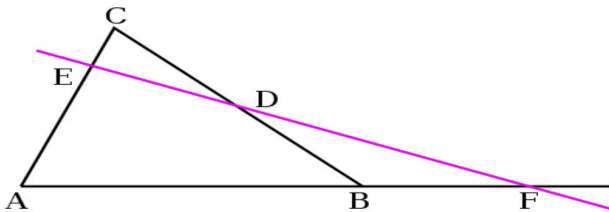
Şekil 1. Plateau'nun 3. Kuralı (Emmer, 2009)



Şekil 2. Plateau'nun 4. Kuralı (Emmer, 2009)

Plateau kanunları aslında tek bir prensibin sonucunda doğmuştur: Verilen bir hacim için en küçük yüzey alanı veren şekiller (küresel şekiller), sabun baloncuklarına benzer. Yani sabun zarlarını model alan matematiksel yüzeyler minimal yüzeylerdir. Minimal yüzeylerin iç ve dış yüzeylerindeki basınç eşit olduğu için doğal bir kararlılığa sahiplerdir (Güner 2016).

Salih Zeki; Eski Yunanlıların, astronomide doğrudan doğruya ölçemedikleri açıları ya da uzunlukları belirlemek için kullandıkları yöntemin, bir küresel dörtkenarlı (yamuk) kurup Menelaus teoreminden yararlanmak olduğunu anlatmıştır. Küresel tam dört kenarlı; küre üzerindeki üç büyük daire yayından oluşan bir küresel üçgeni, başka bir büyük dairenin kesmesiyle oluşan kapalı şekildir. Bu küresel dörtkenarının altı parçası vardır ve bu parçaların üçer üçer çarpımları birbirine eşit olur (İnönü 2005).



Şekil 3. Menelaus Teoremi

İskendireyeli Menelaus'a izafe edilen Menelaus Teoremi düzlemsel geometride üçgenler üzerine bir teoremdir (Tezer 2021; (Konopelchenko ve Schief 2002, Boo ve Meng 1996, Benitez 2007, Green 1957).

A, B ve C noktalarından oluşan ABC üçgeninde  $|BC|$ ,  $|AC|$  ve  $|AB|$  doğruları üzerinde bulunan ve üçgenin köşelerinden ayrık D, E ve F noktalarının aynı doğru üzerinde olabilmesi ancak ve ancak;

$$\frac{|AF|}{|FB|} \times \frac{|BD|}{|DC|} \times \frac{|CE|}{|EA|} = 1$$

Denkleminin sağlanması ile mümkündür.

Bu denklemde, örneğin  $|AB|$  eksi değer alabilen doğru parçalarını simgeler. Örnek olarak sadece  $|EF|$  doğrusu  $|AB|$  kenarını kestiğinde  $\frac{|AF|}{|FB|}$  artı değer alabilecek şekilde tanımlanmalıdır çünkü sadece bu durumda iki doğru parçası aynı yönde ölçülmektedir ve bu durum diğer kesirler için de geçerlidir.

### 1.1.Amaç

İki ve daha fazla sabun baloncuğu birleştirilip sabit bir duruma getirildiğinde, farklı yarıçaplara sahip sabun baloncuklarının düzlem üzerinde modellemek, elde edilen modeli Menelaus Teoremi ile açıklamak araştırmaya değer görülmüştür.

Bu çalışma, kapsamlı bir alan olan deneysel matematik konusuna mütevazı bir katkı yapmak ve doğal olarak stabil yüzeylere sahip olan sabun baloncuklarının yüzeyleri matematiksel olarak modellenerek, bu yüzey modellerinin uygulama amacıyla kullanımlarına temel oluşturmak amacıyla yapılmıştır.

## 2. MATERYAL VE METOT

Bu çalışmada Plateau Yasaları ve Menelaus Teoremi göz önüne alınmıştır. Farklı yarıçaplara sahip; iki baloncuğun, üç baloncuğun ve dört baloncuğun birleşiminde oluşan geometrik şekil düzlemde ifade edilmiş ve Menelaus Teoremi ile açıklanmıştır.

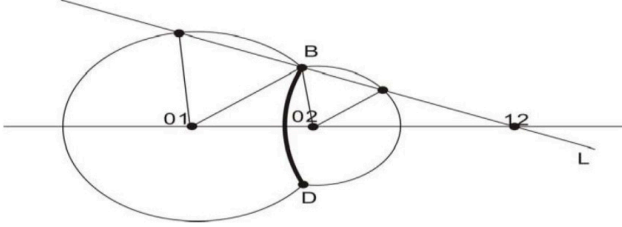
Ayrıca birinci baloncuğa eklenen ikinci, üçüncü ve dördüncü baloncukların 3 boyutlu koordinat ekseninde baloncukların birbiri ile durumları incelenmiştir. Farklı yarıçaplara sahip beş baloncuğun birbiri ile yüzey temaslarının olmayacağı ispatlanmıştır.

## 3. BULGULAR

Plateau kanunları, tek bir prensibin sonucunda doğmuştur: Verilen bir hacim için en küçük yüzey alanını veren şekiller, sabun baloncuklarına benzerler.

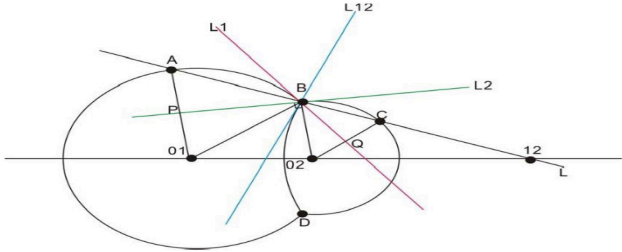
### 3.1. İki Sabun Baloncuğunun Birleşme Durumu İlişkisi

Şekil 4'te Şekil 3'te gösterildiği gibi, BD kavisli yüzey kürenin bir parçasıdır, kavisli düzlemde kürenin merkezi (de küresinin merkezidir, de küresinin merkezidir, de küresi ve küresi merkezlerinden geçen doğrunun üzerindedir).



Şekil 4. İki baloncuğun birleşmesinin şematik gösterimi

İki sabun baloncuğunun yüzeyleri, birleştikleri yerde düzgün bir eğri meydana getirir ve 120 derecelik bir açıyla her bir yüzeyi böler.

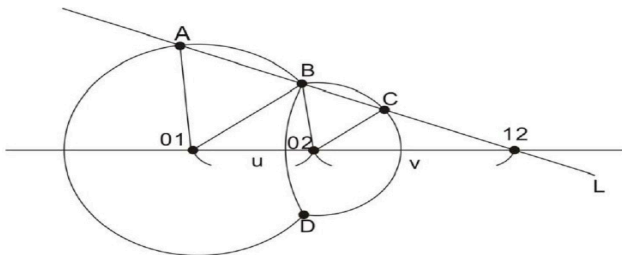


Şekil 5. Sabun baloncuğunun yüzeyleri, birleştikleri yerde düzgün bir eğri meydana getirir

Şekil 5'de gösterildiği gibi, A'dan ( A noktası O<sub>1</sub> baloncuğunun yüzeyindedir.) C'den (C noktası O<sub>2</sub> merkezli baloncuğun yüzeyindedir) O<sub>12</sub>'den ve B'den ( B noktası iki baloncuğun kesişimidir) geçen doğru L'dir. O<sub>1</sub>, O<sub>2</sub> ve O<sub>12</sub> baloncuklarının B noktasındaki teğet doğruları sırasıyla, L<sub>1</sub>, L<sub>2</sub> ve L<sub>12</sub>'dir. . O<sub>1</sub>, O<sub>2</sub> ve O<sub>12</sub> baloncuklarının yarıçapları sırasıyla r<sub>01</sub>, r<sub>02</sub> ve r<sub>12</sub>'dir. Plateau yasalarına göre PBQ = 120° olduğu görülmektedir.

$$\begin{aligned} L_2 \text{ teğet olduğundan } \widehat{PBO}_{02} &= 90^\circ \\ \widehat{O}_{02}BQ &= 30^\circ \text{ olduğundan } \widehat{CBQ} = 30^\circ \text{ dir} \\ \widehat{O}_{02}BC &= 60^\circ \text{ olduğundan } \widehat{ABO}_{01} = 60^\circ \text{ dir} \\ \widehat{O}_{01}BO_{12} &= 120^\circ \text{ olduğundan } \widehat{O}_{02}CO_{12} = 120^\circ \text{ dir} \end{aligned}$$

Buradan ;  $\widehat{O}_{01}BO_{12} \sim \widehat{O}_{02}CO_{12}$  üçgenleri benzerdir.



Şekil 6. Sabun baloncukları birleştirildiğinde oransal ilişki

$|\widehat{O}_{01}O_{02}| = u$ ,  $|\widehat{O}_{02}O_{12}| = v$  ve  $\widehat{O}_{01}BO_{12} \sim \widehat{O}_{02}CO_{12}$  Üçgen benzerliğinden,

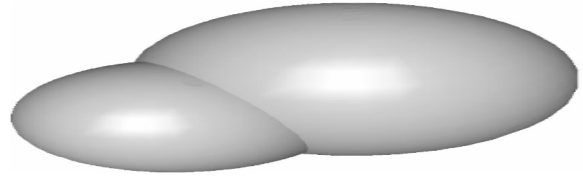
$$\frac{v}{u+v} = \frac{r_{02}}{r_{01}} \quad (1)$$

$$\frac{u}{u+v} = \frac{r_{02}}{r_{12}} \quad (2)$$

$r_{12}^{-1} : r_{01}^{-1} : r_{02}^{-1} = u : v : (u + v)$  (3) olduğu görülmektedir.

Farklı yarıçaplara sahip sabun baloncuklarını birleştirip sabit bir duruma getirdiğimizde,  $r_1 > r_2$  ve 12 noktası O<sub>1</sub> ve O<sub>2</sub> merkezli baloncuk merkezlerinin geçtiği doğru üzerinde olmak şartı ile küre merkezlerinin bulunduğu konum sebebiyle oluşan modelin yüzeyi;

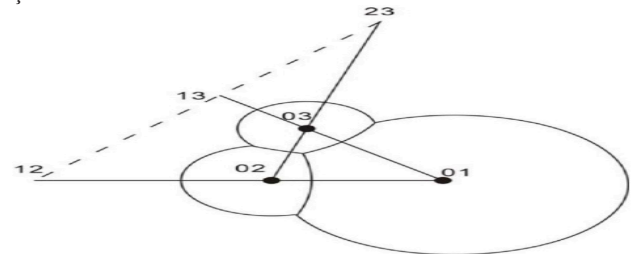
$$r_{12}^{-1} : r_{01}^{-1} : r_{02}^{-1} = u : v : (u + v) \text{ 'dir.}$$



Şekil 7. İki sabun baloncuğu birleşiminin bilgisayar simülasyonu.

### 3.2. Üç Sabun Baloncuğunun Birleşme Durumu İlişkisi

Üç farklı büyüklükte sabun baloncuğunu birleştirip sabit bir duruma getirdiğimizde küre merkezleri ilişkisini Şekil 8'de gördüğümüz gibi çizebiliriz.



Şekil 8. 3 Sabun baloncuğunun birleşmesi

Şekil 8 incelendiğinde çizim Menelaus Teoremi modeline benzemektedir.

**Hipotez 1:** Yarıçapları farklı üç sabun baloncuğu birleştirilip denge durumuna getirilsin. O<sub>12</sub> (12) noktası O<sub>1</sub> ve O<sub>2</sub> baloncuk merkezlerinden geçen doğru üzerinde, O<sub>13</sub> (13) noktası O<sub>1</sub> ve O<sub>3</sub> baloncuk merkezlerinden geçen doğru üzerinde ve O<sub>23</sub> (23) noktası O<sub>2</sub> ve O<sub>3</sub> merkezlerinden geçen doğru üzerindedir. O<sub>12</sub>, O<sub>13</sub>, O<sub>23</sub> noktaları doğrudadır. ( $r$ : yarıçap ve  $r_1 > r_2 > r_3$ ).

#### İspat 1:

Menelaus Teoremine göre eğer,

$$\frac{|\widehat{O}_{01}O_{12}|}{|\widehat{O}_{12}O_{02}|} \times \frac{|\widehat{O}_{02}O_{23}|}{|\widehat{O}_{23}O_{03}|} \times \frac{|\widehat{O}_{03}O_{13}|}{|\widehat{O}_{13}O_{01}|} = 1 \text{ ise } O_{12}, O_{13}, O_{23}$$

noktaları doğrudadır.

$$\frac{|O_{01}O_{12}|}{|O_{12}O_{02}|} = \frac{r_{02}^{-1}}{r_{01}^{-1}} \Rightarrow \frac{u+v}{v} \quad (4)$$

$$\frac{|O_{02}O_{23}|}{|O_{23}O_{03}|} = \frac{r_{03}^{-1}}{r_{02}^{-1}} \Rightarrow \frac{u+v}{v} \quad (5)$$

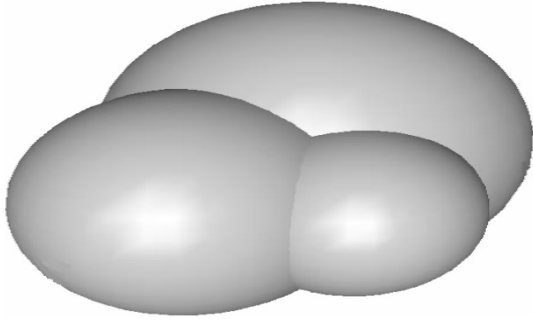
$$\frac{|O_{03}O_{31}|}{|O_{31}O_{01}|} = \frac{r_{01}^{-1}}{r_{03}^{-1}} \Rightarrow \frac{v}{u+v} \quad (6)$$

(4), (5) ve (6) çarpılırsa;

$$\frac{|O_{01}O_{12}|}{|O_{12}O_{02}|} \times \frac{|O_{02}O_{23}|}{|O_{23}O_{03}|} \times \frac{|O_{03}O_{31}|}{|O_{31}O_{01}|} = \frac{r_{02}^{-1}}{r_{01}^{-1}} \times \frac{r_{03}^{-1}}{r_{02}^{-1}} \times \frac{r_{01}^{-1}}{r_{03}^{-1}} = 1 \quad (7) \text{ elde edilir.}$$

Bu nedenle  $O_{12}, O_{13}, O_{23}$  doğruduş olduğu kanıtlanır.

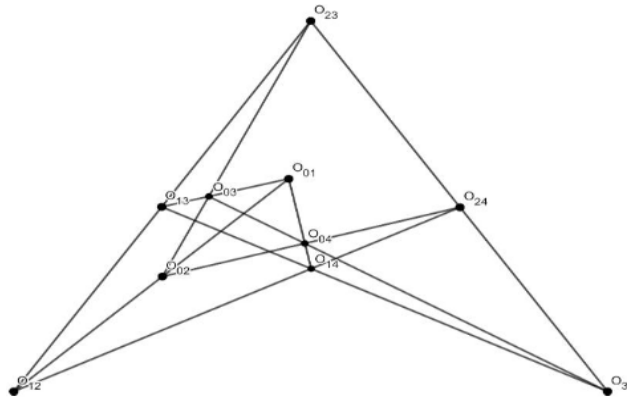
Üç farklı büyüklükte sabun baloncuklarını birleştirip sabit bir duruma getirdiğimizde; bu üç sabun baloncunun herhangi ikisinin merkezleri üzerinden geçen doğrulardan alacağımız 3 nokta doğruduştur.  $O_{12}, O_{13}, O_{23}, O_{31}, O_{13}, O_{23}$  noktaları arasında anlamlı bir oran vardır ve Menelaus Teoremine göre düzlemde çizmek mümkündür.



Şekil 9. Üç Sabun baloncuğu birleşiminin bilgisayar simülasyonu

### 3.3. Dört Sabun Baloncunun Birleşme Durumu İlişkisi

Dört farklı büyüklükte sabun baloncunun birleştirip sabit bir duruma getirdiğimizde küre merkezleri ilişkisini Şekil 10'da görüldüğü gibi çizebiliriz.



Şekil 10. Dört sabun baloncunun birleşmesinin küre merkezleri ilişkisi

Hipotez 2: Yarıçapları farklı dört sabun baloncunu birleştirilip denge durumuna getirilsin.  $O_{12}$  noktası  $O_1$  ve  $O_2$  baloncuk merkezlerinden geçen doğru üzerinde,  $O_{13}$  noktası  $O_1$  ve  $O_3$  baloncuk merkezlerinden geçen doğru üzerinde,  $O_{14}$  noktası  $O_1$  ve  $O_4$  baloncuk merkezlerinden geçen doğru üzerindedir.  $O_{23}$  noktası  $O_2$  ve  $O_3$  merkezlerinden geçen doğru üzerinde,  $O_{24}$  noktası  $O_2$  ve  $O_4$  baloncuk-

merkezlerinden geçen doğru üzerindedir.  $O_{34}$  noktası  $O_3$  ve  $O_4$  baloncuk merkezlerinden geçen doğru üzerindedir.  $O_{12}, O_{13}, O_{23}$  noktaları doğruduştur.  $O_{12}, O_{14}, O_{24}$  noktaları doğruduştur.  $O_{13}, O_{14}, O_{34}$  noktaları doğruduştur.  $O_{23}, O_{24}, O_{34}$  noktaları doğruduştur. ( $r_1 > r_2 > r_3 > r_4$ )

#### İspat 2:

Denklem (7)'ye göre  $O_{01}, O_{02}, O_{03}$  noktalarını alalım.

$O_{01} \Rightarrow O_{12} \Rightarrow O_{02} \Rightarrow O_{23} \Rightarrow O_{03} \Rightarrow O_{13} \Rightarrow O_{01}$  sırasını izleyelim.

$$\frac{|O_{01}O_{12}|}{|O_{12}O_{02}|} \times \frac{|O_{02}O_{23}|}{|O_{23}O_{03}|} \times \frac{|O_{03}O_{31}|}{|O_{31}O_{01}|} = 1 \quad (8)$$

Aynı nedenden dolayı;

$$\frac{|O_{01}O_{12}|}{|O_{12}O_{02}|} \times \frac{|O_{02}O_{24}|}{|O_{24}O_{04}|} \times \frac{|O_{04}O_{14}|}{|O_{14}O_{01}|} = 1 \quad (9)$$

$$\frac{|O_{01}O_{13}|}{|O_{13}O_{03}|} \times \frac{|O_{03}O_{34}|}{|O_{34}O_{04}|} \times \frac{|O_{04}O_{14}|}{|O_{14}O_{01}|} = 1 \quad (10)$$

$$\frac{|O_{02}O_{23}|}{|O_{23}O_{03}|} \times \frac{|O_{03}O_{34}|}{|O_{34}O_{04}|} \times \frac{|O_{04}O_{24}|}{|O_{24}O_{02}|} = 1 \quad (11)$$

(8), (9) 'a bölündüğünde

$$\frac{|O_{02}O_{23}|}{|O_{23}O_{03}|} \times \frac{|O_{03}O_{31}|}{|O_{31}O_{01}|} \times \frac{|O_{01}O_{14}|}{|O_{14}O_{04}|} \times \frac{|O_{04}O_{42}|}{|O_{42}O_{02}|} = 1 \quad (12) \text{ elde ederiz.}$$

( $O_{13}$  ile  $O_{31}$  noktaları ve  $O_{24}$  ile  $O_{42}$  noktaları aynı noktalardır)

Denklemi gözlemlediğimizde bu durumun bir kuralı var gibi görünüyor.  $O_{02}$ 'den  $O_{03}$ 'e,  $O_{03}$ 'ten  $O_{04}$ 'e,  $O_{04}$ 'ten  $O_{01}$ 'e bir yolu birleştiren sürekli bir köprüdür.

$p, q, r, s$ , indisleri için  $p, q, r, s \in \{1, 2, 3, 4\}$  ve  $p, q, r, s$  birbirinden farklıdır diyelim.

$$\frac{|O_{0p}O_{pq}|}{|O_{pq}O_{0q}|} \times \frac{|O_{0q}O_{qr}|}{|O_{qr}O_{0r}|} \times \frac{|O_{0r}O_{rp}|}{|O_{rp}O_{0p}|} = 1 \quad (13)$$

$$\frac{|O_{0p}O_{pq}|}{|O_{pq}O_{0q}|} \times \frac{|O_{0q}O_{qs}|}{|O_{qs}O_{0s}|} \times \frac{|O_{0s}O_{sp}|}{|O_{sp}O_{0p}|} = 1 \quad (14)$$

(13)'ü (14)'e bölelim.

$$\frac{|O_{0q}O_{qr}|}{|O_{qr}O_{0r}|} \times \frac{|O_{0r}O_{rp}|}{|O_{rp}O_{0p}|} \times \frac{|O_{qs}O_{0s}|}{|O_{0q}O_{qs}|} \times \frac{|O_{sp}O_{0p}|}{|O_{0s}O_{sp}|} = 1$$

Sıraya dizersek;

$$\frac{|O_{0q}O_{qr}|}{|O_{qr}O_{0r}|} \times \frac{|O_{0r}O_{rp}|}{|O_{rp}O_{0p}|} \times \frac{|O_{0p}O_{sp}|}{|O_{sp}O_{0s}|} \times \frac{|O_{0s}O_{qs}|}{|O_{qs}O_{0q}|} = 1 \quad (15)$$

Yukarıdaki sonuçtan diyebiliriz ki, baloncuklardan herhangi birinin merkezinden birini seçersek, belirli bir sırayla diğer üç baloncunun merkezinden geçer ve iki baloncuk arasındaki merkez köprülenir.

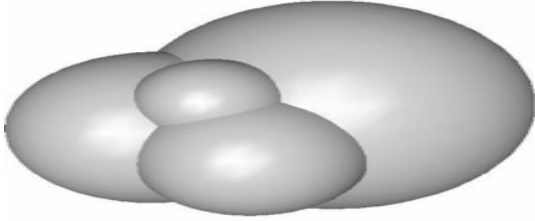
Örneğin: eğer;  $p = 1, q = 2, r = 4, s = 3$

$$\frac{|O_{02}O_{24}|}{|O_{24}O_{04}|} \times \frac{|O_{04}O_{41}|}{|O_{41}O_{01}|} \times \frac{|O_{01}O_{13}|}{|O_{13}O_{03}|} \times \frac{|O_{03}O_{32}|}{|O_{32}O_{02}|} = 1$$

( $O_{14}$  ile  $O_{41}$  noktaları ve  $O_{23}$  ile  $O_{32}$  noktaları aynı noktalardır)

Yarıçapları farklı dört sabun baloncuğu birleştirilip denge durumuna getirilsin.  $O_{12}$  noktası  $O_1$  ve  $O_2$  baloncuk merkezlerinden geçen doğru üzerinde,  $O_{13}$  noktası  $O_1$  ve  $O_3$  baloncuk merkezlerinden geçen doğru üzerinde,  $O_{14}$  noktası  $O_1$  ve  $O_4$  baloncuk merkezlerinden geçen doğru üzerindedir.  $O_{23}$  noktası  $O_2$  ve  $O_3$  merkezlerinden geçen doğru üzerinde,  $O_{24}$  noktası

$O_2$  ve  $O_4$  baloncuk merkezlerinden geçen doğru üzerindedir.  $O_{34}$  noktası  $O_3$  ve  $O_4$  baloncuk merkezlerinden geçen doğru üzerindedir.  $O_{12}, O_{13}, O_{23}$  noktaları doğrudadır.  $O_{12}, O_{14}, O_{24}$  noktaları doğrudadır.  $O_{13}, O_{14}, O_{34}$  noktaları doğrudadır.  $O_{23}, O_{24}, O_{34}$  noktaları doğrudadır ( $r_1 > r_2 > r_3 > r_4$ ).  $O_1, O_2, O_3, O_4, O_{12}, O_{13}, O_{14}, O_{23}, O_{24}, O_{34}$  noktaları arasında anlamlı bir oran vardır ve Menelaus Teoremine göre düzlemde çizmek mümkündür.



Şekil 11. Dört sabun baloncuğu birleşiminin bilgisayar simülasyonu

### 3.4. Dört Baloncuğun Birleşiminde n Tane Farklı Nokta Seçimi

Üç sabun baloncuğu birleştiği zaman küre merkezindeki bağlantının Menelaus Teoreminin modeli olduğunu biliyoruz.

**Hipotez 3:** Dört sabun baloncuğu birleşiminde,  $n - 1$  tane farklı nokta seçilirse yine Menelaus Teoreminin modeli oluşturulur. ( $n \geq 4$ )

#### İspat 3:

Bir önceki başlık(3.3) altında yazılan (15) ifadesinin “n tane farklı nokta seçimi” için genişletilmesiyle;

$$\frac{|O_{0a_1}O_{a_1a_2}|}{|O_{a_1a_2}O_{0a_2}|} \times \frac{|O_{0a_2}O_{a_2a_3}|}{|O_{a_2a_3}O_{0a_3}|} \cdots \frac{|O_{0a_{n-2}}O_{a_{n-2}a_{n-1}}|}{|O_{a_{n-2}a_{n-1}}O_{0a_{n-1}}|} \times \frac{|O_{0a_{n-1}}O_{a_{n-1}a_1}|}{|O_{a_{n-1}a_1}O_{0a_1}|} = 1 \quad (16)$$

elde edilir.

( $a_i(i=1, 2, \dots, n-1)$  1 ile  $n-1$  arasında ve birbirine eşit olmayan sayılardan oluşmaktadır (örnek:  $a_1=1, a_2=2 \dots a_{n-2}=n-2$  ve  $a_{n-1}=n-1$ )).

(7) denklemine göre;

$$\frac{|O_{0a_{n-1}}O_{a_{n-1}a_1}|}{|O_{a_{n-1}a_1}O_{0a_1}|} \times \frac{|O_{0a_1}O_{a_1a_n}|}{|O_{a_1a_n}O_{0a_n}|} \times \frac{|O_{0a_n}O_{a_n a_{n-1}}|}{|O_{a_n a_{n-1}}O_{0a_{n-1}}|} = 1 \quad (17)$$

(16) ifadesi (17) ifadesine bölünürse

$$\frac{|O_{0a_1}O_{a_1a_2}|}{|O_{a_1a_2}O_{0a_2}|} \times \frac{|O_{0a_2}O_{a_2a_3}|}{|O_{a_2a_3}O_{0a_3}|} \cdots \frac{|O_{0a_{n-1}}O_{a_{n-1}a_n}|}{|O_{a_{n-1}a_n}O_{0a_n}|} \times \frac{|O_{0a_n}O_{a_n a_1}|}{|O_{a_n a_1}O_{0a_1}|} = 1 \quad (18)$$

elde edilir.

Dört sabun baloncuğu birleşiminde,  $n-1$  tane farklı nokta seçilirse yine Menelaus Teoreminin modeli oluşturulur ( $n \geq 4$ ).

### 3.5. Farklı Büyüklükte Birbirine Temas Eden Sabun Baloncuklarının Birbirine Göre Durumu

#### 3.5.1 Bir Sabun Baloncuğu

$$O_i(x_i, y_i, z_i)$$

$$|O_i O_j| = u_{ij} = \sqrt{r_i + r_j - r_i r_j}$$

$$O_1 = (0, 0, 0)$$

#### 3.5.2 Bir Baloncuğa İkinci Baloncuğun Bağlanma Durumu

$$|O_1 O_2| = u_{12}$$

$$O_2: x_2^2 + y_2^2 + z_2^2 = u_{12}^2$$

$$O_2(x_2, 0, 0)$$

$$x_2 = \pm u_{12}$$

$$O_2(u_{12}, 0, 0)$$

#### 3.5.3 İki Baloncuğa Üçüncü Baloncuğun Bağlanma Durumu

$$|O_1 O_3| = u_{13}$$

$$|O_2 O_3| = u_{23}$$

$$(x_3, u_{12})^2 + y_3^2 + z_3^2 = u_{23}^2 \quad (19)$$

$$x_3^2 + y_3^2 + z_3^2 = u_{13}^2 \quad (20)$$

$$(20) - (19) \Rightarrow x_3 = \frac{u_{13}^2 + u_{12}^2 - u_{23}^2}{2u_{12}}$$

(20)'ye geri döndüğümüzde;

$$\Rightarrow y_3^2 + z_3^2 = u_{13}^2 - x_3^2$$

$$O_3 \text{ için } \begin{cases} x_3 = \frac{u_{13}^2 + u_{12}^2 - u_{23}^2}{2u_{12}} \\ x_3^2 + y_3^2 + z_3^2 = u_{13}^2 \end{cases} \text{ dairedeki herhangi bir nokta}$$

$$z_3 = 0 \text{ ise } y_3 = \sqrt{u_3^2 - x_3^2}, \sqrt{x_3^2 - u_3^2}$$

Yarıçapları farklı iki baloncuga üçüncü bir baloncuk birleştirildiğinde, üçüncü baloncugun merkezi  $O_1$  merkezli  $u_{13}$  yarıçaplı çember üzerinde herhangi bir noktada ya da  $O_2$  merkezli  $u_{23}$  yarıçaplı daire üzerinde herhangi bir noktadadır.

### 3.5.4 Üç Baloncuga Dördüncü Baloncugun Bağlanma Durumu

$$|O_1 O_4| = u_{14}$$

$$|O_2 O_4| = u_{24}$$

$$|O_3 O_4| = u_{34}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x_4^2 + y_4^2 + z_4^2 = u_{14}^2 & (21) \\ (x_4 - u_{12})^2 + y_4^2 + z_4^2 = u_{24}^2 & (22) \\ (x_4 - x_3)^2 + (y_4 - y_3)^2 + z_4^2 = u_{34}^2 & (23) \end{cases}$$

$$(21) - (22) \Rightarrow x_4 = \frac{u_{12}^2 + u_{14}^2 - u_{24}^2}{2u_{12}} \quad (24)$$

$$(22) - (23) \Rightarrow y_4 = \frac{-2u_{12}x_4 + u_{12}^2 + 2x_3x_4 - x_3^2 - y_3^2 - u_{24}^2 + u_{34}^2}{-2y_3} \quad (25)$$

(24), (25), (21)'i yerine yazdığımızda

$$\Rightarrow z_4 = \sqrt{-x_4^2 - y_4^2 + u_{14}^2}, \sqrt{-x_4^2 - y_4^2 + u_{14}^2}$$

Yarıçapları farklı birbiri ile birleşmiş üç baloncuga dördüncü bir baloncuk bağlandığında, dördüncü baloncugun merkezi iki noktadan birini alabilir.

### 3.5.5 Dört Baloncuga Beşinci Baloncugun Bağlanma Durumu

$$\Rightarrow x_5^2 + y_5^2 + z_5^2 = u_{15}^2 \quad (26)$$

$$\Rightarrow (x_5 - u_{12})^2 + y_5^2 + z_5^2 = u_{25}^2 \quad (27)$$

$$\Rightarrow (x_5 - x_3)^2 + (y_5 - y_3)^2 + z_5^2 = u_{35}^2 \quad (28)$$

$$\Rightarrow (x_5 - x_4)^2 + (y_5 - y_4)^2 + (z_5 - z_4)^2 = u_{45}^2 \quad (29)$$

(26-27)

$$\Rightarrow x_5 = \frac{-u_{25}^2 + u_{12}^2 + u_{15}^2}{2u_{12}} \quad (30)$$

$$(27) - (28) \Rightarrow y_5 = \frac{-2u_{12}x_5 + u_{12}^2 + 2x_3x_5 - x_3^2 - y_3^2 - u_{25}^2 + u_{35}^2}{-2y_3} \quad (31)$$

(30), (31), (28) yerine koyduğumuzda;

$$\Rightarrow z_5 = \sqrt{-x_5^2 - y_5^2 + u_{15}^2}, \sqrt{-x_5^2 - y_5^2 + u_{15}^2}$$

$y_3 < 0, z_4 > 0, z_5 < 0$  (29)'da yerine koyduğumuzda

$$\begin{aligned} & (x_5 - x_4)^2 + (y_5 - y_4)^2 + (z_5 - z_4)^2 - u_{45}^2 = \\ & (2((3r_1^2r_2^2 + 3r_2^2r_1^2 + 3r_3^2r_2^2 - 2r_3^2r_1r_2 - 2r_1r_3r_2^2 - 2r_1^2r_3r_2)(-4r_1^2r_3r_2 + 2r_1^2r_3r_2^2 + \\ & 2r_1^2r_2^2r_4^2 + 2r_4^2r_3r_1^2 - r_1^2r_4r_3r_2 - r_1r_4^2r_3r_2 - r_4^2r_1r_3r_2^2 - r_1^2r_4r_3r_2^2 - r_1r_4r_3r_2^2 \\ & + 2r_4^2r_3r_2^2))^{1/2}((3r_1^2r_2^2 + 3r_3^2r_1^2 + 3r_3^2r_2^2 - 2r_3^2r_1r_2 - 2r_1r_3r_2^2 - 2r_1^2r_3r_2)(-r_1^2r_3r_2r_2 \\ & - r_1^2r_5^2r_3r_2 + 2r_5^2r_3r_2^2 + 2r_1^2r_5^2r_3^2 + 2r_1^2r_3^2r_2^2 - r_1r_5^2r_3^2r_2 + 2r_1^2r_5^2r_2^2 - r_1r_5r_3^2r_2^2 - r_1^2r_5^2r_3 \\ & - r_1r_5^2r_3r_2^2))^{1/2} - 3r_5r_4^4r_3r_2^4 - r_5r_1^4r_2^3r_3^2 - r_5r_1^4r_3^2r_2^2 - 3r_5r_4^4r_3^2r_2 - r_5r_1^4r_2^3r_3^2 + 6r_5r_1^4r_2^3r_3^2 \\ & - r_5r_1^4r_3^2r_2^2 - r_5r_1^4r_2^3r_3^2 - r_5r_1^4r_2^3r_3^2 - 3r_5r_3^4r_2^4r_1 - 3r_4r_5^4r_3r_2^4 - r_4r_1^4r_3r_2^2 - r_4r_1^4r_3^2r_2^2 - r_4r_1^4r_3^2r_2^2 \\ & - 3r_4r_1^4r_3r_2^2 - r_4r_1^4r_3^2r_2^2 + 6r_4r_1^4r_3^2r_2^2 - r_4r_1^4r_3^2r_2^2 - r_4r_1^4r_3^2r_2^2 + 3r_5r_4r_3^4r_2^4 + 3r_4r_5r_4^4r_2^4 \\ & + 3r_4r_5r_3^4r_1^4 - r_4r_1^4r_2^3r_3^2 - 3r_4r_3^4r_2^4r_1 - 2r_4r_5r_4^4r_2^3r_3 + 6r_4r_5r_1^4r_2^3r_2^2 - 2r_4r_5r_1^4r_3^2r_2^2 \\ & - 2r_4r_5r_1^4r_2^3r_3^2 - 2r_4r_5r_3^4r_2^3r_2^2 - 2r_4r_5r_1^4r_3^2r_2^2 - 2r_4r_5r_3^4r_1^2r_2 + 6r_4r_5r_1^4r_2^3r_3^2 - 2r_4r_5r_1^4r_3^2r_3^2 \\ & + 6r_4r_5r_3^4r_1^2r_2^2 - 2r_4r_5r_3^4r_1^2r_2^2 - 2r_4r_5r_1^4r_3^2r_2^4 - 2r_4r_5r_3^4r_2^2r_1 + 12r_3^4r_2^4r_1^2 + 12r_4^4r_2^4r_3^2 \\ & - 8r_4^4r_2^3r_3^2 + 12r_4^4r_3^2r_2^2 - 8r_4^4r_3^2r_2^2 - 8r_4^4r_3^2r_2^2)/(9r_3^4r_2^4 + 9r_3^4r_1^4 + 9r_4^4r_2^4 + 22r_4^4r_1^2r_2^2 \\ & - 12r_3^4r_1^2r_2^2 - 12r_1^4r_2^3r_3^2 - 4r_1^4r_3^2r_2^2 - 4r_1^4r_2^3r_3^2 - 12r_1^4r_2^3r_3^2 - 12r_1^4r_2^3r_3^2 + 22r_1^4r_3^2r_2^2 \\ & - 12r_1^4r_3^2r_2^2 - 4r_1^4r_3^2r_2^2 + 22r_1^4r_2^3r_3^2 - 12r_3^4r_2^3r_1) \\ & \text{Yukarıdaki denklem } 0''\text{a eşit olduğundan} \\ & r_5 = ((r_1r_2r_3 + r_1r_4r_3 + r_1r_4r_2 + r_2r_3r_4 + 2(3r_1^2r_2^2r_3r_2 - 6r_1^2r_2^2r_4^2 - 6r_4^2r_3^2r_2^2 \\ & + 3r_2^2r_4r_2^2r_2 + 3r_1r_4^2r_2^2r_2 + 3r_4^2r_1r_3r_2^2 + 3r_1^2r_4r_3r_2^2 + 3r_1r_4r_3r_2^2 - 6r_4^2r_3^2r_2^2)^{1/2})r_4r_3r_2r_1)/ \\ & (5r_1^2r_3^2r_2^2 + 5r_1^2r_2^2r_4^2 - 2r_1^2r_4r_3r_2^2 - 2r_1^2r_4r_3r_2^2 - 2r_4^2r_1r_3r_2^2 + 5r_4^2r_3^2r_1^2 - 2r_1r_4r_3r_2^2 \\ & - 2r_4^2r_1r_3r_2^2 - 2r_1r_4r_2^3r_2 + 5r_4^2r_3^2r_2^2) \end{aligned}$$

$r_5$ 'in çözümü varsa yukarıdaki formülü izleriz. Daha sonra pay kısmında kök sayısındaki değer pozitif veya 0 olmalıdır.

$$3(r_1^2r_2^2r_3r_4 + r_1^2r_2^2r_2r_4 + r_1^2r_4r_2r_3 + r_2^2r_2r_1r_4 + r_2^2r_2r_1r_3 + r_3^2r_4r_1r_2) - 6(r_1^2r_2^2r_3^2$$

$$+ r_1^2r_2^2r_4^2 + r_1^2r_3^2r_4^2 + r_2^2r_3^2r_4^2) \geq 0$$

Eşitsizliğin nedeni;

$$\Rightarrow 3\left(r_1^2r_2^2r_3r_4 - \frac{1}{2}(r_1^2r_2^2r_3^2 + r_1^2r_2^2r_4^2)\right) + 3\left(r_1^2r_2^2r_2r_4 - \frac{1}{2}(r_1^2r_2^2r_3^2 + r_1^2r_2^2r_4^2)\right)$$

$$+ 3\left(r_1^2r_4^2r_2r_3 - \frac{1}{2}(r_1^2r_2^2r_4^2 + r_1^2r_3^2r_4^2)\right) + 3\left(r_2^2r_3^2r_1r_4 - \frac{1}{2}(r_1^2r_2^2r_3^2 + r_2^2r_3^2r_4^2)\right)$$

$$+ 3\left(r_2^2r_4^2r_1r_3 - \frac{1}{2}(r_1^2r_2^2r_4^2 + r_2^2r_3^2r_4^2)\right) + 3\left(r_3^2r_4^2r_1r_2 - \frac{1}{2}(r_1^2r_2^2r_3^2 + r_2^2r_3^2r_4^2)\right)$$

$$- \frac{3}{2}(r_1^2r_2^2r_3^2 + r_1^2r_2^2r_4^2 + r_1^2r_3^2r_4^2 + r_2^2r_3^2r_4^2) \leq -\frac{3}{2}(r_1^2r_2^2r_3^2 + r_1^2r_2^2r_4^2 + r_1^2r_3^2r_4^2 + r_2^2r_3^2r_4^2)$$

$$\Rightarrow -\frac{3}{2}(r_1^2r_2^2r_3^2 + r_1^2r_2^2r_4^2 + r_1^2r_3^2r_4^2 + r_2^2r_3^2r_4^2) < 0$$

$r_5$  hayali bir sayıdır; bu sebeple dört baloncuga, tüm baloncukların yüzeyi birbirine temas edecek şekilde 5. baloncuk bağlanamaz.

## 4. SONUÇ VE TARTIŞMA

Farklı yarıçaplara sahip sabun baloncuklarını birleştirip sabit duruma getirdiğimizde,  $r_1 > r_2$  ve  $0_{12}$  noktası ve  $0_1$  ve  $0_2$  merkezli baloncuk merkezlerinin geçtiği doğru üzerinde olmak şartı ile küre merkezlerinin bulunduğu konum sebebiyle oluşan modelin yüzeyi;  $|0_{01}0_{02}| = u$  ve  $|0_{02}0_{12}| = v$  olmak üzere;

$$r^{-1}_{12} : r^{-1}_{01} : r^{-1}_{02} = u : v : (u+v)$$

Üç farklı yarıçapa sahip sabun baloncuğu birleştiğinde, üç yeni küresel yüzey oluşur. Bu üç sabun baloncuğunun herhangi ikisinin merkezleri üzerinden geçen doğrulardan alacağımız 3 nokta doğrudadır.  $0_1$ ,  $0_2$ ,  $0_3$ ,  $0_{12}$ ,  $0_{13}$ ,  $0_{23}$  noktaları arasında anlamlı bir oran vardır ve Menelaus Teoremine göre düzlemde çizmek mümkündür.

$$\frac{|0_{01}0_{12}|}{|0_{12}0_{02}|} \times \frac{|0_{02}0_{23}|}{|0_{23}0_{03}|} \times \frac{|0_{03}0_{13}|}{|0_{13}0_{01}|} = \frac{r^{-1}_{02}}{r^{-1}_{01}} \times \frac{r^{-1}_{03}}{r^{-1}_{02}} \times \frac{r^{-1}_{01}}{r^{-1}_{03}} = 1$$

Dört farklı yarıçapa sahip sabun baloncuğu birleştiğinde, dört yeni küresel yüzey oluşur.  $0_{12}$  noktası  $0_1$  ve  $0_2$  baloncuk merkezlerinden geçen doğru üzerinde,  $0_{13}$  noktası  $0_1$  ve  $0_3$  baloncuk merkezlerinden geçen doğru üzerinde,  $0_{14}$  noktası  $0_1$  ve  $0_4$  baloncuk merkezlerinden geçen doğru üzerindedir.  $0_{23}$  noktası  $0_2$  ve  $0_3$  merkezlerinden geçen doğru üzerinde,  $0_{24}$  noktası  $0_2$  ve  $0_4$  baloncuk merkezlerinden geçen doğru üzerindedir.  $0_{34}$  noktası  $0_3$  ve  $0_4$  baloncuk merkezlerinden geçen doğru üzerindedir.  $0_{12}$ ,  $0_{13}$ ,  $0_{23}$  noktaları doğrudadır.  $0_{12}$ ,  $0_{14}$ ,  $0_{24}$  noktaları doğrudadır.  $0_{13}$ ,  $0_{14}$ ,  $0_{34}$  noktaları doğrudadır.  $0_{23}$ ,  $0_{24}$ ,  $0_{34}$  noktaları doğrudadır ( $r_1 > r_2 > r_3 > r_4$ ).  $0_1$ ,  $0_2$ ,  $0_3$ ,  $0_4$ ,  $0_{12}$ ,  $0_{13}$ ,  $0_{14}$ ,  $0_{23}$ ,  $0_{24}$ ,  $0_{34}$  noktaları arasında anlamlı bir oran vardır ve Menelaus Teoremine göre düzlemde çizmek mümkündür.

$$\frac{|0_{02}0_{23}|}{|0_{23}0_{03}|} \times \frac{|0_{03}0_{31}|}{|0_{31}0_{01}|} \times \frac{|0_{01}0_{14}|}{|0_{14}0_{04}|} \times \frac{|0_{04}0_{42}|}{|0_{42}0_{02}|} = 1$$

Dört sabun baloncuğu birleşiminde, n-1 tane farklı nokta seçilirse yine Menelaus Teoreminin modeli oluşturulur. ( $n \geq 4$ ).

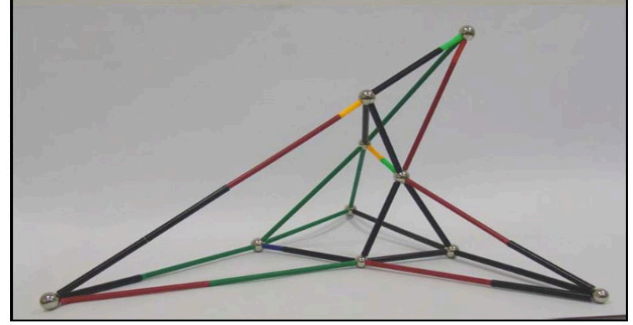
$$\frac{|0_{0a_1}0_{a_1a_2}|}{|0_{a_1a_2}0_{0a_2}|} \times \frac{|0_{0a_2}0_{a_2a_3}|}{|0_{a_2a_3}0_{0a_3}|} \cdots \frac{|0_{0a_{n-1}}0_{a_{n-1}a_n}|}{|0_{a_{n-1}a_n}0_{0a_n}|} \times \frac{|0_{0a_n}0_{a_n a_1}|}{|0_{a_n a_1}0_{0a_1}|} = 1 \quad (18)$$

$0_1$  ve  $0_2$  merkezli iki farklı büyüklükte sabun baloncuğunu birleştirip sabit bir duruma getirdiğimizde,  $0_2$  merkezi  $0_1$  merkezli baloncuğun yüzeyindedir ( $0_1$  merkezli baloncuğun yarıçapı  $r_1$ ).

Yarıçapları farklı iki baloncuğa üçüncü bir baloncuk birleştirildiğinde, üçüncü baloncuğun merkezi  $0_1$  merkezli  $r_{13}$  yarıçaplı çember üzerinde herhangi bir noktada ya da  $0_2$  merkezli  $r_{23}$  yarıçaplı daire üzerinde herhangi bir noktadadır.

Yarıçapları farklı birbiri ile birleşmiş üç baloncuğa dördüncü bir baloncuk bağlandığında, dördüncü baloncuğun merkezi iki noktadan birini alabilir.

Yüzeyleri birbirine değen 5 sabun baloncuğu birleştirilemez.



Şekil 12. Geomag kullanılarak yapılan dört baloncuğun birleşim modeli

## KAYNAKLAR

- Benitez, J. (2007). A unified proof of Ceva and Menelaus' theorems using projective geometry. *Journal for Geometry and Graphics*, 11(1): 39-44.
- Boo, H. K., Meng, K. K. (1996). On Menelaus' Theorem. *Emmer, M.* (2009). The onset of bubble vibration.
- Green, H. G. (1957). On the theorems of Ceva and Menelaus. *The American Mathematical Monthly*, 64(5): 354-357.
- Güner, Y.R. (2016). Üç Yönlü Periyodik Minimal Yüzeyler İle Oluşturulan Bir Tasarım Önerisi. Master's Thesis. İstanbul Teknik Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü. İstanbul.
- İnönü, E. (2005). Salih Zeki ve Asâr-I Bâkiye. *Osmanlı Bilimi Araştırmaları*, 7.(1): 1-21.
- Konopelchenko, B. G., Schief, W. K. (2002). Menelaus' theorem, Clifford configurations and inverse geometry of the Schwarzian KP hierarchy. *Journal of Physics A: Mathematical and General*, 35(29): 6125.
- Özsöylev, H. N. (1998). Sabun Baloncuklarıyla Deneysel Matematik. *Bilim ve Teknik*, (06): 44-48.
- Tezer, C. (2021). Menelaus ve Ceva Teoremleri. <<http://www.matematikdunyasi.org/?article=menealaus-ve-ceva-teoremleri>> Son Erişim: 15.09.2021