



New algorithm for near-maximum independent set and its upper bounds in claw-free graphs

Şeyda Karıcı¹ , Ali Arı¹ , Ali Karıcı² 

¹Computer Engineering Department, Faculty of Engineering, İnönü University, 44100, Malatya, Turkey

²Software Engineering Department, Faculty of Engineering, İnönü University, 44100, Malatya, Turkey

Highlights:

- Developing algorithm to obtain independent set in given graph
- A special spanning tree K_{min} for independent set
- Determine upper bounds for $|I|$ based on K_{min} tree.

Keywords:

- Independent set
- Spanning Tree
- Fundamental cut-sets
- K_{min} tree

Article Info:

Research Article
Received:23.03.2021
Accepted: 16.10.2021

DOI:

10.17341/gazimmfd.902093

Correspondence:

Author: Şeyda Karıcı
e-mail:
seydakarc@gmail.com
phone: +90 507 345 7496

Graphical Abstract

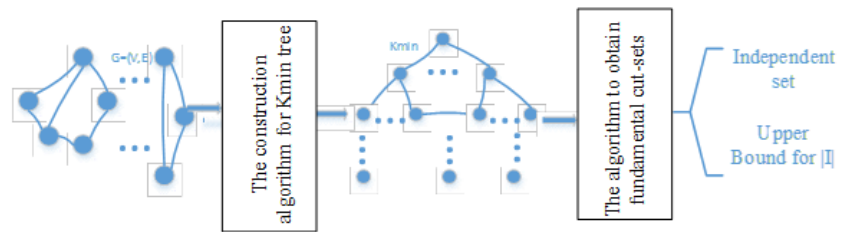


Figure A. The schemtaic block of study

Purpose: The aim of this paper is to develop algorithms for obtaining independent set in given graph and determine upper bounds for $|I|$ in claw-free graphs.

Theory and Methods:

The main aim of this paper is to develop algorithms for obtaining near-optimal independent set for any type of graph. A special spanning tree (K_{min}) is used for this aim. K_{min} is used to obtain the fundamental cut-sets of graphs, and cut-set matrix. The multiplication of incidence matrix and transpose of cut-set matrix gives the first independent set element which has minimum independence number. The K_{min} tree is also used to determine the upper bounds for size of independent set in term of minimum degree.

Results:

The developed algorithms are used for obtaining near-maximum independent set for any given graphs, and this case is the advantage of this algorithm. The K_{min} spanning tree is used to obtain the upper bounds for size of independent set, and the obtained inequality is in term of minimum degree in graph.

Conclusion:

The developed method obtains the near-maximum independent set for any graph type. The upper bound for size of independent set is obtained based K_{min} and minimum degree in graph.



Pençesiz çizgelerde maksimum-yakın bağımsız küme ve üst sınırları için yeni algoritma

Şeyda Karıcı¹, Ali Arı^{1*}, Ali Karıcı²

¹İnönü Üniversitesi, Mühendislik Fakültesi, Bilgisayar Mühendisliği Bölümü, 44100, Battalgazi, Malatya, Türkiye

²İnönü Üniversitesi, Mühendislik Fakültesi, Yazılım Mühendisliği Bölümü, 44100, Battalgazi, Malatya, Türkiye

Ö N E Ç I K A N L A R

- Geliştirilen algoritma verilen çizgedeki bağımsız kümeyi elde etmek.
- -Bağımsız küme için özel bir açılım ağacı K_{min}
- - K_{min} tabanlı $|I|$ için üst sınırları belirlemek.

Makale Bilgileri

Araştırma Makalesi

Geliş: 23.03.2021

Kabul: 16.10.2021

DOI:

10.17341/gazimmfd.902093

Anahtar Kelimeler:

Bağımsız küme,
açılım ağacı,
temel kesme kümeleri,
 k_{min} ağacı

ÖZ

Günümüzde çizgelerin bazı problemleri için hala yaklaşık çözüm yöntemleri kullanılmaktadır. Bunlar minimum baskın küme, maksimum bağımsız küme, maksimum hizip, mükemmel eşleştirme, Hamilton devresi bunlardan bir kısmıdır. Bu çalışmada maksimum bağımsız küme bulma problemine polinomsal olan bir yöntemin uygulaması üzerinde durulacaktır. Bu amaçla pençesiz çizgelerden olan kral çizgeleri üzerinde örnek çalışmalar gösterilecektir ve pençesiz çizgeler için maksimum bağımsız kümenin eleman sayısı için analitik bir sınır ortaya konulmaya çalışılacaktır.

New algorithm for near-maximum independent set and its upper bounds in claw-free graphs

H I G H L I G H T S

- N Developing algorithm to obtain independent set in given graph
- A special spanning tree K_{min} for independent set
- Determine upper bounds for $|I|$ based on K_{min} tree.

Article Info

Research Article

Received:23.03.2021

Accepted: 16.10.2021

DOI:

10.17341/gazimmfd.902093

Keywords:

Independent sets,
spanning tree,
fundamental cut-sets,
 k_{min} tree,

ABSTRACT

Recently, approximation solution methods are used for some problems of graphs. These are the minimum dominating set, maximum independent set, maximum clique, perfect matching, Hamiltonian circuit. In this study, the application of a polynomial method to the problem of finding maximum independent sets will be emphasized. At this aim, case studies on king graphs, which are one of the claw-free graphs, will be shown and analytical limit for the number of elements of the maximum independent set for claw-free graphs.

1. GİRİŞ (INTRODUCTION)

Mühendislik ve bilimsel problemlerin bir kısmı çizge olarak modellendikten sonra çizge algoritmaları kullanılarak çözüm üretilmektedir. Bu amaçla hiperküp çizgelerinde maksimum bağımsız küme sayısını bulma üzerine çalışmalar yapılmıştır [1]. Üçgen (triangle) çizgeler maksimum bağımsız küme üzerinde çalışmalar yapıldıktan sonra düğümlerin komşu sayısı için üst sınır tanımlaması yapılmaya çalışılmıştır [2].

Çizgelerde bağımsız küme bulmak NP-Zor bir problemdir ve maksimum ağırlıklı bağımsız kümeyi bulmak da NP-Zor bir problemdir. P_6 'sız çizgelerin maksimum ağırlıklı bağımsız kümenin ne olduğu bilinmemektedir, çizgelerin alt sınıflarının yapısal olarak analiz edilmesi sonucunda (P_6 , pençesiz) çizgelerin maksimum ağırlıklı bağımsız kümenin $O(n^3m)$ karmaşıklıkta çözülebileceği gösterilmiştir [3-5].

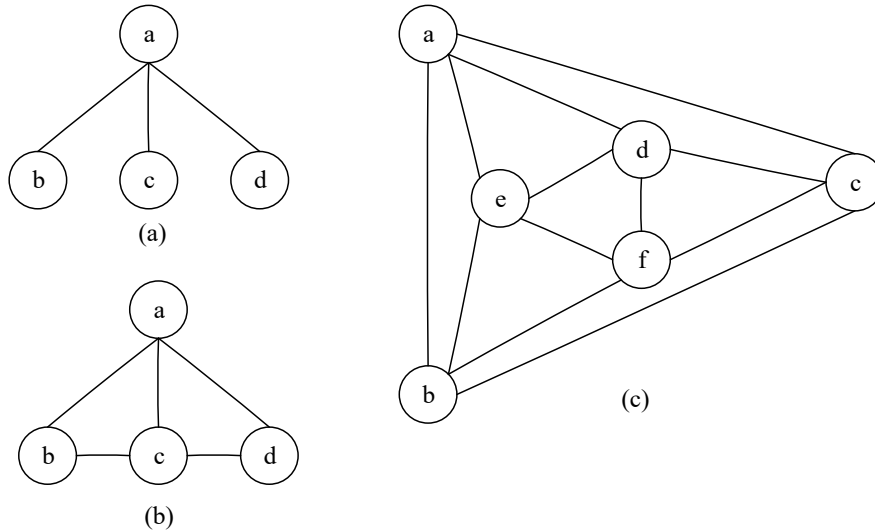
Fibonacci sayıları, Lucas sayıları, Pell sayıları, Tribonacci sayıları genellendikten sonra bunların özel çizgelerin k -bağımsız küme toplamına eşit olduğu gösterilmiştir [6]. Verilen çizgede bağımsız kümeyi bulurken eğer bir ağacın bağımsız kümesi bulunacaksa, elde edilen bağımsız küme unimodüler olur ve düzenli iki parçalı (bipartite) çizgelerin bağımsız küme serisi üzerine çalışmalar yapılmıştır [7]. 3-düzenli Hamilton çizgeleri için bağımsız küme NP-tamam olan bir problemdir [8]. Bazı çalışmalarda düşük dereceli çizgelerde maksimum bağımsız küme çalışmanın önemli olduğu vurgulanmakla beraber bu problemin çözümünde şişe boynu durumun oluşturacakları öngörüsü bulunmaktadır. Bazı çalışmalarda bağımsız kümelerin boyutu için keskin bir alt sınır belirleme durumları sözkonusudur [9]. Izgara çizgelerde durum matris özdevinimli algoritma kullanılarak bağımsız küme elde edilmeye çalışılmıştır [10]. Tırtıl çizgeler bir ağaç türü olup yaprak düğümlerin silinmesi sonucunda kirişsiz yol oluşur ve bu tür çizgenin bağımsız kümesi için de çalışmalar

yapılmıştır [11]. Çizgelerin bağımsız küme sayısı üzerinde çalışmalar yapılmıştır ve bunlardan bir tanesi ise, ara çizgelerin ve permutasyon çizgelerin genellemesi olan tolerans çizgelerin bağımsız küme sayısı, maksimum bağımsız küme sayısı, bağımsız mükemmel baskın kümeleri elde edilmeye çalışılmıştır [12]. Verilen çizgede bağımsız küme sayısını elde etme üzerine çalışmalar bulunmaktadır [13]. Düzlemsel çizgelerin tekerlek veya polihedral tekerlek olarak düşünülmesi sonucunda düğüm renklendirme problemini çözmek amacıyla bağımsız küme elde üzerine çalışmalar bulunmaktadır [14]. Literatürde var olan çalışmalardan farklı olarak (o güne kadar yapılan çalışmalarda yaklaşım ile bağımsız küme elde etmek) çizgelerde maksimum bağımsız küme elde etmek üzerine çalışmalar yapılmıştır. Bu çalışmalarda verilen çizgenin ilk önce özel bir açılım ağacı elde edildikten sonra bu açılım ağacına göre temel kesme kümeleri elde edilmektedir. Temel kesme kümelerinden ve düğümlerin çizgedeki dereceleri kullanılarak bütün düğümlerin bağımsızlık dereceleri hesaplanmaktadır. Bu değerler hangi düğümlerin maksimum bağımsız kümenin elemanı olacağı belirlemektedir [15-18]. Çizgeler üzerinde çok farklı çalışmalar yapılagelmiştir, bunun sebebi birçok problemin çizge olarak modellenebilir olmasından kaynaklanmaktadır. Akademik işbirlikleri çizge olarak modellenmesi [19], iş süreçlerinin çizge olarak modellenmesi [20], paralel bilgisayarlarda iş yükü dengeleme amacıyla çizge bölütlemeye kullanılması [21].

Bu çalışmada Karcı tarafından geliştirilen algoritmalar, pençesiz çizgelerde maksimum bağımsız kümeyi elde etmek için uyarlanacak ve uygulaması gösterilecektir.

2. PENÇESİZ ÇİZGELER VE BAĞIMSIZ KÜMELER (CLAW-FREE GRAPHS AND INDEPENDENT SETS)

Bünyesinde tam bağlı bipartite $K_{1,3}$ çizgesini içermeyen çizgelere pençesiz çizgeler denilmektedir. Diğer bir deyişle,



Şekil 1. (a) $K_{1,3}$ çizgesi ($K_{1,3}$ graph), (b) 4 düğümlü pençesiz çizge (claw-free graph of size 4), (c) 6 düğümlü pençesiz çizge (claw-free graph of size 6)

$K_{1,3}$ çizgesini altçizge olarak barındırmayan çizgelere pençesiz çizge denilmektedir. Şekil 1'de $K_{1,3}$ çizgesi ve birkaç tane pençesiz çizge görülmektedir.

Pençesiz çizgelerde maksimum bağımsız küme elde etmek için bağımsız kümenin tanımlanması gerekmektedir. $G=(V,E)$ olmak üzere, $I \subseteq V$ ve $\forall v_i, v_j \in I, (v_i, v_j) \notin E$ ise maksimum elemana sahip I kümesine maksimum bağımsız küme denir. Karcı yöntemi ile maksimum bağımsız kümeyi elde etmek amacıyla bir çizgenin özel bir açılım ağacı oluşturulur. Bir çizgede açılım ağacı devre içermeyen, bağlı ve Eş. 1 sağlayan bir çizgedir.

$$G=(V,E), T=(V,E_1), (|E_1|=|V|-1) \quad (1)$$

Pençesiz çizgeler ise $K_{1,3}$ çizgesini alt çizge olarak içermeyen çizgelere pençesiz çizgeler denir. Bu çalışmada pençesiz çizgelerde maksimum bağımsız kümeyi bulmak amacıyla [15-18] literatüründe verilen yöntem kullanılacaktır. Bu yöntemin pençesiz çizgelerde kullanımı ilk olarak bu çalışmada ele alınmış olacaktır.

3. KMIN AĞACI VE MAKSİMUM BAĞIMSIZ KÜME İÇİN ÖNERİLEN YÖNTEM (KMIN TREE AND PROPOSED METHOD FOR MAXIMUM INDEPENDENT SET)

Verilen çizgede maksimum bağımsız kümeyi elde etmek amacıyla takip edilecek adımlar aşağıda verildiği gibidir.

- Kmin ağacını inşa etmek
- Temel kesme kümelerini bulmak
- Düzümlerin bağımsız derecelerini bulmak
- *Kmin Ağacı*: Verilen çizgenin Kmin ağacını oluşturmak için çizgenin düğüm derece matrisi elde edilir ve ondan sonra minimum dereceye sahip düğüm seçilir. Minimum dereceye sahip olan düğüm sayısı birden fazla ise, bunlardan bir tanesi seçilir. Seçilen düğüm Kmin ağacının kök düğümünü oluşturur ve seviye olarak sıfır seviyesindedir. Kök düğümüne komşu olan düğümler ağaca seviye birde yer alacak şekilde yerleştirilirler ve kalan derecelerine göre küçükten büyüğe sıralı bir şekilde yerleştirilirler. Kalan düğüm derecesi Eş. 2'de verilen bağıntı ile hesaplanır.

$$\forall v_i \in V \text{ için } d_T(v_i) = |N(v_i) - N_T(v_i)| \text{ ve } N_T(v_i) = \{\forall u \in V \text{ ve } (u, v_i) \in E_1\} \quad (2)$$

Kmin ağacında yer alan düğümlerden kalan düğüm derecesi minimum olan düğümün komşu düğümleri bir sonraki seviyeye eklenirler ve ağaçtaki düğümlerin hepsinin kalan dereceleri güncellenir. Bu şekilde bütün düğümler ağaca eklendikten sonra Kmin ağacı tamamlanmış olur. G çizgesinin Kmin ağacında yer alan ayrıtlara dal ve geriye kalan ayrıtlara giriş denilmektedir. Tablo 1'de Kmin ağacını oluşturan Algoritma 1'in zahiri kodu (pseudo-code) görülmektedir.

Tablo 1. Kmin ağacını oluşturma algoritması
(Kmin tree construction algorithm)

<i>Algoritma 1:</i> Kmin_Ağacı(A,AT,D)	
A:	Çizgenin bitişiklik matrisi
AT:	Kmin ağacının bitişiklik matrisi
D:	Çizgenin derece matrisi
1.	$Q \leftarrow \emptyset$
2.	$r \leftarrow \min(D) // D: \text{ derece matrisi}$
3.	$T=(V,E_1)$ ve $E_1 \leftarrow \emptyset$
4.	$i \leftarrow 1, \dots, V $
5.	$j \leftarrow 1, \dots, V $ $AT(i,j) \leftarrow 0$
6.	$EnQueue(Q,r)$ ve $Q_2 \leftarrow \emptyset$
7.	$i \leftarrow 1, \dots, N(r) $
8.	$EnQueue(Q_2, v_i), v_i \in N(r) // EnQueue \text{ algoritması}$ kuyruğa eleman ekler.
9.	eğer $AT(r,s)=0$ ise
10.	$AT(r,s)=1, AT(s,r)=1$
11.	$EnQueue(Q_2, s)$
12.	$Q_2 \neq \emptyset$ olduğu sürece
13.	$v \leftarrow DeQueue_Min(Q_2, A, AT)$ ve $EnQueue(Q, v)$
14.	$i \leftarrow 1, \dots, N(v) $
15.	eğer $(v_i \in Q_2)$ değil ve $v_i \in N(v)$ ise
16.	$EnQueue(Q_2, v_i)$
17.	$AT(v, v_i)=1, AT(v_i, v)=1$

Teorem 1: Kmin ağacını oluşturan algoritma etkili bir algoritmadır.

İspat: Algoritma 1 incelendiği zaman iki tane ayrık döngü (adım 4 ve adım 7) bulunmaktadır. Adım 12'de başlayan döngünün içerisinde bir döngü daha bulunmaktadır. Döngüler maksimum düğüm sayısına bağlı çalıştığından eğer $|V|=n$ ise, algoritmanın karmaşıklığı $O(n^2)$ olur.

• *Temel Kesmeler:* Kmin ağacı oluşturduktan sonra temel kesmeler elde edilir. Temel kesmeler iki gruba ayrılmaktadır: Yaprak temel kesmeler ve dâhili temel kesmeler şeklindedir. Kmin ağacında yaprak durumundaki düğümlere çakışık olan (G çizgesindeki ayrıtlar) yaprak temel kesme kümelerini oluştururlar. Kmin ağacının geriye kalan dallarının her birine karşılık bir dâhili kesme oluşturulmaktadır. Her dal Kmin ağacını iki farklı parçaya bölmektedir. Bu iki parça arasındaki G çizgesinin ayrıtları bir dâhili temel kesmeyi oluşturur. Temel kesmeler açılım ağacının bir dalını ve geriye kalan kısmı kırışlerden oluşan kesmelerdir. Çizgelerdeki geriye kalan bütün kesmeler temel kesmelerin ring-sum işleminin lineer kombinasyonudur. Tablo 2'de yaprak temel kesmeleri elde eden Algoritma 2'nin zahiri kodu (pseudo-code) görülmektedir ve Tablo 3'te dâhili temel kesme kümelerini elde eden Algoritma 3'ün zahiri kodu (pseudo-code) görülmektedir.

Teorem 2: Temel kesme kümelerini elde eden algoritmalar etkili algoritmalar.

İspat: Algoritma 2'nin 2. adımında başlayan kısım iç-içe iki döngü olduğundan buranın karmaşıklığı $|V|=n$ ve $|E|=m$

olmak üzere $O(nm)$ şeklinde olur. 7. adımda başlayan kısımda karmaşıklık olarak $O(nm)$ şeklinde olacaktır. Bundan dolayı bu algoritma etkili bir algoritmadır.

Tablo 2. Yaprak temel kesme kümelerini elde eden algoritma

(algorithm to obtain leaf fundamental cut-sets)

Algoritma 2: Temel Kesme Kümeleri(AT,A,B,C)

1. $B \leftarrow \text{ÇakışımMatrisi}(A)$ // A'nın boyut $n \times n$ olsun.
2. $i \leftarrow 1, \dots, n$
3. $j \leftarrow 1, \dots, m$ // B matrisinin boyutu $n \times m$ şeklinde olur.
4. $C(i,j)=0$
5. $i \leftarrow 1, \dots, m_2$
6. $\text{EnQueue}(E_2, e_i)$ // T ağacındaki dal sayısı m_2 .
7. $E_2 \neq \emptyset$ olduğu sürece
8. $e = \text{DeQueue}(Q_2)$
9. eğer $e=(u,v)$ and $(d_u=1$ or $d_v=1)$ ise // d_u ve d_v dereceleri T ağacındaki derecelerdir.
10. eğer $d_u=1$ ise
11. $i \leftarrow 1, \dots, m$ // m çizgedeki ayrıt sayısıdır.
12. $C(u,i)=B(u,i)$
13. değilse DahiliTemelKesme(AT,A,C,B,e)

Tablo 3. Dahili kesmeleri elde eden algoritma

(algorithm to obtain internal fundamental cut-sets)

Algoritma 3: DahiliTemelKesme(AT,A,C,B,e)

1. $e=(u,v)$ olsun, $Q_2 \leftarrow \emptyset$ ve $\text{EnQueue}(Q_2, u)$
2. $Q_2 \neq \emptyset$ olduğu sürece
3. $u \leftarrow \text{DeQueue}(Q_2)$ ve $\text{EnQueue}(Q, u)$
4. $i \leftarrow 1, \dots, n$
5. eğer $AT(u,i)=1$ ve $i \neq v$ ise $\text{EnQueue}(Q_2, i)$
6. $Q \neq \emptyset$ olduğu sürece
7. $u \leftarrow \text{DeQueue}(Q)$
8. $i \leftarrow 1, \dots, n$
9. eğer $A(u,i)=1$ ve $i \notin Q$ ise $C(u,k)=B(u,k)$

Algoritma 3 ise K_{min} ağacında $n-1$ bir tane dal bulunmaktadır bunlardan en az iki tanesi yaprak veya kök düğüm olacaktır. Bu durumda maksimum $n-3$ tane dahili kesmeye sebep olan dal bulunacaktır. Bu dallar ağacı iki parçaya bölmeğe göre bir tane dal eğer $n_1+n_2=n$ şeklinde iki parçaya bölse, taranacak dal sayısı $\max(n_1-1, n_2-1)$ şeklinde olacaktır. Bu algoritmanın da en kötü durumu $O(n^2)$ şeklinde olacaktır. Bu durumda temel kesme oluşturma işleminin karmaşıklığı $O(nm+n^2)$ şeklinde olacaktır ve algoritmaların etkili olduğunu gösterir.

- K_{min} ağacı temel kesme kümelerini elde etmek amacıyla oluşturulmaktadır. Temel kesmeler oluşturulduktan sonra Kesme matrisi oluşturulur.

Çakışım matrisi (Eş. 3)

$$B = [b_{ij}] = \begin{cases} 1 & \text{eğer } j. \text{ ayrıt } i. \text{ düğümüne çakışık ise} \\ 0 & \text{diğer durumda} \end{cases} \quad (3)$$

Kesme matrisi ise Eş. 4'te verilen bağıntı ile tanımlanmaktadır.

$$C = [c_{ij}] = \begin{cases} 1 & \text{eğer } j. \text{ ayrıt } i. \text{ kesmede yer alıyorsa} \\ 0 & \text{diğer durumda} \end{cases} \quad (4)$$

Çizgenin çakışım matrisi B elde edildikten sonra kesme matrisi C elde edilir. Daha sonra çakışım matrisi ile kesme matrisinin transpozunu ile çarpılır. Ondan sonra sonuç matrisinde satır bazlı toplam elde edilir ve derece matrisi ile toplanır. Bunun sonucunda minimum sonucu veren parametre (düğüm) bağımsız küme seçilir. Ondan sonra bu düğümün komşuları ise, komşular kümesine eklenir. Daha sonra seçilen düğüme çakışık olan dalın veya dalların oluşturmuş oldukları kesmeler kesme matrisinden silinir ve ondan sonra aynı matris çarpma işlemleri tekrar yapılır ve minimum değere sahip olan düğüm bağımsız küme seçilir ve komşuları ise, komşular kümesine eklenir. Verilen pençesiz çizgede K_{min} ağacı ve temel kesme kümelerini kullanarak bağımsız küme veren algoritma Tablo 4'te Algoritma 4 olarak verilmiştir.

Teorem 3: Algoritma 4 etkili bir algoritmadır.

İspat: Algoritma 4'te boyutları $n \times m$ şeklinde olan iki matrisin çarpımı bulunmaktadır ve bunun sonucunda Algoritma 4'ün karmaşıklığı $O(|I|nm)$ şeklinde olacaktır. Bu durum Algoritma 4'ün etkili bir algoritma olduğunu göstermektedir.

Teorem 4: $G=(V,E)$ bağlı bir çizge $|V|=n$ olmak üzere bu çizgenin maksimum bağımsız kümesinin eleman sayısının alt ve üst sınırları Eş. 5 ve Eş. 6 şeklinde olur.

$$a) i_{max}(G) = |I| \geq \begin{cases} \left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor = \left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor = \frac{n}{2} & \text{eğer } n \text{ çift ise} \\ \left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor + 1 = \left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor & \text{eğer } n \text{ tek ise} \end{cases} \quad (5)$$

$$b) i_{max}(G) = |I| < (k^{\lceil \log_k n \rceil} + k^{\lceil \log_k n \rceil - 2} + \dots + k^a), \\ a = 0 \text{ veya } a = 1. \quad (6)$$

İspat: $G=(V,E)$ çizgesi için oluşturulacak olan K_{min} ağacının farklı durumları için alt ve üst sınırlar elde edilecektir.

Eğer verilen çizgenin K_{min} ağacı Şekil 2'de verilen ağaç gibi bir ağaç olduğu durumda çizgede yer alan düğüm sayısının tek veya çift olmasına göre elde edilecek alt sınır biraz farklı olacaktır. Verilen çizgenin düğüm sayısı çift olduğu durumda yaprak düğüm, onun dedesi ve dedenin dedesi şeklinde kök düğüme doğru gidildiğinde kök düğüm hariç bağımsız küme ağaçtaki düğümlerin yarısı eklenir ve şekil üzerinde görüldüğü gibi $K_{1,3}$ çizgesi bu çizgede yer almıyor.

Eş. 5 ve Eş. 6 maksimum bağımsız küme için sırası ile alt sınır ve üst sınırı vermektedirler.

Eğer düğüm sayısı n tek ise, aynı mantıkla yaprak düğüm bağımsız küme eklendikten sonra yaprak düğümün dedesi ve dedenin dedesi bağımsız küme eklenir. Bu mantıkla

devam edilerek kök düğümde bağımsız kümeye eklenir. Bu durumda bağımsız kümenin eleman sayısı $|I| = \lfloor n/2 \rfloor + 1 = \lceil n/2 \rceil$ şeklinde olur.

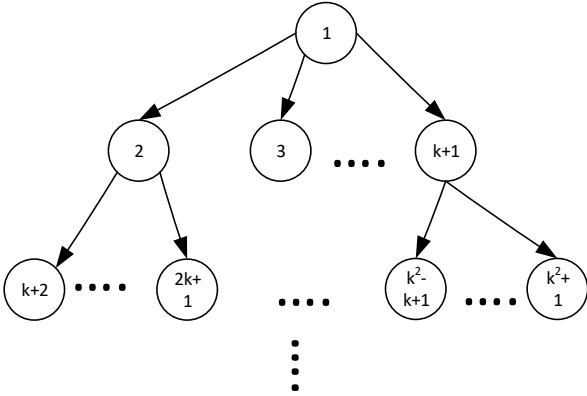
Tablo 4. Bağımsız kümeyi elde eden algoritma (algorithm to obtain independent set)

<i>Algoritma 4:</i> BağımsızKüme(G,I)	
1)	$G=(V,E)$ bir çizge olmak üzere
2)	$B=\text{ÇakışımMatrisi}(G)$ // G çizgesinin çakışım matrisi
3)	$T=\text{Kmin_Ağacı}(A,AT,D)$.
4)	Temel_Kesme_Kümelere(AT,A,B,C) // C kesme matrisi
5)	$I=\emptyset$ ve $N=\emptyset$
6)	$I \cup N < V$ olduğu sürece devam et
7)	$v = \underset{arg}{min} (\sum_{i=1}^n (BC^T + D))$ // matriste satır bazlı toplam
8)	$I=I \cup \{v\}$ ve $N=N \cup N(v)$ // $N(v)=v$ 'nin komşuları



Şekil 2. Linear bağlı Kmin ağacı (linear connected Kmin tree).

- Eğer verilen çizgenin Kmin ağacı bir dengeli ağaç şeklinde olduğu durumda bağımsız kümenin eleman sayısı maksimum olur.



Şekil 3. Dengeli Kmin ağacı (balanced Kmin tree)

Eğer $\lfloor \log_k n \rfloor$ çift ise, yapra seviyedeki bütün düğümler bağımsız kümeye eklenirler. Ondan sonra yaprakların dede düğümleri bağımsız kümeye eklenir. Bu şekilde devam edilerek en son kök düğümün çocukları bağımsız kümeye eklenir. Eğer $K_{1,3}$ çizgesinin alt çizge olarak olmama zorunluğu olmasaydı, bağımsız kümenin maksimum eleman sayısı (Eğer Kmin ağacı çizgenin kendisi şeklinde olup, Şekil 3'te verilen Kmin ağacı için $k > 2$ olduğu durumda $K_{1,3}$ çizgesi gösterilen ağacın bir alt çizgesidir). Eş. 7'de bağımsız kümenin boyutunu hesaplayacak bağıntı verilmiştir.

$$|I| = k^{\lfloor \log_k n \rfloor} + k^{\lfloor \log_k n \rfloor - 2} + \dots + \dots \quad (7)$$

Fakat pençesiz çizgeler sözkonusu olduğundan bağımsız kümeye eklenecek düğüm sayısı Eş. 8'de verilen bağıntı ile hesaplanır.

$$|I| < k^{\lfloor \log_k n \rfloor} + k^{\lfloor \log_k n \rfloor - 2} + \dots + k \quad (8)$$

Eğer $\lfloor \log_k n \rfloor$ tek ise, yaprak düğümler bağımsız kümeye eklenir. Bir sonraki adımda yaprak düğümlerin dede düğümleri bağımsız kümeye eklenir. Bu şekilde devam edilerek kök düğümün torunları eklenir ve son olarak kök düğüm bağımsız kümeye eklenir. Bunun sonucunda bağımsız kümenin eleman sayısı Eş. 9'da verilen bağıntı ile hesaplanır.

$$|I| = k^{\lfloor \log_k n \rfloor} + k^{\lfloor \log_k n \rfloor - 2} + \dots + k^0 \quad (9)$$

Fakat $K_{1,3}$ çizgesinin altçizge olarak bulunmama şartından dolayı Eş. 10'da verilen üst sınır bağımsız küme için bir gevşek üst sınır olacaktır.

$$|I| < k^{\lfloor \log_k n \rfloor} + k^{\lfloor \log_k n \rfloor - 2} + \dots + k^0 \quad (10)$$

Elde edilen bu eşitsizliğin daha belirgin olması için giriş ayrıtların durumlarının dikkatlice incelenmeye ihtiyaç vardır.

Bağlı liste yapısı ile dengeli ağaç arasındaki ağaçlardaki düğüm sayıları bu iki tür ağaç için elde edilen eleman sayılarının arasında olur. Kmin ağacı bağımsız kümenin eleman sayısı için önemli ipuçları vermektedir.

Teorem 5: $G=(V,E)$ bağlı bir çizge $|V|=n$ olmak üzere bu çizgenin maksimum bağımsız kümesinin eleman sayısı için üst sınır Eş. 11'de verilen bağıntı ile belirlenir.

$$i_{max}(G) = |I| \leq \begin{cases} \lfloor \frac{n}{2} \rfloor = \lfloor \frac{n}{2} \rfloor = \frac{n}{2} & \text{eğer } n \text{ çift ise} \\ \lfloor \frac{n}{2} \rfloor + 1 = \lfloor \frac{n}{2} \rfloor + 1 & \text{eğer } n \text{ tek ise} \end{cases} \quad (11)$$

İspat: Verilen bir çizge eğer seri bağlı bir çizge olmak üzere n çift ise, $|I| = n/2$ olur (Eş. 11), eğer n tek ise, $|I| = \lfloor n/2 \rfloor + 1$ (Eş. 11) şeklinde olur. Eğer çizge seri bağlı bir çizge değil, ayrıt sayısı daha fazla olan bir çizge ise, bu durumda çizgenin maksimum bağımsız kümesinin eleman sayısı için sınır belirlemek amacıyla çizgenin Kmin ağacı elde edilir. Bu durumu ifade etmek amacıyla örnekler üzerinde sonuçlar elde edilmeye çalışılacaktır (tümevarım mantığı ile).

- $G=(V,E)$ ve $|V|=n=4$ olmak üzere

Verilen $G=(V,E)$ çizgesi Şekil 4b'deki gibi seri bağlı olduğu durumda $|I|=2$ olur. Çizge Şekil 4a'daki gibi bir çizge ve Kmin ağacı elde edilmiştir. Kesikli gösterilen ayrıt Kmin ağacının bir girişidir. Bu durumda çizgenin Pençesiz olması için içerdiği minimum ayrıt sayısının olduğu durumdur. $|I|=2$ olur ve eğer çizgeye bir ayrıt daha eklenirse, $|I|=1$ olur.

- $G=(V,E)$ ve $|V|=5$ olan çizge için benzer analiz yapılabilir.

Şekil 5b verilen pençesiz çizge seri bağlı bir çizge olup maksimum bağımsız kümenin eleman sayısı 3 olur. Çizge

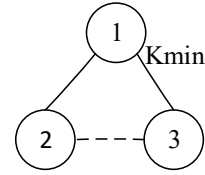
seri bağlı değil ve Şekil 5a çizgesindeki kırmızı kirişler hariç geriye kalan şekilde ise, maksimum bağımsız kümenin eleman sayısı 2 olur. 1, 2 ve 3 nolu kırmızı ayrıtlar sıra ile eklendiği durumda da çizgenin maksimum bağımsız kümenin eleman sayısı 2 elemanlı olur. Son kırmızı ayrıt eklendiğinde maksimum bağımsız kümenin eleman sayısı 1'e düşer. Teorem 4'te verilen sınırların Pençesiz olma durumu gözönüne alındığında ters çevrilmesi gerektiği açık bir şekilde ortaya çıkarılacaktır.

- $G=(V,E)$ ve $|V|=6$ olan çizge için benzer analiz yapılabilir.

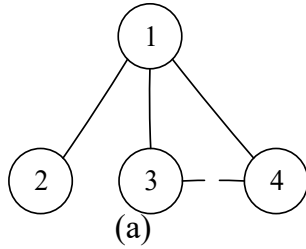
Şekil 6b'de verilen seri bağlı çizge için $|I|=3$ olur ve seri bağlı olmayan ve minimum ayrıta sahip bir pençesiz çizge Şekil 6a'da görüldüğü gibi olur. Bu çizge için $|I|=3$ olur. Bu çizgeye ayrıt ekledikçe maksimum bağımsız kümenin eleman sayısı düşmeye başlayacaktır. Bu durumda pençesiz çizgeler için maksimum bağımsız küme ancak seri bağlı çizgelerde elde edilmektedir. Ayrıtların artırıldıkça (pençesiz olma özelliğini bozmadan) maksimum bağımsız kümenin eleman sayısının düşeceği açıktır.

Maksimum bağımsız kümenin eleman sayısının eleman sayısının fazla olması için çizgenin ayrıtlarının azaltılması gerekmektedir. Kısacası ayrıtların sayısı ile maksimum bağımsız kümenin eleman sayısı birbirine ters orantılıdır. Ayrıtların sayısının artması I kümesi üzerinde nasıl bir etkiye sahip olduğu örnek çizgeler üzerinden gösterilecektir. $G=(V,E)$ çizgesi için $\delta(G)$ minimum düğüm derecesini ve $\Delta(G)$ ise maksimum düğüm derecesini göstermektedir.

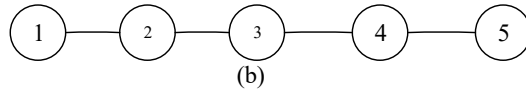
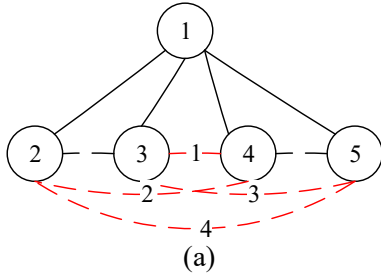
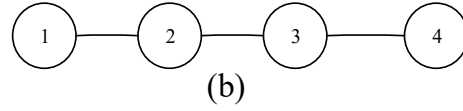
- $\delta(G)=2$ için çizgelerin K_{min} ağaçları verilerek $|I|$ hesaplanacaktır. Bu durumda çizge pençesiz çizge olacak ve ayrıtların sayısı mümkün olan minimum seviyede olacaktır.



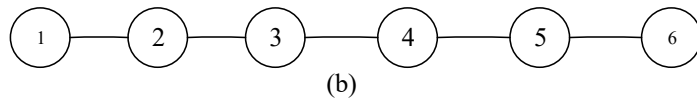
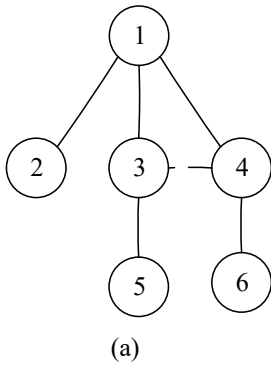
Şekil 7. $\delta(G)=2$ olan pençesiz çizgenin K_{min} ağacı ($|V|=3$)
(K_{min} tree of claw-free graph whose $\delta(G)=2, |V|=3$)



Şekil 4. Pençesiz çizgede k_{min} ağacı (K_{min} spanning tree of claw-free graph)



Şekil 5. $G=(V,E)$ ve $|V|=5$ olan pençesiz çizge ve K_{min} ağacı ($G=(V,E)$ is a claw-free graph and $|V|=5$ and K_{min} tree)

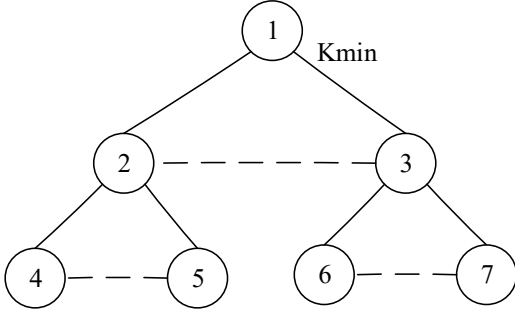


Şekil 6. $G=(V,E)$ ve $|V|=6$ olan pençesiz çizge ve K_{min} ağacı ($G=(V,E)$ is a claw-free graph and $|V|=6$ and K_{min} tree)

Şekil 7’de verilen çizge için

$$|I| = \delta(G)^{\lfloor \log_2 n \rfloor - 1} = \delta(G)^{\lfloor \log_2 3 \rfloor - 1} \quad (12)$$

Eş. 12 şeklinde olur.



Şekil 8. $\delta(G)=2$ olan pençesiz çizgenin Kmin ağacı ($|V|=7$)
(Kmin tree of claw-free graph whose $\delta(G)=2$, $|V|=7$)

Şekil 8’de verilen çizge için bağımsız kümenin eleman sayısı Eş. 13 verilen bağıntı ile hesaplanır.

$$|I| = \delta(G)^{\lfloor \log_2 7 \rfloor - 1} + \delta(G)^0 = \delta(G)^{2-1} + \delta(G)^0 = 3 \quad (13)$$

Maksimum bağımsız kümenin eleman sayısını belirlemek amacıyla Kmin ağacı kullanıldığında Şekil 9’da verilen Kmin ağacı potansiyel olabilecek bir çizge ve minimum ayırıt sayısı görülmektedir. Bu çizgenin maksimum bağımsız kümesinin eleman sayısı Eş. 14 ile ifade edilir.

$$|I| = \delta(G)^{\lfloor \log_2 15 \rfloor - 1} + \delta(G)^{\lfloor \log_2 15 \rfloor - 3} = \delta(G)^{3-1} + \delta(G)^{3-3} = 5 \quad (14)$$

Şekil 10’da verilen çizgenin maksimum bağımsız kümenin eleman sayısı

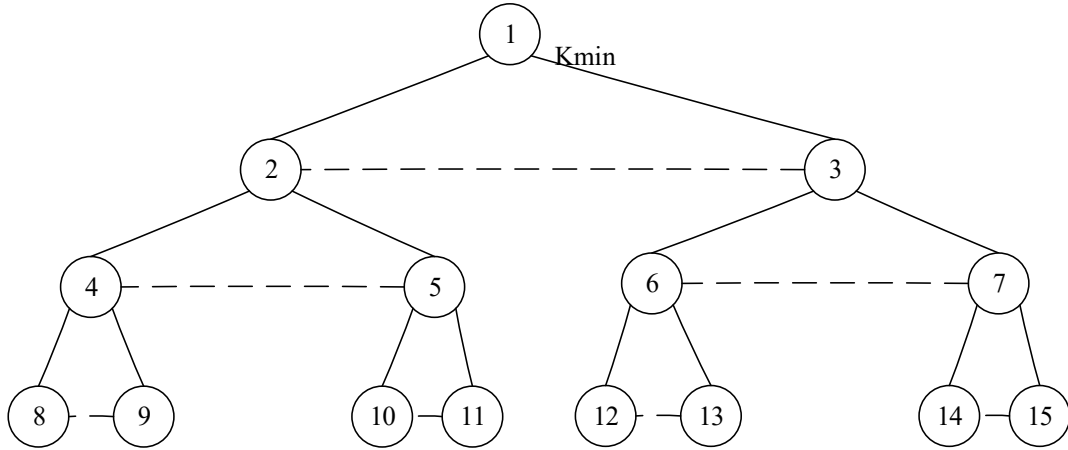
$$|I| = \delta(G)^{\lfloor \log_2 31 \rfloor - 1} + \delta(G)^{\lfloor \log_2 31 \rfloor - 3} + \delta(G)^0 = \delta(G)^{4-1} + \delta(G)^{4-3} + \delta(G)^0 = 11 \quad (15)$$

şeklinde olur.

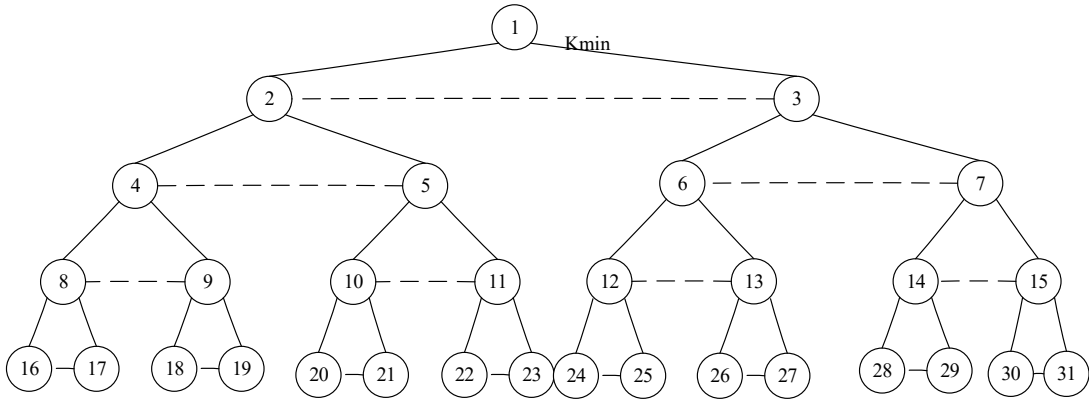
- $\delta(G)=3$ için çizgelerin Kmin ağaçları verilerek $|I|$ hesaplanacaktır. Bu durumda çizge pençesiz çizge olacak ve ayırıt sayısı mümkün olan minimum seviyede olacaktır.

Şekil 11’de görülen Kmin ağacının çizgesinin maksimum bağımsız kümenin eleman sayısı Eş. 16 ile hesaplanır.

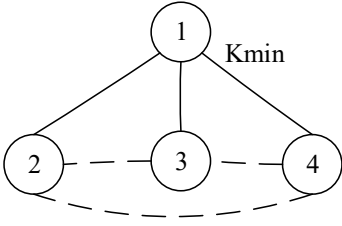
$$|I| = \delta(G)^{\lfloor \log_3 3 \rfloor - 1} = \delta(G)^0 = 1 \quad (16)$$



Şekil 9. $\delta(G)=2$ olan pençesiz çizgenin Kmin ağacı ($|V|=15$) (Kmin tree of claw-free graph whose $\delta(G)=2$, $|V|=15$)



Şekil 10. $\delta(G)=2$ olan pençesiz çizgenin Kmin ağacı ($|V|=31$) (Kmin tree of claw-free graph whose $\delta(G)=2$, $|V|=31$)



Şekil 11. $\delta(G)=3$ olan pençesiz çizgenin Kmin ağacı ($|V|=3$) (Kmin tree of claw-free graph whose $\delta(G)=3, |V|=3$)

Şekil 12’de görülen Kmin ağacının çizgesinin maksimum bağımsız kümenin eleman sayısı Eş. 17’de verilen bağıntı ile hesaplanmaktadır.

$$|I| = \delta(G)^{\lfloor \log_3 13 \rfloor - 1} + \delta(G)^0 = \delta(G)^1 + \delta(G)^0 = 4 \quad (17)$$

Şekil 13’de görülen Kmin ağacının çizgesinin maksimum bağımsız kümenin eleman sayısı Eş. 18’de verilen bağıntı ile hesaplanmaktadır.

$$|I| = \delta(G)^{\lfloor \log_3 40 \rfloor - 1} + 2 = \delta(G)^2 + 2 = 11 \quad (18)$$

$\delta(G)=k$ olduğu durumda maksimum bağımsız kümenin eleman sayısı Eş. 19’da verilen bağıntı ile hesaplanmaktadır.

$$|I| \leq \sum_{0 \leq i \leq \lfloor \log_k n \rfloor - 1} \delta(G)^i \quad (19)$$

Eş. 9’da verilen bağıntı $0 \leq i \leq \lfloor \log_k n \rfloor - 1$ aralığındaki ikişer-ikişer artan i değerleri için geçerli olan bir bağıntıdır. Kmin ağacının kök düğümünün yükseliği 0 olarak kabul edildiğinde $|I|$ ifadesi için elde edilecek bağıntı aşağıdaki gibi olur. Kmin ağacının yüksekliği h olmak üzere:

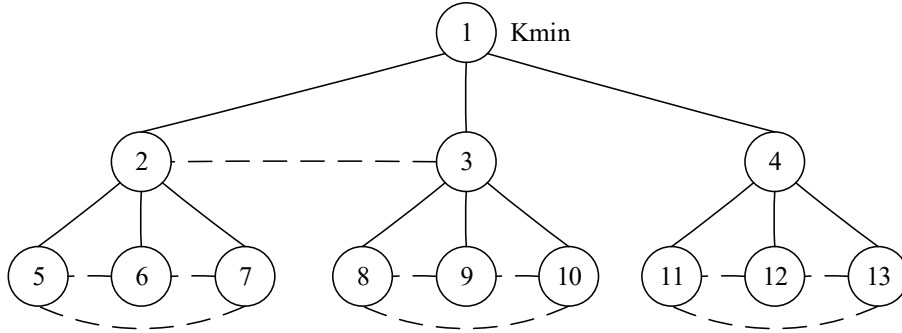
h çift ise, (Eş. 20)

$$|I| \leq \delta(G)^{\lfloor \log_{\delta(G)} n \rfloor - 1} + \delta(G)^{\lfloor \log_{\delta(G)} n \rfloor - 3} + \dots + \delta(G)^1 + \delta(G)^0 \quad (20)$$

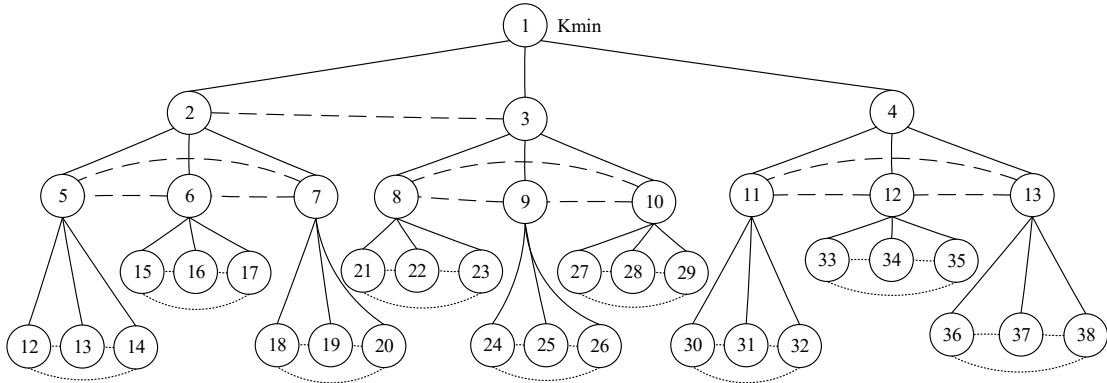
Ve h tek olduğu durumda, (Eş. 21)

$$|I| \leq \delta(G)^{\lfloor \log_{\delta(G)} n \rfloor - 1} + \delta(G)^{\lfloor \log_{\delta(G)} n \rfloor - 3} + \dots + \delta(G)^2 + \delta(G)^0 \quad (21)$$

Denklem 20 ağacın yüksekliğinin çift olduğu durumda bağımsız küme için üst sınırı veren bağıntıdır ve denklem 21 ise, ağacın yüksekliğinin tek olduğu durumda bağımsız küme için üst sınır veren bağıntıdır. Kullanılacak çizgelerin pençesiz olması, ilgili çizgenin $K_{1,3}$ çizgesini alt çizge olarak içermemesi için ayrıt sayısının belli bir sayının altına düşmesi çizgenin özelliğini bozmaktadır. Bundan dolayı çizgenin maksimum bağımsız kümenin eleman sayısının



Şekil 12. $\delta(G)=3$ olan pençesiz çizgenin Kmin ağacı ($|V|=13$) (Kmin tree of claw-free graph whose $\delta(G)=3, |V|=13$)



Şekil 13. $\delta(G)=3$ olan pençesiz çizgenin Kmin ağacı ($|V|=40$) (Kmin tree of claw-free graph whose $\delta(G)=3, |V|=40$)

maksimum olması için seri bağlı pençesiz çizgenin olduğu durumudur.

4. UYGULAMA SONUÇLARI (EXPERIMENTAL RESULTS)

Şekil 14’de verilen çizgenin Kmin ağacının elde edilmesi aynı şekilde gösterilmiştir. İlk olarak basit bir çizge üzerinde önerilen algoritmanın nasıl çalıştığı gösterilecektir ve bu amaçla Şekil 14’de verilen çizge kullanılmıştır. İlk olarak çizgenin düğüm dereceleri belirlenir ve minimum dereceye sahip düğüm seçilir veya minimum dereceye sahip düğümler arasında bir tanesi seçilir ve bu düğüm Kmin ağacının kök düğümünü oluşturur (Bunun için Algoritma 1 kullanılır). Şekil 14’deki kök düğümü “a” düğümü olarak verilmiştir. Kök düğümünün çizgedeki komşuları bu düğüme çocuk düğümler olarak eklenir ve bu çocuklar arasında kalan derecesi minimum olan düğüm seçilir. Ağaçta yer alan ve kalan düğüm derecesi minimum olan düğüm seçilir ve bu düğümün kalan komşuları ağaca yerleştirilir. Adım 2’de görüldüğü gibi “b”, “c”, “d” düğümleri ağaca eklenmiş durumdadır. Son olarak “c” düğümünün çizgedeki komşularından ağaca eklenmemiş komşuları ağaca eklenir bu şekil ağaç inşa edilmiş olacaktır.

Şekil 14’de verilen çizgeden Kmin ağacını elde etmek için çizgenin minimum dereceli 4 tane düğüm (a,b,e,f) var ve bunlardan a düğümü seçilerek ağaç inşa edilmiştir. Bu ağaç aracılığı ile beş tane temel kesme kümesi elde edilir (Kmin ağacında 5 tane dal vardır).

Çizgenin açılım ağacında yer alan ayrıtlarına dal ve geriye kalanlara giriş denilmektedir. Şekil 14’de Kmin ağacında kesikli gösterilen ayrıtlar giriş ayrıtlardır. Ağacın dallarını kullanarak temel kesme kümeleri elde edilir ve her temel kesmede sadece bir tane dal vardır ve geriye kalanlar giriş olurlar. Şekil 14’de Kmin ağacından 5 tane temel kesme kümesi elde edilir. Çizgenin çakışım matrisi (B) elde edilir ve temel kesme kümeleri elde edildikten sonra kesme matrisi elde edilir (C). Kmin ağacına göre iki tür temel kesme elde edilebilmektedir.

Yaprak Temel Kesme Kümesi: Kmin ağacındaki yaprağa çakışık olan ayrıtlar (çizgedeki ayrıtlar) yaprak temel kesme kümesini oluştururlar (Algoritma 2 kullanılır).

Dâhili Temel Kesme Kümesi: Bu temel kesme kümesinin içermiş olduğu dal yaprağa çakışık olan dal değildir ve Kmin ağacını alt iki Kmin ağacına bölmektedir ve alt Kmin ağaçları en az 2 düğüm içermektedirler (Algoritma 3 kullanılır).

Şekil 14’de verilen Kmin ağacı için oluşacak temel kesme kümeleri

$$K_1 = \{(c,e),(d,e),(e,f)\} \text{ (yaprak temel kesme kümesi)}$$

$$K_2 = \{(c,f),(d,f),(e,f)\} \text{ (yaprak temel kesme kümesi)}$$

$$K_3 = \{(a,c),(c,d),(c,b),(d,e),(d,f)\} \text{ (dâhili temel kesme kümesi)}$$

$$K_4 = \{(a,d),(c,d),(b,d),(d,e),(d,f)\} \text{ (yaprak temel kesme kümesi)}$$

$$K_5 = \{(a,b),(b,d),(b,c)\} \text{ (yaprak D temel kesme kümesi)}$$

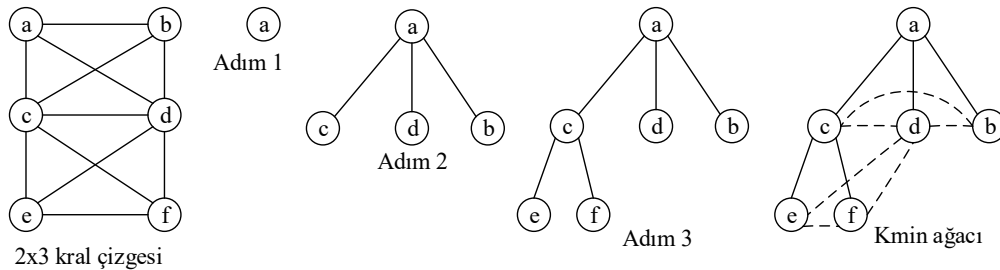
Şekil 14’de verilen çizgenin B, C ve D matrisleri Eş. 22’de verilmiştir.

$$B = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

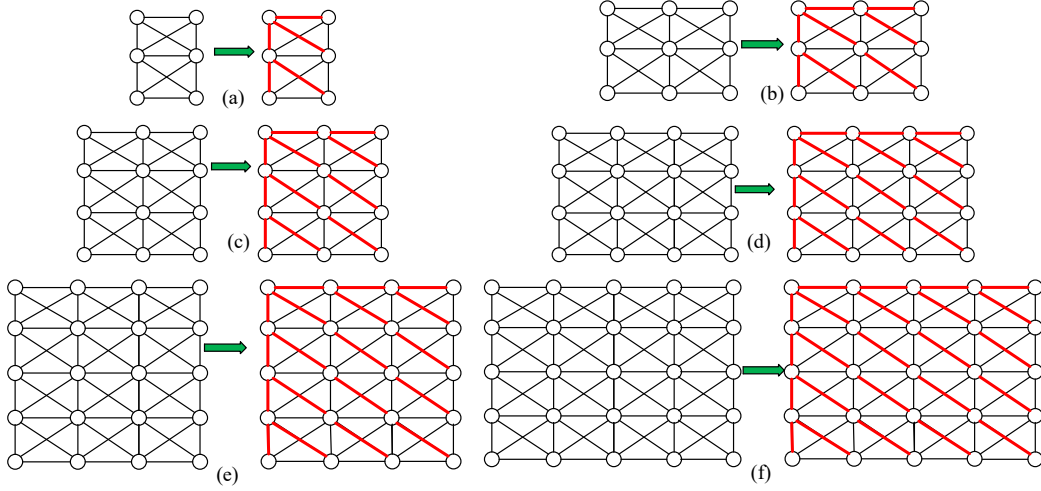
$$C = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$D = \begin{bmatrix} 3 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 5 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 5 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 3 \end{bmatrix} \quad (22)$$

$\min_{arg} (\sum_{i=1}^n (BC^T + D))$ işlemi sonucunda düğümlerin bağımsızlık dereceleri (veya bağımsızlık sayıları) elde edilir. Çakışım matrisi ile kesme matrisinin transpozununun çarpımı sonucunda elde edilen çarpım matrisinin satır bazında yapılacak toplama sonucuna derece matrisinin ilgili satırdaki



Şekil 14. Çizge ve çizgeden elde edilen Kmin ağacı (Graph and its obtained Kmin tree)



Şekil 15. Farklı boyutlarda kral çizgeleri ve her birine karşılık oluşturulan Kmin ağaçları
(King graphs of different sizes and Kmin spanning tree for each graph)

değeri eklenerek her düğümün etki değeri hesaplanmaktadır. Eş. 22’de verilen çizgenin düğüm bağımsızlık dereceleri veya bağımsızlık sayıları Tablo 5’de verilmiştir.

Tablo 5. Örnek çizgenin düğüm bağımsızlık sayıları
(the node independence numbers of example graph)

a	b	c	d	e	f
6	8	12	16	11	9

Bağımsızlık derecesi minimum olan düğüm “a” düğümü olduğundan bu düğüm bağımsız kümeye seçilir ve Kmin ağacında “a” düğümüne çakışık olan ayrıtların hepsi silinir. Diğer bir deyişle “a” düğümüne çakışık olan ayrıtlar arasında dal durumundaki ayrıtlarla ilgili olan kesmeler C matrisinden silinirler ve ondan sonra tekrar aşağıdaki işlem gerçekleştirilir.

$\min_{arg} (\sum_{i=1}^n (BC^T + D))$ işlemi sonucunda düğümlerin bağımsızlık dereceleri (veya bağımsızlık sayıları) Tablo 6’da verilmiştir.

Tablo 6. Örnek çizgenin düğüm bağımsızlık sayıları
(the node independence numbers of example graph)

a	b	c	d	e	f
3	3	7	7	7	7

Seçilen “a” düğümüne komşu olan “b”, “c” ve “d” düğümleri seçilmeyecektir. Kalan düğümler arasında bağımsızlık derecesi minimum olan düğüm seçilir. Bu durumda “e” ve “f” düğümlerin bağımsızlık dereceleri aynı olduğundan bir tanesinin bağımsız kümeye seçilmesi işlemin sonuçlanmasına yetmektedir.

Şekil 15’de verilen kral çizgelerinin hepsinin Kmin ağaçları yanlarında görülmektedir. Hepsinin yaprak seviyesindeki düğümler arasında komşuluk bulunmaktadır. Bundan dolayı Teorem 5 şartına uymaktadır.

5. SONUÇLAR (CONCLUSIONS)

Çizgelerde maksimum bağımsız kümeyi elde etmek NP-Zor bir problem olup günümüze kadar yaklaşık çözüm yöntemleri veya kaba seçim (greedy) gibi yöntemler kullanılmıştır. Bu çalışmada [15-18] çalışmalarında önerilen yöntemler gözönünde bulundurularak pençesiz çizgelerde maksimum bağımsız kümeyi bulmak amacıyla polinomsal yöntemin olabileceği gösterilmiştir. Bu çerçevede kral çizgeleri kullanılmıştır ve aynı zamanda pençesiz çizgelerde maksimum bağımsız kümenin eleman sayısı için bir aralık belirlenmeye çalışılmıştır.

Karcı ve Karcı [15-18] tarafından geliştirilen yöntemin bütün çizgelerde polinomsal algoritmalarla sonuç vereceği öngörülmektedir. Henüz bu konuda genel ve analitik bir ispat ortaya konulabilmiş değildir. Fakat geliştirilen algoritma optimuma yakın, polinomsal ve sağlam bir algoritma önerilmiştir. Sağlamlıktaki kasıt aynı çizge için her zaman aynı sonucu vermektedir.

KAYNAKLAR (REFERENCES)

1. Duffus,D., Frankl,P., Rödl,V.,Maximal independent sets in the covering graph of the cube, Discrete applied mathematics, 161,1203-1208, 2013.
2. Orlovich,Y., Blazewicz,J., Dolgui,A., Finke,G., Gordone,V., On the complexity of the independent set problem in triangle graphs, Discrete Mathematics, 311, 1670-1680, 2011.
3. Karthick,T., Weighted independent sets in a subclass of P6-free graphs, Discrete mathematics, 339, 1412-1418, 2016.
4. Karthick,T., Maffray,F., Weighted independent sets in classes of P6-free graphs, Discrete applied mathematics, 209, 217-226, 2016.
5. Karthick,t., Maffray,F., Maximum weight independent sets in classes related to claw-free graphs, Discrete applied mathematics, 216, 233-239, 2017.

6. Wloch,I., Wloch,A., Generalized sequences and k-independent sets in graphs, *Discrete applied mathematics*, 158, 1966-1970, 2010.
7. Galvin,D., The independent set sequence of regular bipartite graphs, *Discrete mathematics*, 312, 2881-2892, 2012.
8. Fleischner,H., Sabidussi,G., Sarvanov,V.I., Maximum independent sets in 3- and 4-regular Hamiltonian graphs, *Discrete mathematics*, 310, 2742-2749, 2010.
9. Zak,A., A generalization of an independent set with application to $(K_q; k)$ -stable graphs, *Discrete applied mathematics*, 162, 421-427, 2014.
10. Oh,S., Lee,S., Enumerating independent vertex sets in grid graphs, *Linear algebra and its applications*, 510, 192-204, 2016.
11. Ortiz,C., Villanueva,M., Maximal independent sets in caterpillar graphs, *Discrete applied mathematics*, 160, 259-266, 2012.
12. Lin,M.-S., Su,S.-H., Counting independent sets in a tolerance graph, *Discrete applied mathematics*, 181, 174-184, 2015.
13. Samotij,W., Counting independent sets in graphs, *European journal of combinatorics*, 48, 5-18, 2015.
14. Lopez-Ramirez,C., Gomez,J.E.G., Luna,G.D.I., Building a maximal independent set for the vertex-coloring problem on planar graphs, *Electronics notes in theoretical computer science*, 354, 75-89, 2020.
15. Karci,A., New algorithms for minimum dominating set in any graphs, *Anatolian science – journal of computer sciences*, 5, 62-70, 2020.
16. Karci,A., Finding innovative and efficient solutions to NP-hard and NP-complete problems in graph theory, *Anatolian science – journal of computer sciences*, 5, 137-143, 2020.
17. Karci,A., Efficient algorithms for determining the maximum independent sets in graphs, *Anatolian science – journal of computer sciences*, 5, 144-149, 2020.
18. Karci,A., Karci,Ş., Determination of effective nodes in graphs, *International conference on science, engineering & technology*, Mecca, Saudi Arabia, 25-28, 2020.
19. İnce K., Karci A., Modelling and statistical analysis of academic collaborations as a new graph type, *Journal of the Faculty of Engineering and Architecture of Gazi University*, 34 (1), 439-460, 2019.
20. Baykasoglu A., Graph Theory and Matrix Method based approach for business process modeling/simulation software selection, *Journal of Engineering and Architecture of Gazi University*, 28 (3), 555-566, 2013.
21. Karci, A., Çizge algoritmaları ve çizge bölmeleme, *Fırat Üniversitesi, Fen Bilimleri Enstitüsü, Yüksek Lisans tezi*, 1998.