

Sağkalım ve Güvenilirlik Analizlerinde Yeni Bir Olasılık Dağılımı

A New Probability Distribution for Survival and Reliability Analysis

Selen ÇAKMAKYAPAN¹ , Gamze ÖZEL² 

¹ *İstanbul Medeniyet Üniversitesi, İstatistik Bölümü, 34700, İstanbul, Türkiye*

² *Hacettepe Üniversitesi, İstatistik Bölümü, 06800, İstanbul, Türkiye*

Öz

Sağkalım ve güvenilirlik analizleri; bir makinenin, malzemenin ya da bir canlının “ömrünü sürdürme ihtimali” ve “bu ömrün sonlanmasına kadar geçen süre” ile ilgilidir. Bu analizlerde, verinin en iyi şekilde temsil edilebilmesi için veriyi modelleyecek olasılık dağılımının belirlenmesi çok önemlidir. Bu çalışmada, bu alanda kullanılacak yeni bir olasılık dağılımı tanımlanmış ve bu dağılıma ilişkin istatistiksel özellikler elde edilmiştir. Uygulama iki farklı, gerçek güvenilirlik veri seti üzerinde gerçekleştirilmiş ve bu verileri modellemede daha önce kullanılmış olasılık dağılımları ile karşılaştırılmıştır. Önerilen dağılımın veriyi diğer dağılımlardan çok daha iyi modellediği gösterilmiştir.

Anahtar Kelimeler: Lindley dağılımı, Lomax dağılımı, tahmin, modelleme

Abstract

Survival and reliability analysis; It deals with the "probability of survival of a machine, material or lively" and "the time until the end of it's life". In these analyzes, it is very important to determine the probability distribution that will model the data in order to represent the data in the best way. In this study, a new probability distribution that can be used in this field is defined and statistical properties related to this distribution are obtained. The application was carried out on two different, real reliability data set and these data were compared with probability distributions previously used in modeling. It has been shown that the proposed distribution modelled the data much better than other distributions.

Keywords: Lindley distribution, Lomax distribution, estimation, modelling

I. GİRİŞ

Güvenilirlik analizi, bir malzemenin belirli bir zaman periyodunda, belirlenen şartlar altında hata vermeden kullanılabilmesi ihtimali ile ilgilidir. Mühendislik alanında daha çok kullanılan bu analiz, söz konusu olan analiz birimi canlı olduğunda sağkalım (yaşam) analizi olarak isimlendirilir. Bu analizlerde ilgililenen bir olayın gerçekleşmesine kadar geçen süre olasılık dağılımları ile modellenir. Olasılık dağılımları, gerçek yaşamdaki çok farklı karakteristikteki veri setlerini tanımlamak, onlar hakkında tahminler yapmak için kullanılır.

Son yıllarda yapılan araştırmalar, veri modelleme uygulamalarında büyük ölçüde çok yönlülüğe izin veren, iyi bilinen dağılımlardan daha esnek ve aynı zamanda bu dağılımların çekici özelliklerini de taşıyan, farklı yapıdaki verileri modelleyebilen yeni dağılım aileleri kavramına odaklanmıştır. Son yıllarda literatürde, yeni dağılımlar tanımlamak için üretici dağılım, temel dağılım ve bağ fonksiyonu yönteminin kullanıldığı çalışmalar yer almaktadır. Bu tanımlamada kullanılan ek parametre (ler), kuyruk özelliklerini temsil edebilmek ve üretici olasılık dağılım ailesinin uyum iyiliğini iyileştirmek için kullanılmaktadır. Bu çalışmaların bazıları: Marshall-Olkin dağılım ailesi (MO-G) [1], beta-G ailesi [2], gamma-G dağılım ailesi [3], exponentiated T-X dağılım ailesi [4], Kumaraswamy-G dağılım ailesi (Kw-G) [5], transformed-transformer (T-X) [6], additive Weibull-G dağılım ailesi [7], Lindley-G dağılım ailesi Cakmakyapan [8], odd Lindley-G dağılım ailesi [9], Alpha Power dönüşümü ailesi [10], Frechet Topp Leone-G dağılım ailesi [11].

Bu araştırmanın amacı, Lindley olasılık dağılımını üretici dağılım olarak dikkate alarak, temel dağılımın Lomax olasılık dağılımı olarak tercih edildiği yeni çok yönlü bir dağılım elde etmektir. Çakmakyapan ve Özel [8] yaptıkları çalışmada, Lindley dağılımı ile çalışmış ve Lindley-G dağılım ailesini önermişlerdir. Bu çalışmada ise bu dağılım ailesinin yeni bir üyesi olan Lindley-Lomax ("LL") tanımlanmış, dağılım fonksiyonlarının yanı sıra, kantil fonksiyon, momentler, entropi gibi ek özellikler incelenmiştir. Özellikle bu dağılımın esnekliği ve uygulamada ki başarısı vurgulanmaktadır. Yeni bir dağılım tanımlamaya teşvik eden noktalar aşağıdaki gibi ifade edilebilir:

- farklı karakterdeki hazard fonksiyonlarını temsil edebilecek özel modeller tanımlamak,
- aynı temel dağılım altında oluşturulan diğer modellerden sürekli olarak daha iyi uyum sağlamak,

(iii) basıklığı temel modele kıyasla daha esnek hale getirmek,
 (iv) simetrik, sağa ve sola çarpık ve ters J şeklinde dağılımlar oluşturmak.

Makalenin içeriği şu şekilde düzenlenmiştir: Bölüm 2'de LL dağılımına ilişkin olasılık dağılım fonksiyonları elde edilmiştir. Ardından, hazard, kantil fonksiyonları, momentler ve moment üreten fonksiyonlara yer verilmiştir. Analitik olarak, olasılık yoğunluk ve hazard fonksiyonlarının davranışları grafiksel olarak incelenmiştir. Devamında parametre tahminleri, maksimum olasılık tahmin süreci kullanılarak tartışılmıştır. Bölüm 3'te, LL dağılımının yeteneğini göstermek için iki gerçek veri setine yapılan uygulamaya yer verilmiştir. Bölüm 4'te makale sonuçlandırılmış ve gelecek çalışmalar hakkında fikir verilmiştir.

II. MATERYAL VE YÖNTEM

2.1. Lindley ve Lomax Olasılık Dağılımları

Lindley olasılık dağılımı, ilk olarak başarısızlık zamanı verilerini analiz etmek için Lindley [12] tarafından önerilmiştir. Üstel ve gama dağılımlarının bir kombinasyonu şeklinde ifade edilir. Lindley dağılımının çeşitli özellikleri, sağkalım ve güvenilirlik analizlerinde sık kullanılan üstel veya Weibull dağılımlarından daha çekicidir. Lindley dağılımının üstel dağılım ailesinin bir üyesi olmasının yanı sıra, Mazucheli ve Achcar'a göre [13], matematiksel özellikleri çoğu üstel dağılımdan çok daha yönlüdür. Bir Lindley rastgele değişkeni X 'in olasılık yoğunluk fonksiyonu (oyf) ve birikimli dağılım fonksiyonu (bdf) ölçek parametresi θ olmak üzere, sırasıyla aşağıdaki gibi verilir.

$$li(x) = \frac{\theta^2}{1+\theta} (1+x)e^{-\theta x}, \quad x > 0, \theta > 0 \quad (1)$$

$$Li(x) = 1 - \frac{1+\theta+\theta x}{1+\theta} e^{-\theta x}, \quad x > 0, \theta > 0 \quad (2)$$

İki parametrelili Lomax dağılımı, genelleştirilmiş Pareto dağılımının bir üyesidir. Azalan hazard fonksiyonuna sahiptir [14]. Üstel, Weibull ve gama dağılımları da bu dağılıma ağır kuyruklu alternatifler olarak önerilmiştir [15]. Aynı zamanda Burr ailesi dağılımları [16] ile ilgilidir ve bileşik gama dağılımlarının [17] özel bir durumu olarak türetilir. Lomax dağılımı biyoloji, ekonomi, aktüerya bilimi, kuyruk problemleri ve ömür ve dayanıklılık modellemesinde yaygın olarak kullanılır. Dağılımın kullanıldığı çalışmalar arasında, gelir ve kaynaklar [18, 19], firma ölçeği [20],

sunuculardaki makine dosyalarının boyut dağılımı [21], kararlılık ve yaşam kontrolü alanındaki [22] verileri modelleme yer almaktadır.

Lomax dağılımından gelen rastgele bir X değişkeninin α şekil parametresi ve σ ölçek parametresi vardır. Bu dağılıma ilişkin oyf ve bdf sırasıyla aşağıdaki gibi verilir:

$$g(x) = \frac{\alpha}{\sigma} \left(1 + \frac{x}{\sigma}\right)^{-(\alpha+1)}, \quad x \geq 0, \alpha, \sigma > 0 \quad (3)$$

$$G(x) = 1 - \left(1 + \frac{x}{\sigma}\right)^{-\alpha}, \quad x \geq 0, \alpha, \sigma > 0 \quad (4)$$

2.2. Lindley-Lomax Dağılımı

Cakmakyapan ve Özel [8] Lindley-G olasılık ailesine ilişkin oyf ve bdf eşitliklerini sırasıyla aşağıdaki gibi tanımlamıştır.

$$F(x) = 1 - \left[1 - \frac{\theta}{\theta+1} [\log(1 - G(x))]\right] [1 - G(x)]^\theta \quad (5)$$

$$f(x) = g(x) [1 - \log(1 - G(x))] [1 - G(x)]^{\theta-1} \frac{\theta^2}{\theta+1} \quad (6)$$

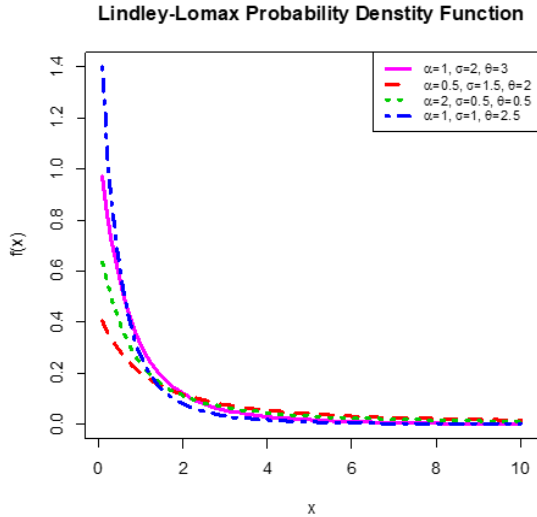
Bu eşitlikte yer alan $g(\cdot)$ fonksiyonu temel dağılıma ilişkin oyf'dir. Eşitlik (5) ve (6) da temel dağılımın Lomax olarak seçilmesi ile LL olasılık dağılımı aşağıdaki gibi elde edilir:

$$F(x) = 1 - \left[1 + \frac{\theta\alpha}{\theta+1} \log\left(1 + \frac{x}{\sigma}\right)\right] \left(1 + \frac{x}{\sigma}\right)^{-\alpha\theta}, \quad (7)$$

$$x \geq 0, \sigma > 0, \alpha > 0, \theta > 0$$

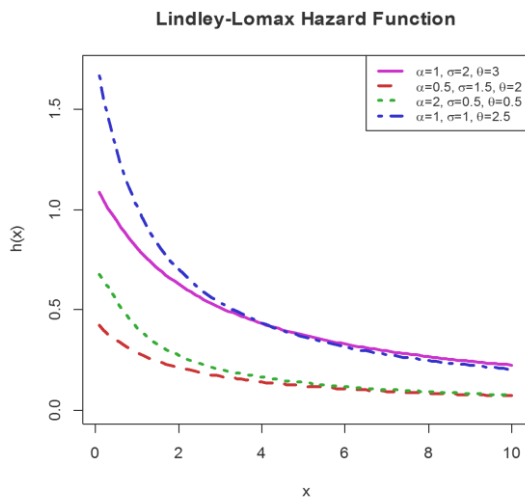
$$f(x) = \frac{\theta^2\alpha}{(\theta+1)\sigma} \left[1 + \alpha \log\left(1 + \frac{x}{\sigma}\right)\right] \times \left(1 + \frac{x}{\sigma}\right)^{-(\alpha\theta+1)}, \quad x \geq 0, \sigma > 0, \alpha > 0, \theta > 0 \quad (8)$$

Eşitlik (8) de yer alan oyf'ye sahip bir X rastgele değişkeni, $X \sim LL(\alpha, \sigma, \theta)$ şeklinde gösterilir. İçeren rastgele bir X değişkeni ile gösterilir. Burada $\sigma = 1$ olması durumunda Lindley Standart Lomax (LSL) dağılımı elde edilmiş olur. Eşitlik (8) deki LL dağılımı Lindley ve Lomax dağılımlarından çok daha karardır ve kuyrukların daha esnek olmasını sağlar. Şekil 1 de, çeşitli parametre değerleri için LL dağılımının oyf'si için ilişkin grafikleri gösterilmiştir.



Şekil 1. Farklı parameter değerleri için oyf grafiği LL dağılımına ilişkin hazard fonksiyonu (hf) ise aşağıdaki gibi tanımlanır:

$$\tau(x) = \frac{\theta^i \alpha}{(\theta + 1) \sigma} \frac{\left[1 + \alpha \log \left(1 + \frac{x}{\sigma} \right) \right]}{\left[1 + \frac{\theta \alpha}{\theta + 1} \log \left(1 + \frac{x}{\sigma} \right) \right] \left(1 + \frac{x}{\sigma} \right)} \quad (9)$$



Şekil 2. Farklı parameter değerleri için hf grafiği

Şekil 2’de yer alan farklı parametre değerlerine karşılık gelen hf eğrileri, hazard oranlarının azaldığını gösterir.

2.3. Lindley-Lomax Dağılımsal Özellikleri

Bu bölümde, LL'nin dağılım özelliklerini inceleyeceğiz. LL dağılımının oyf ve bdf'si mevcut istatistiksel paket programlarında yaygın olarak bulunan matematiksel fonksiyonları içermesine

rağmen, sayısal hesaplamalarda oyf için kuvvet serileri açılımları kullanılabilir. Bir n pozitif tam sayı kuvvetiyle tanımlanmış bir kuvvet serisi için, aşağıdaki eşitlik kullanılır [23].

$$\left(\sum_{i=0}^{\infty} a_i u^i \right)^n = \sum_{i=0}^{\infty} c_{n,i} u^i \quad (10)$$

Burada $i = 1, 2, \dots$ için $c_{n,0} = a_0^n$ ve $c_{n,i} = (ia_0)^{-1} \sum_{m=1}^i [m(n+1) - i] a_m c_{n,i-m}$ şeklinde tanımlanır. Ayrıca, bu bölümde aşağıdaki eşitliklerden faydalanılmıştır.

$$[1 - z]^\theta = \sum_{i=0}^{\infty} (-1)^i \binom{\theta}{i} z^i \quad (11)$$

$$\log [1 - z] = -z \sum_{i=0}^{\infty} \frac{z^k}{k + 1} \quad (12)$$

2.3.1. Kantil fonksiyonu

LL dağılımın kantil fonksiyonu, u tek düze dağılımlı bir rastgele değişkeni olmak üzere, Q(u) ve 0 < u < 1 için, eşitlik (13) ile ifade edilir.

$$Q(u) = G^{-1} \left(1 - e^{-Li^{-1}(u)} \right) \quad (13)$$

$$Li^{-1}(u) = - \frac{W \left[(u-1)(\theta+1)e^{-(\theta+1)} \right] - \theta - 1}{\theta} \quad (14)$$

$$G^{-1}(u) = \left[(1-u)^{-1/\alpha} - 1 \right] \sigma \quad (15)$$

Eşitlik (13) te Lindley ve Lomax dağılımlarına ilişkin (14)-(15) kantil eşitlikleri yerlerine konursa, W(.) Lambert fonksiyonunu ifade etmek üzere, LL dağılımına ilişkin kantil fonksiyonu aşağıdaki gibi elde edilmiş olur.

$$Q(u) = \left\{ \left[1 - \left(1 - e^{- \frac{W \left[(u-1)(\theta+1)e^{-(\theta+1)} \right] + \theta + 1}}{\theta}} \right) \right]^{-1/\alpha} - 1 \right\} \sigma \quad (16)$$

2.3.2. Momentler

LL dağılımına sahip bir X rastgele değişkenine ilişkin n. dereceden merkezsel olmayan moment aşağıdaki gibi ifade edilir:

$$\begin{aligned}
 E(X^n) &= \int_0^\infty x^n \frac{\theta^2 \alpha}{(\theta+1)\sigma} \left[1 + \alpha \log \left(1 + \frac{x}{\sigma} \right) \right] \\
 &\quad \times \left(1 + \frac{x}{\sigma} \right)^{-(\alpha\theta+1)} dx \\
 &= \frac{\theta^2 \sigma^{n-1}}{(\theta+1)} \int_0^\infty \left(e^{z/\alpha} - 1 \right)^n (1+z) \left(e^{z/\alpha} \right)^{-\alpha\theta} dz \quad (17) \\
 &= \frac{\theta^2 \sigma^{n-1}}{(\theta+1)\alpha^n} \sum_{k=0}^\infty c_{n,k} \int_0^\infty z^{n+k} (1+z) e^{-\theta z} dz \\
 &= \frac{\sigma^{n-1}}{(\theta+1)\alpha^n} \sum_{k=0}^\infty c_{n,k} \frac{(k+n)!(\theta+k+n+1)}{\theta^{k+n}}
 \end{aligned}$$

Burada $z = \alpha \log \left(1 + \frac{x}{\sigma} \right)$ dir ve eşitlik (10)

yardımıyla $c_{n,k} = \frac{1}{k} \sum_{m=1}^k [m(n+1) - k] \frac{1}{\alpha^m} c_{n,i-m}$ şeklinde ifade edilir.

X rastgele değişkenine ilişkin merkezsel momentler ise eşitlik (18) ile elde edilir.

$$\mu_r = \sum_{k=0}^r (-1)^k \binom{r}{k} \mu_1^k \mu_{r-k}' \quad (18)$$

2.3.3. Moment Üreten fonksiyon

X'in moment üreten fonksiyonu $G^{-1}(x) = Q(u) = x$ olmak üzere $M(t) = E(e^{tx})$ aşağıdaki gibi elde edilir:

$$\begin{aligned}
 M(t) &= \int_0^\infty e^{tx} \frac{\theta^2 \alpha}{(\theta+1)\sigma} \left[1 + \alpha \log \left(1 + \frac{x}{\sigma} \right) \right] \\
 &\quad \times \left(1 + \frac{x}{\sigma} \right)^{-(\alpha\theta+1)} dx \\
 &= \sum_{i=0}^\infty \frac{1}{n!} \int_0^\infty x^n \frac{\theta^2 \alpha}{(\theta+1)\sigma} \left[1 + \alpha \log \left(1 + \frac{x}{\sigma} \right) \right] \\
 &\quad \times \left(1 + \frac{x}{\sigma} \right)^{-(\alpha\theta+1)} dx \\
 &= \sum_{n=0}^\infty \frac{1}{n!} E(x^n) \\
 &= \sum_{n=0}^\infty \frac{1}{n!} \frac{\sigma^{n-1}}{(\theta+1)\alpha^n} \sum_{k=0}^\infty c_{n,k} \frac{(k+n)!(\theta+k+n+1)}{\theta^{k+n}} \quad (19) \\
 &= \frac{\theta^2}{\theta+1} \left[a_k \int_0^1 e^{tQ(u)} u^k du + a_k b_i \int_0^1 e^{tQ(u)} u^{k+i+1} du \right]
 \end{aligned}$$

burada $a_k = \sum_{k=0}^{\theta-1} (-1)^k \binom{\theta-1}{k}$ ve $b_i = \sum_{i=0}^\infty \frac{1}{i+1}$ dir.

2.4. Diğer Özellikler

2.4.1. Entropi

Bir X rastgele değişkeninin entropisi, belirsizlik değişimin bir ölçüsüdür. En çok kullanılan entropi ölçütleri, Shannon ve Rènyi entropileridir. Oy si f(x) olan bir rastgele değişkeni için Rènyi entropisi eşitlik (20) ile tanımlanır.

$$I_R(\gamma) = \frac{\gamma}{1-\gamma} \log \int_0^\infty f^\gamma(x) dx \quad (20)$$

burada $\gamma > 0$ ve $\gamma \neq 1$ dir. LL dağılımı için Rènyi entropisi

$$\begin{aligned}
 I_R(\gamma) &= \frac{\gamma}{1-\gamma} \log \int_0^\infty f^\gamma(x) dx \\
 &= \frac{\gamma}{1-\gamma} \log \left\{ \int_0^\infty \frac{\theta^{2\gamma}}{(\theta+1)^\gamma} [1 - \log(1 - G(x))]^\gamma \right. \\
 &\quad \left. \times [1 - G(x)]^{\theta-\gamma} g^\gamma(x) dx \right\} \quad (21) \\
 &= \frac{\gamma}{1-\gamma} \log \left\{ \frac{\gamma \theta^{2\gamma}}{(\theta+1)^\gamma} D_{j,k} E_{i,k} \right\}
 \end{aligned}$$

eşitliği ile elde edilir. Burada

$$E_i = \sum_{i=0}^{\theta-\gamma} (-1)^i \binom{\gamma\theta-\gamma}{i}$$

$$D_{j,k} = \sum_{k=0}^{k-\gamma} \binom{k-\gamma}{k} \sum_{j=0}^k \frac{(-1)^{j+k} \binom{k}{j} p_{j,k}}{\gamma-j}$$

$$I_{i,k} = \int_0^\infty G^{i+\gamma+k}(x) g^\gamma(x) dx$$

$$= \alpha^\gamma \sigma^{1-\gamma} \sum_{r=1}^{i+\gamma+k} (-1)^r \binom{i+\gamma+k}{r} (\alpha r + \gamma \alpha + \gamma - 1)^{-1}$$

olarak tanımlanır. $k = 1, 2, \dots$ olmak üzere, kuvvet serisi ve binom açılımından $p_{j,0} = 1$ için

$$p_{j,k} = \binom{k}{k}^{-1} \sum_{m=1}^i [k - m(j+1)] c_m p_{j,k-m} \quad \text{ve}$$

$c_k = (-1)^{k+1} (k+1)^{-1}$ elde edilir.

Shannon entropisi $E[-\log f(x)]$ olarak tanımlanır ve Rènyi entropisinin özel bir halidir. Shannon entropisi, çeşitli yoğunluk fonksiyon şekillerinin

karşılaştırılmasında ve kuyrukların ağırlık ölçümünde rol oynar. Bir $X \sim LL(\alpha, \sigma, \theta)$ rastgele değişkeninin Shannon entropisi

$$E[-\log f(x)] = -\sum_{j=1}^{\infty} (-1)^{j-1} \sum_{k=0}^{\infty} c_{j,k} E[G^{k+j}(x)] + (\theta - 1) \sum_{k=0}^{\infty} c_{1,k} E[G^{k+1}(x)] - \log \theta^2 + \log(\theta + 1) - E[\log(g(x))]$$

burada $c_{j,k} = k^{-1} \sum_{m=1}^k \frac{[m(j+1) - k]}{m+1} c_{j,k-m}$ dir.

2.4.2. Güvenirlilik

Güvenirlilik ya da dayanıklılık olarak ifade edebileceğimiz kavram, bileşenin ömrü ile ilgilidir. X_1 , bu bileşenin kuvvete olan direncini ifade eden rastgele değişkeni X_2 ise bileşenin maruz kaldığı kuvveti ifade eden rastgele değişkenleri olsun. O halde, bileşenin ömrü, sahip olduğu direncin maruz kaldığı kuvveti aşmaması ile ilgilidir. Yani, $X_1 > X_2$ olduğu sürece bir başarı söz konusudur. Aksi takdirde bir hata ile karşılaşılır. Güvenirlilik ise bu bileşenin dayanma olasılığının bir ölçüsüdür ve $R = P(X_2 < X_1)$ olarak ifade edilir. Güvenirlilik özellikle mühendislik alanında birçok uygulamada kullanılan bir ölçüttür. Bu ölçüt $X_1 \sim LL(\sigma, \alpha, \theta_1)$ and $X_2 \sim LL(\sigma, \alpha, \theta_2)$ için aşağıdaki gibi elde edilmiştir.

$$R = \int_0^{\infty} f_1(x) F_2(x) dx = -\frac{\theta_1}{(\theta_1 + 1)} - \frac{\theta_1^2}{(\theta_1 + 2)(\theta_1 + \theta_2 - 1)} + \left(\frac{\theta_1^2 \theta_2}{(\theta_1 + 1)(\theta_2 + 1)} + \frac{\theta_1^2}{(\theta_1 + 1)} \right) \times \sum_{i=0}^{\infty} \sum_{j=0}^{\theta_1 + \theta_2 - 1} (-1)^{j+1} \binom{\theta_1 + \theta_2 - 1}{j} \frac{1}{(i+j+2)(i+1)} - \frac{\theta_1^2}{(\theta_1 + 1)} \sum_{i=0}^{\infty} \sum_{j=0}^{\theta_1 - 1} (-1)^{j+1} \binom{\theta_1 - 1}{j} \frac{1}{(i+j+2)(i+1)} - \frac{\theta_1^2 \theta_2}{(\theta_1 + 1)(\theta_2 + 1)} \sum_{i=0}^{\infty} \sum_{j=0}^{\theta_1 + \theta_2 - 1} (-1)^j \binom{\theta_1 + \theta_2 - 1}{j} \times c_{2,i} \frac{1}{(i+j+3)}$$

burad $c_{2,i} = (i)^{-1} \sum_{m=1}^i \left(\frac{3m-i}{m+1} \right) c_{2,i-m}$ dir.

2.4.3. Parametre Tahminleri

Literatürde, parametre tahminine yönelik birçok yaklaşım önerilmiştir, ancak en çok olabilirlik (EÇÖ) yöntemi en yaygın kullanılanı olmaya devam etmektedir. EÇÖ tahminleri çekici özelliklere sahiptir ve güven aralıklarının ve bölgelerinin oluşturulmasının yanı sıra test istatistiklerinde de kullanılabilir.

$$L(\theta) = \prod_{i=1}^n \left\{ \frac{\theta^2}{\theta+1} [1 - \log(1 - G(x_i))] \right\} \times (1 - G(x_i))^{\theta-1} g(x_i)$$

$$\log L = -(\alpha\theta + 1) \left(\sum_{i=1}^n \log \left(\frac{x_i}{\sigma} + 1 \right) \right) + \left(\sum_{i=1}^n \log \left(\log \left(\frac{x_i}{\sigma} + 1 \right) \alpha + 1 \right) \right) - n \log(\theta + 1) - n \log(\sigma) + 2n \log(\theta)$$

LL dağılımından gelen bir X rastgele değişkeni için EÇÖ eşitliği (24) te verilmiştir. Bu eşitliğin logaritması alınıp, parametrelere göre kısmi türevlerinin alınmasıyla parametrelere ilişkin EÇÖ eşitlikleri elde edilir. Bu eşitlikler aşağıda yer almaktadır. Bu eşitlikler, 0'a eşitlenip çözümlenip parametre değerleri elde edilir.

$$\frac{\partial \log L}{\partial \theta} = -\alpha \left(\sum_{i=1}^n \log \left(\frac{x_i}{\sigma} + 1 \right) \right) + \frac{n\theta + 2n}{\theta^2 + \theta},$$

$$\frac{\partial \log L}{\partial \sigma} = (\alpha\theta + 1) \sum_{i=1}^n \frac{x_i}{\sigma(x_i + \sigma)} + \sum_{i=1}^n \left[\frac{\log \left(\frac{x_i}{\sigma} + 1 \right) x_i \alpha}{\sigma(x_i + \sigma) \left(\log \left(\frac{x_i}{\sigma} + 1 \right) \alpha + 1 \right)^2} - \frac{\frac{x_i}{\sigma}}{\sigma(x_i + \sigma) \left(\log \left(\frac{x_i}{\sigma} + 1 \right) \alpha + 1 \right)} \right] - \frac{n}{\sigma}$$

$$\frac{\partial \log L}{\partial \alpha} = \sum_{i=1}^n \left[\frac{\log \left(\frac{x_i}{\sigma} + 1 \right)}{\log \left(\frac{x_i}{\sigma} + 1 \right) \alpha + 1} \right] - \theta \left(\sum_{i=1}^n \log \left(\frac{x_i}{\sigma} + 1 \right) \right)$$

Parametre tahminlerinin güven aralıkları ve hipotez testleri için Fisher bilgi matrisine ihtiyaç duyulur. Fisher bilgi matrisinin elemanlarına ilişkin eşitlikler (29)-(34) teki gibi elde edilir. Bilgi Fisher matrisi :

$$I = \begin{bmatrix} I_{11} & I_{12} & I_{13} \\ I_{21} & I_{22} & I_{23} \\ I_{31} & I_{32} & I_{33} \end{bmatrix}$$

şeklinde tanımlanmak üzere, elemanları eşitlik (29)-(34)'daki gibi elde edilmiştir.

$$I_{11} = \frac{\partial^2 \log L}{\partial \theta^2} = -\frac{(2\theta + 1)(n\theta + 2n)}{(\theta^2 + \theta)^2} + \frac{n}{\theta^2 + \theta}, \tag{29}$$

$$I_{22} = \frac{\partial^2 \log L}{\partial \sigma^2} = -\frac{(\alpha\theta + 1)}{\sigma^2} \sum_{i=1}^n \frac{x_i}{(x_i + \sigma)} - \frac{(\alpha\theta + 1)}{\sigma} \sum_{i=1}^n \frac{x_i}{(x_i + \sigma)^2} - \frac{\alpha}{\sigma^2} \sum_{i=1}^n \frac{x_i \log\left(\frac{x_i}{\sigma} + 1\right)}{(x_i + \sigma) \left(\log\left(\frac{x_i}{\sigma} + 1\right) \alpha + 1\right)^2} - \frac{\alpha}{\sigma} \sum_{i=1}^n \frac{x_i \log\left(\frac{x_i}{\sigma} + 1\right)}{(x_i + \sigma)^2 \left(\log\left(\frac{x_i}{\sigma} + 1\right) \alpha + 1\right)^2} + \frac{1}{\sigma^2} \sum_{i=1}^n \frac{x_i}{(x_i + \sigma) \left(\log\left(\frac{x_i}{\sigma} + 1\right) \alpha + 1\right)} + \frac{1}{\sigma} \sum_{i=1}^n \frac{x_i}{(x_i + \sigma)^2 \left(\log\left(\frac{x_i}{\sigma} + 1\right) \alpha + 1\right)} + \frac{2\alpha^2}{\sigma^2} \sum_{i=1}^n \frac{\log\left(\frac{x_i}{\sigma} + 1\right) x_i^2}{(x_i + \sigma)^2 \left(\log\left(\frac{x_i}{\sigma} + 1\right) \alpha + 1\right)^3} - \frac{2\alpha^2}{\sigma^2} \sum_{i=1}^n \frac{x_i^2}{(x_i + \sigma)^2 \left(\log\left(\frac{x_i}{\sigma} + 1\right) \alpha + 1\right)^2} + \frac{n}{\sigma^2}, \tag{30}$$

$$I_{33} = \frac{\partial^2 \log L}{\partial \alpha^2} = -\sum_{i=1}^n \frac{\log\left(\frac{x_i}{\sigma} + 1\right)^2}{\left(\log\left(\frac{x_i}{\sigma} + 1\right) \alpha + 1\right)^2}, \tag{31}$$

$$I_{12} = \frac{\partial \log L}{\partial \theta \partial \sigma} = \frac{\alpha}{\sigma} \sum_{i=1}^n \frac{x_i}{(x_i + \sigma)}, \tag{32}$$

$$I_{13} = \frac{\partial \log L}{\partial \theta \partial \alpha} = -\sum_{i=1}^n \log\left(\frac{x_i}{\sigma} + 1\right), \tag{33}$$

$$I_{23} = \frac{\partial \log L}{\partial \sigma \partial \alpha} = \frac{\alpha}{\sigma} \sum_{i=1}^n \frac{\log\left(\frac{x_i}{\sigma} + 1\right) x_i}{(x_i + \sigma) \left(\log\left(\frac{x_i}{\sigma} + 1\right) \alpha + 1\right)^2} - \frac{1}{\sigma} \sum_{i=1}^n \frac{x_i}{(x_i + \sigma) \left(\log\left(\frac{x_i}{\sigma} + 1\right) \alpha + 1\right)} - \frac{\theta}{\sigma} \sum_{i=1}^n \frac{x}{(x + \sigma)}$$

III. UYGULAMA

Bu bölümde, LL dağılımının kullanılabilirliği ile sağkalım ve güvenilirlik verilerini modellemedeki başarısını göstermek için iki gerçek veri seti üzerinde çalışılmıştır. Parametre tahminlerini elde etmek için EÇÖ yöntemi kullanılmıştır. İlk olarak, veri setlerini tanımlanmış ve parametre (ve parantez içindeki standart hataları) tahminleri hesaplanmıştır. Sonrasında, Akaike bilgi kriteri (AIC) ve Bayes bilgi kriteri (BIC) değerleri verilmiştir. Bu kriterler kullanılarak dağılımların veri setlerini modelleme başarıları karşılaştırılmıştır. Küçük değerler daha iyi uyumu ifade etmektedir.

Ayrıca, modellemede kullanılan dağılımların verilere uyup uymadığını kontrol etmek için Cramér-Von-Mises(W) ve Anderson-Darling(A) uygunluk testleri kullanılmıştır. Ardından, Şekil 3 ve 4'te, model değişikliklerinin görsel bir karşılaştırmasını elde etmek için, elde edilen oylar veri setlerinin histogramlarıyla beraber gösterilmiştir.

İlk veri seti Lee ve Wang [24] 'dan elde edilen ve 128 mesane kanseri hastasından oluşan rastgele bir numunenin remisyon sürelerini (ay olarak) temsil etmektedir.

Tablo 1. Remisyon Süreleri

0.08,2.09, 3.48, 4.87, 6.94 , 8.66, 13.11, 23.63, 0.20, 2.23, 3.52, 4.98, 6.97, 9.02, 13.29, 0.40, 2.26,3.57, 5.06, 7.09, 9.22, 13.80, 25.74, 0.50, 2.46 , 3.64, 5.09, 7.26, 9.47, 14.24, 25.82, 0.51, 2.54,3.70, 5.17, 7.28, 9.74, 14.76, 26.31, 0.81, 2.62, 3.82, 5.32, 7.32, 10.06, 14.77, 32.15, 2.64, 3.88,5.32, 7.39, 10.34, 14.83, 34.26, 0.90, 2.69, 4.18, 5.34, 7.59, 10.66, 15.96, 36.66, 1.05, 2.69, 4.23,5.41, 7.62, 10.75, 16.62, 43.01, 1.19, 2.75, 4.26, 5.41, 7.63, 17.12, 46.12, 1.26, 2.83, 4.33, 5.49,7.66, 11.25, 17.14, 79.05, 1.35, 2.87, 5.62, 7.87, 11.64, 17.36, 1.40, 3.02, 4.34, 5.71, 7.93, 11.79,18.10, 1.46, 4.40, 5.85, 8.26, 11.98, 19.13, 1.76, 3.25, 4.50, 6.25, 8.37, 12.02, 2.02, 3.31, 4.51,6.54, 8.53, 12.03, 20.28, 2.02, 3.36, 6.76, 12.07, 21.73, 2.07, 3.36, 6.93, 8.65, 12.63, 22.69

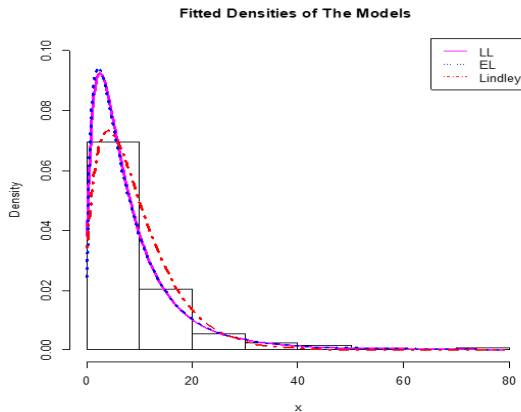
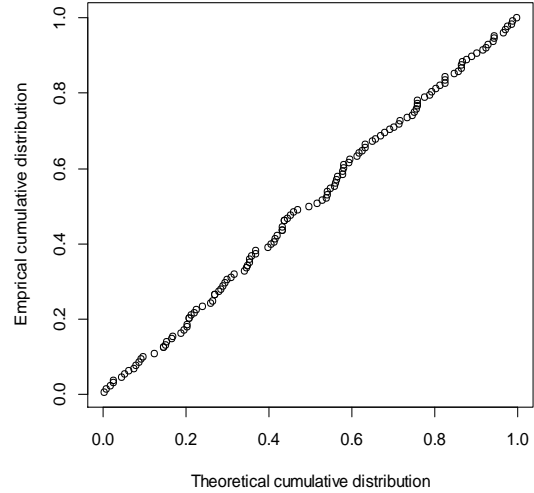
Lemonte ve Cordeiro [25] da bu veri setini McLomax dağılımı ve beta Lomax, Kumaraswamy Lomax, üstel Lomax (EL), üstel standart Lomax ve Lomax dağılımları ile modellemiş ve uyumlarını karşılaştırmıştır. İlgili çalışmada en başarılı model EL olarak elde edilmiştir. Bu çalışmada ise en başarılı EL dağılımının yanı sıra Weibull(W), üstel(E), LL ve Lindley dağılımları kullanılmış ve bu üç dağılım karşılaştırılmıştır. EL ve Lindley dağılımlarının remisyon süreleri verilerinin histogramı ve grafikleri Şekil 3'te gösterilmektedir.

Tablo 2. Parametre tahminleri ve karşılaştırma kriterleri

	θ	α	σ	AIC	BIC
LL	0.1231 (0.1245)	35.5511 (33.1451)	14.6605 (6.6050)	825.2879	833.844
EL	1.5862 (0.2800)	4.5857 (2.2270)	24.7414 (16.6860)	826.14	834.70
W	1.0477 (0.0676)	9.5776 (0.85535)		832.1742	837.8783
E	9.3658 (0.8278)			830.6838	833.5358
Lindley	0.1960 (0.0123)			841.0916	843.9118

Tablo 3. Uygunluk test istatistikleri

	W	A
LL	0.0201	0.1291
EL	0.0283	0.1902
W	0.1312	0.7857
E	0.1193	0.7159
Lindley	0.1717	1.0260

**Şekil 3.** Remisyon süreleri için histogram ve olasılık yoğunluk eğrileri**P-P Plot****Şekil 4.** Remisyon süreleri P-P grafiği

Tablo 2, dağılımlara ilişkin, AIC ve BIC istatistiklerini, parametre tahminlerini (ve parantez içinde karşılık gelen standart hataları) listelemektedir. Lemonte ve Cordeiro [25], EL dağılımının tüm modeller arasında en düşük AIC ve BIC değerlerine sahip olduğunu ve bu nedenle en iyi model olarak seçilebileceğini söylemiştir. Bu tablo ise LL dağılımının karşılaştırılan tüm modeller arasında en düşük AIC ve BIC değerlerine sahip olduğunu ve bu nedenle en iyi model olarak seçilebileceğini göstermektedir. Tablo 3'te ise en düşük istatistiksel değerler LL dağılımına ait olduğundan, onun en başarılı dağılım olduğu kararı destekler niteliktedir. Şekil 3'ten, LL'nin, EL ve Lindley dağılımlarından daha iyi uyum sağladığı ve dolayısıyla veriler için yeterli olabileceği sonucuna varabiliriz. Şekil 4 ise teorik dağılım ile deneysel dağılımın uyumunu ifade eden P-P grafiğine yer verilmiştir. Bu grafikten de, LL dağılımının veriyi çok iyi modellediğini söyleyebiliriz.

Uygulamanın ikinci kısmında, bir çeşit havadan iletişim alıcı-vericisi için 46 onarım süresini (saat olarak) temsil eden veri seti dikkate alınmıştır [26]. Shrestha ve Kumar [27], aynı veri setini genişletilmiş Lomax (ExL) dağılımı kullanarak analiz etmiştir. Veri seti Tablo 4'te sunulmuştur.

Tablo 4. Onarım süreleri

0.2, 0.3, 0.5, 0.5, 0.5, 0.5, 0.6, 0.6, 0.7, 0.7, 0.7, 0.8, 0.8, 1.0, 1.0, 1.0, 1.0, 1.1, 1.3, 1.5, 1.5, 1.5, 1.5, 2.0, 2.0, 2.2, 2.5, 2.7, 3.0, 3.0, 3.3, 3.3, 4.0, 4.0, 4.5, 4.7, 5.0, 5.4, 5.4, 7.0, 7.5, 8.8, 9.0, 10.3, 22.0, 24.5

Onarım sürelerini modellemek için LL dağılımının yanı sıra, W, E, LSL, ExL, Lomax, Standart Lomax (SL) ve Lindley dağılımları kullanılmıştır. Tablo 5'ten görüleceği gibi, bu dağılımlara ilişkin karşılaştırma kriterlerinde en küçük değer LSL ye aittir. LSL dağılımının aynı zamanda LL dağılımının alt dağılımı olma özelliği taşıdığı önceki bölümlerde ifade edilmişti.

Tablo 6 ise uygunluk test istatistikleri için elde edilen değerleri göstermektedir. Bu tablodan da, en başarılı

dağılımın LSL olduğu söylenebilir.

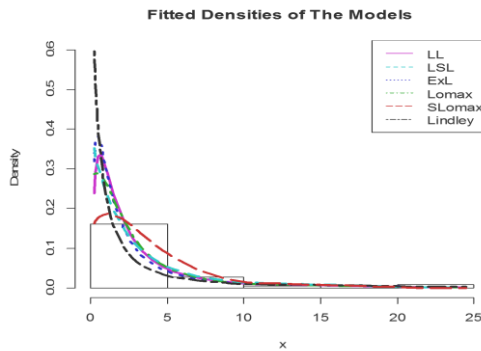
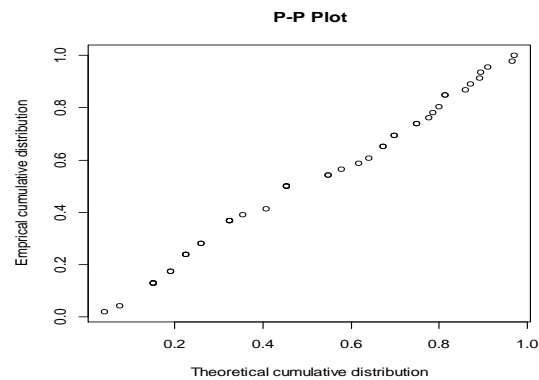
Son olarak, Şekil 5'te onarım sürelerine ilişkin histogram ve bu veriyi modellemekte kullandığımız dağılımlara ilişkin eğriler yer almaktadır. Özellikle LSL ve LL eğrilerinin veriyi modellemede daha başarılı olduğu görülmektedir. Son olarak Şekil 6'ya göre, önerilen dağılım ampirik dağılıma çok iyi uyum sağlamıştır.

Tablo 5. Parametre tahminleri ve karşılaştırma kriterleri

	θ	α	σ	AIC	BIC
LSL	0.01438 (0.01518)	115.30965 (122.99838)		206.4764	210.1337
LL	0.01662 (0.02096)	132.41010 (169.96783)	1.67692 (0.79707)	207.3033	212.7892
ExL	1.91326 (0.33289)	7.03406 (3.47339)		208.8274	212.4847
Lomax	9.23606 (7.40290)	3.54923 (2.28031)		209.9086	213.5659
SLomax		0.83379 (0.12293)		221.0628	222.8915
W	0.8989 (0.0957)	3.3820 (0.5881)		212.9398	216.597
E	3.606603 (0.5317)			212.0124	213.8411
Lindley	0.46636 (0.04990)			221.9694	223.7981

Tablo 6. Uygunluk test istatistikleri

	W^*	A^*
LSL	0.05775	0.34847
LL	0.0636	0.38950
ExL	-	-
Lomax	0.09253	0.60915
SLomax	0.05685	0.34270
W	0.1299	0.9017
E	0.1436	0.9961
Lindley	0.1923352	1.30220

**Şekil 5.** Onarım süreleri için histogram ve olasılık yoğunluk eğrileri**Şekil 6.** Onarım süreleri P-P grafiği

IV. SONUÇ

Bu çalışmada, sağkalım ve güvenilirlik analizlerinde kullanılabilir yeni bir olasılık dağılımı olan Lindley-Lomax önerilmiştir. Dağılıma ilişkin momentler, hazard fonksiyonu, güvenilirlik ve entropi, incelenen dağılımın özellikleri arasındadır. Lindley-Lomax parametrelerinin tahmini için en çok olabilirlik yöntemi önerilmiştir. Lindley-Lomax dağılımı, iki gerçek veri setini modellemede kullanılmış ve uyum başarısını göstermek için Lindley, Lomax, üstel Lomax ve genişletilmiş Lomax dağılımlarıyla karşılaştırılmıştır. Lindley-Lomax dağılımı, sonuçlara göre her veri seti için mükemmel bir uyum sağlamıştır. Önerilen dağılım ayrıca birçok farklı alanda kullanılabilir özelliğine sahiptir. İleri ki çalışmalar için, farklı alanlarda uygulamalar hayata geçirmek ve dağılımın farklı istatistiksel özelliklerinin elde edilmesi düşünülmektedir.

KAYNAKLAR

- [1] Marshall, A. (1997). A new method for adding a parameter to a family of distributions with application to the exponential and Weibull families. *Biometrika*, 84(3), 641–652.
- [2] Eugene, N., Lee, C., & Famoye, F. (2002). Beta-Normal Distribution and Its Applications. *Communications in Statistics - Theory and Methods*, 31(4), 497–512.
- [3] Zografos, K., & Balakrishnan, N. (2009). On families of beta- and generalized gamma-generated distributions and associated inference. *Statistical Methodology*, 6(4), 344–362.
- [4] Alzaghal, A., Famoye, F., & Lee, C. (2013). Exponentiated T-X Family of Distributions with Some Applications. *International Journal of Statistics and Probability*, 2(3), 31–49.
- [5] Cordeiro, G. M., & de Castro, M. (2011). A new family of generalized distributions. *Journal of Statistical Computation and Simulation*, 81(7), 883–898.
- [6] Alzaatreh, A., Lee, C., & Famoye, F. (2013). A new method for generating families of continuous distributions. *METRON*, 71(1), 63–79.
- [7] Hassan, A., Assar, S., & Shelbaia, A. (2016). Optimum Step-Stress Accelerated Life Test Plan for Lomax Distribution with an Adaptive Type-II Progressive Hybrid Censoring. *British Journal of Mathematics & Computer Science*, 13(2), 1–19.
- [8] Cakmakyapan, S., & Ozel, G. (2016). The Lindley Family of Distributions: Properties and Applications. *Hacettepe Journal of Mathematics and Statistics*, 46(116), 1113–1137.
- [9] Gomes-Silva, F. S., Percontini, A., Brito, E. D., Ramos, M. W., Venâncio, R., & Cordeiro, G. M. (2017). The Odd Lindley-G Family of Distributions. *Austrian Journal of Statistics*, 46(1), 65–87.
- [10] Mead, M. E., Cordeiro, G. M., Afify, A. Z., & Mofleh, H. A. (2019). The Alpha Power Transformation Family: Properties and Applications.

Pakistan Journal of Statistics and Operation Research, 525–545.

- [11] Reyad, H., Korkmaz, M., Afify, A. Z., Hamedani, G. G., & Othman, S. (2019). The Fréchet Topp Leone-G Family of Distributions: Properties, Characterizations and Applications. *Annals of Data Science*, 8(2), 345–366.
- [12] Lindley, D. V. (1958). Fiducial Distributions and Bayes' Theorem. *Journal of the Royal Statistical Society: Series B (Methodological)*, 20(1), 102–107.
- [13] Mazucheli, J., & Achcar, J. A. (2011). The Lindley distribution applied to competing risks lifetime data. *Computer Methods and Programs in Biomedicine*, 104(2), 188–192.
- [14] Chahkandi, M., & Ganjali, M. (2009). On some lifetime distributions with decreasing failure rate. *Computational Statistics & Data Analysis*, 53(12), 4433–4440.
- [15] Bryson, M. C. (1974) Heavy-tailed distribution: properties and tests, *Technometrics* 16, 161–68.
- [16] Tadikamalla, P. R. (1980). A Look at the Burr and Related Distributions. *International Statistical Review / Revue Internationale de Statistique*, 48(3), 337–344.
- [17] Dubey, S. D. (1970). Compound gamma, beta and F distributions. *Metrika*, 16(1), 27–31.
- [18] Atkinson, A.B. & Harrison, A.J. (1978). *Distribution of Personal Wealth in Britain* Cambridge University Press, Cambridge.
- [19] Harris, C. M. (1968). The Pareto Distribution as a Queue Service Discipline. *Operations Research*, 16(2), 307–313.
- [20] Corbellini, A. Crosato, L., Ganugi, P., Mazzoli, M. (2007). Fitting Pareto II distributions on firm size: Statistical methodology and economic puzzles. Paper presented at the International Conference on Applied Stochastic Models and Data Analysis, Chania, Crete.
- [21] Holland, O., Golaup, A., & Aghvami, A. (2006). Traffic characteristics of aggregated module downloads for mobile terminal reconfiguration. *IEE Proceedings - Communications*, 153(5), 683.
- [22] Hassan, A. S. & Al-Ghamdi, A. S. (2009). Optimum step stress accelerated life testing for Lomax distribution, *Journal of Applied Sciences Research*, 5, 2153-2164.
- [23] Gradshteyn, I. S & Ryzhik, I. M. (2007). *Table of Integrals, Series, and Products*, Academic Press, New York.
- [24] Lee, E.T. & Wang, J.W. (2003). *Statistical Methods for Survival Data Analysis*, 3rd ed., Wiley, New York.
- [25] Lemonte, A. J., & Cordeiro, G. M. (2013). An extended Lomax distribution. *Statistics*, 47(4), 800–816.
- [26] Chhikara, R.S. & Folks, J.L. (1977). The inverse Gaussian distribution as a lifetime model. *Technometrics*, 19, 461-468.
- [27] Shrestha, S. K., & Kumar, V. (2014). Bayesian Analysis of Extended Lomax Distribution. *International Journal of Mathematics Trends and Technology*, 7(1), 33–41.