



Developing random indices and consistency ratios for inconsistency methods in pairwise comparison

Veysel Çoban*

Department of Industrial Engineering, Faculty of Engineering, Bilecik Seyh Edebali University, 11210, Gölümbe, Bilecik, Türkiye

Highlights:

- Derivation of random inconsistency indexes
- Checking random inconsistency indexes
- Improving sample consistency ratios based on random indexes

Keywords:

- Pairwise comparison
- Inconsistency index
- Random index
- Consistency ratio

Article Info:

Research Article
Received: 25.03.2021
Accepted: 07.04.2022

DOI:

10.17341/gazimmfd.903495

Correspondence:

Author: Veysel Çoban
e-mail:
veysel.coban@bilecik.edu.tr
phone: +90 228 214 1879

Graphical/Tabular Abstract

Random iterations of $n=3,4,\dots,9$ dimensional pairwise comparison matrices (PCMs) are generated based on Saaty's [1/9, 9] evaluation scale. The consistencies of the generated random matrices are calculated using 4 different inconsistency methods (Saaty, Crawford et al., Golden et al., Takeda) and the random index values are determined for each method. The Saaty random index values obtained from the 10,000 random generated PCM in the study give compatible results with the Saaty random index values in the literature. Saaty index compatibility indicates that calculations for other consistency indexes will yield valid results. These methods can be compatible with the 0.1 threshold value valid for the Saaty consistency ratio (CR) (Table A).

Table A. Correlation and compatibility values between CR and MCCR/GWCR

n	3	4	5	6	7	8	9
Correlation ratio (CR/MCCR)	0.9910	0.9881	0.9835	0.9814	0.9797	0.9803	0.9790
Compatibility rate (CR/MCCR)	0.8968	0.9818	0.9987	1	1	1	1
Correlation ratio (CR/GWCR)	0.9727	0.9258	0.8931	0.8693	0.8473	0.8335	0.8109
Compatibility rate (CR/GWCR)	0.9554	0.9878	0.9989	1	1	1	1

Purpose: The purposes of the research are to determine the random indices for the 4 different inconsistency methods (Saaty, Crawford et al., Golden et al., Takeda) that are used in determining the consistency of the pairwise comparison evaluations and to define the consistency ratio at a threshold of 0.1 for the Golden et al. (GWCR) and Takeda (MCCR) methods based on their random indices. Thus, decision makers can easily make decisions with a threshold value of 0.1 in different methods.

Theory and Methods: Consistency indices and random indices are calculated for 10,000 randomly generated PCM in MSExcel program. Compatibility comparisons are made by calculating correlation values according to Saaty reference values. Consistency ratio formulas are developed for Golden et al (GWCR) and Takeda (MCCR) methods according to the regression evaluations.

Results: Random indices generated for 4 inconsistency methods (Saaty, Crawford et al., Golden et al., Takeda) are checked with Saaty RI and high correlation values are observed among the methods. The validity of the study method is proven by showing a high correlation (greater than 95%) between the Saaty CR values and the GCR values calculated in the study. Also, the Golden-Wang ($GWCR=(GW_n/RI_{GW_n})^2$) and Takeda ($MCCR=2*(MC_n-1)/(RI_{MC_n})$) consistency ratio formulas are developed based on their random indices. The developed formulas are compared with the 0.1 threshold value of CR values and high correlation values (greater than 95%) are obtained.

Conclusion: PCMs are an important process step in AHP multi-criteria decision making problems. PCMs play a critical role in determining the priority values by defining the positions of the problem elements relative to each other. Only Saaty (CR) and Crawford and Williams (GRC) methods define consistency ratios based on threshold value among the inconsistency index calculation methods in the literature. In this study, current inconsistency calculation methods are examined and the similarities between the methods and the relative validity of the methods are given by showing the relationship between the inconsistency indices. Consistency ratios (MCCR/GWCR) based on their random inconsistency indices can be developed and these ratios can be used as threshold values for checking inconsistency indices. Decision makers using Golden et al... and Takeda methods are provided to make consistency assessments easier and faster.



İkili karşılaştırmada tutarsızlık yöntemleri için rassal indekslerin ve tutarlılık oranlarının geliştirilmesi

Veysel Çoban*^{ID}

Bilecik Şeyh Edebali Üniversitesi, Mühendislik Fakültesi, Endüstri Mühendisliği Bölümü, 11210 Gülümbe Bilecik, Türkiye

Ö N E Ç I K A N L A R

- Rastgele tutarsızlık indekslerinin türetilmesi
- Rastgele tutarsızlık dizinlerini kontrol etme
- Rastgele indekslere dayalı örnek tutarlılık oranlarının iyileştirilmesi

Makale Bilgileri

Araştırma Makalesi

Geliş: 25.03.2021

Kabul: 07.04.2022

DOI:

10.17341/gazimmfd.903495

Anahtar Kelimeler:

İkili karşılaştırma,
tutarsızlık indeksi,
rastgele indeks,
tutarlılık oranı

ÖZ

Analitik Hiyerarşik Prosesi (AHP) başta olmak üzere karar verme yöntemlerinde başvurulan ikili karşılaştırma değerlendirme yöntemlerinin tutarlılığını belirlemede tutarlılık indekslerine başvurulur. Tutarlılık oranları, tutarlılık indeksleri için eşik değerleri tanımlayarak ikili karşılaştırma değerlendirme yöntemlerinin tutarlılığına karar vermede önemli bir araç olarak kullanılır. Literatür taraması ile tanımlanan 14 tutarlılık hesaplama yönteminden yalnız Saaty'nin tutarlılık oranı (CR) ve Crawford ve Williams'ın geometrik tutarlılık oranı (GCR) için eşik değeri 0,1 olarak tanımlanır. Bu çalışmada Takeda ve Golden-Wang tutarlılık yöntemleri için rassal indeksler hesaplanır ve bu rassal indekslere dayanarak CR ve GCR yöntemlerine benzer tutarlılık oranları tanımlanır. Saaty'nin CR değerlerine uyumlu olan bu tutarlılık oranları için eşik değeri 0,1 olarak belirlenir. Golden –Wang (GW) ve Takeda (MC) tutarlılık yöntemleri için sırası ile GWCR ve MCCR tutarlılık oranları hesaplama formülleri geliştirilir. GWCR ve MCCR tutarlılık oranları ile CR tutarlılık değerleri arasında korelasyon ve uyum oranları ölçülür. CR ile yüksek uyum ve korelasyon gösteren Golden –Wang ve Takeda tutarlılık oranı eşitliklerinin geçerliliği ortaya konur. Böylece ikili karşılaştırma matrislerinin (İKM) tutarlılık değerlerinde, Golden –Wang ve Takeda tutarlılık yöntemlerini kullanan karar vericilerin 0,1 tutarlılık eşliğinde daha doğru ve hızlı değerlendirme yapmaları sağlanır.

Developing random indices and consistency ratios for inconsistency methods in pairwise comparison

H I G H L I G H T S

- Derivation of random inconsistency indexes
- Checking random inconsistency indexes
- Improving sample consistency ratios based on random indexes

Article Info

Research Article

Received: 25.03.2021

Accepted: 07.04.2022

DOI:

10.17341/gazimmfd.903495

Keywords:

Pairwise comparison,
inconsistency index,
random index,
consistency ratio

ABSTRACT

Consistency indexes are used to determine the consistency of pairwise comparison evaluations used in decision-making methods, especially the Analytical Hierarchical Process (AHP). Consistency ratios are used as an important tool for decision makers in deciding the consistency of pairwise comparisons by defining threshold values for consistency indices. Among the 14 consistency calculation methods defined by the literature review, the threshold value is defined as 0,1 only in Saaty's consistency ratio (CR) and for Crawford and Williams's geometric consistency ratio (GCR). In this study, random indices are calculated for Takeda and Golden-Wang consistency methods and consistency ratios similar to CR and GCR methods are defined based on these random indexes. The threshold value is set as 0.1 for these consistency ratios, which are compatible with Saaty's CR values. GWCR and MCCR consistency ratio calculation formulas are developed for Golden –Wang (GW) and Takeda (MC) consistency methods, respectively. Correlation and compatible rates are measured between the GWCR and MCCR consistency rates and the CR consistency values. The validity of the Golden-Wang and Takeda consistency ratio equations, which show high agreement and correlation with CR, is demonstrated. Thus, decision makers who use Golden –Wang and Takeda consistency methods in the consistency values of pairwise comparison matrices (HRC) are able to make a more accurate and faster evaluation at the 0.1 consistency threshold.

1. Giriş (Introduction)

Küresel dünyada artan etkileşim karmaşık karar problemlerinin ortaya çıkmasına ve karar vermenin zorlaşmasına neden olur. Karmaşık problemlere nesnel ve objektif yaklaşımlar, doğru ve kalıcı çözümlere ulaşmanın en önemli aşamasını oluşturur [1]. Fakat nicel ölçümü olmayan problemlerde çözümün gizil bilgilerine, uzmanların bilgi ve tecrübelerine dayanan öznal yargıları ile ulaşılır. Karmaşık Çok Kriterli Karar Verme (ÇKKV) problemlerin öznal değerlendirmeler ile çözülmesinde Analitik Hiyerarşi Prosesi (AHP) önemli bir karar analizi yöntemidir [2, 3]. AHP kriter ve alternatiflerin ikili karşılaştırma değerleri üzerine kurulu olan ve aynı zamanda kararların tutarlılığını ölçen çok kriterli karar verme (ÇKKV) tekniğidir. AHP, göreceli öneme göre yapılan ikili karşılaştırmaların oransal ölçümüne dayanır. İkili karşılaştırma matrisleri (İKM) alternatifleri göreceli olarak karşılaştırarak önceliklendirir ve sıralar [4].

İKM'deki değerlendirmelerin tutarlılığını yani karar vericilerin ikili değerlendirmelerindeki ilişkileri doğru tanımlama derecelerini ölçmek için tutarsızlık indekslerine başvurulur. Tutarsızlık ölçütlerinin yüksek olması durumunda karşılaştırmaların yeniden yapılması veya değerlendirmelerin reddedilmesi önerilir [5]. Tutarsızlıkların kontrol altına alınmaması alternatif ve kriterlerin doğru derecelendirilmesine ve doğru kararların verilmemesine neden olur [6].

Bu çalışmada öncelikle tutarsızlık indekslerinin belirlenmesinde kullanılan yöntemler ele alınır [4]. Saaty'nin [7] öncü çalışması ile ikili karşılaştırmalara dayalı tutarsızlık analizleri yaygınlaşır [8-11]. Karar vericilerin ikili karşılaştırma tutarlılıklarını ölçmede yeni yöntemler geliştirilerek İKM'lerde karşıtlık ve geçişlilik özellikleri incelenir [12-14]. AHP karar verme uygulamaları ile geliştirilen tutarlılık indekslerinin geçerlilikleri sorgulanır [15-18]. Öncül kriterlerin tanımlanmasında da kullanılan İKM yöntemleri yeni tutarlılık indeksleri geliştirme çalışmaları ile geliştirilir [19, 20]. Yöntemler incelenerek İKM'nin tutarlılığını belirleyen uygulama metotları incelenir. Saaty değerlendirme ölçeği (1/9,9) kullanılarak $n=3,4,\dots,10$ boyutları için rassal İKM'ler türetilir. Mevcut tutarsızlık yöntemleri kullanılarak rassal İKM'ler için tutarsızlık değerleri hesaplanır ve tutarsızlık indekslerine göre yöntemler arasındaki ilişkiler tanımlanır. Her yöntem için elde edilen tutarsızlık indekslerinin ortalaması alınarak rassal indeksler tanımlanır.

Çalışma geçerliliğini göstermek için Saaty RI ve rassal indekslere dayalı CR ve GCR tutarlılık oranları ile kontroller yapılır. Sonuçların geçerliliğine dayanarak diğer tutarsızlık yöntemleri için rassal indekslere dayalı tutarlılık oranlarının geliştirilebileceği önerisinde bulunulur. Bu öneriye dayanarak Golden ve Wang [9] ve Takeda [10] yöntemleri için rassal indeksler temelinde GWCR ve MCCR tutarlılık oranları geliştirilir. Çalışma, tutarsızlık indeksleri tanımlanmasına rağmen eşik değerleri belirli olmayan (CR ve GCR dışında) yöntemler için 0,1 eşik değerine göre daha hızlı ve etkin değerlendirmede bulunulması sağlanır. Çalışma içeriğinde yapılan; her yöntem için tutarlılık indekslerinin Microsoft Excel programında rassal türetilen 10.000 İKM'den hesaplanması, tutarlılık indeksleri arasında ilişkilerin korelasyon matrisinde tanımlanması, tutarsızlık indeksi hesaplama yöntemler (Satty [7], Crawford ve Williams [8] dışında) için rassal indekslerin hesaplanması ve rassal indekslere dayalı 0,1 eşik değerini veren GWCR ve MCCR tutarlılık oranlarının tanımlanması literatüre özgün katkıları oluşturur.

Çalışmanın anlatımındaki alt bölümler şu şekil takip eder. İkinci bölümde, literatür taraması yapılarak tutarlılık indeksleri ve tutarlılık oranlarının hesaplanmasına yönelik çalışmalar incelenir. Böylece çalışmamızın amacına yönelik bilgiler toplanır. Üçüncü bölümde, AHP karar verme sürecinde ikili karşılaştırmaların nasıl

oluşturulduğu ve ikili karşılaştırmaların önceliklendirme sürecindeki öneminden bahsedilir. Dördüncü bölümde, rassal indeks hesaplama ve tutarlılık oranı geliştirme yöntemlerinden bahsedilir. Bu bölümde rassal indekslere dayalı Golden-Wang tutarlılık oranı (GWCR) ve Takeda tutarlılık oranı (MCCR) hesaplama yöntemleri önerilir ve uygulama çalışmaları gerçekleştirilir. Uygulama sonuçları değerlendirilerek önerilen yöntemlerin geçerliliği hakkında bilgi verilir. Beşinci bölümde, yöntem ve sonuç değerlendirmeleri yapılarak gelecek çalışma planlarından bahsedilir.

2. Literatür Taraması (Literature Review)

Üstünlük yarışındaki faktörlerin değerlendirilmesi, sıralanması ve önceliklendirme çalışmaları karar verme problemleri içinde yer alır [21]. Çok kriterli karar verme problemlerinde yaygın olarak kullanılan AHP yönteminin önemli işlem basamaklarından birisi de tutarlılık doğrulamasıdır. Tüm alternatifler ele alarak yapılan karşılaştırmalardan daha kolay olduğu ve daha doğru yargılara ulaşıldığı için ikili karşılaştırmalar değerlendirmelerde uygun görülür [22]. AHP sürecinde uzmanların bilgi ve tecrübesine dayanarak yapılan ikili karşılaştırma değerlendirmeleri, içinde öznal yargılar barındırır [23, 24]. Yargılardaki olası tutarsızlığın belirlenmesi ve değerlendirmelerin kullanılabilir yapıya dönüştürülmesi AHP'nin önemli bir kaygısıdır [22]. Bu aşamada devreye giren tutarlılık doğrulaması ile ikili karşılaştırmalar arasındaki tutarlılık ölçülür. Tutarlılık, ikili karşılaştırmalarda karşıtlık ve geçişlilik kurallarına uyulduğu anlamına gelir [25]. Saaty tarafından önerilen tutarlılık ölçeği özvektör yöntemlerine dayanarak geliştirilir. Bu prosedüre göre ikili karşılaştırma matrisinin özdeğeri ile kriter sayısı (n) arasındaki farkın azalması tutarlı yargıları işaret eder [26]. Aradaki farkın (n-1)'e bölünmesi ile de tutarlılık ölçütü olan tutarlılık indeksine (CI) ulaşılır. Tutarlılık sonucu karar vericilerin uzmanlığını açıkça göstermezken tutarsızlık göstergesi karar vericinin eksiliğini yansıtmaktadır [27].

Kabul gören ve en yaygın kullanıma sahip tutarsızlık indeksi (CI), Saaty'nin [2] çalışmasında Analitik Hiyerarşi Prosesi (AHP) ile birlikte tanıtılır. Önceliklendirme prosedürlerinde tutarsızlığı değerlendirmede Crawford ve Williams [8]; Takeda [10]; Salo ve Hämäläinen [12]; Shiraishi, Obata ve Daigo [13]; Barzilai [14]; Stein ve Mizzi [15]; Cavallo ve D'Apuzzo [16]; Kou ve Lin [17]; Kulakowski [18]; Fedrizzi ve Ferrari [20]; Koczkodaj [28]; Csató [29]; Harker [30]; Wedley [31] ve Gass ve Rapsák [32] tarafından farklı tutarlılık indeksi önerileri sunulur. Saaty tutarlılık indeksi yaygın ve baskın tutarsızlık ölçüm aracı olmasına rağmen diğer CI araçlarının kullanımını da başvurulur [15, 33, 34].

Satty ölçeği, $\{9,8,\dots,1/8,1/9\}$ kullanılarak türetilen çok sayıda rassal matrislerin tutarlılık indekslerinin ortalaması rassal indeks (RI) olarak tanımlanır [7]. Farklı yazarlar tarafından farklı sayıda rassal türetilen birbirinden farklı İKM'ye göre farklı Satty RI değerleri elde edilir [35-38] ve tanımlanan değerlerin geçerlilikleri AHP uygulamaları ile sorgulanır [39-42]. Bu iki indeks arasındaki normalizasyon oranı karşılaştırmaların tutarlılığı için kritik değer olan tutarlılık oranını (CR) tanımlar [42]. Tutarlılık oranı (CR) yeterli görülen yani çelişkili olmayan ikili karşılaştırmalar ile karar verme süreci devam ettirilir. Saaty tarafından önerilen 0,1 eşik değeri İKM'nin tutarlılığını kabul etmede yaygın kullanılan ve önerilen yöntem olup $CR > 0,1$ olan karşılaştırmalar ya çıkartılır ya da yeniden değerlendirilir [43, 44]. Ayrıca Saaty ekolündeki Crawford ve Williams [8], geometrik ortalama yöntemi ile geliştirdikleri tutarlılık indeksini Saaty rassal indekslerine dayalı türettikleri rassal değere orantılayarak tutarlılık oranı elde eder. Saaty tutarlılık oranı eşik değerinin (0,1) Crawford ve Williams tutarlılık oranı için de geçerli olduğu ayrıca gösterilir [40]. 9 puanlı ölçeğe ve artan İKM boyutuna bağlı olarak Saaty'nin CR eşliğinin çok kısıtlayıcı olduğu konusunda eleştiriler de bulunur [12,

36]. Saaty ve Crawford vd. çalışmaları dışındaki çalışmalarda CR gibi eşik değerlerinin belirlenmemesi bu çalışmalarda tanımlanan indekslerin yorumlanmasını engeller [42, 45]. Çalışmamız bu problemin çözümüne yönelik bir adımdır.

3. Temel Uygulama Yöntemleri (Basic Application Methods)

Bu bölümde AHP karar verme yönteminde ikili karşılaştırma matrislerinin oluşturulması ve derecelendirme basamaklarındaki önemi ve bu konuda yapılan çalışmalar ele alınır. Karşılaştırmalı değerlendirmelerin karar verme sürecindeki etkileri göz önünde bulundurulmuş değerlendirme tutarlılıklarının önemine dikkat çekilir. Karşılaştırma tutarsızlıklarını değerlendirmesinde başvurulan yöntemler ortaya konular ve aralarındaki ilişki hakkında bilgi verilir. Literatürdeki mevcut tutarlılık oranları incelenir ve karar verme sürecindeki önemi vurgulanır.

3.1. AHP'de İkili Karşılaştırma (Pairwise Comparison in AHP)

AHP genellikle soyut niteliklerin öznel değerlendirmesi için kullanılır. Özellikle ilgililenen başlıklar (kriter, alternatif, ...) soyut olan yani nicel ölçümlerle tanımlanamayan problemlerin çözümü gerektiren değerlendirme ile kolaylaştırılır [46]. AHP, en iyi sonucu arayan bir amacın yerine getirilmesi için oluşturulan karar verme probleminde sınırlı alternatifleri, $A = \{a_1, a_2, \dots, a_n\}$ çoklu kriterlere göre değerlendirir. Çoklu alternatiflerin çoklu kriterler altında tek boyutta karşılaştırılması zor olmakla beraber en iyi kararın verilmesine de engel olmaktadır [47,48]. Karmaşık problemleri alt problemlere indirgeyerek çözmek doğru değerlendirme için bir yöntem olarak ele alınır [49,50]. Alternatiflerin ikişerli ele alınarak üstünlüklerin karşılaştırılması ile oluşan ikili karşılaştırma işlem karmaşasını azaltmaktadır. İkili karşılaştırma matrisi, P Eş. 1'deki gibi tanımlanır.

$$P = (p_{ij})_{n \times n} = \begin{pmatrix} p_{11} & p_{12} & \dots & p_{1n} \\ p_{21} & p_{22} & \dots & p_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ p_{n1} & p_{n2} & \dots & p_{nn} \end{pmatrix} \quad (1)$$

$p_{ij} > 0$ olmak üzere a_i 'nin a_j 'ye tercih derecesini tanımlar. İkili karşılaştırma oranı tercihlerin ağırlıkları arasındaki oranı Eş. 2'deki gibi yaklaşık tahmin eder.

$$p_{ij} \approx \frac{w_i}{w_j}, \forall i, j \quad (2)$$

Örneğin karar vericinin baklavayı sütlaçtan 3 kat fazla önem verdiğini $p_{12}=3$ ile gösterirken sütlaçlı helvadan 2 kat daha fazla önem verdiğini $p_{23}=2$ şeklinde gösterir. Pozitif ağırlıkların orantılanmasına göre $p_{ij} \approx w_i/w_j > 0$ iken $p_{ji} \approx w_j/w_i = 1/p_{ij}$ olduğu için ikili karşılaştırma matrisi Eş. 3 ile tanımlanır.

$$P = (p_{ij})_{n \times n} = \begin{pmatrix} 1 & p_{12} & \dots & p_{1n} \\ 1/p_{12} & 1 & \dots & p_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1/p_{1n} & 1/p_{2n} & \dots & 1 \end{pmatrix} \quad (3)$$

AHP ile karmaşık karar verme problemleri daha küçük alt problemlere bölünerek amaç, kriter ve alternatiflere doğru odaklanılır. Hiyerarşi olarak ifade edilen yapı amaç, alternatif kümesi, kriterler kümesi ve amaç, alternatif ve kriter ilişkilerinin grafiksel gösterimi ile basitleştirilir [4, 45]. Karar verme sürecinde uzmanlar alternatifleri bir amacı yerine getirmek üzere tanımlanan kriterleri, $C = \{c_1, c_2, \dots, c_m\}$ dikkate alır. Hiyerarşik gösterime göre kriterler ve her kriter altında alternatifler ikili karşılaştırma matrisleri $P^{(k)}$ ile gösterilir. İKM, $P^{(k)}$ içindeki her p_{ij}^k i. kriterinin j. kriter üzerindeki üstünlük derecesinin tanımlar. Karşılıklı kuralına göre ise j. kriterin i. kriter üzerindeki

üstünlük derecesi $1/p_{ij}^k$ olarak hesaplanır. Her kriter kendisine eşit üstünlükte olduğu için İKM diyagonalı Eş. 4'deki gibi 1'dir.

$$P^{(k)} = (p_{ij}^k)_{m \times m} = \begin{pmatrix} 1 & p_{12}^k & \dots & p_{1m}^k \\ 1/p_{12}^k & 1 & \dots & p_{2m}^k \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1/p_{1m}^k & 1/p_{2m}^k & \dots & 1 \end{pmatrix} \quad (4)$$

Her kriter için alternatiflerin öncelik vektörleri Eş. 5'de gösterilir.

$$w^k = (w_1^k, w_2^k, \dots, w_n^k)^T \quad (5)$$

Farklı önem derecesine sahip kriterlere göre alternatiflerin öncelik vektörleri bir araya getirilir. Ağırlıklı aritmetik ortalama yöntemi, alternatiflerin yerel öncelik vektörlerini kriterlerin önem ağırlıkları ile birleştirir ve genel öncelik ağırlıkları hesaplanır. Kriter ağırlıklarının tanımlanmasında da benzer yöntem izlenir. Kriterler model amaçlarına göre ikili karşılaştırılarak ikili karşılaştırma matrisi, \hat{P} elde edilir ve kriterler için öncelik vektörü, \hat{w} hesaplanır [45, 51]. Kriter ağırlıkları ile doğrusal kombinasyonu yapılan alternatifler için küresel öncelik vektörü, w Eş. 6'da hesaplanır.

$$w = \sum_{k=1}^K \sum_{i=1}^n w_k w_i^k \quad (6)$$

Ağırlıklı ortalama değerlerine göre en yüksek küresel öncelik değerine sahip alternatif tercih edilir. Gerçek hayat uygulamalarında kriter ve alt kriter seviyelerinin artırılması ile artan karmaşıklık AHP modelinin hiyerarşik düzeyinin de artırılması ile sadeleştirilir [52]. Bu süreçte ikili karşılaştırmaların doğru yapılmaması veya tutarsız yapılması ve bunun kontrol edilmemesi ara ve nihai derecelendirmelerin (ağırlıklandırma/önceliklendirme) yanlış yapılmasına neden olur [49, 53].

3.2 İkili Karşılaştırma Matrislerinde Tutarlılık (Consistency in Pairwise Comparison Matrices)

AHP kullanımında önerilen varsayımlar karar vericilerin daha esnek ve kolay değerlendirme yapmasını ve çözümler üretmesini sağlar [4, 45].

$$P = (p_{ij})_{n \times n} = \begin{pmatrix} \frac{w_i}{w_j} \\ \vdots \\ \frac{w_n}{w_1} \end{pmatrix}_{n \times n} = \begin{pmatrix} w_1/w_1 & w_1/w_2 & \dots & w_1/w_n \\ w_2/w_1 & w_2/w_2 & \dots & w_2/w_n \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ w_n/w_1 & w_n/w_2 & \dots & w_n/w_n \end{pmatrix} \quad (7)$$

Kriter veya alternatiflerin birbirleriyle olan dereceli ilişkilerini yansıtan ikili karşılaştırma matrisleri, P öncelik değerlerini üretir (Eş. 7). İkili karşılaştırma matrisi girdileri (p_{ij}) karşılaştırılan elemanların ağırlıklarının (w_i, w_j) orantılanması ($p_{ij} = w_i/w_j$) ile oluşturulursa normalize edilen ikili karşılaştırma matrisinin herhangi bir sütunu elemanların öncelik değerlerini tam olarak karşılayacaktır. Örneğin Tablo 1'de a_1 tercihinin ağırlığı $w_1=9$ olarak ve a_2 tercihinin ağırlığı $w_2 = 5$ olarak tanımlandığında bu tercihler arasındaki ikili karşılaştırma değeri $p_{12}=9/5=1,8$ olacaktır.

Ağırlıklara dayalı ikili karşılaştırma bilgi kaybının ortadan kaldırılmasına rağmen ağırlıkların bağımsız tanımlanması mutlak doğru ve rasyonellikten uzaklaşmasına neden olmaktadır. Bu durumda kriter ve alternatiflerin ikili karşılaştırmalarının karar verici tarafından doğrudan yapılması kabulünü gerektirir. Yani a_1 ve a_2 tercihleri ele alınarak aralarındaki önemsel oran $p_{12}=2$ gibi ifade edilir. Doğrudan değerlendirme de gerçek ağırlıkları ve öncelik vektörünü

karşılamadığı için değerlendirmeler içinde tutarsızlıklar ortaya çıkmaktadır. İkili karşılaştırmaların tutarlılık düzeylerinden sapmalarını ölçmek için tutarsızlık indeksleri geliştirilir.

Tablo 1. Ağırlıklara dayalı ikili karşılaştırma matrisi (Pairwise comparison matrix based on weights).

w_i		9	5	4	2	Normalize matris			
w_j	Elemanlar	a_1	a_2	a_3	a_4	a_1	a_2	a_3	a_4
9	a_1	1	1,8	2,25	4,5	0,45	0,45	0,45	0,45
5	a_2	0,56	1	1,25	2,5	0,25	0,25	0,25	0,25
4	a_3	0,44	0,8	1	2	0,2	0,2	0,2	0,2
2	a_4	0,22	0,4	0,5	1	0,1	0,1	0,1	0,1
	Toplam	2,22	4	5	10				

Herhangi bir ikili karşılaştırma matrisinde tercih ağırlıklarını tahmin etmede özvektör yöntemi ve geometrik ortalama yöntemi yaygın olarak kullanılmaktadır [2, 8]. Perron-Frobenius özvektör hesaplama yöntemine [54] dayanan özvektör yöntemi, ikili karşılaştırma matrisinin (P) gerçek ağırlık vektörü (özvektör veya öncelik ağırlığı, w) ile çarpımı, öncelik ağırlık vektörünün (w) matrisin özdeğeri ile çarpımına eşittir (Eş. 8, Eş. 9).

$$Pw = \lambda w \tag{8}$$

$$\begin{pmatrix} w_1/w_1 & w_1/w_2 & \dots & w_1/w_n \\ w_2/w_1 & w_2/w_2 & \dots & w_2/w_n \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ w_n/w_1 & w_n/w_2 & \dots & w_n/w_n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} w_1 \\ w_2 \\ \vdots \\ w_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda w_1 \\ \lambda w_2 \\ \vdots \\ \lambda w_n \end{pmatrix} \tag{9}$$

Burada λ , eşitliği sağladığı için en büyük özdeğerdir. Yukarıdaki gerçek ağırlık değerleri ile oluşturulan ikili karşılaştırma matrisine göre en yüksek özdeğer 4 olarak bulunur, $\lambda_{mak}=4$ (Eş. 10).

$$\begin{pmatrix} 1 & 1.8 & 2.25 & 4.5 \\ 0.56 & 1 & 1.25 & 2.5 \\ 0.44 & 0.8 & 1 & 2 \\ 0.22 & 0.4 & 0.5 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0.45 \\ 0.25 \\ 0.2 \\ 0.1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1.8 \\ 1 \\ 0.8 \\ 0.4 \end{pmatrix} = 4 \begin{pmatrix} 0.45 \\ 0.25 \\ 0.2 \\ 0.1 \end{pmatrix} \tag{10}$$

Özvektör yöntemi ile birlikte öncelik vektörünü belirlemede yaygın olarak kullanılan diğer bir yöntemde geometrik ortalama yöntemidir [8]. İkili karşılaştırma matrisinde karşılaştırma merkezinde olan tercih için satır düzleminde geometrik ortalama hesaplanır. Her element için ağırlıklı ortalama normalize edilerek Eş. 11'deki gibi yaklaşık öncelik vektörü elde edilir.

$$w_i = \frac{\sqrt[n]{\prod_{j=1}^n p_{ij}}}{\sum_{i=1}^n \left(\sqrt[n]{\prod_{j=1}^n p_{ij}} \right)} \tag{11}$$

Ağırlık değerlerinin toplamı 1'e eşittir, $\sum_{i=1}^n w_i = 1$. Yukarıdaki örneğin geometrik ortalama yöntemine göre öncelik ağırlıkları Tablo 2'de gösterilir.

Tablo 2. Geometrik ortalama yöntemine göre öncelik değerleri (Priority values according to the geometric average method).

	a_1	a_2	a_3	a_4	Geometrik Ortalama	Öncelik değeri
a_1	1	1,8	2,25	4,5	2,07	0,45
a_2	0,56	1	1,25	2,5	1,15	0,25
a_3	0,44	0,8	1	2	0,92	0,2
a_4	0,22	0,4	0,5	1	0,46	0,1

Karar vericinin değerlendirmelerindeki rasyonelliği değerlendirmek için ikili karşılaştırma matrisi girdileri, p_{ij} arasındaki ilişkiler

değerlendirilir. Tam rasyonel değerlendirmede ikili karşılaştırma matrisi girdileri için aranan koşul Eş. 12'de gösterilir [45, 55].

$$p_{ij} = p_{ik}p_{kj} \tag{12}$$

Karar verici kendisi ile çelişmeden ikili karşılaştırmaları bu kurala göre değerlendirmesi ile oluşturduğu matrisler tutarlı olarak kabul edilir. Tutarlılığı şu şekilde örnekleyebiliriz. Örneğin karar verici baklavayı sütlaçtan 3 kat fazla seviyorsa ($p_{12}=3$) ve sütlaç helvadan 2 kat daha fazla seviyorsa ($p_{23}=2$), baklavayı helvadan 6 kat daha fazla sevmelidir ($p_{13}=p_{12}p_{23}=6$).

Karşılaştırma ikililerinin artması ile ikililer arasında geçişliliklerin tanımlanması ve tutarlılık durumunun karşılanması da zorlaşmaktadır [56]. Karşılaştırma ikililerinin artması tutarlılığın teknik bir boyutu olmasına rağmen daha düşük boyutlu ikili karşılaştırma matrislerindeki tutarsızlık karar vericinin ilgili konudaki yeterliliğini yansıtmaktadır.

3.3. Tutarsızlık İndeksleri (Inconsistency Indices)

Kriter veya alternatif ikili ele alınarak karşılaştırmalı değerlendirilirken diğer ikili değerlendirmelerle tutarlı bilgilerin verilmesi gerekir [34]. İkili karşılaştırma matrislerindeki tutarlı bilginin verilir verilmediği geçişlilik koşullarının sağlanma derecesi ile ölçülür [55, 56]. Geçişlilik koşullarının ölçülmesinde de tutarsızlık indekslerine başvurulur. Literatürde yer alan yaygın tutarsızlık indeksleri şu şekildedir:

- Saaty'nin tutarlılık indeksi ve tutarlılık oranı: Saaty'nin [2] önerisine göre ikili karşılaştırma matrisinin ($P_{n \times n}$) en yüksek özdeğeri (λ_{mak}) n'e eşit değerlendirmeye tam tutarlıdır (özvektör yöntemi). Tutarlılık indeksi, CI Eş. 13 ile tanımlanır.

$$CI(P) = \frac{\lambda_{mak} - n}{n - 1} \tag{13}$$

Tutarlılık indeksinin, rassal indekse (RI_n) oranı farklı boyutların tutarlılık indekslerini karşılaştıran tutarlılık oranını, $CR(P)$ verir. Rassal indeks (RI_n) girdileri (p_{ij}) [19, 9] aralığında rasgele üretilen ikili karşılaştırma matrislerinin ortalama tutarlılık indeksidir (Eş. 14).

$$CR(P) = CI(P)/RI_n \tag{14}$$

İkili karşılaştırma matrisinin tutarsızlık oranını ifade eden CR 'nin %10 ve daha az olması durumunda ($CR \leq 0,1$) karar vericinin değerlendirmelerinin yeterince tutarlı olduğu kabul edilir. Saaty [57] boyutları 3 ve 4 olan ikili karşılaştırma matrisleri için CR eşik noktalarını sırası ile 0,05 ve 0,08 olarak tanımlar. Alonso ve Lamata [42] daha geniş veri seti ile oluşturduğu RI_n değerleri Tablo 3'de gösterilmektedir. Aksi durumda karar vericinin değerlendirmelerini yeniden yapması istenir.

- Geometrik Tutarlılık İndeksi (GCI): ikili karşılaştırma matrisinden ulaşılan öncelik değerleri (w_i, w_j) ile ikili karşılaştırma girdileri (p_{ij}) arasındaki uyum değerlendirilir ve logaritmik en düşük kareler yöntemi kullanılarak elde edilen eşitlik Eş. 15'de tanımlanır [40, 58]:

$$GCI(P) = \frac{2}{(n-1)(n-2)} \sum_{i=1}^{n-1} \sum_{j=i+1}^n \left(\ln \left(p_{ij} \frac{w_j}{w_i} \right) \right)^2 \tag{15}$$

Burada $p_{ij}w_j/w_i$ hata oranını ifade eder ve tutarlı değerlendirmede $p_{ij}w_j/w_i = 1$ olur. Saaty'nin modelindeki CR 'na benzetilen tutarlılık ölçütündeki eşik değeri aynı (0,1) olarak alınır. (Eş. 16)

Tablo 3. Alonso ve Lamata RI değerleri (Alonso and Lamata RI values)

n	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
RI_n	0	0	0,5247	0,8816	1,1086	1,2479	1,3417	1,4057	1,4499	1,4854

$$GCR(P) = GCI(P)/k(n) \quad (16)$$

Eşitlikte $k(n)$, Saaty RI 'sine göre türetilen katsayıdır (Eş. 17).

$$k(n) = \frac{2^n}{(n-2)} RI_n \quad (17)$$

Literatürde Saaty indeksleri [2] öncül olmak üzere Crawford vd. [8], Golden vd. [9], Takeda [10], Duszak vd. [11], Salo vd. [12], Shiraishi vd. [13], Barzilai [14], Stein vd. [15], Cavallo vd. [16], Kou vd. [17], Kułakowski [18], Grzybowski [19] ve Fedrizzi vd. [20] tarafından 14 farklı tutarsızlık indeksi hesaplama yöntemi bulunur. Bu yöntemler arasından yalnız Saaty ve Crawford vd. tarafından önerilen yöntemler rassal tutarsızlık indekslerini tanımlayarak tutarlılık oranını geliştirilir. 0,1 eşliğinde değerlendirilen bu tutarlılık oranları karar vericilerin İKM'lerini daha kolay ve hızlı değerlendirmelerine imkan verir. Buna rağmen tutarlılık indekslerinin yorumlanmasında Saaty'nin CR [2] ve Crawford ve Williams'ın GCR [8] dışında diğer yöntemler için eşik değeri tanımlayan tutarlılık oranı bulunmamaktadır. Literatürde yer alan tutarsızlık indeksleri hesaplama yöntemlerinin kronolojik sıralanışı Tablo 4 'de verilir.

Çalışmamızda ele alınan Golden ve Wang [9] ve Takeda [10] tutarsızlık indeksleri sırası ile Eş. 18 ve Eş. 19 ile tanımlanır.

$$GW(P) = \frac{1}{n^2} \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n |p_{ij}^{norm} - w_i| \quad (18)$$

Burada p^{norm}_{ij} İKM'nin sütun toplamaları üzerinden normalizasyon değeri ve w_i İKM'nin satır geometrik ortalamalarının normalize değeridir. $GW(P) \geq 0$ koşulu sağlanırken $GW(P) \approx 0$ olması durumunda İKM, P 'nin tutarlılığından bahsedilir.

$$MC(P) = \frac{1}{n(n-1)} \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \left(\prod_{k=1, k \neq i}^n p_{ij} p_{jk} p_{ki} \right)^{\frac{1}{n}} \quad (19)$$

Takeda tutarlılık eşitliği ise ikili karşılaştırmalarda geçişlilik özelliği temelinde değerlendirilir. Tutarlılık değeri $MC(P) \geq 1$ koşulunu sağlarken $MC(P) = 1$ olması durumunda İKM, P tutarlı olduğu söylenir.

Yöntemler genel olarak İKM'deki geçişliliğe dayalı tutarlılığı ölçmeye çalışır. İKM boyutundaki değişimler değerlendirme karmaşasını arttırdığı için hesaplamalara n boyut parametresi de dahil edilir. Saaty ve Crawford vd. dışındaki yöntemler tutarlılık indeksine göre İKM'nin tutarlılığını değerlendirir. Örneğin, Golden ve Wan [9] tutarlılık indeksinin $GW(P) \geq 0$ olacağını ve $GW(P) \approx 0$ koşulunda İKM'nin tutarlı olacağını ifade eder. Fakat sıfıra ne kadar yaklaşık olmanın ne kadar tutarlılığı veya tutarsızlığı işaret ettiği açık değildir. Bu çalışma bu konudaki eksikliği gidererek diğer yöntemler için 0,1 eşik değerinde değerlendirme yapılabileceğini önerir.

4. Rassal İndekse Dayalı Tutarlılık Oranı (Consistency Ratio Based on Random Index)

Literatürde yer alan önceliklendirme prosedürleri tutarsızlıkları belirlemek için göstergeler sunmalarına rağmen bu göstergeler için eşik değerleri tanımlanmamıştır. Yalnız Saaty ve Crawford ve Williams tarafından sunulan tutarsızlık indeksleri için eşik değerleri geliştirilmiştir. Çalışmada öncelikle rassal İKM'ler türetilerek

tutarsızlık yöntemleri için tutarsızlık indeksleri hesaplanır. Elde edilen tutarsızlık indekslerine dayanarak yöntemler arasındaki ilişki yansıtılır. Her yöntem için türetilen tutarsızlık indeksleri kullanılarak yöntemler için rassal indeksler tanımlanır. Rassal indekslere dayalı tutarlılık oranı kontrol çalışmaları yapılarak Golden ve Wang [9] ve Takeda [10] yöntemleri için tutarlılık oranları ve 0,1 eşik değerleri tanımlanır.

4.1. Rassal indeks geliştirme (Random index development)

Saaty tarafından önerilen tutarlılık oranı (CR_n), rastgele üretilen karşılaştırma matrislerinin tutarlılık indekslerinin (CI_n) aritmetik ortalaması olan rassal tutarlılık indeksi (RI_n) ile normalleştirilen bir ölçüttür [7]. Bu normalize ifade kritik değer olarak tanımlanarak yapılan hesaplamalarının geçerliliği için eşik noktalarını tanımlar. Bu çalışmada literatürdeki tutarsızlık indeksleri karşılaştırılarak aralarındaki ilişki gösterilir. Ayrıca $n=3,4,\dots,10$ boyutlu rassal karşılaştırma matrislerinin tutarsızlık indeksleri hesaplanarak her yöntem için rassal indeks hesaplanır.

Alt grup ikili karşılaştırmalarında kullanılan 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9 ve 10 boyutlu karşılaştırma matrisleri için 10.000 adet rassal matrisler Microsoft Office Excel programında üretilir. Rassal indeksleri elde etmek için türetilen karşılaştırma matrislerinin sayısının artması ile daha tutarlı sonuçların elde edilmesi beklenir. Karşılaştırma matrisinin yalnız üst üçgeni Saaty ölçeğine göre [1/9, 9] aralığında rassal atanır ve alt üçgen simetrik tersi alınarak $a_{21}=1/a_{12}$ matrisin kendi içinde hesaplaması yapılır. Örneğin $n=4$ için $P=(p_{ij})_{4 \times 4}$ ikili karşılaştırma matrisleri için $n(n-1)/2=(4*3)/2=6$ ikili karşılaştırma matrisi hücrelerine [1/9, 9] aralığında rassal değerler atanır. Her tutarsızlık yöntemi için aynı matrisler excel programında çalıştırılır ve elde edilen tutarsızlık indeksleri ile yöntemler arasındaki ilişki ortaya konmaya çalışılır. Ayrıca tutarsızlık indekslerinin ortalamaları alınarak her yöntem için yaklaşık rassal tutarsızlık indeksleri tanımlanır.

Tablo 4'de $n=3,4,\dots,10$ boyutlardaki ikili karşılaştırma matrislerinden türetilen tutarsızlık indeksleri arasındaki ilişkileri gösterir. Bu $n=10$ dışındaki diğer boyutların ikili karşılaştırma matrislerinin bu dört yöntem ile hesaplanan tutarsızlık indeksleri arasında yüksek benzerlik görülür. Matris boyut değeri (n) arttıkça rassal atanan ikili değerlendirme değerlerindeki uyumsuzlukların artması tutarlılık hesaplamalarında sapmaların artmasına ve CI değerleri arasındaki benzerlik oranlarının azalmasına neden olur.

Her boyut (n) için rastgele türetilen 10.000 adet İKM'lerine dayanarak elde edilen tutarsızlık indekslerinin ortalamaları alınarak tutarsızlık yöntemleri için rassal indeksler tanımlanır. Hesaplanan rassal indeks değerleri Tablo 5'da gösterilir. Literatürde Saaty'nin tutarsızlık indeksleri için önerilen RI_n değerleri (Tablo 3) ile hesaplanan ortalama tutarsızlık indeksleri arasında %92 uyum görülür. Literatürdeki ve bu çalışmadan elde edilen değerler arasındaki farklılıklar rasgele üretilen matrislerin farklı olmasından kaynaklanır. Örneğin $n=4$ için rastgele üretililecek matris sayısının ($17^6=24.137.569$) yalnızca herhangi bir 10.000'lik kısmı ele alındığı için farklı rassal indeks değerlerine ulaşılır. Boyut (n) değerinin artması rassal seçilen 10.000'lik grupların tam eşleşme olasılığını ve RI_n değerleri ile de tam uyum olasılıklarını düşürür. Hesaplamadaki 17 değeri, [1/9,9] aralığında tanımlanan alternatif Saaty değerleri sayısını ifade eder.

Tablo 4. Tutarsızlık indeksleri arasındaki korelasyon (Correlation between inconsistency indices).

n=3	1	2	3	4
Saaty	1,000			
Crawford vd.	0,994	1,000		
Golden vd.	0,938	0,949	1,000	
Takeda	0,991	0,996	0,923	1,000
n=4	1	2	3	4
Saaty	1,000			
Crawford vd.	0,990	1,000		
Golden vd.	0,908	0,918	1,000	
Takeda	0,988	0,994	0,889	1,000
n=5	1	2	3	4
Saaty	1,000			
Crawford vd.	0,985	1,000		
Golden vd.	0,883	0,903	1,000	
Takeda	0,983	0,981	0,860	1,000
n=6	1	2	3	4
Saaty	1,000			
Crawford vd.	0,981	1,000		
Golden vd.	0,860	0,894	1,000	
Takeda	0,981	0,972	0,842	1,000
n=7	1	2	3	4
Saaty	1,000			
Crawford vd.	0,977	1,000		
Golden vd.	0,841	0,886	1,000	
Takeda	0,980	0,964	0,821	1,000
n=8	1	2	3	4
Saaty	1,000			
Crawford vd.	0,977	1,000		
Golden vd.	0,828	0,879	1,000	
Takeda	0,980	0,963	0,809	1,000
n=9	1	2	3	4
Saaty	1,000			
Crawford vd.	0,943	1,000		
Golden vd.	0,808	0,843	1,000	
Takeda	0,979	0,929	0,786	1,000
n=10	1	2	3	4
Saaty	1,000			
Crawford vd.	0,571	1,000		
Golden vd.	0,402	0,865	1,000	
Takeda	0,603	0,958	0,774	1,000

Saaty çalışmaları referans alınarak yapılan karşılaştırmalar (Tablo 6) diğer tutarlılık indeksleri için de geçerli sonuçların kabul edilebileceğini gösterir. Yukarıda da bahsedildiği gibi çoklu değerlendirmeler arasından, her yazar tarafından rastgele seçilen matrislerin farklı olması farklı sonuçların çıkmasının esas nedenidir. Boyutun artması sonuçlar arasında farkların ve sapmaların artmasına neden olur.

4.2. Tutarlılık oranı geliştirme (Consistency ratio development)

Saaty [7] ve Crawford ve Williams [8] tarafından tanımlanan tutarlılık oranları (Eş. 14 ve Eş. 16) rassal indekslerin (RI_n, k(n)) tutarlılık indekslerini (CI ve GCI) normalize etmesi ile elde edilir. Saaty tutarlılık oranına benzetilerek yapılan işlemler (Eş. 16) ile CR için tanımlanan 0,1 eşik değerinin geometrik tutarlılık oranı (GCR) için de geçerli olduğu kabul edilir. Öncelikle çalışmanın veri kaynağını oluşturan rassal İKM'lerin geçerliliğini ve uygulanabilirliğini doğrulamak için Saaty CR ve Crawford ve Williams GCR hesaplamaları üzerinden doğrulama çalışmaları yapılır.

Tutarlılık oranlarının karşılaştırılmasında korelasyon ve uyum değerleri kontrol edilir. Korelasyon değerleri 10016 hesaplama değerinin Excel→Veri çözümlenme→Korelasyon çözüm aracı kullanılması ile elde edilir. Uyum olarak tanımlanan ifade, rassal türetilen İKM için hesaplanan tutarlılık oranları arasında karşılaştırma değerlerinin oransal karşılığıdır. Karşılaştırma 0,1 tutarlılık eşik değerine göre yapılır ve her iki yöntemde uyumlu olan tutarlılık kararlarının (her iki yöntemde ya tutarlı veya tutarsız olma durumu) toplamının, toplam İKM'ya bölünmesi ile elde edilir. Örneğin n=3 için rassal türetilen İKM'lerin CR ve GCR arasındaki korelasyon değeri 0,9942 ve toplam 10016 İKM'den tutarlılık karşılaştırmasında 9289 tanesinin uyumlu (tutarlı/tutarlı=1975, tutarsız/tutarsız=7314) olması durumunda uyum oranı 0,9274 (9289/10016) olarak hesaplanır. CR ve GCR değerleri de hesaplanarak Saaty RI'ine dayanan 0,1 eşik değerine göre ilişkileri gözlemlenir (Şekil 1). n=3,...,9 boyutları için hesaplanan tutarlılık oranları arasındaki korelasyon değerleri Tablo 7 'de gösterilir.

İKM boyutunun artması ile elde edilebilir rassal matris sayısı da artar. Örneğin n=4 için rassal İKM sayısı 24.137.569 adet iken n=5 için bu sayı 2,02x10¹²'ye çıkar. Bu rassal türetilen matrislerde tutarlılık değerlendirmelerin ortaya çıkma olasılığı n arttıkça azalırken tutarsız değerlendirmelere ulaşma olasılığı da artar. Tablo 7'ye göre

Tablo 5. Tutarsızlık yöntemleri için rassal indeksler (Random indexes for inconsistency methods)

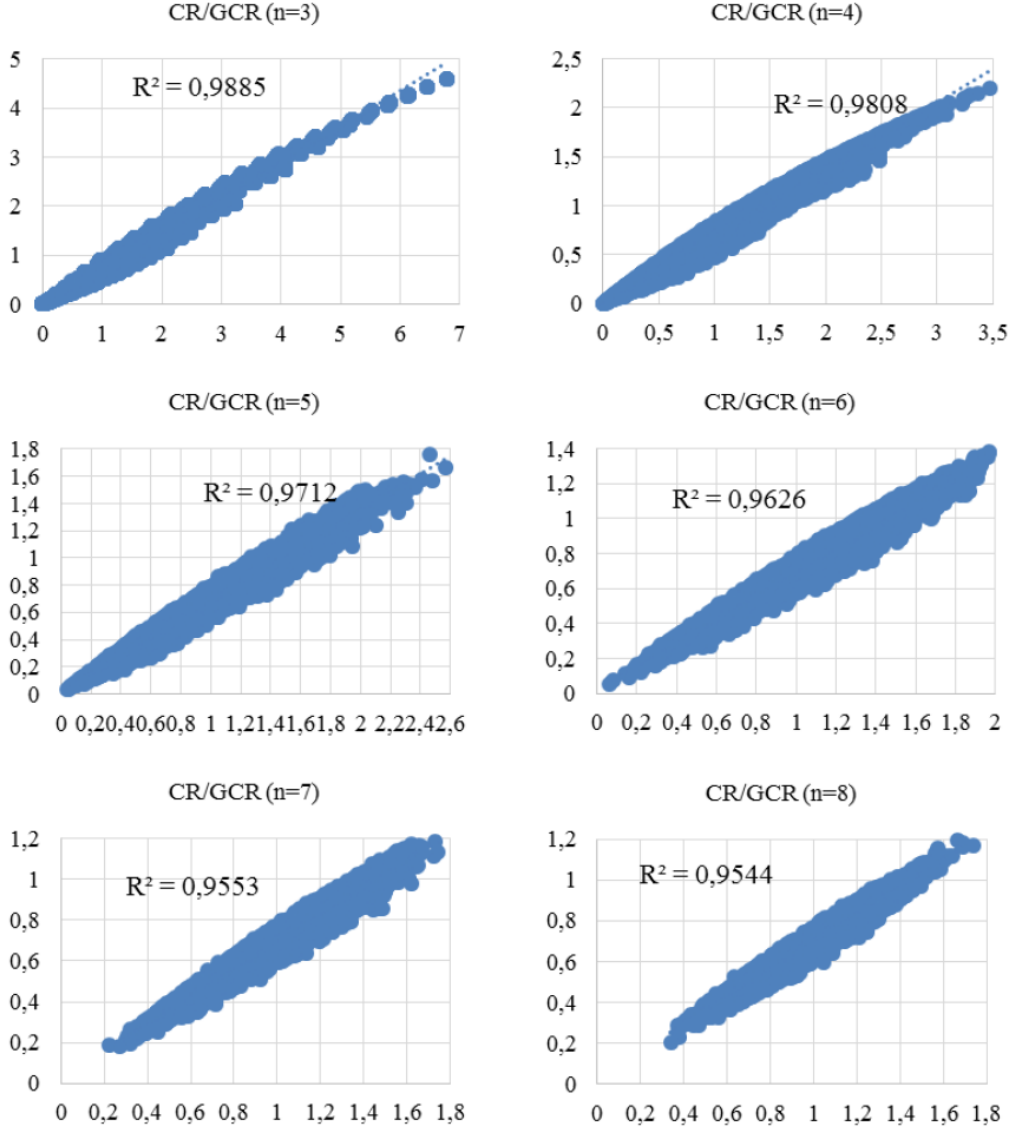
Tutarsızlık Yöntemleri	n=3	n=4	n=5	n=6	n=7	n=8	n=9	n=10
Saaty	0,620	0,960	1,150	1,276	1,353	1,413	1,456	1,968
Crawford vd.	2,593	2,629	2,626	2,642	2,628	2,632	2,484	2,634
Golden vd.	0,143	0,152	0,141	0,128	0,115	0,104	0,094	0,086
Takeda	1,517	1,867	2,082	2,230	2,319	2,393	2,444	2,485

Tablo 6. Saaty RI_n değerleri (Saaty RI_n values) [42]

	İterasyon	n							
		3	4	5	6	7	8	9	10
Bu çalışma	10000	0,62	0,96	1,15	1,28	1,35	1,41	1,46	1,97
Saaty (1980)	500	0,58	0,90	1,12	1,24	1,32	1,41	1,45	1,49
Lane, Verdini (1989)	2500	0,52	0,87	1,1	1,25	1,34	1,40	1,45	1,49
Golden Wang (1990)	1000	0,58	0,89	1,12	1,24	1,33	1,40	1,45	1,49
Noble (1990)	500	0,49	0,82	1,03	1,16	1,25	1,31	1,36	1,39
Forman (1990)		0,52 (77487)	0,89 (63822)	1,11 (41645)	1,25	1,34			
Tumala, Wan (1994)		0,5 (470000)	0,83 (122000)	1,05 (73000)	1,18	1,27	1,33	1,37	1,41
Aguaron, Moreno-Jimenez (2003)	100000	0,53	0,88	1,12	1,25	1,34	1,40	1,45	1,48
Alonso, Lamata (2004)	100000	0,53	0,88	1,11	1,25	1,34	1,41	1,45	1,49
Alonso, Lamata (2005)	500000	0,53	0,88	1,11	1,25	1,34	1,41	1,45	1,49

Tablo 7. CR ve GCR arasındaki korelasyon ve uyum değerleri (Correlation and compatibility values between CR and GCR).

n	3	4	5	6	7	8	9
Korelasyon oranı	0,9942	0,9904	0,9855	0,9811	0,9774	0,9770	0,9434
Uyum oranı	0,9274	0,9694	0,9927	0,9992	1	1	1



Şekil 1. CR/GCR eğilim grafikleri ve R² değerleri (CR/GCR trend graphs and R² values)

korelasyon değerleri yüksek olmasına rağmen azalma eğilimi göstermesinin nedeni bu değişimden kaynaklanır. Ayrıca tutarsız değerlendirmelerin ortaya çıkma sıklığındaki artış (n=7, 8, 9 boyutlarında tüm uyumlar tutarsızlıklardan kaynaklanır) uyum oranındaki artışın temel nedenidir. CR ve GCR arasındaki ilişki literatürde kabul görmüş ve yaygın kullanılan iki yöntemdir. Bu yöntemler arasındaki ilişkilerin öncelikle gösterilmesinin amacı, önerilen tutarlılık oranı hesaplama yöntemlerinin (MCCR/GWCR) CR ile olan korelasyon ve uyum değerleri üzerinden karşılaştırma yapılmasıdır. Böylece yaygın kullanıma sahip olan GCR yönteminin kabul koşullarında önerilen yönteminin geçerliliği açıklanabilecektir. Bu çalışma, GCR (Eş. 16) hesaplamasında olduğu gibi rassal indeks normalizasyonu ile 0,1 eşik değerine uyumlu kritik tutarlılık oranları (GWCR/MCCR) tanımlamayı amaçlar. Böylece Golden ve Wang [9]

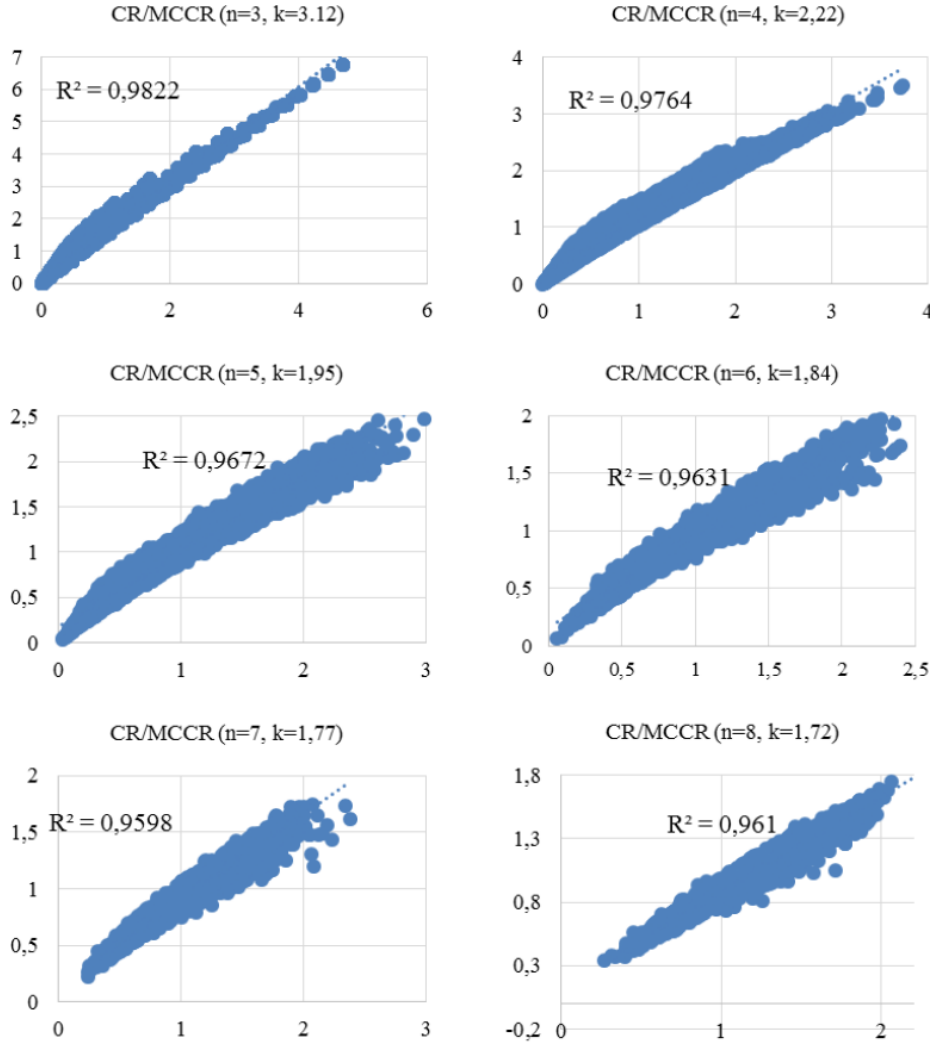
ve Takeda [10] yöntemlerini kullanan karar vericilerin tutarlılık değerlendirmelerini Saaty ve Crawford vd. tarafından kullanılan 0,1 eşik değerinde kolaylıkla değerlendirilme yapmaları sağlanır. GCR hesaplama yönteminde Saaty rassal indekslerine başvurulmuş olmasına rağmen bu çalışmada farklı olarak, yaklaşık 10000 adet farklı boyutlarda (n) rassal üretilen İKM'ler kullanılarak elde edilen GW ve MC tutarlılık indekslerinden türetilen rassal indeksler (RI_{MCn}, RI_{GWn}) tutarlılık hesaplamalarında kullanılır. Yöntemler (GW/MC) literatürdeki tutarlılık değerlendirme yöntemlerinin kronolojik sırasına göre (CI (1977), GCI (1985), GW (1989), MC (1993)) herhangi bir öndeğerlendirme yapılmadan seçilir. Golden ve Wang ve Takeda tutarlılık yöntemlerinin 0,1 eşik değeri ile uyumlu tutarlılık oranları (sırasıyla MMCR ve GWCR) için eşitlik geliştirme süreci şu şekildedir:

- Rassal türetilen İKM'ler için tutarlılık indeksleri hesaplanır
- Tutarlılık indeksleri ortalaması olan rassal indeksler hesaplanır (Tablo 5)
- Tutarlılık indeksleri rassal indeksler ile normalize edilir
- Takeda yönteminde tutarlılık, tutarlılık indeksinin $MC=1$ koşulunda gerçekleştiği için Saaty mutlak tutarlılık oranını ($CR=0$) sağlamada tutarlılık indeksleri 1'den çıkartıldıktan sonra normalize edilir. Golden ve Wang yöntemi yaklaşık sıfır değerinde olduğu için ön bir işlem uygulanmaz.
- Normalize değerlerin CR ile uyum katsayısı (k_{MC} , k_{GW}) aranır
- Normalize değer ile CR arasındaki ilişki saçılma diyagramlarında gözlemlenir
- Değişken katsayı parametresi (k_{MC} , k_{GW}) belirlenir ve normalize değer ile doğrusal ve üstel eğilim ilişkilendirilir.
- Elde edilen tutarlılık oranları ile CR arasında mutlak fark alınır
- Mutlak farkların toplamını en küçükleyen k^*_{MC} k^*_{GW} değerleri durum çözümlemesi üzerinden hedef arama yöntemi ile aratılır
- Grafiksnel eğilimleri artık değerleri de karşılayabilecek şekilde yalnız çarpımsal ve üstel gösterimler ile ifade etmek için arama

işlemine başvurulur (örneğin $f(x)=ax+b$ formu yerine $f(x)=ax$ elde edilmesi amaçlanır)

- Tutarlılık oranları (MCCR ve GWCR) ile CR arasında korelasyon ve uyum oranları kontrol edilerek tutarlılık oranı eşitlikleri geliştirilir

Öncelikle rassal üretilen İKM'ler için Takeda yöntemine göre tutarlılık indeksleri (MC_n) hesaplanır ve her boyut için rassal indeksler (R_{MC_n}) belirlenir (Tablo 5). Mutlak tutarlılıkta, 0 değerini (CR ve GCR olduğu gibi) karşılamak için tutarlılık indeksleri 1'den çıkartılarak (MC_n-1) ön düzeltme işlemi yapılır. Ön düzeltmeye uğramış tutarlılık indeksleri (MC_n-1) kendi boyutu için tanımlanan rassal indeksine bölünerek (R_{MC_n}) normalize edilir ve başlangıç tutarlılık oranları belirlenir. Başlangıç Takeda tutarlılık oranı (MCCR) ile CR arasında doğrusal ilişki görülmüş olmasına rağmen tüm boyutları (n) kapsayan ortak bir denklem formu ve katsayı ile karşılaşılmaz. Basit doğrusal regresyon formunda ($MCCR_n=k_{MC}*(MC_n-1)/R_{MC_n}$) tanımlanan $MCCR_n$ 'nin 10.000 adet İKM için CR_n ile arasındaki farklar hesaplanır. Aradaki farkların toplamını en küçükleyen ve aynı zamanda MCCR/CR uyum değerini en yükselten optimum katsayı değerleri ($k^*_{MC_n}$) bulunur (Tablo 8). En uygun katsayı değerlerine göre oluşturulan CR/MCCR eğilim grafikleri Şekil 2'de gösterilir. Tablo 8'de belirlenen en uygun k^*_{MC} değerleri göz önünde bulundurularak tüm boyutlar için ortak katsayı



Şekil 2. CR/MCCR doğrusal eğilim grafikleri ve R² değerleri (CR/MCCR trend graphs and R² values)

olarak 2 tercih edilir. $k_{MC}^* = 2$ için farklı boyutların korelasyon ve uyum değerleri hesaplanarak k_{MC}^* koşuşundaki korelasyon ve uyum değerleri ile karşılaştırılır. Değerler arasında önemli farklılıklar görülmediği için optimum uyumu sağlayan ortak çarpımsal değer $k_{MC}^* = 2$ olarak tanımlanır (Tablo 8). Sonuç olarak Takeda yöntemi ile hesaplanan tutarlılık indekslerinin tutarlılığına 0,1 eşik değerinde karar vermek için tanımlanan MCCR tutarlılık oranı Eş. 20’de gösterilir.

$$MCCR = 2 * (MC_n - 1) / RI_{MC_n} \tag{20}$$

Eşitlikte RI_{MC_n} , her n değeri için hesaplanan (Tablo.5) Takeda rassal tutarlılık indekslerini tanımlar ve 2 ortak katsayı değerini (k_{MC}^*) ifade eder.

Takeda yönteminde olduğu gibi rassal üretilen İKM’ler için Golden ve Wang tutarlılık indeksleri (GW_n) hesaplanır ve her boyut için rassal indeksler (RGW_n) hesaplanır (Tablo 5). Golden ve Wang (GW) tutarlılık indeksi, tam tutarlı ikili karşılaştırma hesaplamalarında mutlak sıfır olmamasına rağmen sıfıra çok yakın ($5,5 \times 10^{-17}$) olduğu için Takeda yönteminde yapıldığı gibi normalizasyon öncesi ön düzeltme (Takeda yönteminde 1 çıkartılır) işlemi uygulanmaz.

GW tutarlılık indeksleri rassal indeksleri RI_{GW_n} ile normalize edilerek başlangıç tutarlılık oranları (GWCR) tanımlanır. GWCR ile CR arasında doğrusal ve üstel ilişkiler gözlemlenir. Basit doğrusal regresyon ($GWCR_n = \frac{k_{GW} * GW_n}{RI_{GW_n}}$) ve üstel formlarda ($GWCR_n = \left(\frac{GW_n}{RI_{GW_n}}\right)^{k_{GW}}$) tanımlanan GW_{CR_n} ’nin 10000 adet İKM için CR_n ile arasındaki farklar hesaplanır. Aradaki farkların toplamını en küçükleyen ve aynı zamanda CR/GWCR uyum değerini en yükselten optimum katsayı değerleri ($k_{MC_n}^*$) bulunur (Tablo 9). GWCR’nin üstel değerlere (k_{GW}^*) dayalı hesaplamalarının CR ile daha yüksek korelasyon oranını yansıttığı görülür (Şekil 3). Farklı boyutlara göre elde edilen en uygun üstel değerleri (k_{GW}^*) kapsayan ortak değer 2 ($k_{GW}^*=2$) olarak seçilir.

Saaty CR ve geometrik ortalama yöntemi GCR’de olduğu gibi 0,1 eşik değeri ile uyumlu GWCR tutarlılık oranı Eş. 21 ile hesaplanır.

$$GWCR = (GW_n / RI_{GW_n})^2 \tag{21}$$

Eşitlikte RI_{GW_n} , farklı boyutlarda tanımlanan Golden ve Wang tutarlılık indekslerinden (GW_n) türetilen rassal indeksleri ifade eder.

Tutarlılık indekslerinin yorumlanmasında önemli bir araç olan tutarlılık oranları, karar vericilerin ikili karşılaştırmalarını değerlendirmelerinde önemli bir araçtır. Tutarlılık oranı için eşik değerinin tanımlanması değerlendirmelerin daha objektif ve kesin yapılmasını sağlar. Bu çalışma CR için kabul gören ve GCR için genişletilen 0,1 kabul eşik değerinin Takeda ve Golden Wang tutarlılık hesaplama yöntemleri için geliştirilmesi ile ilgilidir.

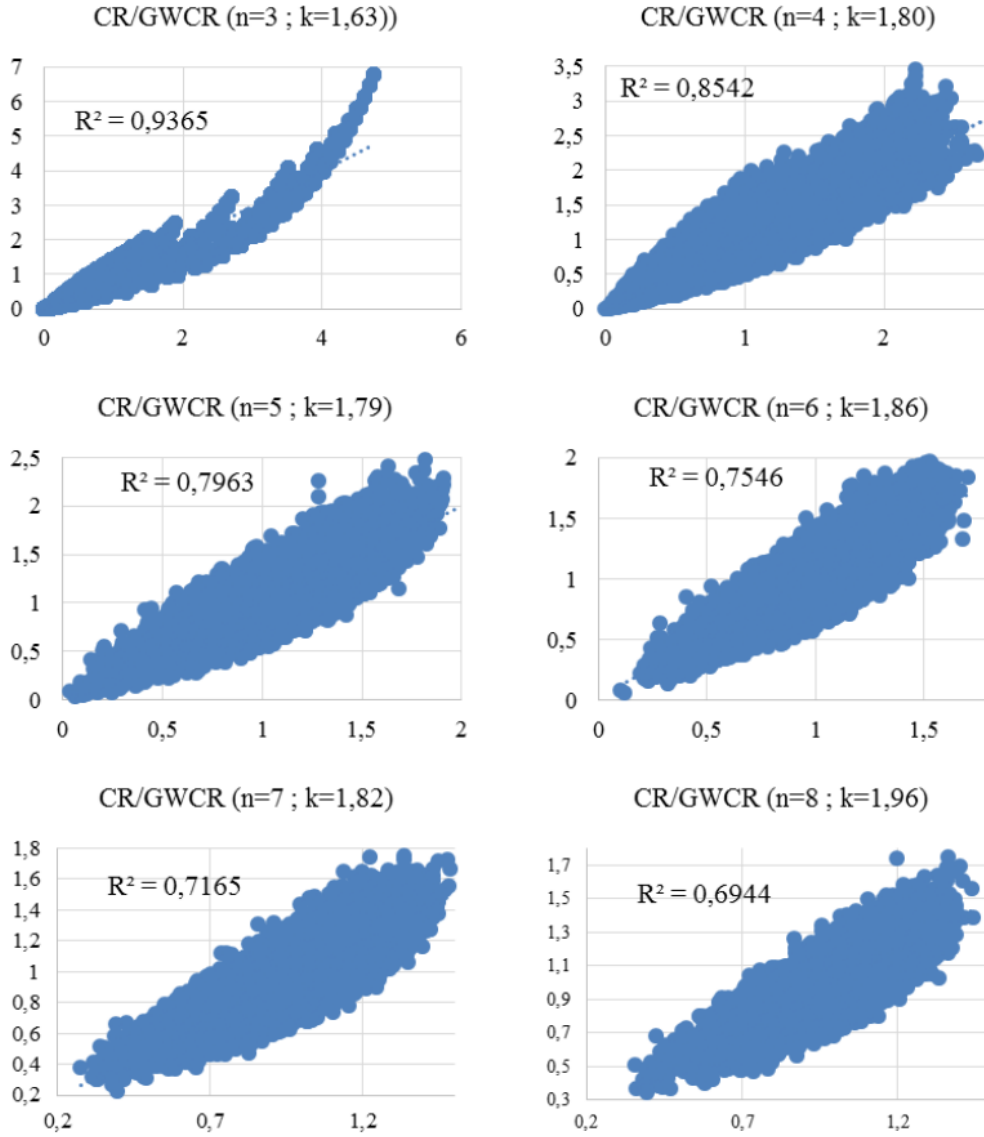
Çalışma, [1/9, 9] Saaty ölçeğinde tanımlanan 17 farklı değerlendirme ölçülerinin MSEXcel programında kare matrislerin üçgenine rassal atanması ve rassal İKM’lerin türetilmesi ile başlar. İKM’ler özel değerlendirmeden uzak olduğu için tutarlılıkları hakkında ön bilgi bulunmamaktadır. Yüksek veri kullanımının (10.000 adet İKM) sonucu olan yöntem parametreleri bu açıdan objektif hesaplamalardan elde edilir. Verilerin geçerliliğini değerlendirmek için çalışmadan elde edilen Saaty rassal indeksleri literatürdeki farklı çalışma değerleri ile karşılaştırılır (Tablo 6). Aynı zamanda verilerin yöntemsel uygulamadaki geçerliliklerini doğrulamak için CR ve GCR değerleri hesaplanarak aralarındaki uyum gözlemlendi (Tablo 7). Elde edilen değerlerin literatür değerleri ile uyumlu olması verilerin hesaplamada kullanılabilirliği gösterir. Ayrıca üretilen İKM verilerden CI, GCI, MC ve GW tutarlılık indeksleri ve farklı boyutlar (n=1,2,...,9) için rassal indeksleri hesaplanır (Tablo 5). Farklı boyutlar için yöntemlerin rassal indeksleri arasındaki ilişkiler (Tablo 4) gözlemlenerek tutarlılık oranları arasındaki ilişki hakkında ön değerlendirmelerde bulunulur. Farklı boyutlarda Saaty ve Takeda rassal indeksleri arasındaki yüksek korelasyon (Tablo 4) MCCR ile CR arasında yüksek korelasyonlu doğrusal ilişkinin ortaya çıkmasına neden olur (Tablo 8). GCR hesaplamalarında uygulanan yöntem [58] takip edilerek MC ve GW rassal indekslerine dayanarak tutarlılık oranları hesaplanır ve bu değerlerin Saaty (CR) ve Crawford and Williams (GCR) tutarlılık oranlarında olduğu gibi 0,1 eşik değerine göre değerlendirme yapılması sağlanır. Böylece karar vericilerin eşik bir değer üzerinden değerlendirme tutarlılıklarını yorumlamalarına yardımcı olunur. Rassal indekslere dayalı tutarlılık oranları hesaplama yöntemlerinin 0,1 eşik değerini verecek şekilde tanımlanması diğer tutarsızlık

Tablo 8. CR ve MCCR arasındaki korelasyon ve uyum değerleri (Correlation and compatibility values between CR and MCCR).

n	3	4	5	6	7	8	9
k_{MC}^*	3,12	2,22	1,95	1,84	1,77	1,72	1,7
Korelasyon oranı	0,9911	0,9881	0,9835	0,9814	0,9797	0,9803	0,9738
Uyum oranı	0,9627	0,9879	0,9984	1	1	1	1
Korelasyon oranı ($k_{MC}^*=2$)	0,9910	0,9881	0,9835	0,9814	0,9797	0,9803	0,9790
Uyum oranı ($k_{MC}^*=2$)	0,8968	0,9818	0,9987	1	1	1	1

Tablo 9. CR ve GWCR arasındaki korelasyon ve uyum değerleri (Correlation and compatibility values between CR and GWCR).

n	3	4	5	6	7	8	9
k_{GW}^*	1,63	1,80	1,80	1,86	1,82	1,96	1,95
Korelasyon oranı	0,9670	0,9242	0,8925	0,8687	0,8465	0,8333	0,8107
Uyum oranı	0,9444	0,9889	0,9989	0,9999	1	1	1
Korelasyon oranı ($k_{GW}^*=2$)	0,9727	0,9258	0,8931	0,8693	0,8473	0,8335	0,8109
Uyum oranı ($k_{GW}^*=2$)	0,9554	0,9878	0,9989	1	1	1	1



Şekil 3. CR/GWCR üstel eğilim grafikleri ve R^2 değerleri (CR/GWCR trend graphs and R^2 values)

yöntemleri içinde geliştirilebilir. Tutarsızlık indeksleri ilişki matrisine göre yüksek ilişkili yöntemlerin (özellikle Saaty ile) 0,1 eşik değeri bağlantısında daha uyumlu sonuçlar vermesi beklenir.

5. Sonuçlar (Conclusions)

İkili karşılaştırma matrisleri, AHP çok kriterli karar verme problemlerinde önemli bir süreç basamağıdır. İKM'ler problem elemanlarının birbirlerine göre pozisyonlarını tanımlayarak öncelik değerlerinin belirlenmesinde kritik rol oynarlar. Bu aşamada karar vericilerin tutarlı değerlendirmeler yapıp yapmadığının kontrol edilerek gerekli düzeltici önlemlerin alınması daha doğru kararların verilmesini sağlar. Tutarsızlık indeksi olarak tanımlanan ölçüt, İKM'lerde karar vericilerin değerlendirmelerini tutarlı yapıp yapmadığını belirler. Tutarsızlık indeksi İKM'ndeki değerlendirme elemanları arasındaki geçişliliği ölçerek karar verici için bir tutarlılık değeri tanımlar. Bu değerlerin yeterliliğini belirlemede, tutarlılık oranı olarak tanımlanan eşik değeri karar vericileri yönlendirmede önemli bir araçtır. Literatürde 14 farklı tutarsızlık indeksi hesaplama yöntemleri olmasına rağmen Saaty (CR) ve Crawford ve Williams

(GRC) dışındaki diğer yöntemler eşik değerini tanımlayan tutarlılık oranlarını belirtmez.

Bu çalışmada mevcut tutarsızlık hesaplama yöntemleri incelenir ve rassal türetilen İKM'lerine göre Takeda ve Golden-Wang tutarsızlık yöntemlerinin tutarsızlık indeksleri hesaplanır. Tutarsızlık indeksleri arasındaki ilişki gösterilerek yöntemler arasındaki benzerlikler ve yöntemlerin göreceli geçerliliği hakkında bilgi verilir. Rassal indeks türetme yöntemine göre tutarsızlık indekslerinin ortalamaları alınarak her yöntem için rassal indeks değerleri tanımlanır. İşlem doğruluğunu kanıtlamak için yaygın Saaty RI_n değerleri ile kontroller yapılır ve hesaplamaların uygunluğu gösterilir. Önerilen rassal indekslere dayalı tutarlılık oranı geliştirme yöntemi mevcut CR ve GCR değerleri ile kontrol edilerek yöntem geçerliliği vurgulanır. Golden, Wang ve Takeda tutarsızlık yöntemleri için tutarsızlık oranları tanımlanarak Saaty, Crawford ve Williams uyguladığı gibi eşik değeri 0,1 olarak belirlenir. Rassal İKM'lerine göre türetilen tutarsızlık indeksleri Eş. 18 ve Eş. 19 kullanılarak GWCR ve MCCR tutarlılık oranları elde edilir. Geliştirilen bu yeni tutarlılık oranları literatürde kullanılmakta olan CR ve GCR tutarlılık oranları ile 0,1 eşik değerinde uyumları

kontrol edilir. Saaty CR ile yüksek uyum oranları önerilerin geçerliliğini ortaya koyar. Tutarlılık indekslerinin hesaplanmasında rastgele türetilen İKM sayısının artırılması ile daha fazla rassal tutarlılık indeksi elde edilebilir. Bu da daha kapsamlı tutarlılık indeksinin kullanımı ile daha geçerli rassal indekslerin türetilmesini sağlar. Böylece farklı yöntemlerde rassal indekslerden türetilen tutarlılık oranlarının birbirleri ile daha uyumlu olması gerçekleşecektir. Buna rağmen İKM boyutunun artması rassal türetilen değerlendirmelerin gerçek rassal indeks değerlerini yansıtmaya gücünü zayıflatır. Örneğin; $n=4$ için türetililecek matris sayısı $17^6=24.137.569$ ve $n=6$ için türetililecek matris sayısı $17^{15}\approx 2,9 \times 10^{18}$ olup bunlar arasından yalnızca herhangi bir 10,000 'lik kısmı ele alınır. Gelecekteki çalışmalarda rasgele geliştirilen ikili karşılaştırma matris sayısı artırılarak daha kontrollü rassal indeksler tanımlanabilir. Ayrıca rassal indekslere dayalı tutarlılık oranları diğer yöntemler için geliştirilerek 0,1 eşik değerine göre daha objektif ve kesin değerlendirmelerde bulunulabilir.

Kaynaklar (References)

- Kahraman C., Onar S. C., Oztaysi B., Fuzzy multicriteria decision-making: a literature review, *International Journal of Computational Intelligence Systems*, 8, 637–66, 2015.
- Saaty T. L., A scaling method for priorities in hierarchical structures, *Journal of Mathematical Psychology*, 15 (3), 234–281, 1977.
- Kahraman C., Cebeci U., Ulukan Z., Multi-criteria supplier selection using fuzzy AHP, *Logistics Information Management*, 2003.
- Grzybowski A. Z., Starczewski T., New look at the inconsistency analysis in the pairwise-comparisons-based prioritization problems, *Expert Systems with Applications*, 159, 113549, 2020.
- Xu Y., Wang Q., Cabrero F. J., Herrera-Viedma E., Methods to improve the ordinal and multiplicative consistency for reciprocal preference relations, *Applied Soft Computing*, 67, 479–493, 2018.
- Brunelli M., Introduction to the analytic hierarchy process, Springer, 2014.
- Saaty T. L., Decision making with the analytic hierarchy process, *International Journal of Services Sciences*, 1, 83–98, 2008.
- Crawford G., Williams C., A note on the analysis of subjective judgment matrices, *Journal of Mathematical Psychology*, 29, 387–405, 1985.
- Golden B. L., Wang Q., An alternate measure of consistency, *The Analytic Hierarchy Process*, Springer, 68–81, 1989.
- Takeda E., A note on consistent adjustments of pairwise comparison judgments, *Mathematical and Computer Modelling*, 17, 29–35, 1993.
- Duszak Z., Koczkodaj W. W., Generalization of a new definition of consistency for pairwise comparisons, *Information Processing Letters*, 52 (5), 273–276, 1994.
- Salo A. A., Hämäläinen R. P., Preference programming through approximate ratio comparisons, *European Journal of Operational Research*, 82 (3), 458–475, 1995.
- Shiraishi S., Obata T., Daigo M., Properties of a positive reciprocal matrix and their application to AHP, *Journal of the Operations Research Society of Japan*, 41 (3), 404–414, 1998.
- Barzilai J., Consistency measures for pairwise comparison matrices, *Journal of Multi-Criteria Decision Analysis*, 7 (3), 123–32, 1998.
- Stein W. E., Mizzi P. J., The harmonic consistency index for the analytic hierarchy process, *European Journal of Operational Research*, 177 (1), 488–497, 2007.
- Cavallo B., D'Apuzzo L., A general unified framework for pairwise comparison matrices in multicriterial methods, *International Journal of Intelligent Systems*, 24 (4), 377–398, 2009.
- Kou G., Lin C., A cosine maximization method for the priority vector derivation in AHP, *European Journal of Operational Research*, 235 (1), 225–232, 2014.
- Kulakowski K., Notes on order preservation and consistency in AHP, *European Journal of Operational Research*, 245 (1), 333–337, 2015.
- Grzybowski A. Z., New results on inconsistency indices and their relationship with the quality of priority vector estimation, *Expert Systems with Applications*, 43, 197–212, 2016.
- Fedrizzi M., Ferrari F., A chi-square-based inconsistency index for pairwise comparison matrices, *Journal of the Operational Research Society*, 69 (7), 1125–1134, 2018.
- Seker S., Kahraman C., Socio-economic evaluation model for sustainable solar PV panels using a novel integrated MCDM methodology: A case in Turkey, *Socio-Economic Planning Sciences*, 77, 100998, 2021.
- Baswaraj S. A., Sreenivasa R. M., Pawar P. J., Application of AHP for process parameter selection and consistency verification in secondary steel manufacturing, *Materials Today: Proceedings*, 5, 27166–70, 2018.
- Hillerman T., Souza J. C. F., Reis A. C. B., Carvalho R. N., Applying clustering and AHP methods for evaluating suspect healthcare claims, *Journal of Computational Science*, 19, 97–111, 2017.
- Çevik O. S., Büyüközkan G., Öztaysi B., Kahraman C., A new hesitant fuzzy QFD approach: An application to computer workstation selection, *Applied Soft Computing*, 46, 1–16, 2016.
- Ishizaka A., Lusti M., An expert module to improve the consistency of AHP matrices, *International Transactions in Operational Research*, 11 (1), 97–105, 2004.
- Çoban V., Solar energy plant project selection with AHP decision-making method based on hesitant fuzzy linguistic evaluation, *Complex & Intelligent Systems*, 6 (3), 507–529, 2020.
- Brunelli M., Fedrizzi M., Boundary properties of the inconsistency of pairwise comparisons in group decisions, *European Journal of Operational Research*, 240 (3), 765–73, 2015.
- Koczkodaj W. W., A new definition of consistency of pairwise comparisons, *Mathematical and Computer Modelling*, 18 (7), 79–84, 1993.
- Csató L., Characterization of an inconsistency ranking for pairwise comparison matrices, *Annals of Operations Research*, 261 (1), 155–65, 2018.
- Harker P. T., Derivatives of the Perron root of a positive reciprocal matrix: with application to the analytic hierarchy process, *Applied Mathematics and Computation*, 22 (2-3), 217–232, 1987.
- Wedley W. C., Consistency prediction for incomplete AHP matrices, *Mathematical and Computer Modelling*, 17 (4-5), 151–161, 1993.
- Gass S. I., Rapcsák T., Singular value decomposition in AHP, *European Journal of Operational Research* 154 (3), 573–84, 2004.
- Khatwani G., Kar A. K., Improving the Cosine Consistency Index for the analytic hierarchy process for solving multi-criteria decision making problems, *Applied Computing and Informatics*, 13 (2), 118–129, 2017.
- Aguarón J., Escobar M. T., Moreno-Jiménez J. M., Reducing inconsistency measured by the geometric consistency index in the analytic hierarchy process, *European Journal of Operational Research*, 288 (2), 576–583, 2021.
- Saaty R. W., The analytic hierarchy process-what it is and how it is used, *Mathematical Modelling*, 9 (3-5), 161–76, 1987.
- Lane E. F., Verdini W. A., A consistency test for AHP decision makers, *Decision Sciences*, 20, 575–590, 1989.
- Noble E. E., Sanchez P. P., A note on the information content of a consistent pairwise comparison judgment matrix of an AHP decision maker, *Theory and Decision*, 34 (2), 99–108, 1993.
- Forman E. H., Random indices for incomplete pairwise comparison matrices, *European Journal of Operational Research*, 48 (1), 153–155, 1990.
- Rao Tummala V. M., Wan Y., On the mean random inconsistency index of analytic hierarchy process (AHP), *Computers and Industrial Engineering*, 27 (1-4), 401–404, 1994.
- Aguarón J., Moreno-Jiménez J. M., The geometric consistency index: Approximated thresholds, *European Journal of Operational Research*, 147 (1), 137–145, 2003.
- Özdemir M. S., Validity and inconsistency in the analytic hierarchy process, *Applied Mathematics and Computation*, 161 (3), 707–720, 2005.
- Alonso J. A., Lamata M. T., Consistency in the analytic hierarchy process: a new approach, *International Journal of Uncertainty, Fuzziness and Knowledge-based Systems*, 14 (4), 445–459, 2006.
- Chu P., Liu J. K-H., Note on consistency ratio, *Mathematical and Computer Modelling*, 35 (9-10), 1077–1080, 2002.
- Apostolou B., Hassell J. M., Note on consistency ratio: a reply, *Mathematical and Computer Modelling*, 35 (9-10), 1081–1083, 2002.
- Brunelli M., A survey of inconsistency indices for pairwise comparisons, *International Journal of General Systems*, 47 (8), 751–771, 2018.
- Şahin B., Yazır D., An analysis for the effects of different approaches used to determine expertise coefficients on improved fuzzy analytical hierarchy process method, *Journal of the Faculty of Engineering and Architecture of Gazi University*, 34 (1), 89–102, 2019.

47. Aguarón J., Escobar M. T., Moreno-Jiménez J. M., Turón A., The Triads Geometric Consistency Index in AHP-Pairwise Comparison Matrices, *Mathematics*, 8 (6), 926, 2020.
48. Liu Y., Eckert C. M., Earl C., A review of fuzzy AHP methods for decision-making with subjective judgements, *Expert Systems with Applications*, 161, 113738, 2020.
49. Bozóki S., Fülöp J., Poesz A., On pairwise comparison matrices that can be made consistent by the modification of a few elements, *Central European Journal of Operations Research*, 19 (2), 157–75, 2011.
50. Zhang J., Kou G., Peng Y., Zhang Y., Estimating priorities from relative deviations in pairwise comparison matrices, *Information Sciences*, 552, 310–327, 2021.
51. Li K. W., Wang Z.-J., Tong X., Acceptability analysis and priority weight elicitation for interval multiplicative comparison matrices, *European Journal of Operational Research*, 250 (2), 628–638, 2016.
52. Pamucar D., Ecer F., Prioritizing the weights of the evaluation criteria under fuzziness: The fuzzy full consistency method–FUCOM-F, *Facta Universitatis, Series: Mechanical Engineering*, 18 (3), 419–437, 2020.
53. Dijkstra T.K., On the extraction of weights from pairwise comparison matrices, *Central European Journal of Operations Research*, 21 (1), 103–123, 2013.
54. Johnson C. R., Horn R. A., *Matrix analysis*, Cambridge university press, Cambridge, 1985.
55. Basile L., D’Apuzzo L., Transitive matrices, strict preference order and ordinal evaluation operators, *Soft Computing*, 10 (10), 933, 2006.
56. Ji P., Jiang R., Scale transitivity in the AHP, *Journal of the Operational Research Society*, 54 (8), 896–905, 2003.
57. Saaty T. L., How to make a decision: the analytic hierarchy process, *Interfaces*, 24 (6), 19–43, 1994.
58. Crawford G. B., The geometric mean procedure for estimating the scale of a judgement matrix, *Mathematical Modelling*, 9 (3-5), 327–334, 1987.

