Matematik Öğretmen Adaylarında İki Değişkenli Fonksiyonların Limiti Kavramının Yapılandırılmasının İncelenmesi *

Abdullah Çağrı BİBER[1] & Ziya ARGÜN[2]

Özet: Bu araştırmanın amacı, iki değişkenli fonksiyonlarda limit kavramının matematik öğretmen adayları tarafından nasıl yapılandırıldığını incelemektir. Burada ortaöğretim matematik öğretmen adaylarının limit kavramının öğrenilmesinde güçlük çektikleri noktalar tespit edilmeye çalışılmış, elde edilen bilgi ve deneyimlerin genel anlamda limit kavramının soyutlanmasında, yapılandırılmasında ve öğretiminin geliştirilmesinde kullanılabileceği düşünülmektedir. Araştırma için bir devlet üniversitesinin orta öğretim fen ve matematik alan eğitimi bölümü matematik öğretmenliği anabilim dalı 2. sınıfında öğrenim gören 37 öğrenciye açık uçlu sorulardan oluşan bir yazılı anket uygulanmış ve bazı adaylarla yarı yapılandırılmış görüşmeler yürütülmüştür. Bu makale çerçevesinde konu ile doğrudan ilişkili olan 3 soruya öğrencilerin verdikleri cevapların analizine ve adaylarla yapılan mülakatın sonuçlarına yer verilmiştir. Elde edilen bulgulara göre; "iki değişkenli bir fonksiyonun bir noktada limiti varsa bu limit, limitin arandığı noktaya yaklaşma şeklinden bağımsızdır" ifadesinin matematiksel olarak ne anlama geldiğini adayların tam olarak anlayamadıkları görülmektedir.
Anahtar Sözcükler: İki değişkenli fonksiyonlar, limit, kavram

Abstract: *Investigating the Mathematics Pre-service Teachers' Construction of Function of Two Variables Limit Concept.* The purpose of this study is to investigate how prospective secondary mathematics teachers construct the limit concept functions of two variables in their mind. To achieve this purpose, first we tried the determine the points which prospective secondary mathematics teachers have some understanding difficulties related with the limit concept and second we tried to find out how they use their knowledge which they already had about the limit concept of single variables when they were constructing the limit concept functions of two variables in their mind. To collect the data, we orientated a written questionnaire consisting of open-ended questions to the 37 candidates who were 2nd class students in the Department of Secondary Mathematics Education of a state education faculty. According to the findings which were obtained from the analysis of the data, the candidates couldn't understand what is the meaning of "if it is exist, the limit of a function of two variables is independent from the approximation to the searched point
Key Words: Turkish, Vocabulary, Idiom, Teaching Idiom.

Giriş

Kavram öğrenme, davranışçı ve bilişsel yaklaşımlara göre farklı tanımlanır. Davranışçı yaklaşımı benimseyen eğitim psikologlarına göre kavramlar, bireyin uyarıcı tepki arasında bağ kurmasıyla öğrenilir. Bilişsel yaklaşımı benimseyen eğitim psikologlarına göre, kavramı öğrenmek bellek sürecinde daha önce öğrenilen ilgili bilgilerin hatırlanarak esnek algılarla yeniden yapılandırılması işidir, bunun için bireyin ilgili kavramların bütününü dikkate alarak, anlam ağı kurarak, ilkeler oluşturması ve şemalar geliştirmesi gerekli görülür. Problem çözme yöntemi önceliklidir. Bireyin farkındalık düzeyi, istekli olması, algılama sürecindeki esnekliği ve önceki tecrübeleri bireyin kavram geliştirmesinde önemli rolü olan dinamik etkenlerdir (Ülgen 2004).

Bilişsel yaklaşıma göre kavram öğrenmek için çeşitli yöntemler vardır, ancak kavram hangi öğrenme yöntemi ile öğrenilirse öğrenilsin bu öğrenme iki aşamada gerçekleştirilir. İlk aşama kavram oluşturmadır. Kavram oluşturma, genelleme yapmaya ve tecrübe edinmeye dayalıdır. Birey uyaranların benzer ve farklı yanlarını algılayarak, genellemeler yapar. Kavram geliştirme ise bireyin oluşturduğu ya da kazandığı kavramın nitelik açısından olumlu yönde artış kaydetmesine işaret eder (Ülgen, 1996).

O halde bilişsel yaklaşıma göre daha önce öğrenilen ilgili bilgiler, kavram bütünlüğü ve istek, kavram öğrenmenin olmazsa olmazlarıdır. Ayrıca kavram oluşturma genelleme yapmaya dayalı olup, kavram geliştirme ise kazanılan kavramın nitelik açısından olumlu yönde artış kaydetmesiyle mümkün olmaktadır. Bu gerçekler ışığında bu çalışmada, kendileri için yeni bir kavram olan "iki değişkenli fonksiyonlarda limit" kavramını araştırmaya katılan matematik öğretmen adaylarının nasıl yapılandırdıkları araştırılmıştır.

---

* Bu makale Abdullah Çağrı BİBER'in doktora tezinden üretilmiştir.
[1] Abdullah Çağrı BİBER, Dr., T.C. Ziraat Bankası A.Ş., Eğitim Bölüm Başkanlığı Yönetmeni, acbiber@ziraatbank.com.tr
[2] Ziya ARGÜN, Prof. Dr., Gazi Üniversitesi, Gazi Eğitim Fakültesi Matematik Eğitimi Bölümü Öğretim Üyesi, ziya@gazi.edu.tr

Mersin Üniversitesi Eğitim Fakültesi Dergisi, Cilt 8, Sayı 2, Ağustos 2012, ss.56 -66.
Mersin University Journal of the Faculty of Education, Vol. 8, Issue 2, August 2012, pp.56-66.

Ayrıca daha önce öğrendikleri ilgili bilgi olan, tek değişkenli fonksiyonlarda limit kavramından yola çıkarak adayların kavram oluşturmak için gerekli genellemeleri yapıp yapamadıkları ve kavram geliştirme sürecinde öğrendikleri kavramla ilgili nitelik açısından ne derece artış kaydedebildikleri gözlemlemek istenmiştir.

Matematik öğretiminde hem işlemsel bilgi hem de kavramsal bilgi önemli rol oynamaktadır. Ancak okullardaki matematik öğretimine bakıldığında daha çok işlemsel bilgi üzerinde durulmaktadır. İşlemsel bilgi ile kavramsal bilgi arasındaki ilişkiyi oluşturamayan öğrenciler matematiksel kavramları yanlış algılamakta ve matematik öğretiminde çeşitli güçlükler yaşamaktadır (Ersoy & Erbaş, 2002). Bu nedenle öğrenciler matematiğe karşı olumsuz tutum geliştirebilmekte ve dolayısıyla matematikteki akademik başarıları olumsuz etkilenebilmektedir. Bu yüzden öğrencilerin matematiksel kavramları öğrenme süreçleri iyi analiz edilerek, bu süreçte öğrencilerin karşılaştıkları güçlükler belirlenerek bunların giderilmesine yönelik çalışmalar yapılmalıdır.

Kavram öğretiminde değişik öğretim yöntemleri kullanılabilir. Kavramlar, davranışçılığa dayalı geleneksel sunuş yoluyla öğretim yaklaşımıyla veya yapılandırmacı öğrenme kuramına dayalı buluş yoluyla öğrenme yöntemi ile öğretilebilir. Öğrencilerin öğrenme ve gelişim düzeylerine uygun yaklaşımı seçmek önemlidir. Yüksek düzeyde düşünme becerisi gelişmiş öğrencilerin bulunduğu sınıflarda buluş yoluyla öğrenme yöntemi, ilköğretimin ilk yıllarındaki alt yaş gruplarında ve yüksek düzeyde düşünme becerisi yeterince gelişmemiş öğrencilerin bulunduğu sınıflarda ise sunuş yoluyla öğretim yönteminin kullanılması uygundur. Sunuş yoluyla kavram öğretiminde, öğretim materyalleri öğretime başlamadan önce sistematik bir şekilde ardışık ve doğrusal olarak düzenlenir ve öğrencilere aktarılmaya hazır hale getirilir. Bu süreçte, ilk önce kavramın ismi verilir ve tanımı yapılır, kritik, tanımlayıcı ve ayırt edici özellikleri verilir ve son olarak kavrama dâhil olan ve olmayan örnekler görsel araçlar kullanılarak verilir. Buluş yoluyla kavram öğretiminde özelden genele doğru tümevarım yaklaşımı ile genellemelere gidilir. Buluş yoluyla öğrenme, öğrencinin kendi tecrübesi, önceki bilgileri, gözlemleri, araştırmaya dayalı etkinlikleri ve çevreyle etkileşimi ile kavram, ilke ve genellemeleri kendisinin bulması ve keşfetmesidir (Erden ve Akman, 1997; Kaptan, 1998). Bu nedenle öğretmenler, matematiksel kavramların bir zincir halkası gibi birbirleriyle bağlantılı olduğu gerçeğini gözden uzak tutmamalıdırlar. Öğrenciler açısından bu halkada olabilecek kopmaların ileri matematiksel kavramların öğreniminde zorluklara neden olabileceği ve bu durumun da öğrencilerin matematiğe karşı olumsuz bir tutum geliştirmelerine yol açabileceği gözden kaçırılmamalıdır (Swadener ve Soedjadi, 1988).

Bu çalışmada öğrencilerle yapılan uygulamalarda, kavramların doğru öğrenilmesi için daha çok buluş yoluyla öğrenme yöntemi izlenmiştir. Konu anlatımında yapılandırmacı yaklaşım benimsenmiştir. Yapılandırmacı yaklaşıma dayalı öğretme ve öğrenme etkinlikleri kavramsaldır. Öğrencilerin önceden öğrendikleri bilgiler ve yaşam tecrübelerinin yeni karşılaştıkları bilgileri anlama ve anlamlandırmada önemli bir yeri vardır (Ayas ve diğer, 1997; Önen, 2005). Yöntem bölümünde de görüleceği gibi, "limit kavramının farklı içeriklerde farklı anlamlara geldiğini hissettirmek" için derste öğretici tarafından adaylara tek ve çok değişkenli fonksiyonlar için limit hakkında bolca örnekler verilmiş, konu ile ilgili görseller ve bilgisayar destekli öğretim metodu kullanılmıştır. Ayrıca öğretici çok değişkenli fonksiyonlarda limit konusuna geçmeden önce tek değişkenli fonksiyonların limiti konusunu bir ders boyunca tekrar ederek "öğretilecek kavram ile öğrencilerin geçmiş birikimlerinin uyumunu sağlayacak ortamlar" hazırlamıştır. Derslerden sonra öğrencilerden tek ve çok değişkenli fonksiyonlar için limit kavramlarını kendi ifadeleri ile yeniden tanımlamaları istenmiş ve bilişsel gelişim bilgi düzeylerini belirlemek için adaylara, araştırmacılar tarafından geliştirilen "Bilişsel Gelişim Bilgi Testi" kullanılmıştır.

Çok değişkenli fonksiyonların uygulama alanları, tek değişkenli fonksiyonlara nazaran daha geniştir. Uygulama alanı bu kadar geniş olan çok değişkenli fonksiyonlar, Analiz 1-2, Fonksiyonel Analiz, Vektörel Analiz, Diferansiyel Geometri, Uygulamalı Matematik gibi ilgili tüm matematik alanları için temel oluşturmaktadır. Çok değişkenli fonksiyonlar iktisat, olasılık, istatistik, akışkanlar dinamiği ve elektrik teorisinde çok sık kullanılır (Balcı, 1996). Kullanım alanı bu kadar geniş olan çok değişkenli fonksiyonların uygulamada ve üst kavramların oluşturulmasında kullanılabilmesi için ona ilişkin "limit", "türev", "süreklilik" ve "integral" kavramlarının da öğrenilmesi gerekir. Öte yandan, "süreklilik", "türev" ve "integral" kavramlarının, doğrudan "limit" kavramına bağlı olduğu da bilinmektedir (Sanchez, 1996). Yani, öğrenci çok değişkenli fonksiyonlar için ve özel olarak iki değişkenli fonksiyonlar için "limit" kavramını tam olarak öğrenmeden, konu ile ilgili "süreklilik", "türev" ve "integral" kavramlarını oluşturması, öğrenmesi ve bu kavramları kullanarak çok değişkenli fonksiyonlarla matematik üretmesi çok zor ve hatta mümkün gözükmemektedir. Bunun sonucunda öğrencilerin "limit kavramını" doğru yorumlayıp, diğer kavramlara geçişte edindikleri yeni öğrenmeleri rahat bir şekilde kullanabilecekleri düşünülmektedir (Bukova, 2006). Limit kavramına bu gözle bakıldığında ileri seviyedeki matematik için temel teşkil ettiğini görmek hiç de zor değildir. Kısaca üst düzey matematiğin temeli olan limit kavramı ile ilgili zihinde yapılandırılan kavram imajları daha ileriki aşamalarda çok değişkenli fonksiyonlarla oluşturulacak matematiğin anlaşılması ve ilerletilmesi noktasında sıkıntılar doğurabilir.

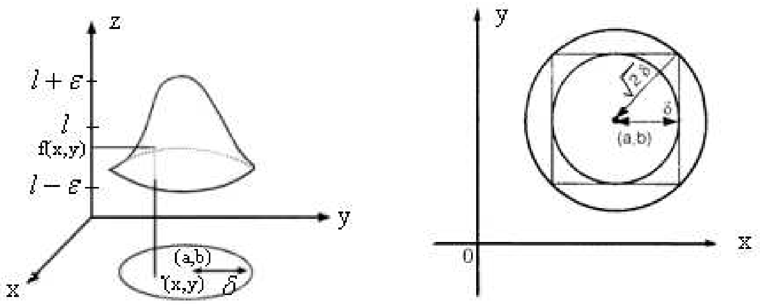
İki değişkenli fonksiyonlarda limit kavramının matematik öğretmen adayları tarafından nasıl yapılandırıldığını incelemeyi amaçlayan bu araştırma için bilimsel olarak doğru kabul edilen "iki değişkenli fonksiyonlarda limit" tanımını kısaca hatırlatmak gerekirse;

İki Değişkenli Fonksiyonlarda Limit

Tanım 1. : $A \subseteq IR^2$ ve $f: A \to IR$ şeklinde tanımlı bir fonksiyon ve $A\ kümesi\ (a,b)$ merkezli en az açık bir daireyi içersin. Her $\varepsilon > 0$ sayısı için $\sqrt{(x-a)^2+(y-b)^2} < \delta$ şartını sağlayan (x,y) ikilileri için $|f(x,y)-l| < \varepsilon$ olacak şeklide ε a bağlı bir $\delta > 0$ sayısı varsa l sayısına f nin (a,b) noktasındaki limiti denir ve

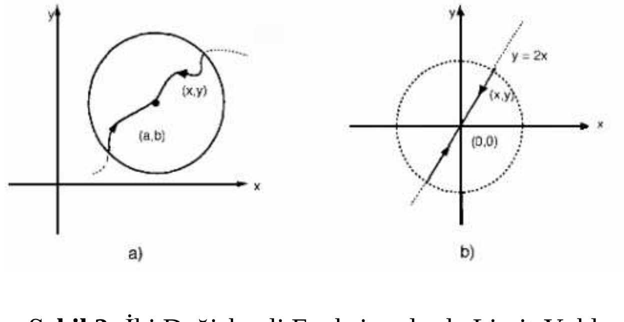
$$\lim_{(x,y)\to(a,b)} f(x,y) = l$$

biçiminde gösterilir.



Şekil 1: İki Değişkenli Fonksiyonlarda Limit

$\lim\limits_{(x,y)\to(a,b)} f(x,y) = l$ ifadesi "(x,y) noktaları (a,b) 'ye yaklaşırken f'nin limiti l'dir" biçiminde okunur. Burada "yaklaşma" sözcüğünden anlaşılması gereken şey (a,b) merkezli açık dairelerin yarıçaplarının gittikçe yeterli ölçüde küçültülmesidir. Limit tanımındaki "$\sqrt{(x-a)^2+(y-b)^2} < \delta$ şartını sağlayan (x,y) ikilileri" ifadesi (a,b) merkezli δ uzunluğunda yarıçapa sahip açık daire kastedilmektedir. "(x,y) noktası $y = g(x)$ eğrisi boyunca (a,b) noktasına yaklaşıyor" cümlesinin anlamı da "(a,b) noktasından geçen $y = g(x)$ eğrisi üzerinde, gittikçe (a,b)'ye daha yakın ve bu açık daireden seçilen (x,y) noktaları göz önüne alınıyor" demektir. Bu durum eğri üzerinde (a,b) noktasına doğru yön belirterek gösterilir (Şekil 2-a). Örneğin "$(0,0)$ noktasına $y = 2x$ doğrusu boyunca yaklaşılıyor" cümlesinin anlamı "$y = 2x$ doğrusu üzerinde (0.0) noktasına yakın olan $(x,y) = (x,2x)$ noktaları göz önüne alınıyor" demektir (Şekil 2-b).



Şekil 2: İki Değişkenli Fonksiyonlarda Limit-Yaklaşım

İki değişkenli bir fonksiyonun bir (a,b) noktasındaki limit araştırılırken bütün analiz kitaplarının önerdiği şu hususlara dikkat etmek gerekir:

1. Fonksiyon (a,b) noktasında tanımlı olmayabilir. Fakat (a,b) noktası tanım kümesinin bir yığılma noktasıdır.
2. l limiti varsa, bu (x,y) noktasının (a,b) noktasına yaklaşma şeklinden bağımsızdır. Yani (x,y) noktası (a,b) noktasına hangi eğri boyunca yaklaşırsa yaklaşsın l limit değeri değişmez. Eğer (x,y) noktasının (a,b) noktasına yaklaşma yoluna göre limit değeri değişiyorsa fonksiyonun (a,b) noktasında limiti yoktur.

Araştırmanın Amacı

Bu araştırmanın amacı, iki değişkenli fonksiyonlarda limit kavramının matematik öğretmen adayları tarafından nasıl yapılandırıldığını incelemektir. Burada adayların konu hakkındaki zorluk ve engellerinin belirlenmesi sağlanarak, araştırmanın genel anlamda limit kavramının öğretiminin geliştirilmesine katkılar sağlayacağı düşünülmektedir.

Yöntem

Araştırma için toplanan veriler, nitel araştırmanın başlıca örüntüleri belirleme, kodlama ve kategorilere (temalara) ayırma işlemlerini kapsayan "içerik analizi" tekniğiyle analiz edilmiştir. Ayrıca, görüşülen ve gözlemlenen bireylerin görüşlerini çarpıcı bir biçimde yansıtmak amacıyla doğrudan alıntılara yer verilmiştir.

Araştırmanın çalışma evreni, Ankara'da yerleşik bir devlet üniversitesinin orta öğretim fen ve matematik alan eğitimi bölümü matematik öğretmenliği anabilim dalı 2.sınıfında öğrenim gören 37 öğrenci ile sınırlandırılmıştır.

Veri Toplama Aracı ve Uygulama

Matematik öğretmen adaylarının iki değişkenli fonksiyonların limiti kavramına ilişkin bilgi düzeylerini araştırmak amacı ile yapılan bu araştırma için adayların Analiz-2 kapsamında ele alınan çok değişkenli fonksiyonların limiti konulu dersleri takip edilmiştir. Derslerin işleniş şekli, derste uygulanan öğretim teknikleri ve öğrencilerin derslerde sergiledikleri tutumlar araştırmacı tarafından dikkatle not edilmiş ve videoya kaydedilmiştir. Derslerin bitiminde öğrencilere konu ile ilgili bilgi testleri verilmiş ve açık uçlu sorular yöneltilmiştir. Daha sonra araştırmayı desteklemesi açısından, adayların kavramlarla ilgili fikirlerini daha derin ve ayrıntılı analiz edebilmek için araştırmaya katılan 6 öğrenci ile mülakat yapılmıştır.

Hazırlanan açık uçlu sorular ve mülakat soruları uygulamalardan önce matematik öğretimi konusunda uzman 3 kişiye gösterilerek soruların araştırmanın amacına uygunluğu konusunda onay alınmıştır. Öğrencilerin ankete verdikleri cevaplar analiz edildikten sonra genel ve alt kategorilere göre düzenlenmiş ve işlenmesi için kavramsal bir yapı oluşturulmuştur. Daha sonra, her bir kategorinin hangi sıklıkla tekrar ettiği (frekansı) bulunmuştur. Böylece, nitel veriler nicelleştirilmiştir. Nitel verilerin nicelleştirilmesindeki temel amaç; güvenirliği arttırmak, yanlılığı azaltmak ve kategoriler arasında karşılaştırmalar yapmaktır (Yıldırım ve Şimşek, 2000). Çalışma için seçilen üniversitenin matematik eğitimi konusunda ülkenin iyi üniversitelerinden biri olması nedeniyle, araştırmaya katılan tüm öğrencilerin matematik ve matematik eğitimine karşı tutumlarının üst seviyede ve homojen olduğu düşünülmektedir, dolayısıyla kavram öğrenme için gerekli olan isteğin var olduğu kabul edilmektedir.

Tüm çalışmalarda toplam 7 soru yer almaktadır. Ancak bu makale çerçevesinde araştırma problemiyle doğrudan ilgili olan 3'üne verilen cevapların analizinin bulgularına ve adaylarla yapılan mülakatın bu makale ile ilgili olan kısmına yer verilecektir.

Anket Sorularının Analizi

Adaylarla çok değişkenli fonksiyonlarda limit kavramı işlendikten sonra yapılan anket çalışması sonuçları ve mülakatlar aşağıdadır. Bulguların tanıtımına geçmeden önce, bu makale çerçevesinde araştırma problemiyle doğrudan ilgili olan 3 soruda öğrenciden nelerin beklendiği kısaca betimlenecek olursa;

Soru 1: *İki değişkenli fonksiyonlarda limitin bulunması için sizce en etkin yol hangisidir? Neden?*

Bu araştırma kapsamında takip edilen uygulamalı derslerde, adayların iki değişkenli fonksiyonların limitini bulurken, hangi soru tipi için hangi yöntemi kullanacakları hususunda sıkıntı yaşadıklarını gözlemlenmiştir. Bu yüzden birinci soruda adaylardan iki değişkenli fonksiyonlarda limiti bulmada kendilerince en etkin gözüken metod, dolayısıyla tercih ettikleri yöntemi nedenleriyle birlikte yazmaları istenmiştir.

Soru 2: $f(x,y)=\dfrac{x^2}{x^2+y^2}$ *ile verilen fonksiyonunun (0,0) noktasındaki limitini bulunuz.*

Soru 3: $g(x,y)=\dfrac{x^2y}{x^2+y^2}$ *ile verilen fonksiyonun (0,0) noktasındaki limitini bulunuz.*

İkinci ve üçüncü sorularda, adaylardan yukarıda verilen fonksiyonların (0,0) noktasındaki limitlerinin bulunması istenmiştir. Burada amaç soruların çözümü için adayların kullanacakları yöntem, sahip oldukları işlem bilgisi ve kavram imajları hakkında bilgi edinmektir.

Bulgular

Bu bölümde araştırmaya katılan öğretmen adaylarının yukarıda bahsedilen sorulara verdikleri cevapların analizinden elde edilen bulgulara yer verilecektir. Birinci soruda adaylardan iki değişkenli fonksiyonların belirli bir noktadaki limitini incelerken, çözüm için tercih ettikleri yaklaşım şeklini nedenleriyle birlikte belirtmeleri istenmiştir. 1. soruya adaylar tarafından verilen cevaplara ilişkin tablo aşağıda verilmiştir;

Tablo 1: *1. Soruya Verilen Cevapların Gruplandırılmış Halinin Dağılımı*

1. Soruya verilen cevaplar		**Toplam**	**Pay**
1.Grup	İki değişkenli bir fonksiyonun bir noktadaki limitini incelerken o noktaya her yönden yaklaşmak gerekir.	18	49%
2. Grup	Tek değişkenli fonksiyonlarda sağdan ve soldan yaklaşmak yeterli idi. Burada ise mümkün olduğu kadar çok yoldan yaklaşmak gerekir.	11	30%
3. Grup	Herhangi bir yorumda bulunmamış.	3	8%
4. Grup	Çok değişkenli fonksiyonlarda limiti aranan noktaya çemberlerle yaklaşmak en doğru yoldur.	2	5%
5. Grup	Limiti bulmada en garantili yol tanımı kullanmaktır.	2	5%
6. Grup	Çok değişkenli bir fonksiyonlarda limit bulurken, fonksiyonun grafiğine bakmak en garantili yoldur.	1	3%
	Genel Toplam	**37**	**100%**

Bu çalışamaya katılan 37 öğrenciden 18'i (%49) iki değişkenli fonksiyonlarda limitin arandığı noktaya her yönden yaklaşmak gerektiğini, 11'i (%30) mümkün olduğu kadar çok yönden yaklaşımı savunmuştur. 3 öğrenci yorumsuz kalırken, 2 öğrenci "Çok değişkenli fonksiyonlarda limiti aranan noktaya çemberlerle yaklaşmak en doğru yoldur." ifadesini kullanmıştır.

1. soruya verilen cevaplar incelendiğinde, cevapları 1. ve 2. grupta yer alan adayların çok genel ifadeler kullandıkları, burada iki değişkenli fonksiyonların belirli bir noktadaki limitini incelerken kullandıkları belirli bir yaklaşım yönteminden bahsettiklerinin söylenemeyeceği görülmektedir. Ancak verdikleri cevaplar detaylıca incelendiğinde, adaylar konu hakkında bir bakış açısına sahip olduklarını hissettirmektedirler. Öyleki çoğu iki değişkenli fonksiyonların bir noktadaki limiti için "o noktaya her yönden yaklaşmak gerekir" ya da "mümkün olduğu kadar çok yoldan yaklaşmak gerekir" ifadelerini kullanmışlardır. Bu ise iki değişkenli fonksiyonların belirli bir noktadaki limitinin, limitin incelendiği noktaya yaklaşma şeklinden bağımsız olduğu gerçeğini adayların içselleştiremediklerini düşündürtmektedir. Zira "her yönden yaklaşmak" ya da "mümkün olduğu kadar çok yoldan yaklaşmak" gibi ifadeler bu gerçeklikten uzak gözükmektedir. 1. ve 2. cevap gruplarıyla birlikte bu soru için herhangi bir yorumda bulunmayanlar da (3.grup) eklendiğinde toplam 32 adayın (%87) beklenen cevaplardan birini vermedikleri görülmüştür.

Adaylarla yapılan mülakatlarda yapılan gözlemlere dayanarak da benzer yorumlarda bulunmak mümkün olabilmektedir. Adayların iki değişkenli fonksiyonların belirli bir noktadaki limitinin, limitin incelendiği noktaya yaklaşma şeklinden bağımsız olduğu gerçeğini adayların içselleştiremediklerini gösteren, adaylarla yapılan görüşme örneklerinden bazıları aşağıda verilmiştir (Öğretmen Adayı= ÖA olarak kodlanmıştır).

Araştırmacı: *$g(x,y)=\dfrac{x-y+1}{x+y+1}$ fonksiyonunun (0,0) noktasındaki limitini bulurken kullandığınız çözüm yönteminizi anlatır mısınız?*

ÖA1.: *Sanki burada limitin olmayacağını düşünüyorum o yüzden, önce y yerine y=mx yazarım. Sonra sonuca bakarım. Bir de y yerine $y=mx^3$ yazarım. Eğer limitler farklı çıkarsa limit yoktur derim. Yani limitin olmadığını böylece göstermiş olurum.*

Araştırmacı: *Burada y-bağımsız değişkeni yerine neden y=mx koyuyorsun ve burada m'nin ne gibi bir etkisi var?*

ÖA1.: *Burada y=x olur, y=2x olur… yani ben bu şekilde genelleme yapmış oluyorum.*

İkinci ve üçüncü sorularda adaylardan, verilen fonksiyonların (0,0) noktasındaki limitlerinin bulunması istenmiştir. Aşağıdaki tabloda adayların 2. ve 3. soruya verdikleri cevaplar bir arada verilmiştir, böylece 2. soruya cevap veren bir adayın aynı zamanda 3. soruya ne cevap vermiş olduğu rahatlıkla görülebilmektedir.

Tablo 2: *2. ve 3. Sorulara Verilen Cevapların Gruplandırılmış Hallerinin Matrisi*

3. soru / 2. soru	İki farklı yol ile yaklaşım, aynı sonuç ve limit 0.	Doğru ailesi ile yaklaşım, limit 0.	Kutupsal koordinatlarla yaklaşım, limit 0.	İki farklı doğru ile yaklaşım, aynı sonuç ve limit 0.	İki farklı doğru ailesi ile yaklaşım, aynı sonuç ve limit 0.	x'e göre türev ve y=0 için limit 0.	Yorum Yok	Tanımı kullanarak, limit 0.	Bir doğru ailesi ve bir eğri ile yaklaşım, aynı sonuç ve limit 0.	Genel Toplam
İki farklı yoldan yaklaşım, farklı sonuçlar ve limit yok.	10	1					4			15
Doğru ailesi ile yaklaşım, farklı sonuçlar ve limit yok.	3	2	1				1		1	8
Kutupsal koordinatlarla yaklaşım, limit yok.			5							5
İki farklı doğru ile yaklaşım, farklı sonuçlar ve limit yok.				3						3
İki farklı doğru ailesi ile yaklaşım, farklı sonuçlar ve limit yok.					1		1			2
x'e göre iki kere türev, limit 1.						1				1
Yorum yok.							1			1
İki farklı eğri ile yaklaşım, farklı sonuçlar ve limit yok.								1		1
Kutupsal koordinatlarla yaklaşım, limit var.			1							1
Genel Toplam	13	3	7	3	1	1	7	1	1	37

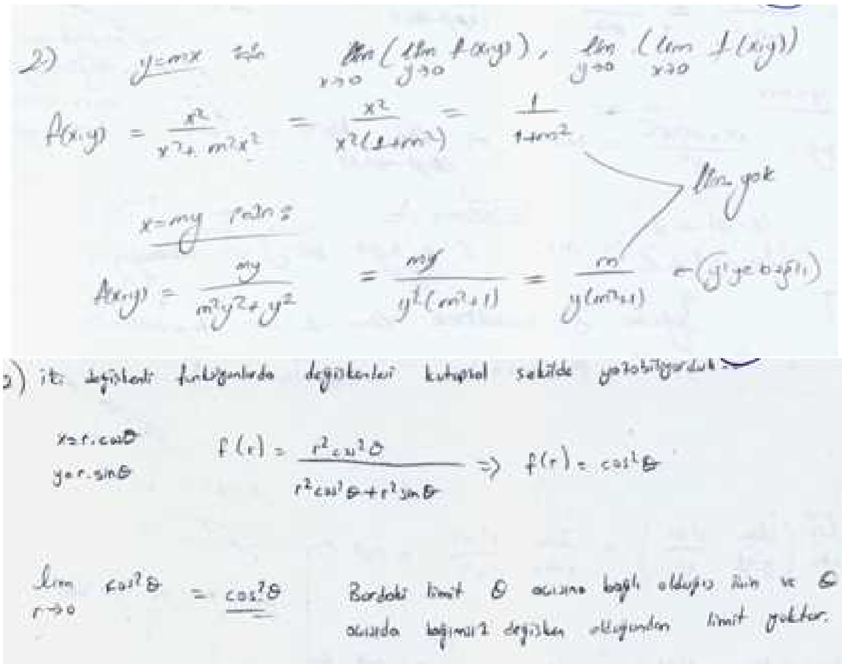
Yukarıdaki tabloda 2. ve 3. soruya verilen benzer cevaplar, çözüm yöntemleri ve sorulara benzer cevapları veren aday sayıları aynı renkle belirtilmiştir. Öğrencilerin 2. ve 3. sorulara verdikleri cevaplar bir arada değerlendirildiğinde, toplam 24 öğrencinin (%65) 2. soruda kullandığı çözüm yöntemini 3. soruda da kullanarak çözüm aradığı gözlemlenmiştir.

2. soruda 15 öğrenci (%41) limiti aranan noktaya iki farklı yoldan yaklaşarak limitin olmadığını göstermişler. Çalışmaya katılan 37 öğrenciden 33'ü (%89) 6 farklı yol izleyerek aranan noktada limitin olmadığını göstermiştir.

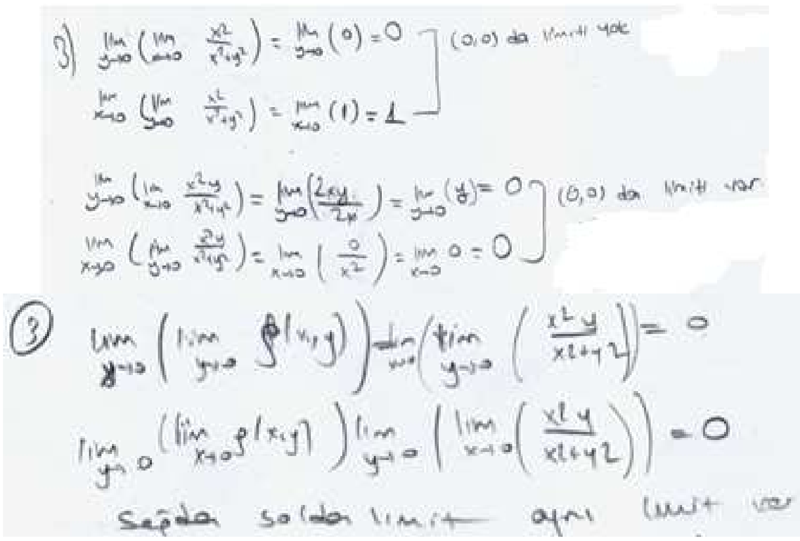
Burada, 2. soruda limiti aranan noktaya "iki farklı eğri ile", "iki farklı doğru ile", "iki farklı doğru ailesi ile" yaklaşarak sonuçların farklı çıkması sonucu limitin olmadığını belirten toplam 17 öğrencinin (%46) tamamının aynı yöntemlerle; 3. soru için sonuçların eşit olması ile birlikte fonksiyonun (0,0) noktasındaki limitinin "0", "sıfır" olduğunu söylemeleri dikkat çekicidir.

3. soruda 37 öğrenciden 13'ü (%35) limitin arandığı noktaya iki farklı yol ile 3'ü (%8) iki farklı doğru ile yaklaşmak suretiyle aynı değeri elde ederek, sonucu 0 olarak bulmuştur. Bu soruyu 7 (%19) öğrenci

cevapsız bırakmıştır. İki farklı yol, iki farklı doğru, iki farklı doğru ailesi ya da bir doğru ailesi ve bir eğri ile yaklaşarak aynı sonuca ulaşan ve limiti 0 bulan 18 öğrenci (%49) bulunmaktadır. Burada dikkat edilmesi gereken bir diğer nokta ise, yorum yazmayanların sayısının 2. soruda 1 iken 3. soruda 7'ye yükselmiş olmasıdır.



Şekil 3: 2. Soruya verilen cevaplardan birkaç örnek



Şekil 4: 3. Soruya verilen cevaplardan birkaç örnek

Sonuç, Tartışma ve Öneriler

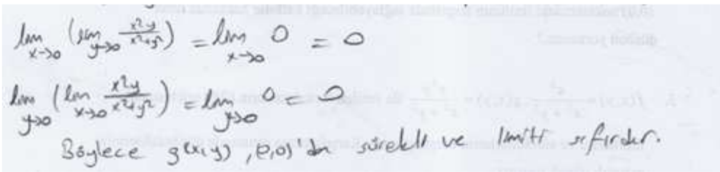
Matematik öğretmen adaylarının iki değişkenli fonksiyonların limiti kavramına ilişkin bilgi düzeylerini araştırmak amacıyla yapılan bu araştırmada, öğrencilere yazılı bir anket uygulanmış ve adaylarla mülakat yapılmıştır. Bu çalışmalarda yer alan ve bu makaleye konu olan 3 soruya verilen cevaplar ve çalışmanın mülakat aşaması analiz edilerek sonuçları değerlendirilmiştir. Elde edilen bulgulara göre; "iki değişkenli bir fonksiyonun bir noktada limiti varsa bu limit, limitin arandığı noktaya yaklaşma şeklinden bağımsızdır" ifadesinin matematiksel olarak ne anlama geldiğini adayların tam olarak anlayamadıkları görülmektedir.

Tablo 2'den de görüldüğü gibi öğrenciler farklı sorulara aynı çözüm yöntemleri ile cevap vermeye çalışmışlardır. Tabloda her iki sorunun çözümü için kullanılan farklı yöntemler farklı renklerle gösterilmiştir. Daha açık bir şekilde ifade etmek gerekirse; iki değişkenli fonkiyonların belirtilen noktalarda limitinin tespiti sorularına her aday kendince benimsemiş olduğu çözüm yöntemini uygulamıştır. Örneğin, eğer aday ilk sorunun cevabı için iki farklı yoldan yaklaşarak çıkan sonuca göre limit tespiti yapmış ise, başka bir sorunun çözümü için de aynı yöntemi uygulamaya çalışmıştır. Bu durum öğrencilerin konuya çok iyi hâkim olmadıklarını, dolayısıyla konu hakkındaki farklı sorulara farklı çözümler getirecek bilgi seviyesine sahip olmadıklarını düşündürtmektedir.

Yapılan bu çalışmalar sonucunda, adayların konu hakkında sorulan standart sorulara verdikleri cevaplarda işlemsel becerilerinin iyi olduğu gözlemlenmiştir. Örneğin; “$IR^2 - \{(0,0)\}$ de $f(x,y) = \dfrac{x^2}{x^2+y^2}$ ile verilen fonksiyonunun (0,0) noktasındaki limitinin bulunması”, “$\lim\limits_{x\to 0}(\lim\limits_{y\to 0} f(x,y))$ limitinin hesaplanması” gibi soruların çözümünde adayların yürüttükleri işlemlerde bir sıkıntı yaşamadıkları görülmüştür. Ancak biraz daha kavram bilgisinin sorgulandığı sorularda adayların başarısız kaldıkları söylenebilir. Örneğin “$y = mx$” doğrularıyla yaklaşmak ne demektir?”, “$\lim\limits_{x\to 0}(\lim\limits_{y\to 0} f(x,y))$ ve $\lim\limits_{y\to 0}(\lim\limits_{x\to 0} f(x,y))$” limitleri için sonuçların eşit çıkmasının sizce bir anlamı var mı?” gibi sorulara adayların tatmin edici cevaplar veremedikleri görülmüştür. Bu önemli tespit hakkında Sabella ve Redish (1995) “Öğrenciler için asıl zor olan anlatılan konularla ilgili kavramların öğrenilmesidir, algoritmik hesaplamaların öğrenilmesi değil” demişlerdir.

Adaylar iki değişkenli fonksiyonların limitini bulmak için en çok iki farklı yoldan yaklaşım yöntemini yani $\lim\limits_{x\to 0}(\lim\limits_{y\to 0} f(x,y))$, $\lim\limits_{y\to 0}(\lim\limits_{x\to 0} f(x,y))$ limitlerini bulma yöntemini kullanmışlardır. Bu durum Tablo 2’den açıkça görülebilir. Bu yöntemde örneğin $\lim\limits_{x\to 0}(\lim\limits_{y\to 0} f(x,y))$ limitini bulmak için öncelikle $\lim\limits_{y\to 0} f(x,y)$ limitini bulmak gerekir. Bu limit x-bağımsız değişkeni göz ardı edilerek ve genelde $y \to 0$ için yerine koyma yöntemi ile kolayca bulunabilir. Daha sonra elde edilen fonksiyon x’e bağlı, tek değişkenli bir fonksiyon olacaktır ve $x \to 0$ limiti kolayca bulunabilmektedir. Dolayısıyla bu aşamada limit bulmak için çoğu zaman tek değişkenli fonksiyonlarda tercih edilen yerine koyma metodu kullanıldığından, öğrencilerin bu nedenle iki değişkenli fonksiyonların limitini bulmak için en çok iki farklı yoldan yaklaşım yöntemini kullandıkları düşünülmektedir.

Adaylar iki değişkenli fonksiyonlarda limitin varlığı için, iki farklı yaklaşım sonucu elde edilen limitlerin, yani $\lim\limits_{x\to 0}(\lim\limits_{y\to 0} f(x,y))$, $\lim\limits_{y\to 0}(\lim\limits_{x\to 0} f(x,y))$ limitlerinin eşit olmasını yeterli görmektedirler. Adaylardan birinin vermiş olduğu Şekil 6 ile verilen cevap, belirtilen duruma güzel bir örnek olarak verilebilir.



Şekil 5: Bir cevap örneği

Adayların kendi ifadelerinden yola çıkarak; bu yöntemi adayların tek değişkenli fonksiyonlarda limitin varlığı için gerekli olan “sağ ve sol limitlerin eşit olması” ilkesine benzetmelerinden kaynaklandığı söylenebilir. Adaylarla yapılan görüşmelerden yola çıkarak aşağıda verilen örnekler de bu düşünceyi destekler niteliktedir.

Araştırmacı: *Bu iki limit için yani* $\lim\limits_{x\to 0}(\lim\limits_{y\to 0} f(x,y))$, $\lim\limits_{y\to 0}(\lim\limits_{x\to 0} f(x,y))$ *limit sonuçların eşit çıkması durumunda ne yaparsınız, sonuçların eşit çıkmasının sizce bir anlamı var mı?*

ÖA3: *Var, eğer sonuçlar eşit çıkarsa, diyelim ki her iki limit için de sonuç a gibi bir sayı çıktı, o zaman, “her iki limit de eşit ve sonuç a’dır” deriz.*

Araştırmacı: *Bu durumu tek değişkenli fonksiyonlarda hangi duruma benzetiyorsunuz?*

ÖA3: *Bu durum tek değişkenli fonksiyonlarda sağdan ve soldan limitlerin bulunmasına benziyor. Eğer limitler eşitse “limit vardır”, değilse “limit yoktur” diyoruz.*

Araştırmacı: $f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{xy}{x^2+y^2} & , \quad (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & , \quad (x,y) = (0,0) \end{cases}$

fonksiyonu veriliyor. $\lim_{x\to 0}(\lim_{y\to 0} f(x,y))$ *ve* $\lim_{y\to 0}(\lim_{x\to 0} f(x,y))$ *limitlerini hesaplayınız.*

ÖA4: $\frac{0}{x^2} = 0$ *olduğu için sonuç sıfırdır. Öbür limit için de aynı sonucu elde ederiz.*

Araştırmacı: *Limiti için ne dersiniz?*

ÖA4: *O halde limit 0 demektir, çünkü sağdan ve soldan limit değerleri aynıdır.*

Yapılan görüşmelerde ve adaylarla dersler hakkında yapılan sohbetlerde; adaylar kendileri için kavram bilgisinin öğrenilmesinin değil, bir şekilde dersten geçmenin daha önemli olduğunu itiraf etmişlerdir. Adaylar, üniversite eğitimi sonrasında öğretmen olarak göreve başladıklarında, yapacakları matematik dersinde kendilerine sadece lise matematik bilgisinin gerekli olduğu için üniversitede gördükleri matematiğin kendilerine pek katkı sağlamayacağını düşünmektedirler.

Matematik öğretmeni yetiştirilmesinde iki temel hedeften söz edilebilir (Hiebert, Morris, Glass, 2003):

1. Matematiksel alan uzmanlığına sahip olunmasını sağlamak,
2. Öğretmeyi öğrenmeye yönelik bilgileri, becerileri ve eğilimleri geliştirmek;

yani öğretmenlik becerileri kazandırmak.

Dolayısıyla adayların, yukarıda bahsi geçen hedeflerden “Öğretmeyi öğrenmeye yönelik bilgileri, becerileri ve eğilimleri geliştirmek” konusuna odaklandıkları, ancak “Matematiksel alan uzmanlığına sahip olunmasını sağlamak” konusunu ihmal ettikleri söylenebilir.

Ancak bilinmeli ki; yukarıda tespit edilen durumla ilgili olarak yapılan araştırmalar, öğretmenlerin öğrettikleri matematiği bilmek zorunda olduklarını ortaya koymaktadır. Fakat öğretmenlerin ne kadar matematiksel bilgiye ihtiyaç duyduklarını belirlemek basit bir mesele olmamıştır. Lise Matematik öğretmen adaylarını hazırlama programlarının tasarımını etkileyen iki yaygın bakış açısı vardır. Bunlar;

a) Günümüz matematikçileri hangi konuları araştırıyor ve çalışıyorlarsa öğretmen adayları da o konuları çalışmalıdırlar, çünkü bu öğretmen adaylarına matematik disiplininin kapsamlı bir resmini sunacaktır. Böylelikle adaylar okul ders programlarını etkileyen başlıkların neler olması gerektiği hakkında en iyi şekilde fikir üretebilmeye muktedir olabileceklerdir.

b) Matematik öğretmen adayları meslek için bilhassa matematik eğitimini, öğretim metotlarını, matematik eğitimindeki pedagojiyi ve 9–12 Lise matematik ders programını çalışmalıdırlar.

Sonuç olarak bu bakış açılarının her ikisi de öğretmen adaylarının matematik lisans programını (veya aşağı yukarı buna denk olan bir programı) tamamlamaları gerektiğini savunmaktadır. (Argün, 2008)

Kaynaklar

Argün, Z., (2008). “Lise Matematik Öğretmenlerinin Yetiştirilmesinde Mevcut Yargılar, Yeni Fikirler” Tübav Bilim Dergisi, Cilt:1, Sayı:2, Sayfa:89-95, Ankara.

Ayas, A., Çepni, S., Johnson D., & Turgut, M. F. (1997). Fizik öğretimi, YÖK/Dünya Bankası Milli Eğitimi Geliştirme Projesi Hizmet Öncesi Öğretmen Eğitimi Yayınları. Ankara: Bilkent.

Balcı, M. (1996). Analiz I, Balcı Yayınları, Cilt-I, 1.Baskı, Ankara.

Bukova E. (2006). Öğrencilerin limit kavramını algılamasında ve diğer kavramlarla ilişkilendirmesinde karşılaşılan güçlükleri ortadan kaldıracak yeni bir program geliştirme. Yayımlanmış doktora tezi, Dokuz Eylül Üniversitesi Eğitim Bilimleri Enstitüsü, İzmir.

Erden, M. ve Akman, Y. (1997). Eğitim Psikolojisi, Ankara: Arkadaş Yayınevi.

Erbaş, K., Ersoy, Y., (2002). “Dokuzuncu Sınıf Öğrencilerinin Eşitliklerin Çözümündeki Başarıları ve Olası Kavram Yanılgıları”, V.Ulusal Fen Bilimleri ve Matematik Eğitimi Kongresi, ODTÜ, Ankara, s.225.

Hiebert, J., Morris, A. K. ve Glass, B. (2003). Learning to learn to teach: An experiment model for teaching and teacher preparation in mathematics. Journal of Mathematics Teacher Education, 6, 201-222.

Kaptan, F. (1998). “Fen Öğretiminde Kavram Haritası Yönteminin Kullanılması”, Hacettepe Üniversitesi Eğitim Fakültesi Dergisi, S.14, s.95-99.

Önen, F. (2005). İlköğretimde Basınç Konusunda Öğrencilerin Sahip Olduğu Kavram Yanılgılarının Yapılandırmacı Yaklaşımla Giderilmesi, Yayınlanmamış Yüksek Lisans Tezi, İstanbul: Marmara Üniversitesi Eğitim Bilimleri Enstitüsü.

Sanchez, R., A. (1996), Teacher’s and Students’ Mathematical Thin king in a Calculus Classroom: The Concept of Limit, UMI Microform 9700247, Doktora Tezi, Florida State University, College of Education, USA.

Swadener, Marc and R. Soedjadı. (1988). Values, Mathematics Education And The Task Of Developing Pupils' Personalities: An Indonesian Perspective. Educational Studies In Mathematics. Vol. 19, No:2, May, s. 193-208.
Ülgen, G. (1996). Kavram Geliştirme, Kuramlar ve Uygulamalar, Ankara: Setma Basımevi.
Ülgen, G. (1998). Eğitim psikolojisinde kavram geliştirme: Uygulama ve kuramlar, Ankara: H. Ü. Eğitim Fakültesi Yayınları.
Ülgen, G. (2001). Kavram Geliştirme, Ankara: Pegem A Yayıncılık.
Ülgen, G. (2004). Kavram Geliştirme, Ankara: Nobel Yayıncılık.
Yıldırım, A. ve Şimşek, H. (2000). Sosyal Bilimlerde Nitel Araştırma Yöntemleri. Ankara Seçkin Yayınevi.

Extended Abstract

Various learning methods might be used in teaching the concept. The concepts might be taught by traditional presentation methods based on behaviouralism or by invention based on structuring learning theory. It is essential to choose the appropriate approach which is suitable to the level of students' learning and development. The invention method is suitable for the classes in which students' who have high level of thinking capability has developed a lot whereas presentation method is suitable for the sub-ages in the first years of primary education and for the classes where the high level of thinking capability has not sufficiently developed. In teaching of concept by presentation method, the teaching materials are organised systematically in a consecutive and linear manner before starting teaching and they are made ready for transferring the students. In this process, first of all, name, definition and descriptive properties of the concept and finally, examples which are included or not included in the concept are given by using visual tools. (Erden and Akman, 1997; Kaptan, 1998). For this purpose, the teachers should consider the reality of the mathematical concepts' being in connection with each other such a chain. It should be taken into consideration that the damage in this chain might cause difficulties for the students in learning of mathematical concepts and this situation might lead the students to develop a negative attitude towards mathematics. (Swadener and Soedjadi, 1988).

In this research, during the applications done with the students, it was the "Learning by Invention" method which is used commonly. The structuring approach is used in topic expression. The teaching and learning activities based on structural learning theory are conceptual. The previous information of the students and their life experiences take an important place in understanding the new information and giving meaning to them. (Ayas and others, 1997; Önen, 2005). As it can be seen in the methodology part, a lot of examples for the limit of single and multivariable functions were given to the candidates by the teacher, illustrations about the subjects and computer aided teaching method were used for the purpose of perceiving "limit concept means different meanings in different contents". Furthermore, before getting through the subject of limit of multivariable functions, the "environments for providing the accordance with teaching concept and the previous accumulations of the students" have been prepared by repeating the limit of single variable functions during a lesson. The students are requested to define the limit concepts for single and multivariable functions with their own definitions after the lessons and "Cognitive Development Information Test" which was developed by researchers was used for determining the level of information on cognitive development.

The purpose of this study is to analyse how limit concept in double variable functions is structured among the candidates of mathematics teachers. The study is generally desired to contribute the teaching of limit concept by determining the difficulties and obstacles of the candidates about the subject.

The data compiled for the research have been analysed with "content analyse" technique which include the processes of the qualitative analyses' main patterns of determination, coding and classification (to themes). Furthermore, direct quotations have been placed for the purpose of reflecting the views of the interviewed and observed individuals in a remarkable way. The working environment of the research is restricted with 37 students in 2nd class of mathematics teachers discipline studying at the department of a State University's of Science and Math, High School Math Teacher Education Department in Ankara.

The lessons of the candidates have been followed regarding the limit concept of multivariable functions in the scope of Analyse-2 for the purpose of investigating the level of information of the candidates of mathematics teachers about the limit concept of double variable functions for this research. The delivery of the lessons, the teaching techniques applied in the lesson and the attitudes of the students in the lessons have been noted by the researcher carefully and videotaped. The students have been given

information tests about the subject at the end of the lessons and open ended questions were asked to them. Afterwards, for the purpose of supporting the research, interviews were done with 6 students who participated to the research for analyzing the ideas of the students more deeply and in detail about the concepts.

There are totally 7 questions in all studies. However, within the scope of this article, the findings of the analysis of 3 of the answers which are directly related with the research problem and the related part regarding the interview with the candidates about this article will be placed.

In this research the purpose of which is to investigate the information level of the candidates of the mathematics teachers regarding the limit concept of double variable functions, a questionnaire was applied to the students and the candidates were interviewed. The answers of 3 questions which are subject to this article and which take place in these studies and the interview stage of the study have been analyzed and the results have been assessed. According to the findings obtained, it is observed that the candidates have not absolutely understood what “if a double variable function has limit at a point, approach style is independent at the point where it is searched” means mathematically.

The candidates have mostly used two different ways approach method, namely the method finding the limits $\lim_{x\to 0}(\lim_{y\to 0} f(x,y))$, $\lim_{y\to 0}(\lim_{x\to 0} f(x,y))$ in order to find the limit of double variable functions. In this method, for example to find the limit of $\lim_{x\to 0}(\lim_{y\to 0} f(x,y))$, first of all it is necessary to find the limit of $\lim_{y\to 0} f(x,y)$. This limit may easily be found by neglecting x-independent variable and generally by the replacement method for $y \to 0$. Afterwards, the obtained function will be dependent to x, single variable function and limit $x \to 0$ could easily be found. Consequently, since replacement method which is mostly preferred in single variable functions is used in this stage in order to find the limit, it is desired that the students for this purpose particularly use approach method by two different ways in order to find the limit of double variable functions.

For the existence of the limit in double variable functions, the candidates find it sufficient that the limits provided by two different approaches, namely the limits of $\lim_{x\to 0}(\lim_{y\to 0} f(x,y))$, $\lim_{y\to 0}(\lim_{x\to 0} f(x,y))$ are equal.

Evolving out of the own statements of the candidates; it can be concluded that the candidates imitate this method to the “ equality of right and left limits” principle which is required for the existence of limit in single variable functions.