

---

*Araştırma Makalesi / Research Article*

---

## **Fonksiyonel Derecelendirilmiş Silindirin Isı İletiminin Chebyshev Pseudospektral Yöntemi ile Geçici Rejimdeki Analizi**

Mehmet Akif KIRKÖSE<sup>1</sup>, Durmuş YARIMPABUÇ<sup>1\*</sup>

<sup>1</sup>*Osmaniye Korkut Ata Üniversitesi, Fen Edebiyat Fakültesi, Matematik Bölümü, Osmaniye*  
(ORCID: [0000-0002-0833-4684](https://orcid.org/0000-0002-0833-4684)) (ORCID: [0000-0002-8763-1125](https://orcid.org/0000-0002-8763-1125))

---

### **Öz**

Fourier olmayan hiperbolik ısı iletim modeli kullanılarak fonksiyonel derecelendirilmiş sonsuz uzunlukta içi boş silindirin geçici rejimdeki analizi yapılmıştır. Termal gevşeme süresi dışında malzeme özelliklerinin radyal yönde üstel olarak değiştiği kabul edilmiştir. Sonsuz uzunlukta bir silindir ele alındığından silindirin alt ve üst ucundaki etkiler ihmal edilmiştir. Bu koşullar altında, uzay yönünde sadece radyal değişkene bağlı değişken katsayılı kısmi diferansiyel denklem elde edilir. Bu diferansiyel denkleme Laplace dönüşümü uygulanarak, Laplace uzayında zamandan bağımsız elde edilen lineer adi diferansiyel denklem, Chebyshev Pseudospektral yöntemi kullanılarak sayısal olarak çözümlenir, Modifiye Edilmiş Durbin Ters Dönüşüm Yöntemi kullanılarak zaman uzayındaki çözüm elde edilir. Sıcaklık ve ısı akısının geçici dinamik tepkileri, özel bir metal-seramik karışımı alınarak ve çeşitli göreceli sıcaklık değişikliklerine göre incelenmiştir. Farklı zamanlarda sıcaklık dağılımı ve ısı akısının davranışı farklı şekiller üzerinde gösterilmiştir. Bu birleştirilmiş yöntemin doğruluğunu göstermek için literatürde mevcut olan çözümler kullanılmıştır. Bu çalışmada kullanılan birleştirilmiş yöntemin, iyi yapılandırılmış, basit, etkili bir yöntem olduğu gösterilmiştir.

**Anahtar kelimeler:** Silindirlerde hiperbolik ısı iletimi, Fonksiyonel derecelendirilmiş malzeme, Laplace dönüşümü, Chebyshev pseudospektral yöntemi, Durbin ters dönüşüm yöntemi.

---

## **Heat Conduction Analysis of a Functionally Graded Cylinder in Transient Regime with Chebyshev Pseudospectral Method**

---

### **Abstract**

Transient analysis of functionally graded infinite length hollow cylinder is performed using non-Fourier hyperbolic heat conduction model. Except the thermal relaxation time, the material properties are assumed to change exponentially in the radial direction. Since an infinite-length cylinder is considered, the effects at the upper and lower ends of the cylinder are neglected. Under these conditions, a partial differential equation with variable coefficients is obtained which is only depend on the radial variable in the space direction. By applying Laplace transform to this differential equation, the linear ordinary differential equation obtained in Laplace space is solved numerically by using Chebyshev Pseudospectral method and the solution in time space is obtained by using Modified Durbin Inverse Transformation Method. The transient dynamic responses of temperature and heat flux are investigated by taking a special metal-ceramic mixture and examining various relative temperature changes. The behavior of temperature distribution and heat flux at different times is shown in the form of graphs. The solutions available in the literature are used to demonstrate the accuracy of this combined method. The combined method used in this study has been shown to be a well structured, simple, effective.

**Keywords:** Hyperbolic heat conduction in cylinders, Functionally graded material, Laplace transform, Chebyshev pseudospectral method, Durbin inverse transform method.

---

---

\*Sorumlu Yazar: [durmusyarimpabuc@osmaniye.edu.tr](mailto:durmusyarimpabuc@osmaniye.edu.tr)

Geliş Tarihi: 10.03.2021, Kabul Tarihi: 08.11.2021

## 1. Giriş

Materyaller, dünyadaki ilk insandan beri insanların yaşamında önemli bir rol oynamıştır. Farklı dönemlerde uygulamada kolaylığı için değişik tip malzemeler kullanılmış veya kompozit malzemeler yapılmıştır. Homojen malzemeye göre daha hafif, daha güçlü ve tasarım esnekliği sağlayan kompozit malzemeler araştırmacıların ilgisini çekmiştir. Geniş uygulama alanlarının yanı sıra korozyona ve aşınmaya karşı dirençli olmasından dolayı literatürde bu alanda birçok çalışma yapılmıştır. Ancak bu tip malzemelerin birleşme yerindeki özelliklerinin keskin geçişi, delaminasyon sürecinde bileşenlerin bozulmasına neden olmaktadır [1].

Bu durumun üstesinden gelebilmek için ilk olarak Shen ve Bever fonksiyonel olarak derecelendirilmiş malzemeler üzerine bir çalışma yapmışlar ancak üretiminin karmaşık ve zor olması gerekli ilgiyi görmesinin önüne geçmiştir [2]. Daha sonra Japonya'daki bir grup araştırmacı tarafından yapılan uzay mekiği projesinde, yüksek sıcaklık ve sıcaklık farkına dayanabilecek ısı bariyer malzeme ihtiyacından dolayı yeni bir kompozit materyal cinsi olan fonksiyonel derecelendirilmiş malzeme (FDM) önerisi ile ortaya çıkmıştır [3]. Elastik ve termal olarak heterojen olan bu malzemeler bir yüzeyden diğerine sürekli değişen özelliklere sahiptirler. Fonksiyonel olarak derecelendirilmiş malzemeler, yaygın olarak, metallerin mukavemet, işlenebilirlik ve bağ kurabilme özellikleri ile seramiklerin ısı, aşınma ve oksitlenme dirençlerinden dolayı metalden seramiğe doğru bir derecelendirmenin olduğu yapılardır. Isıya karşı dirençli, erozyon ve korozyona dayanıklı ve kırılma tokluğu yüksek olmalarından dolayı, bugüne kadar, biyomedikal, kimyasal, nükleer, madencilik ve enerji santrali gibi hemen hemen her alanda kullanılmışlardır [1].

FDM elemanlardaki termal stresin doğru olarak hesaplanabilmesi için ısı iletim analizinin doğru yapılması gerekir. Katılardaki ısı iletiminin matematiksel modellenmesi ile ilgili farklı teoriler vardır. Bunlardan en çok kullanılanı olan Fourier ısı iletimi teorisidir. Bu teoride katılardaki ısı iletkenliği kullanılarak, ısı akısının doğrudan sıcaklık gradyanına eşit olduğu varsayılmaktadır. Bu teori birçok mühendislik uygulaması için yeterli olmasına karşın, termal şok, darbeli lazerli ısıtma gibi çok çeşitli termal yüklemelerin neden olduğu durumlarda ısı iletimini doğru bir şekilde açıklayamaz. Ani bir termal şoka maruz kalan bir levhanın yüzey sıcaklığı ile ilgili yapılan bir çalışmada, elde edilen yüzey sıcaklığının Fourier yasasının öngördüğünden 300 °C daha yüksek olduğu gözlemlenmiştir [4]. Fourier ısı iletim teorisinde, fiziksel olarak gerçekçi olmayan sonsuz bir ısısal dalga yayılma hızı ile sonuçlanmasının yanında, düşük ve yüksek sıcaklıklarda ve çok büyük ısı akışının olduğu durumlarda doğru sonuç vermez.

Bu durumu daha iyi açıklayabilmek için Fourier olmayan ısı iletim modelleri geliştirilmiştir. Bu modellerden de en çok kullanılanı hiperbolik ısı iletim modelidir. Diferansiyel denklemin yapısından dolayı bu şekilde adlandırılan bu modelde, diferansiyel denkleme de geçen termal gevşeme süresi sıcaklığın termal düzensizliklerinin geçmesi için gereken zaman olarak tanımlanmıştır. Bu teori kullanılarak, silindirik geometrideki sıcaklık ve ısı akışının davranışları üzerine birçok çalışma yapılmıştır.

Wilhelm ve Choi [5], Fourier (parabolik) ve Fourier olmayan (hiperbolik) ısı iletim modelini kullanarak silindirik geometride termal dalgalar için kapalı formda bir çözüm sunmuşlardır. Chen ve Lin [6], Fourier olmayan hiperbolik ısı iletim modelinin analizi için bir hibrid yöntemi sunmuşlardır. Lin ve Chen [7], Fourier olmayan ısı iletim modellerinden biri olan hiperbolik ısı iletim modeli kullanarak silindirik ve küresel geometri için birleştirilmiş bir sayısal yöntem kullanmışlardır. Antaki [8], Fourier olmayan ısı iletim modellerinden biri olan hiperbolik ısı iletim problemlerine, hareketli ısı kaynağı ve faz değişimleri içeren durumlar hariç, analitik çözümler sunmuştur. Zanchini ve Pulvirenti [9], Fourier olmayan kararlı-periyodik hiperbolik ısı iletim problemi kullanılarak sonsuz uzunluktaki silindir için analitik bir çözüm takdim etmişlerdir. Al-Nimr ve Naji [10], Fourier olmayan hiperbolik ısı iletim modelini kullanarak izotropik olmayan bir cisimdeki termal davranışı incelemişlerdir. Chen vd. [11], ters hiperbolik ısı iletimdeki bilinmeyen yüzey koşullarını tahmin etmek için sayısal bir birleştirilmiş yöntem kullanmışlardır. Tarn ve Wang [12], fonksiyonel olarak derecelendirilmiş silindirik bir anizotropik tüpteki ısı iletimini incelemişlerdir. Liu vd. [13], doğrusal olmayan sınır

koşullarına sahip sonsuz uzunlukta tabakalı katı bir silindirdeki hiperbolik ısı iletim problemini, Laplace dönüşümü tekniği ve kontrol hacmi yöntemi ile birlikte hiperbolik şekil fonksiyonunu kullanarak çözmüşlerdir. Lu vd. [14], tabakalı kompozit dairesel silindirde bulunan geçici sıcaklık çözümüne giden analitik bir yöntem üzerinde çalışma yapmışlardır. Hosseini vd. [15], Fourier olmayan hiperbolik ısı iletim modelini kullanarak, işlevsel olarak derecelendirilmiş sonsuz uzunlukta kalın cidarlı silindirik kabuğun geçici rejimdeki analizi için analitik bir çözüm sunmuşlardır. Darabseh vd. [16], yüksek sıcaklık değişimi etkisinde bulunan silindirlerdeki termal gerilme analizi üzerine bir çalışma yapmışlardır. Babaei ve Chen [4] fonksiyonel olarak derecelendirilmiş bir içi boş silindirdeki hiperbolik ısı iletimini incelemişlerdir. Chen [17], silindirik malzemelerdeki hiperbolik ısı iletim problemlerini hibrit Green fonksiyon metodu kullanarak analiz etmiştir. Keles ve Conker [18], fonksiyonel derecelendirilmiş malzemeden oluşan içi boş silindir ve kürede hiperbolik ısı iletimi problemini analitik olarak çözmüşlerdir. Afshin vd. [19] çalışmalarında, fonksiyonel derecelendirilmiş kalın cidarlı dönel silindirik basınçlı kabın geçici rejimdeki termal-elastik analizini sunmuşlardır.

Bu çalışmada, fonksiyonel derecelendirilmiş (FD) içi boş kalın cidarlı sonsuz uzunluktaki silindirin geçici rejimdeki analizi hiperbolik ısı iletim modeli kullanılarak Laplace- Chebyshev-Pseudospektral Durbin birleşik yöntemiyle sayısal olarak incelenmiştir. Sonsuz uzunlukta bir silindir ele alındığından, silindirin alt ve üst ucundaki etkiler ihmal edilmiştir. Termal gevşeme süresi hariç, malzeme özelliklerinin radyal eksen boyunca üstel olarak değiştiği kabul edilmiştir. Bu koşullar altında, radyal ve zaman değişkene bağlı analitik yöntemlerle çözülmesi zor olan doğrusal bir kısmi diferansiyel denklem elde edilir. Bu kısmi diferansiyel denklemin zaman yönündeki bağımlılığı Laplace dönüşümü kullanılarak ortadan kaldırıldıktan sonra elde edilen adi diferansiyel denklem yüksek doğruluk derecesinde Chebyshev Pseudospektral Yöntemi [20, 21, 22] ile doğrusal denklem sistemine dönüştürülür. Doğrusal denklem sistemi uygun bir ayrıklaştırma yöntemi ile çözüldükten sonra, Laplace uzayındaki vektörün fiziksel uzaydaki değeri Modifiye Edilmiş Durbin Yöntemi [23] kullanılarak bulunur. Bu çalışmada fonksiyonel derecelendirilmiş silindirin malzeme özelliklerinin her birinin gerçekte olması gerektiği gibi farklı homojensizlik parametrelerine göre değiştiğinin varsayılması ve geçici rejimdeki analiz için düşük sayıda ızgara noktasıyla yüksek doğruluk düzeyinde çözümler sunan Chebyshev pseudospektral yöntemi ile Durbin yönteminin birlikte kullanılması bu çalışmayı literatürden ayırmaktadır. Sıcaklık ve ısı akısının geçici dinamik tepkileri, seramik-metal karışımı özel bir malzeme için ve çeşitli görelî sıcaklık değişikliklerine göre incelenmiştir. Farklı zaman ve malzeme özellikleri arasındaki sıcaklık dağılımı ve ısı akısının korelasyonu farklı şekiller üzerinde vurgulanmıştır. Literatürde mevcut analitik çözümler, kullanılan birleştirilmiş yöntemle çözümlere yöntemin doğruluğu gösterilmiştir. Bu çalışmada fonksiyonel olarak derecelendirilmiş silindirik kaptaki gerilme analizlerini yapmak için kullanılan bu birleştirilmiş yöntemin, basit, kolay uygulanabilir ve yüksek hassasiyette çözümler sunan bir yaklaşım olduğu gösterilmiştir.

## 2. Materyal ve Metot

Fonksiyonel derecelendirilmiş kalın cidarlı, sonsuz uzunluktaki silindirin hiperbolik ısı iletim problemi ele alınmıştır. Silindirin iç yarıçapı  $a$  ve dış yarıçapı  $b$  olmak üzere kesit alanı Şekil 1'deki gibi verilmiştir.

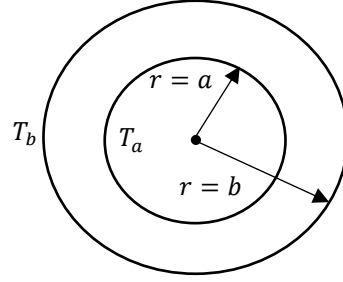
İzotropik ortamlar için hiperbolik ısı iletim denklemi [24] en genel formda

$$\vec{q} + \tau \frac{\partial \vec{q}}{\partial t} = -\lambda \nabla T \quad (2.1a)$$

ve iç ısı üretiminin ihmal edildiği enerji denge denklemi [8] ise

$$\rho c_p \frac{\partial T}{\partial t} = -\nabla \cdot \vec{q} \quad (2.1b)$$

şeklinde ifade edilmektedir. Burada  $\vec{q}$ ,  $T$ ,  $\tau$ ,  $\lambda$ ,  $\nabla$ ,  $\rho$  ve  $c_p$  sırasıyla ısı akı vektörünü, sıcaklığı, termal gevşeme süresini, ısı iletkenliği, gradyan operatörünü, yoğunluğu ve özgül ısıyı göstermektedir.



Şekil 1. Fonksiyonel derecelendirilmiş sonsuz uzunluktaki kalın cidarlı silindirin kesiti

Fonksiyonel derecelendirilmiş malzemenin (FDM), metal ve seramik karışımını ihtiva eden bir malzeme olduğu kabul edilmiştir. Bu varsayım altında, malzeme özelliklerinin silindirin kalınlığı boyunca üstel olarak değişimi

$$\lambda(r) = \lambda_a e^{\beta(r-a)} \quad (2.2a)$$

$$\rho(r) = \rho_a e^{\gamma(r-a)} \quad (2.2b)$$

$$c_p(r) = c_{pa} e^{\omega(r-a)} \quad (2.2b)$$

biçiminde olup, homojensizlik parametreleri  $\beta = \ln(\lambda_b/\lambda_a)/(b-a)$ ,  $\gamma = \ln(\rho_b/\rho_a)/(b-a)$  ve  $\omega = \ln(c_{pb}/c_{pa})/(b-a)$  bağıntıları kullanılarak hesaplanır. İç yüzeyi sadece metal, dış yüzeyi ise sadece seramik olacak şekilde bir yapı oluşturulmuştur. Malzeme özelliklerinin radyal yönde üstel olarak değiştiği kabul edilen silindirin, metalce zengin iç cidarı ile yüksek mukavemetli, seramikçe zengin dış cidarı ile de yüksek sıcaklığa dayanıklı heterojen silindirik bir malzeme elde edilmiştir. Bu bağıntılarda,  $a$  alt indisi iç ve  $b$  alt indisi ise dış yüzeydeki malzeme özelliklerini göstermektedir.

Sistemi idare eden denklemlerdeki tüm değişkenlerin etkisinin aynı derecede sayısal çözüme yansımaları için boyutsuzlaştırma işlemi yapılmıştır. Boyutsuzlaştırma işlemlerinde aşağıdaki değişkenler kullanılmıştır:

$$\eta = \frac{r}{b}, \quad r_a = \frac{a}{b}, \quad \theta = \frac{T - T_i}{T_b - T_i}, \quad T_\alpha = \frac{T_a - T_i}{T_b - T_i} \quad (2.3a)$$

$$\xi = \frac{\kappa_a t}{b^2}, \quad \varepsilon_0 = \frac{\kappa_a \tau}{b^2}, \quad \kappa_a = \frac{\lambda_a}{\rho_a c_{pa}}, \quad Q = \frac{b q_r}{\lambda_a T_i} \quad (2.3b)$$

Burada,  $\kappa_a$ ,  $T_i$ ,  $\varepsilon_0$  ve  $T_\alpha$  sırasıyla seramik iç yüzeydeki ısı yayılımını, işlevsel derecelendirilmiş silindire etki eden ilk sıcaklığı, boyutsuz termal gevşeme süresini ve bağıl sıcaklığı göstermektedir.

Kalın cidarlı içi boş silindirin aksel-simetri koşulunu sağladığı ve sonsuz uzunlukta olduğu kabul edildiğinden aksel yönde etkilerin olmadığı varsayılmıştır. Bu koşullar altında, sıcaklık ve ısı akısı sadece radyal koordinata ve zamana bağlıdır. Malzeme özellikleri (2.2) ve boyutsuzlaştırma parametreleri (2.3) kullanarak silindirik geometride boyutsuz hiperbolik ısı transfer denklemi ve boyutsuz enerji denkleminin bağlaşımlı (coupled) formu aşağıdaki şekilde oluşturulur:

$$P_1(\eta) \frac{\partial Z(\eta, \xi)}{\partial \xi} + P_2(\eta) \frac{\partial Z(\eta, \xi)}{\partial \eta} + P_3(\eta) Z(\eta, \xi) = 0 \quad (2.4)$$

öyleki

$$Z(\eta, \xi) = \begin{bmatrix} \theta(\eta, \xi) \\ Q(\eta, \xi) \end{bmatrix}$$

bilinmeyen sıcaklık ve ısı akısı içeren vektörü ve

$$P_1(\eta) = \begin{bmatrix} 0 & \varepsilon_0 \\ \frac{T_b - T_i}{T_i} e^{(b\eta - a)(\gamma + \omega)} & 0 \end{bmatrix}, \quad P_2(\eta) = \begin{bmatrix} \frac{T_b - T_i}{T_i} e^{\beta(b\eta - a)} & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad P_3(\eta) = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & \frac{1}{\eta} \end{bmatrix},$$

kısmi diferansiyel denklemin uzay değişkenine bağlı katsayılar matrisleridirler.

### 2.1. Başlangıç ve Sınır Koşulları

Fonksiyonel olarak derecelendirilmiş silindirin geçici rejimdeki sıcaklık davranışını ölçebilmek ve kullanılan hiperbolik ısı iletimi denklemi ile enerji denkleminin aşikâr olmayan çözümünü elde etmek için sisteme etki eden başlangıç ve sınır koşullarını belirlemek gerekir. Silindirik yüzeye herhangi bir etki olmadan önce sabit bir sıcaklık ( $T_i$ ) etkisi altında olduğu varsayılmıştır. Isı akısının da ilk anda sıfır olduğu kabul edilmiştir. Dolayısı ile başlangıç koşulları boyutsuz parametreler (2.3) kullanılarak  $\theta(\eta, 0) = Q(\eta, 0) = 0$  şeklinde elde edilir.

Silindirin iç ve dış cidarına etki eden sabit sıcaklıkların olduğu durağan sınır koşulu ele alınmıştır. İç ve dış cidar arasındaki sıcaklık farkının fazla ( $T_b \gg T_a$ ) olduğu varsayılmıştır. Bu koşullarının boyutsuz formları da (2.3) kullanılarak,

$$\theta(r_\alpha, \xi) = T_\alpha, \quad \theta(1, \xi) = 1 \quad (2.5)$$

olarak bulunur.

### 2.2. Laplace Dönüşümü

Isı iletim denklemi ile enerji denkleminde oluşan kısmi diferansiyel denkleme (2.4) zaman yönünde Laplace dönüşümü uygulanırsa,  $\eta$  değişkenine bağlı adi diferansiyel denklem elde edilir. Bilinmeyen sıcaklık ve ısı akısını içeren  $Z(\eta, \xi)$  vektörünün Laplace uzayındaki dönüşümü  $\mathcal{L}[Z(\eta, \xi)] = \bar{Z}(\eta, s)$  olsun. İlk anda sıcaklık ve ısı akısının değeri sıfır olduğundan, Laplace dönüşümünde kullanılacak olan başlangıç koşulu  $Z(\eta, 0) = [0 \ 0]^T$  şeklindedir. Bu koşullar altında kısmi diferansiyel denklemin (2.4) Laplace dönüşümü alınır

$$P_2(\eta) \frac{\partial \bar{Z}(\eta, s)}{\partial \eta} + (P_1(\eta)s + P_3(\eta)) \bar{Z}(\eta, s) = P_1(\eta)Z(\eta, 0) \quad (2.6)$$

bağlı (coupled) formda bir adi diferansiyel denkleme dönüşür. Buradaki  $s$  değişkeni Laplace parametresidir.

### 2.3. Chebyshev Pseudospektral Yöntemi

Spektral yöntemler ailesi içinde yüksek doğruluk derecesinde çözümler sunan Chebyshev pseudospektral yöntemi yerel olmayan bir yaklaşım ile problemi ele alırken, sonlu elemanlar yöntemleri yerel bir yaklaşım kullanır. Yani uzayda belirli bir noktada bir türevin değeri sonlu elemanlar yöntemlerindeki gibi sadece komşu ızgara noktaları değil, uzaydaki diğer tüm noktalardaki çözüme bağlıdır. Ayrıca, daha düşük sayıda ızgara noktasıyla yüksek doğruluk düzeyinde çözümler verir. Bu

nedenlerle, Chebyshev pseudospektral yöntemi iyi tanımlı problemler için hızlı ve üstel yakınsama özelliğine sahiptir. Ancak, karmaşık geometriler ve süreksizlik durumlarında diğer yöntemlere göre daha az esnektir ve genellikle uygulanması daha karmaşıktır. Örneğin, şok ve süreksizlik içeren problemlerde spektral yönteminin keskin gradyanlarla birleştirilmesi zordur.

Bu çalışmada, boyutsuz radyal yündeki türevlere sahip Laplace uzayındaki adi diferansiyel denklem birinci tip Chebyshev polinomu yaklaşımına dayanan Chebyshev Pseudospektral Yöntemi (CPY) ile çözülecektir. Diferansiyel matris yaklaşımına dayanan yöntemde, hatayı minimum yapacak şekilde bir nokta dağılımı seçilerek bu noktalara karşılık gelen interpolasyon polinomu aranır. Sınırdaki nokta dağılımı orta noktalara göre daha sık olan Chebyshev-Gauss-Lobatto noktaları

$$\eta_j = \cos\left(\frac{j\pi}{N}\right), \quad j=0,1,2,3,\dots,N \quad (2.7)$$

ile daha az örgü noktası kullanılarak elde edilecek olan diferansiyel matrisi, sayısal çözümlemede yüksek hassasiyette sonuçlar elde edilmesini sağlamaktadır [22]. Yarım çember üzerine eşit aralıklarla yerleştirilmiş olan bu noktaların yatay eksene izdüşümleri alındığında sınırlarda sık, orta noktalarda daha seyrek bir dağılım oluşturmaktadırlar. Chebyshev-Gauss-Lobatto noktalarında Lagrange interpolasyon polinomu ile oluşturulan diferansiyel matris ( $D_N$ ), sol taraftan bir kere  $\bar{Z}(\eta, s)$  vektörü ile çarpıldığında bu vektörün birinci türevine  $\bar{Z}'(\eta, s) = D_N \bar{Z}(\eta, s)$ , iki kere çarpıldığında bu vektörün ikinci türevine  $\bar{Z}''(\eta, s) = D_N^2 \bar{Z}(\eta, s)$ , üç kere çarpıldığında bu vektörün üçüncü türevine  $\bar{Z}'''(\eta, s) = D_N^3 \bar{Z}(\eta, s)$  karşılık gelir. Bu şekilde soldan diferansiyel matris ile çarpım yapılarak yüksek mertebeli türev ifadelerine yüksek hassasiyetli yaklaşımlar sağlar. Bu yöntemin, yüksek hassasiyete sahip, basit, etkili bir metot olduğu Trefethen'nin [22] bu konu ile ilgili kitabında gösterilmiştir.

Laplace dönüşümü ile adi diferansiyel denkleme dönüştürülen (2.6) bağlı (coupled) formdaki kısmi diferansiyel denklem, Chebyshev Gauss-Lobatto noktalarında elde edilmiş olan diferansiyel matrisi kullanılarak

$$L_N \bar{Z} = Rhs \quad (2.8)$$

doğrusal bir denklem sistemine dönüştürülür. Burada,  $L_N$  doğrusal denklemin operatörü iken  $Rhs$  ise bilinen sağ taraf vektörü olup,

$$L_N = P_2(\eta)D_N + P_1(\eta)s + P_3(\eta), \quad Rhs = P_1(\eta)Z(\eta, 0)$$

şekindedir. Bu elde edilen doğrusal denklem sistemine (2.8) sınır koşulları (2.5) uygulanarak sıfırdan farklı olan (aşıkâr olmayan) çözüm, uygun bir ayrıklaştırma yöntemi ile kolayca bulunur.

#### 2.4. Modifiye Edilmiş Durbin Yöntemi

Uygulamaya yönelik gerçek problemlerde, Laplace uzayındaki değerlerin fiziksel uzaydaki karşılığını ters dönüşüm formüllerini kullanarak elde etmek zordur. Laplace dönüşümü ile adi diferansiyel denkleme dönüştürülen bağlı (coupled) formdaki kısmi diferansiyel denklem, CPY ile çözüldükten sonra zaman uzayındaki çözümü analitik olarak elde etmek çok zor hatta çoğu zaman mümkün değildir. Bunun için bu ters dönüşümü sayısal olarak hesaplayabilecek bir yöntem ihtiyacı vardır. Bu çalışmada ters dönüşüm için modifiye edilmiş Durbin yöntemi uygulanmıştır [23]. Fourier cosinüs seri yaklaşımına dayanan ve Dubner ve Abate'nin [26] geliştirdiği ters dönüşüm yönteminin geliştirilmiş hali olan bu yöntemde Fourier cosinüs-sinüs seri yaklaşımı birlikte kullanılmaktadır. Durbin'nin [23] ters Laplace dönüşümündeki sonuçları iyileştirmek için, ters dönüşümü yapılan her bir terim Narayanan [25] tarafından önerildiği gibi Lanczos faktörü ile çarpılmıştır. Yöntemin detaylı uygulaması ve formülasyonu için Keles ve Conker'in [18] çalışması incelenebilir.

### 3. Bulgular ve Tartışma

Bu çalışmada, hiperbolik ısı iletim teorisi ile sonsuz uzunlukta kalın cidarlı silindirin geçici rejimdeki sıcaklık ve ısı akı analizi sayısal bir yöntem olan Chebyshev Pseudospektral Yöntemi (CPY) ile çözülmüştür. Sonsuz uzunlukta bir silindir ele alındığından silindirin alt ve üst ucundaki etkiler ihmal edilmiştir. Silindirin iç yarıçapı  $a = 0.6$  ve dış yarıçapı  $b = 1$  olarak alınmıştır. Termal gevşeme süresi hariç malzeme özelliklerinin üstel bir fonksiyona bağlı olarak cidar boyunca değiştiği kabul edilmiştir. Silindirin iç yüzeyi metalce ( $Ti - 6Al - 4V$ ) zengin iken dış yüzeyi seramikçe ( $ZrO_2$ ) zengin olacak şekilde kademeli olarak metal ve seramik karışımından oluştuğu varsayılmıştır. Bu özel malzemenin ısı iletim katsayısı, yoğunluğu ve özgül ısı değerleri Tablo 1'de verilmiştir. Bu metal-seramik karışımının homojensizlik parametreleri, bu malzeme özelliklerine göre  $\beta = -3.1944$ ,  $\gamma = 0.5409$  ve  $\omega = -0.7311$  değerlerine karşılık gelmektedir. Malzeme özelliklerinin derecelendirilmesinde kullanılan parametreler sıfır alındığında ( $\beta = \gamma = \omega = 0$ ), sadece metal malzemeden ( $Ti - 6Al - 4V$ ) oluşan bir silindirin elde edileceği, (2.2) bağlantılarından kolayca görülebilir.

**Tablo 1.** Karışımda kullanılacak malzemelerin özellikleri (Metal-Seramik)[27]

Malzeme	$\lambda, W/(mK)$	$\rho, kg/m^3$	$c_p, J/(kg.K)$
$Ti - 6Al - 4V$	7.5	4430	560
$ZrO_2$	2.09	5500	418

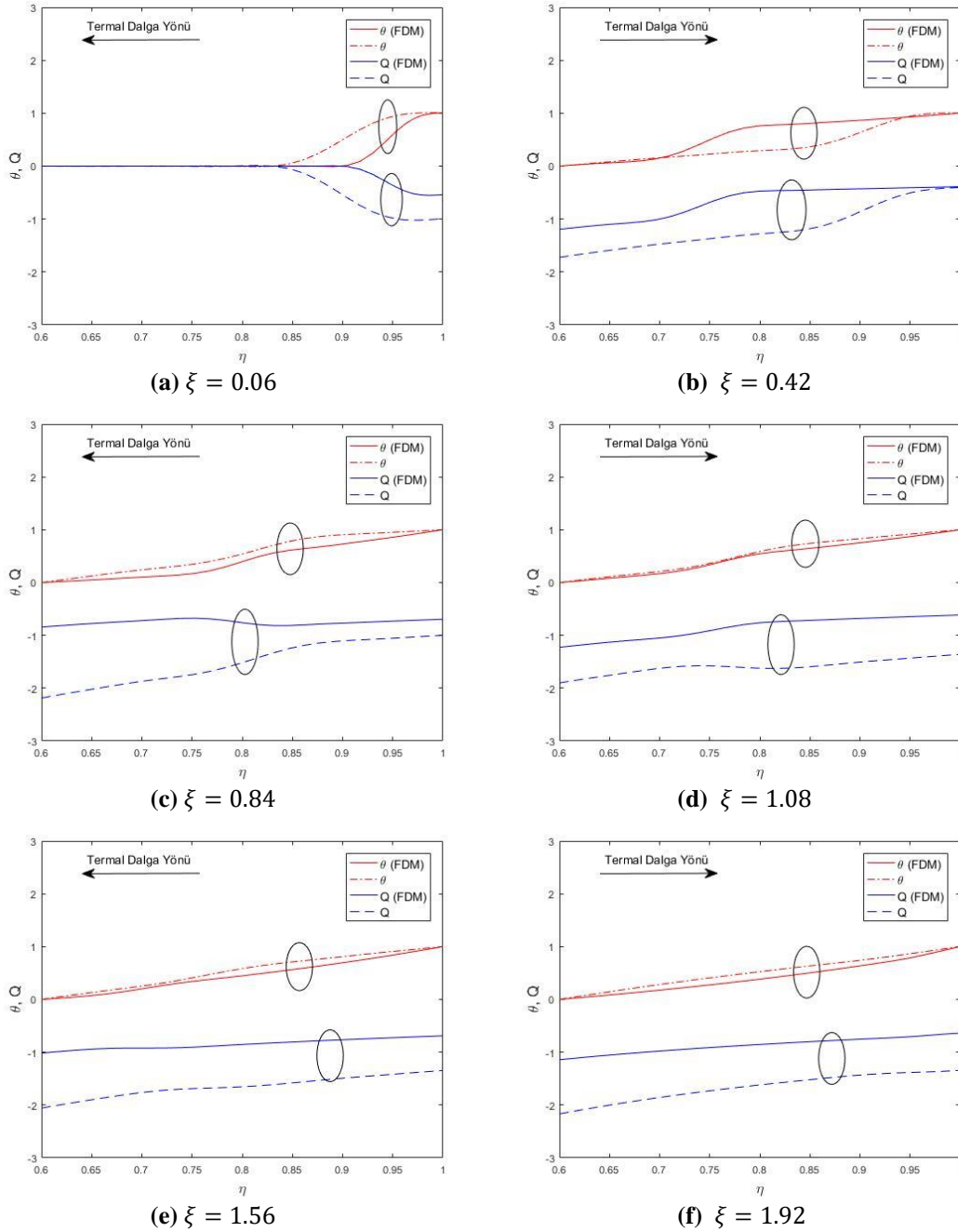
Literatürde, termal gevşeme süresinin sabit, ısı iletim katsayısı, yoğunluk ve özgül ısının radyal yönde kuvvet kuralına göre aynı homojensizlik parametresi ( $\beta$ ) ile değiştiği  $\lambda = \lambda_a r^\beta$ ,  $\rho = \lambda \rho_a r^\beta$  ve  $c_p = c_{pa} r^\beta$  durum için sayısal çözümleme Laplace Chebyshev Pseudospektral Durbin birleşik yöntemiyle farklı boyutsuz zaman değerlerinde elde edilmiştir. Elde edilen sonuçlar, Babaei ve Chen'nin [4] yapmış oldukları analitik çalışma ile Tablo 2'de mukayese edilmiştir. Yüksek dış sıcaklığın sisteme etki ettiği ilk anlarda ( $\xi = 0.06$ ), ilk yansımadan sonra ( $\xi = 0.42$ ) ve dengeye ulaşmaya yakın bir zaman dilimindeki ( $\xi = 1.92$ ) aşamalarda boyutsuz zamanlarda karşılaştırmalar yapılmıştır. Bu çalışmada sunulan birleştirilmiş yöntem ile analitik sonuçların 18 örgü noktası için birbirine yakın olduğu ve en az beş haneli hassasiyette sonuçlar verdiği görülmüştür.

**Tablo 2.** Sıcaklığın farklı boyutsuz zaman değerlerinde Babaei ve Chen [4] ile mukayesesi

$\eta$	$\xi = 0.06$		$\xi = 0.42$		$\xi = 1.92$	
	CPY	[4]	CPY	[4]	CPY	[4]
0.60	0.00000000	0.00000000	0.00000000	0.00000000	0.00000000	0.00000000
0.61	0.00176698	0.00176689	0.02433694	0.02433704	0.06622243	0.06622241
0.65	0.00224459	0.00224437	0.08534814	0.08534826	0.23700556	0.23700555
0.70	-0.00312640	-0.00312649	0.16176567	0.16176551	0.43397485	0.43397491
0.77	0.00400921	0.00400888	0.25064558	0.25064580	0.59966400	0.59966405
0.83	0.02679526	0.02679518	0.32278354	0.32278356	0.74050394	0.74050396
0.90	0.56737873	0.56737881	0.37209449	0.37209468	0.85444848	0.85444843
0.95	0.99088250	0.99088265	0.50771622	0.50771616	0.93615857	0.93615855
0.99	1.01774540	1.01774539	0.85043128	0.85043125	0.98482252	0.98482253
1.00	1.00584200	1.00584200	1.00071672	1.00071672	1.00069693	1.00069693

İç ve dış çeperde sabit bir sıcaklığın var olduğu ve dış çeperdeki sıcaklığın iç çeperdeki sıcaklıktan daha yüksek olduğu durumda cidar boyunca boyutsuz zaman noktalarında sıcaklık ( $\theta$ ) ve ısı akı ( $Q$ ) dağılımları Şekil 2'de verilmiştir. Silindirin dış çeperindeki sıcaklık değeri daha fazla olduğu için termal dalga yönü öncelikle dışarıdan içeriye doğrudur (Şekil 2(a)). Doğrultusu dış çeperden iç çepere olan sıcaklık ve ısı akı dalgasının iç çepere çarptıktan sonra düşey doğrultuda aynen geri yansıyor tekrar dış çepere doğru yönelmesi ise Şekil 2(b)'de gösterilmiştir. Bu yansımalar periyodik olarak tekrarlanarak düşey yönde dalga genliği azalıp dengeye ulaşana kadar sürmektedir (Şekil 2(c-f)). Ayrıca Şekil 2'den, fonksiyonel derecelendirilmiş malzeme için sıcaklık ve ısı akısı dalgalarının hızının,

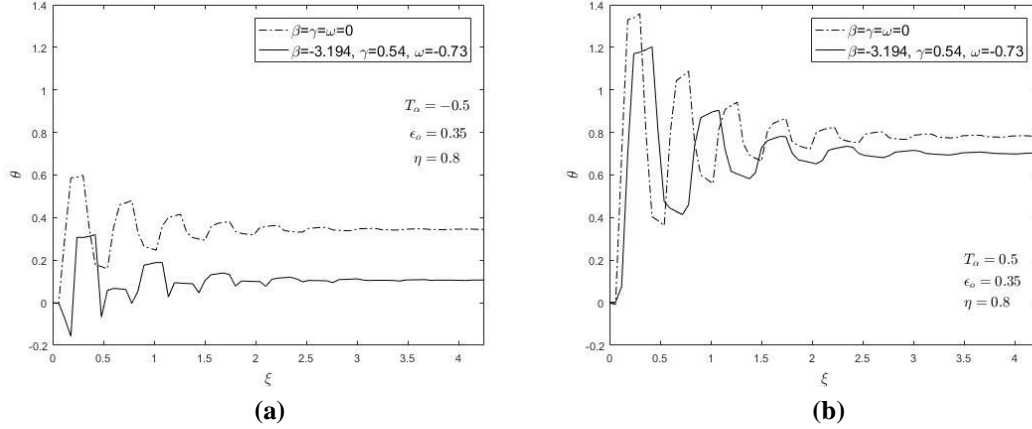
homojen malzemede sıcaklık ve ısı akısı dalgalarının hızına göre daha düşük olduğu da gözlemlenmektedir.



**Şekil 2.** Sıcaklık ve ısı akısının cidar boyunca boyutsuz zaman dilimlerindeki dağılımı

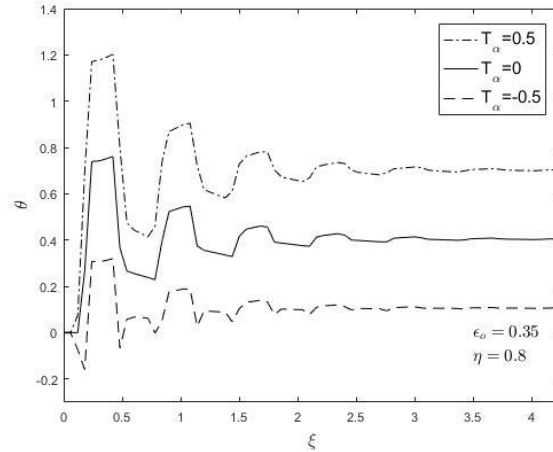
Silindirin başlangıç sıcaklığının iç sıcaklıktan daha yüksek ve daha düşük olduğu durumlarda, cidarın orta noktasında ( $\eta = 0.8$ ) sıcaklığın boyutsuz zamana göre dağılımının sabit bir termal gevşeme süresinde ( $\varepsilon_0 = 0.35$ ), FD ve homojen malzeme için karşılaştırılması Şekil 3'te verilmiştir. Şekil 3(a)'da silindirin iç sıcaklığının başlangıç sıcaklığından daha düşük olduğu durum ( $T_a < T_i$ ) verilirken Şekil 3(b)'de silindirin iç sıcaklığının başlangıç sıcaklığından daha yüksek olduğu durum ( $T_a > T_i$ ) ele alınmıştır. Silindirin iç sıcaklığının başlangıç sıcaklığından daha yüksek olduğu durum için elde edilen dalgalanmaların diğer duruma göre daha yüksek değerler aldığı görülmüştür. FD malzemede sıcaklığın genliği ve dengeye ulaşma süresi homojen malzemeye göre daha az olduğu gözlemlenmiştir [18].





**Şekil 3.** Silindirin başlangıç sıcaklığının iç sıcaklıktan daha yüksek (soldaki şekil) ve daha düşük (sağdaki şekil) olduğu durumlarda, cidarın orta noktasında sıcaklığın boyutsuz zamana göre dağılımının sabit bir termal gevşeme süresinde FD ve homojen malzeme için karşılaştırılması.

Cidarların iç ve dış kısmında sabit fakat sıcaklık farkının yüksek olduğu durum için silindirik yüzeyin iç sıcaklığı başlangıç sıcaklığından küçük, eşit ve büyük olduğu durumlar için cidarın ortasında ( $\eta = 0.8$ ) sıcaklığın boyutsuz zaman boyunca değişimi Şekil 4'te FD malzeme için verilmiştir. Başlangıç sıcaklığının iç sıcaklıktan yüksek olması, boyutsuz sıcaklık değerlerindeki dalgalanmayı etkilememekte ve sadece daha düşük değer almasına yol açmaktadır. Burada, iç sıcaklık değeri arttıkça sıcaklığın düşey doğrultuda dalgalanma genliğinin arttığı ve Keles ve Conker [18] çalışması ile uyum içinde olduğu tespit edilmiştir.



**Şekil 4.** FD malzemede, iç sıcaklık değerlerinin ilk sıcaklıktan küçük, eşit ve büyük olması durumunda sabit termal gevşeme süresi için cidarın orta noktasındaki sıcaklık dağılımı.

#### 4. Sonuçlar

Bu çalışmada, fonksiyonel derecelendirilmiş (FD) içi boş kalın cidarlı sonsuz uzunluktaki silindirin hiperbolik ısı iletim modeli ile geçici rejimdeki analizi Laplace Chebyshev Pseudospektral Durbin birleşik yöntemiyle sayısal olarak incelenmiştir. Sonsuz uzunlukta bir silindir ele alındığından silindirin alt ve üst ucundaki etkiler ihmal edilmiştir. Termal gevşeme süresi hariç, malzeme özelliklerinin radyal eksen boyunca üstel olarak değiştiği kabul edilmiştir. İç ve dış çeperde sabit bir sıcaklığın var olduğu ve dış çeperdeki sıcaklığın iç çeperdeki sıcaklıktan daha yüksek olduğu durağan sınır koşulunda, silindirin radyal eksen ve zaman boyunca ısı akı ve sıcaklık dağılımları incelenmiştir. Homojen malzemenin FD malzemeye oranla silindirik cisimdeki termal dalga yayılımının daha hızlı, sıcaklığın etkisinin de daha fazla olduğu gözlemlenmiştir. Bu çalışmada fonksiyonel olarak derecelendirilmiş silindirik kaptaki gerilme analizlerini yapmak için kullanılan bu birleştirilmiş yöntemin, basit, kolay uygulanabilir ve yüksek hassasiyette çözümler sunan bir yaklaşım olduğu gösterilmiştir.

## Teşekkür

Bu çalışma Osmaniye Korkut Ata Üniversitesi Bilimsel Araştırma Projeleri Birimi (BAP) destekli OKÜ BAP-2019-PT3-011 numaralı projenin ürünüdür.

## Yazarların Katkısı

Yazarların makaleye olan katkıları aynı orandadır.

## Çıkar Çatışması Beyanı

Yazarlar arasında herhangi bir çıkar çatışması bulunmamaktadır.

## Araştırma ve Yayın Etiği Beyanı

Yapılan çalışmada araştırma ve yayın etiğine uyulmuştur.

## Kaynaklar

- [1] Birman V., Byrd L.W. 2007. Modeling and analysis of functionally graded materials and structures. *Applied Mechanics Reviews*, 60 (5): 195–216.
- [2] Shen M., Bever M. 1972. Gradients in polymeric materials. *Journal of Materials science*, 7 (7): 741-746.
- [3] Niino M., Hirai T., Watanabe R. 1987. The functionally gradient materials. *Journal of the Japan Society for Composite Materials*, 13 (1): 257-264.
- [4] Babaei M.H., Chen Z.T. 2010. Transient hyperbolic heat conduction in a functionally graded hollow cylinder. *Journal Of Thermophysics and Heat Transfer*, 24 (2): 325-330.
- [5] Wilhelm H.E., Choi S.H. 1975. Nonlinear hyperbolic theory of thermal waves in metals. *The journal of Chemical Physics*, 63 (5): 2119-2123.
- [6] Chen H.T., Lin J.Y. 1993. Numerical analysis for hyperbolic heat conduction. *International Journal of Heat and Mass Transfer*, 36 (11): 2891-2898.
- [7] Lin J.Y., Chen H.T. 1994. Numerical solution of hyperbolic heat conduction in cylindrical and spherical systems. *Applied Mathematical Modelling*, 18 (7): 384-390.
- [8] Antaki P.J. 1995. Key features of analytical solutions for hyperbolic heat conduction. *AIAA Paper*, 95: 2044.
- [9] Zanchini E., Pulvirenti B. 1998. Periodic heat conduction with relaxation time in cylindrical geometry. *Heat and Mass Transfer*, 33 (4): 319-326.
- [10] Al-Nimr M. A., Naji M. 2000. The hyperbolic heat conduction equation in an anisotropic material. *International Journal of Thermophysics*, 21 (1): 281-287.
- [11] Chen H.T., Peng S.Y., Yang P.C. 2001. Numerical method for hyperbolic inverse heat conduction problems. *Int. Comm. Heat Mass Transfer*, 28 (6): 847-856.
- [12] Tarn J.Q., Wang Y.M. 2003. Heat conduction in a cylindrically anisotropic tube of a functionally graded material. *Chinese Journal of Mechanics (Series A)*, 19: 365-372.
- [13] Liu K.C., Lin C.N., Wang J.S. 2005. Numerical solutions for the hyperbolic heat conduction problems in a layered solid cylinder with radiation surface. *Applied Mathematics and Computation*, 164: 805-820.
- [14] Lu X., Tervola P., Viljanen M. 2006. Transient analytical solution to heat conduction in composite circular cylinder. *International Journal of Heat and Mass Transfer*, 49: 341-348.
- [15] Hosseini S.M., Akhlaghi M., Shakeri M. 2007. Transient heat conduction in functionally graded thick hollow cylinders by analytical method. *Heat and Mass Transfer*, 43 (7): 669-675.
- [16] Darabseh T., Naji M., Al-Nimr M. 2008. Transient thermal stresses in an orthotropic cylinder under the hyperbolic heat conduction model. *Heat Transfer Engineering*, 29 (7): 632-642.
- [17] Chen T.M. 2010. Numerical solution of hyperbolic heat conduction problems in the cylindrical coordinate system by the hybrid Green's function method. *International Journal of Heat and Mass Transfer*, 53: 1319-1325.

- [18] Keles I., Conker C. 2011. Transient hyperbolic heat conduction in thick-walled FGM cylinders and spheres with exponentially-varying properties. *European Journal of Mechanics A/Solids*, 30 (1): 449-455.
- [19] Afshin A., Nejad M.Z, Dastani K. 2017. Transient thermoelastic analysis of FGM rotating thick cylindrical pressure vessels under arbitrary boundary and initial conditions. *Journal of Computational Applied Mechanics*, 48 (1): 15-26.
- [20] Gottlieb D., Hussaini M.Y., Orszag S.A. 1984. *Introduction: Theory and Applications of Spectral Methods*. SIAM, USA.
- [21] Voigt R.G., Gottlieb D., Hussaini M.Y. 1984. *Spectral methods for partial differential equations*. SIAM, USA.
- [22] Trefethen L.N. 2000. *Spectral methods in matlab*. SIAM, USA.
- [23] Durbin F. 1974. Numerical inversion of Laplace transforms: an efficient improvement to Dubner and Abate's method. *The Computer Journal*, 17 (4): 371-376.
- [24] Nowinski J. N. 1978. *Theory of thermoelasticity with applications*. Sijthoff-Noordhoff, Alphen aan den Rijn, Netherlands.
- [25] Narayan G.V. 1979. *Numerical operational methods in structural dynamics*. Ph.D.thesis, University of Minnesota, Minneapolis, MN.
- [26] Dubner R., Abate J. 1968. Numerical inversion of Laplace transforms by relating them to the finite Fourier cosine transform. *Journal Applied and Computational Mechanics*, 15 (1): 115-123.
- [27] Yıldırım A., Yarımabaç D., Celebi K. 2020. Transient thermal stress analysis of functionally graded annular fin with free base. *Journal of Thermal Stresses*, 43 (9): 1138–1149.