

# ÖĞRENME VE BOZULMA ETKİLERİ ALTINDAKİ ORTAK TESLİM TARİHLİ TEK MAKİNE ERKEN/GEÇ TAMAMLANMA ÇİZELGELEME PROBLEMİNİN OPTİMAL ÇİZELGESİNİN V ŞEKLİNDEKİ ÖZELLİĞİ

Oğuzhan Ahmet ARIK<sup>1\*</sup>

<sup>1</sup>Nuh Naci Yazgan Üniversitesi, Mühendislik Fakültesi, Endüstri Mühendisliği, Kayseri/Türkiye

ORCID No: <https://orcid.org/0000-0002-7088-2104>

Kelimeler	Öz
Öğrenme etkisi, Bozulma etkisi, Erken/Geç tamamlanma, Tek makine, V şekil.	Bu çalışma öğrenme ve bozulma etkileri altındaki ortak teslim tarihli tek makine erken/geç tamamlanma çizelgeleme problemini incelemektedir. Öğrenme ve bozulma etkilerinin aynı tek makine erken/geç tamamlanma çizelgeleme problemindeki farklı kombinasyonları incelenmiştir. Bozulma etkisi için doğrusal ve doğrusal olmayan bozulma etkileri dikkate alınmıştır. Öğrenme etkisi için sadece sıra-bağımlı öğrenme etkisi ele alınmıştır. Problemin optimal çizelgesinin bu kombinasyonlardan herhangi birinde V şekilli olma özelliğini ispat etmek için iki teorem sunulmuştur. Çalışmanın sonunda ise problemin bu etkiler altında V şekilli olduğu ispat edilmiştir.

## THE V-SHAPED PROPERTY OF THE OPTIMAL SCHEDULE OF SINGLE MACHINE EARLINESS/TARDINESS SCHEDULING PROBLEM WITH THE COMMON DUE DATE UNDER EFFECTS OF LEARNING AND JOB DETERIORATION

Anahtar Keywords	Abstract
Learning effect, Deterioration effect, Earliness/Tardiness, Single machine, V-shaped.	This study considers single machine earliness/tardiness scheduling problem with the common due date under the effects of learning and deterioration. Different combinations of the effects of learning and deterioration are considered in single machine earliness/tardiness scheduling problem. For deterioration effect, linear and nonlinear deterioration effects are considered in the problem. For learning effect, position-dependent learning effect is only considered in the problem. To prove the V-shaped property of the optimal solution whatever the combination of learning and deterioration effects, two theorems for the problem are proposed. At the end, the V-shaped property of the problem under these effects is proved.

Araştırma Makalesi	Research Article
Başvuru Tarihi : 07.07.2021	Submission Date : 07.07.2021
Kabul Tarihi : 10.02.2022	Accepted Date : 10.02.2022

\*Sorumlu yazar; e-posta: [oaarik@nny.edu.tr](mailto:oaarik@nny.edu.tr)

## 1. Giriş

Tam zamanında üretim (TZÜ) felsefesi şirketleri siparişlerini ve işlerini tam zamanında tamamlamaya zorlamaktadır. Daha da fazlası, yalın üretimin önemli bir bileşeni olarak TZÜ stok seviyelerini geleneksel üretimdeki seviyelerinden daha da aşağıda tutmaya çalışmaktadır. Bu yüzden işlerin zamanında (teslim tarihlerinde) tamamlanarak, kendinden sonraki birime veya müşteriye teslim edilmesi nihai ve ara stokların azalmasına neden olacaktır. Bu nedenle, teslim tarihleri TZÜ felsefesi için önemlidir. Bir iş teslim tarihinden önce tamamlanırsa bu iş bir depoda stoklama ve sigorta maliyetlerine katlanılarak saklanmak zorunda kalacaktır. Bu iş erken tamamlanmış olarak adlandırılır. Eğer bir iş teslim tarihinden sonra tamamlanmış ise bu durumda firma daha önceden ayarlamış olduğu teslimat tarihini ötelemek zorunda kalabilir ya da müşterisine geç teslimat yapmaktan dolayı bir ceza maliyetine katlanabilir. Bu işe ise geç tamamlanmış iş denir. Her erken veya geç tamamlanmış işin maliyeti ise TZÜ için istenmeyen maliyetler sınıfındadır. Ayrıca erken veya geç tamamlanma stok seviyesinde dengesizliklere yol açabilir. Tüm işler için tek bir ortak teslim tarihinin olduğu erken/geç tamamlanma çizelgeleme problemleri uzun yıllardır araştırmacılar tarafından incelenmektedir. Çizelgeleme problemlerinde teslim tarihleri ya karar değişkeni ya da önceden belirlenmiş bir parametre olarak yer almaktadır. Bu çalışmada önceden belirlenen ortak teslim tarihine sahip tek makine erken/geç tamamlanma çizelgeleme problemine ait işlerin öğrenme ve bozulma etkileri altında olduğu varsayımında optimal çizelgenin nasıl olacağını incelenmektedir.

Öğrenme ve bozulma etkileri altındaki çizelgeleme problemleri araştırmacılar tarafından 15 yıldan uzun bir zamandır incelenmektedir. Bu konudaki araştırmaların öncülerinden biri olan Biskup (1999) öğrenme etkisi atındaki çizelgeleme problemini ilk defa literatüre tanıtmıştır. Mosheiov (2001) öğrenme etkisini paralel makine çizelgeleme ortamına taşımıştır. Ayrıca, Mosheiov (2001) ele aldığı problem için birden fazla iyi bilinen performans kriterini paralel makine problemi için incelemiştir. Bildiğimiz kadarı ile Gupta ve Gupta (1988), ve Browne and Yechiali (1990) çizelgeleme problemlerinde bozulma etkileri ile alakalı ilk çalışmaları eş zamanlı olarak yapmışlardır. Mosheiov (1991) performans kriterinin akış

zamanını en küçüklemek olduğu problemin V şekilli özelliğe sahip olduğunu ispat etmiştir. Mosheiov (1998) ayrıca özdeş paralel makine çizelgeleme ortamında problemin NP-Zor sınıfında olduğunu ispat etmiştir. Çizelgeleme problemlerinde öğrenme etkisini ele alan yakın çalışmalardan birisi Toksarı ve Arık (2017b) tarafından incelenmiştir. Bulanık öğrenme etkisini ile bulanık işlem sürelerini içeren tek makine çizelgeleme problemini iyi bilinen performans kriterleri için incelemişlerdir. Ele aldıkları performans kriterleri için bulanık tek makine çizelgeleme probleminin kredibilite tabanlı bulanık şans kısıtlı programlama tekniği ile polinom zamanda çözülebilir olduğunu ispat etmişlerdir.

Öğrenme ve bozulma etkilerini aynı anda aynı anda çizelgeleme problemlerinde inceleyen birden fazla çalışma bulunmaktadır. Wang (2006) bu etkiler altındaki işlerin tek makinede sıralanması problemini ele almıştır. Ele aldığı problemde sırasıyla çizelgenin yayılma zamanı, maksimum geç kalma zamanı ve işerin tamamlanma zamanının ağırlıklı toplamını en küçüklemeye çalışmıştır. Bu esnada problemin bu amaç fonksiyonları için polinom zamanlı çözülebileceğini göstermiştir. Wang (2007) bu etkiler altındaki işlerin tek makinede sıralanması problemini ele almıştır. Problemin amaç fonksiyonunun yayılma zamanı, maksimum geç kalma zamanı ve işerin tamamlanma zamanının ağırlıklı toplamını en küçüklemeye olduğu durumda optimal çözümün polinom zamanda bulunabileceğini göstermiştir. Daha kompleks amaç fonksiyonları için de en erken teslim tarihi kuralının bazı senaryolarda optimum sonucu verebileceğini göstermiştir. Wang, Lin ve Shan (2008) bu etkileri akış tipi çizelgeleme ortamı için incelemişlerdir. Amaç fonksiyonunun yayılma zamanı veya toplam tamamlanma zamanı en küçüklemesi olduğu durumlarda problemin bazı özel durumları için polinom zamanlı çözüm elde edilebileceğini göstermişlerdir. Cheng, Wu ve Lee (2008) bu etkiler ile beraber hazırlık zamanlarının da olduğu tek makine çizelgeleme problemlerinin bazı durumlarda polinom zamanda çözülebilir olduklarını göstermişlerdir. Bachman ve Janiak (2009) bu etkiler altındaki problemin bazı özel durumlarını incelemiştir. Amaç fonksiyonunun yayılma zamanını, toplam tamamlanma zamanını ve toplam ağırlıklı tamamlanma zamanını en küçüklemek olduğu durumlardaki problem özelliklerini listelemişlerdir. Gordon, Potts, Strusevich ve Whitehead (2008) seri/paralel öncelik ilişkilerinin bulunduğu ve bu etkilerin altındaki işlem

zamanlarının olduğu çizelgeleme probleminde amacın yayılma zamanını veya ağırlıklı tamamlanma zamanını en küçükleme olduğu durumları ele almıştır. Çalışmalarının sonucunda problemin polinom zamanlı çözülebilir olduğunu göstermişlerdir. Yang ve Kuo (2010) bu etkiler altındaki tek makine çizelgeleme probleminde yayılma zamanı, toplam tamamlanma zamanı ve tamamlanma zamanları arasındaki mutlak farkların toplamını en küçükmeye çalışmışlardır. Problemlerin çözümü için bazı polinom zamanlı algoritmalar önermişlerdir. Ayrıca akış tipi çizelgeleme problemini de bu etkiler altında incelemişler ve bazı özel durumlarda hala polinom zamanlı çözüm elde edilebileceğini göstermişlerdir. Lee (2014) bu etkilerin ve sıra bağımlı hazırlık zamanlarının olduğu bazı tek makine çizelgeleme problemlerine ait polinom zamanlı çözümler üretilebileceğini göstermişlerdir. Toksarı, Oron ve Güner (2009) zaman bağımlı öğrenme ve doğrusal olmayan bozulma etkileri altındaki bazı tek makine çizelgeleme problemlerini ele almışlar ve bazı polinom zamanlı çözümlerin elde edilebileceğini ispat etmişlerdir. Arık ve Toksarı (2018a) çalışmalarında tek makine ortamında bulanık bozulma ve öğrenme etkileri altında ağırlıklı erken/geç tamamlanma maliyetlerinin en aza indirilmesini ele almışlardır. Problemin çözümü için güvenilirlik temelli şans kısıtlı algoritma tekniği ile matematiksel model önermişlerdir. Arık ve Toksarı (2020) bu etkiler altındaki bulanık tek makine çizelgeleme ortamında çizelgenin tamamlanma zamanını en küçükleme için bir matematiksel model sunmuştur.

Tek makine çizelgeleme ortamında bu etkileri; *ortak teslim tarihi*, *ayrı teslim tarihleri* ve *teslim tarihi penceresi* ile inceleyen birkaç çalışma bulunmaktadır. Yang (2010) bakım faaliyetlerinin problemin bir girdisi olduğu, teslim zamanı pencere ve işlem sürelerinin bu etkilerin altında olduğu bir erken/geç tamamlanma problemini ve diğer problemleri ele almıştır. Çalışmasının sonunda bazı problemlerin polinom zamanda çözülebilir olduğunu göstermiştir. Zhu, Sun, Chu, ve Liu (2011) tek makine çizelgeleme ortamında teslim tarihi penceresi atama problemini ele almışlar ve erken/geç tamamlanma maliyetlerini azaltmaya çalışmışlardır. Problemin bazı durumları için polinom zamanlı algoritmaları önermişlerdir. Kuo ve Yang (2011) ortak teslim tarihinin bir karar değişkeni olduğu ve bu etkiler altındaki tek makine ortamında erken/geç tamamlanma maliyetlerinin en küçükleme ele almışlardır. Yin ve Xu (2011) çalışmalarında bu

etkiler altındaki tek makine çizelgeleme probleminin yayılma zamanı, tamamlanma zamanlarının üstlü değerlerinin toplamı, toplam geç kalma zamanı, ortak teslim tarihi durumunda erken/geç tamamlanma ceza maliyetlerini bazı koşullarda polinom zamanda çözebilmek için bazı algoritmalar önermişlerdir. Wang ve Wang (2011) tek makine ortak teslim tarihi penceresi atama problemini ele almıştır. Bozulma ve öğrenme etkileri altındaki işlem süreleri ile bazı özel koşullar için problemin çözümünün polinom zamanda yapılabileceğini göstermişlerdir. Wang, Liu ve Wang (2013) tek makine ortak teslim tarihi penceresi atama problemini ele almıştır. Ele aldıkları problemin amaç fonksiyonunda; erken/geç tamamlanma maliyeti, pencere yeri ve boyutu maliyetleri ve yayılma zamanını en küçükmeye çalışmışlardır. Niu, Wang ve Yin (2015) budanmış öğrenme ve bozulma etkileri altındaki işlem sürelerinin olduğu tek makine çizelgeleme probleminde teslim tarihi atama konusunda çalışmışlardır. Pei, Liu, Pardalos, Migdallas, ve Yang (2017) tek makine seri-yığın işleme probleminde, öğrenme ve bozulma etkileri altındaki işlem sürelerinin ve hazırlık zamanlarının bulunduğu durumu ele almışlardır. Teslim tarihi atama ve teslim tarihlerine bağlı amaç fonksiyonlarının da olduğu bazı problemlerin çözümü için algoritma önerisinde bulunmuşlardır.

Çoklu makine ortamında ise yine bu iki etkiyi eş zamanlı inceleyen birkaç çalışma bulunmaktadır. Huang, Wang ve Ji (2014) paralel makine ortamında bu etkileri birden fazla amaç fonksiyonu için incelemişlerdir. Önerdikleri model ile bu problemlerin çözümlerinin polinom zamanda yapılabilir olduğunu göstermişlerdir. Ji, Yao, Yang ve Cheng (2015) paralel makine çizelgeleme ortamında bozulma etkisi ve DeJong öğrenme etkisi altındaki işlem zamanları ile yayılma zamanı ve tamamlanma zamanı toplamalarının minimize edilmesi durumlarını ele almışlardır. Arık ve Toksarı (2018b) çok amaçlı paralel makine çizelgeleme ortamında teslim tarihi atama problemi için bu etkileri ele almışlardır. Probleminde işlem sürelerinin belirsizliğini bulanık sayılar ile kodlamışlardır. Probleminin çözümü için bir yerel arama algoritması sunmuşlardır. Arık ve Toksarı (2019) bu etkiler altındaki bulanık paralel makine çizelgeleme problemi için doğrusal olmayan karma tam sayılı matematiksel model önermişlerdir. Toksarı ve Güner (2008) bu etkiler altındaki ortak teslim tarihli ve pozisyon tabanlı hazırlık süreli paralel makine erken/geç tamamlanma çizelgeleme problemi için doğrusal olmayan karma tam sayılı bir matematiksel

model sunmuşlardır. Toksarı ve Güner (2009) bu etkiler altındaki ortak teslim tarihli paralel makine erken/geç tamamlanma problemi için V şekilli özelliğin bazı durumlarda geçerli olduğunu göstermişlerdir. Ayrıca problem için matematiksel model ve bir çözüm algoritması sunmuşlardır. Toksarı ve Güner (2010) paralel makine erken/geç tamamlanma problemini öğrenme/bozulma etkisi altında ve sıra bağımlı hazırlık zamanları ile ele almıştır. Tüm işlere ait tek bir ortak teslim zamanı olduğu durumu incelemişlerdir. Problemin çözümü için karma tam sayılı matematiksel model önermişlerdir. Ayrıca problemin optimal çözümündeki her makinenin iş sırasının V şekilli özelliğe sahip olduğunu göstermişlerdir. Toksarı ve Arık (2017a) akış tipi çizelgeleme probleminde bulanık bozulma ve öğrenme etkilerini ele almıştır. Problemin çözümü için bir genetik algoritma önermişlerdir. Arık (2021b) bu etkiler altındaki permutasyon akış tipi çizelgeleme problemi için evrimsel algoritma stratejilerini içeren bir tabu arama algoritması önermiştir. Arık ve Toksarı (2021) bu etkiler altındaki paralel makine çizelgeleme ortamında amaç fonksiyonunun işlerin tamamlanma zamanının minimize edilmesi olduğu durumu ele aldılar ve problemin çözümü için bir genetik algoritma önerdiler.

Öğrenme ve bozulma etkileri olmaksızın ortak teslim tarihli tek makine erken/geç tamamlanma çizelgeleme problemlerinin optimal çözümü V şekli özelliğine sahiptir. Bu durum Kanet (1981) tarafından ispat edilmiştir. Bu çalışmada ise ortak teslim tarihli, öğrenme ve bozulma etkileri altındaki tek makine erken/geç tamamlanma çizelgeleme probleminin de V şekilli özelliğe sahip olduğu gösterilmektedir. Literatürde daha önce öğrenme ve bozulma etkilerinin bazı kombinasyonları için hazırlık zamanı içeren paralel makine çizelgeleme probleminin V şekilli özelliğe sahip olduğu ispatlansa da (Toksarı ve Güner; 2009, 2010), bu çalışmada hem doğrusal olmayan hem de doğrusal olmayan

bozulma etkisi ile pozisyon tabanlı öğrenme etkilerinin olası tüm kombinasyonları için genel bir ispat sunulacaktır.

## 2. Problem Tanımı ve Notasyonu

Bu çalışmada araştırma ve yayın etiği ilkelerine uyulmuş olup çalışma kapsamı herhangi biryasal/özel izin alınmasını gerektirmemiştir. Tek makine üzerinde işlenen işler birbirinin ardı sıra ve aralarında keyfi boş zaman bulunmaksızın işlenmektedirler. Makinede işlenecek iş sayısı  $n$  sayısına eşittir. İşlerin işlenme sırası  $r$  ile ifade edilir ve  $r$  sayısı 1'den  $n$ 'ye kadar sayıları ifade etmektedir. Sıra  $r$ 'de işlenecek olan işin başlangıç zamanı sıra  $r-1$ 'de tamamlanan işin tamamlanma zamanına eşittir ve bu zamanda başlayan iş, aradan işlem süresi geçtikten sonra tamamlanır ve çizelgeleme ortamını terk eder. İşlere ait işlem süreleri farklı olduğu için işlerin atanma sırası işlere ait tamamlanma zamanlarını değiştirmektedir. Benzer işlerin tekrar ettiği iş atölyelerinde her iş tekrarında kazanılan tecrübe ve bilgi nedeni ile mevcut iş tekrarının önceden belirlenen süreden daha kısa sürmesi genel olarak öğrenme etkisi olarak adlandırılır. İşin işlenmesi için atandığı sıra numarası  $r$ 'nin daha büyük değerler alması durumunda işe ait işleme başlama zamanının uzayacağı ve işin iş yeri ortamındaki sıcaklık, rüzgar, titreşim gibi bazı faktörler nedeni ile önceden belirlenen işlem süresinin uzadığı durumda çizelgeleme ortamında bozulma etkisinin varlığından söz edilir. Örnek olarak, haddelme makinesinde haddelenecek kor haldeki metal blokların işlenebilmesi için belirli bir sıcaklığın üzerinde olmaları gerekmektedir. Eğer metal blok kuyrukta uzun süre beklerse ortam sıcaklığı nedeni ile soğuyacaktır. Bu durumda metal bloğun tekrar ısıtılması için yapılacak tüm ek işlemler nedeni ile önceden belirlenen işlem süresi uzayacaktır. Tablo 1'de bu çalışmada kullanılan notasyon verilmiştir.

Tablo 1  
Çalışmada Kullanılan Notasyon

Notasyon	Açıklama
$n$	İş sayısı
$r$	İş sıra endeksi $r \in \{1,2,3, \dots, n\}$
$j$ ve $i$	İş endekleri $j \in \{1,2,3, \dots, n\}$ ve $i \in \{1,2,3, \dots, n\}$
$P_r$	Sıra $r$ 'de işlenen işin işlem zamanı
$P_i$	$i$ işine ait işlem zamanı
$C_i$	$i$ işine ait tamamlanma zamanı
$E_i$	$i$ işine ait erken tamamlanma zamanı
$T_i$	$i$ işine ait geç tamamlanma zamanı
$D$	Ortak teslim zamanı
$P_{[r]}$	Sıra $r$ 'de işlenen işin gerçek işlem zamanı
$C_{[r]}$	Sıra $r$ 'de işlenen işin gerçek tamamlanma zamanı
$E_{[r]}$	Sıra $r$ 'de işlenen işin erken tamamlanma zamanı
$T_{[r]}$	Sıra $r$ 'de işlenen işin geç tamamlanma zamanı
$B$	Pozisyon tabanlı öğrenme etkisi
$a$	Doğrusal bozulma etkisi
$\beta$	Doğrusal olmayan bozulma etkisi

İşlem sırası  $r$  olan bir işin öğrenme etkisi altında olduğu varsayımında, işe ait gerçek işlem süresi aşağıdaki gibi hesaplanır.

$$P_{[r]} = P_r r^B, \quad (1)$$

Burada  $-1 \leq B \leq 0$  ve  $B$  pozisyon tabanlı öğrenme etkisini ifade etmektedir. Sıra  $r$ 'de işlenecek işin önceden belirlenmiş işlem süresi  $P_r$  iken işlem süresinin herhangi bir etki nedeni ile uzamış/kısalmış gerçek hali  $P_{[r]}$ . Eşitlik (1) ile pozisyon tabanlı öğrenme etkisi altındaki bir işin gerçek işlem süresinin işlenmiş olduğu sıraya bağımlı fonksiyonu gösterilmektedir. Eğer iş ortamında kazanılan tecrübe nedeni ile süre kazanımı yok ise ve hatta işlerin kuyrukta beklemesi neticesinde süre artışı var ise çizelgeleme ortamında bozulma etkisi var denilmektedir. Literatürde ön planda olan iki farklı bozulma etkisi vardır. Bunlardan ilki olan doğrusal bozulma etkisi altındaki bir işe ait gerçek işlem süresi aşağıdaki gibi hesaplanır.

$$P_{[r]} = P_r + a * C_{r-1}, \quad (2)$$

Burada  $a > 0$  ve  $a$  doğrusal bozulma etkisini ifade etmektedir. Sıra  $r$ 'de işlenecek işin başlangıç zamanı kendisinden önceki sırada tamamlanmış olan işin tamamlanma zamanına ( $C_{r-1}$ ) eşittir. Eşitlik (2) ile doğrusal bozulma etkisi altındaki bir işe ait gerçek işlem süresinin işin başlangıç zamanına odaklı bir fonksiyona sahip olduğunu göstermektedir. Literatürde yer alan başka bir bozulma etkisi olan doğrusal olmayan bozulma etkisi altındaki gerçek işlem süresi aşağıdaki gibi hesaplanır.

$$P_{[r]} = P_r + a * C_{r-1}^\beta, \quad (3)$$

Burada  $\beta > 0$  ve  $a$  doğrusal olmayan bozulma etkisini ifade etmektedir. Eşitlik (3) ile doğrusal olmayan bozulma etkisi altındaki bir işe ait gerçek işlem süresinin işin başlangıç zamanına odaklı ve doğrusal olmayan bir fonksiyona sahip olduğunu göstermektedir. Her iki etkinin de çizelgeleme ortamında bulunduğu varsayımında, gerçek işlem süresinin nasıl hesaplanacağı ile alakalı iki alternatif bulunmaktadır. Bunlar:

$$P_{[r]} = (P_r + a * C_{r-1})r^B, \quad (4)$$

$$P_{[r]} = (P_r + a * C_{r-1}^\beta)r^B, \quad (5)$$

Eşitlik (4) ile pozisyon tabanlı öğrenme ve doğrusal bozulma etkileri alındaki işe ait gerçek işlem süresinin nasıl hesaplanacağı gösterilmektedir. Eşitlik (5) ise pozisyon tabanlı öğrenme ve doğrusal olmayan bozulma etkileri altındaki işe ait gerçek işlem süresinin nasıl hesaplanacağı gösterilmektedir.

Tek makine çizelgeleme ortamındaki n tane işin makinede işlenmek için beklediğini varsayalım. Her bir iş  $j$  ( $j \in \{1,2,3, \dots, n\}$ ) için işlem süresi  $P_j$  olarak belirlenmiştir. Tüm işler makinede işlem gördükten sonra müşteriye ya da depoya teslim edilecektir.  $D$ , tüm işler için tek ve ortak bir teslim tarihidir. Eğer iş  $j$ 'ye ait tamamlanma süresi  $D$ 'den küçük ise bu iş erken tamamlanmıştır ve bu işin erken tamamlanma süresi  $E_j$  aşağıdaki gibi hesaplanır.

$$E_j = \text{Max}(0, D - C_j), \quad (6)$$

Burada  $C_j$ ,  $j$  işine ait tamamlanma zamanını ifade etmektedir. Eğer  $C_j < D$  ise  $E_j$  pozitif değerler olacaktır. Eğer iş  $j$ 'ye ait tamamlanma süresi  $D$ 'den büyük ise bu iş geç tamamlanmıştır ve bu işin geç tamamlanma süresi  $T_j$  aşağıdaki gibi hesaplanır.

$$T_j = \text{Max}(0, C_j - D), \quad (7)$$

Eğer  $C_j > D$  ise  $T_j$  pozitif değerler olacaktır. Probleme ait amaç fonksiyonu ise işlerin erken ve geç tamamlanma sürelerinin toplamının ( $\sum_{j=1}^n (E_j + T_j)$ ) en aza indirilmesidir. Problemi klasik üçlü çizelgeleme notasyonu ile gösterimi  $1|d_j = d, LE, DE|\sum_{j=1}^n (E_j + T_j)$  şeklindedir. Bu gösterimde LE öğrenme etkisini, DE bozulma etkisini ve  $d_j = d$  ifadesi de tüm işlerin tek bir teslim tarihine sahip olduğunu göstermektedir. Probleme ait diğer özellikler ve varsayımlar şöyledir:

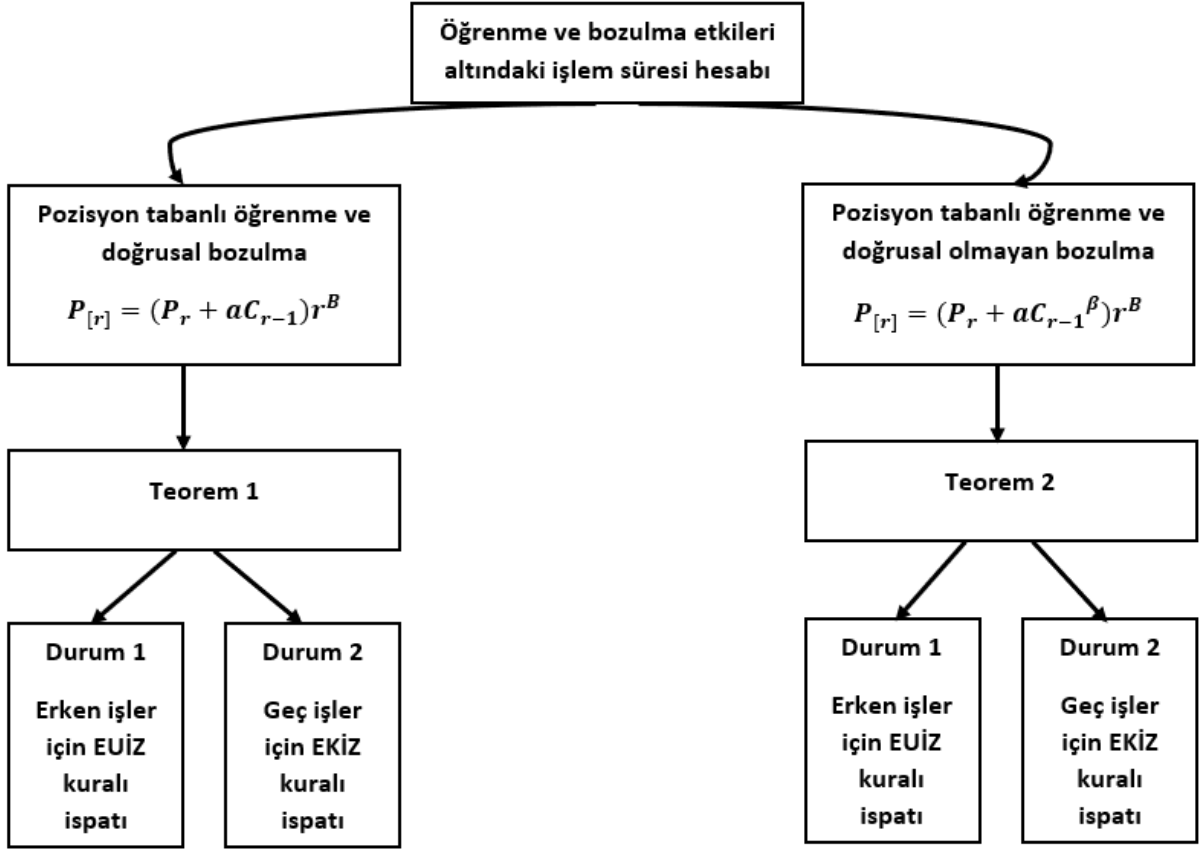
- Bölünmeye müsaade edilmemektedir. Bir iş makinede işlem görmeye başladığında ara verilmeksizin işlem süresi boyunca makinede işlem görmeye devam edecek ve tamamlanacaktır.
- Ardaşık işlem sıralarındaki işler arasında keyfi bekleme süresi yoktur. Kuyrukta bekleyen işler varken makine keyfi bir şekilde boş bekleyemez.

- Bir iş tamamlandığında, kuyrukta bekleyen işlerden bir tanesi hemen işlem görmeye başlar.
- Aynı zamanda makine sadece bir işi işleyebilmektedir.

### 3. Problemin Optimal Çözümünün V-Şekilli Özelliği

Ortak teslim tarihli problemin optimal çözümünün V şeklinde olma özelliği; çözümdeki erken tamamlanmış işlerin optimal sırasının erken işlerin gerçek işlem sürelerinin azalan sırası ile aynı olduğunu ifade etmektedir. Aynı özellik optimal çözümdeki geç tamamlanmış işlerin optimal sırasının da geç işlerin gerçek işlem sürelerinin artan sırası ile aynı olduğunu ifade eder. Herhangi bir dış etkenin olmadığı ortak teslim tarihli tek makine çizelgeleme ortamı için bu özelliğin ispat edilmesi kolaydır. Tek makine çizelgeleme ortamında, asimetric erken/geç tamamlanma amaç fonksiyonu ceza katsayılarının olduğu durumda erken işlerin sıralanmasında ağırlıklı en uzun işlem zamanı (AEUİZ) öncelik kuralı erken işlerin teslim tarihine kadar sıralanmasında kullanılır. Tek makine çizelgeleme ortamında, asimetric geç tamamlanma amaç fonksiyonu ceza katsayılarının olduğu durumda geç işlerin sıralanmasında ağırlıklı en kısa işlem zamanı (AEKİZ) öncelik kuralı geç işlerin teslim tarihinden sonra sıralanmasında kullanılır. Eğer erken/ geç tamamlanma maliyetleri simetric ise en uzun işlem zamanı (EUİZ) ve en kısa işlem zamanı (EKİZ) öncelik kuralları sırası ile erken ve geç işlerin sıralanmasında kullanılır.

$1|d_j = d, LE, DE|\sum_{j=1}^n (E_j + T_j)$  probleminin optimal çözümünün pozisyon bağımlı öğrenme ve doğrusal/doğrusal olmayan bozulma etkileri altında V şekilli olduğunu ispat etmek için aşağıda iki teorem ve ispatları sunulmaktadır. Bu çalışmadaki teoremlerin hangi öğrenme ve bozulma etkileri altındaki işlem süreleri için önerildiği aşağıdaki Şekil 1'de gösterilmektedir.



Şekil 1. İşlem Süreleri Hesabına Göre Önerilen Teoremler ve Alt Durumları

**Teorem 1:**  $1|d_j = d, LE, DE|\sum_{j=1}^n (E_j + T_j)$  probleminin optimal çözümünün pozisyon bağımlı öğrenme ve doğrusal öğrenme etkileri altında V şeklindedir.

**İspat:** Teorem 1'i ispat etmek için iki durumun incelenmesi gerekmektedir. Bu durumlardan biri ortak teslim tarihinden önce tamamlanmış olan erken işler için diğeri ise teslim tarihinden sonra tamamlanan geç işler içindir. Birinci durumda EUİZ kuralı ile erken tamamlanan işlerin sıralanması incelenecektir. İkinci durumda ise EKİZ kuralı ise geç tamamlanan işlerin sıralanması incelenecektir.

**Durum 1:** Sıra  $r$ 'de işlenebilecek iki erken iş olan iş  $i$  ve iş  $j$  olduğu varsayalım. Sıra  $r-1$ 'de ki işin tamamlanma süresi  $A$  zaman birimine (zb) eşittir. Bu durumda  $i$  veya  $j$  işi  $A$  zb'de sıra  $r$ 'de işlenmeye başlayabilir. İşlere ait işlem zamanları  $P_i$  ve  $P_j$  ve  $P_i > P_j$  varsayımımıza göre,

Sıralama  $\pi$  için;

$$C_i^\pi = A + (P_i + aA)r^B \quad (8)$$

$$C_i^\pi = A + P_i r^B + aAr^B \quad (9)$$

$$C_j^\pi = C_i^\pi + (P_j + aC_i^\pi)(r+1)^B \quad (10)$$

$$C_j^\pi = A + P_i r^B + aAr^B + P_j(r+1)^B + aA(r+1)^B + aP_i r^B (r+1)^B + a^2 Ar^B (r+1)^B \quad (11)$$

Eşitlikler (8-11)'de, işler  $i$  ve  $j$  için tamamlanma zamanları  $C_i^\pi$  ve  $C_j^\pi$  ifadeleri ile gösterilmektedir. Bu işler erken tamamlanmış işlerdir ve erken tamamlanma süreleri  $E_i^\pi = D - C_i^\pi$  ve  $E_j^\pi = D - C_j^\pi$  olarak hesaplanır. Erken tamamlanan işlerin maliyeti  $S$  için hesaplamalar şöyledir:

$$S = E_i^\pi + E_j^\pi \quad (12)$$

$$S = 2D - C_i^\pi - C_j^\pi \quad (13)$$

$$S = 2D - 2A - 2P_i r^B - 2aAr^B - P_j(r+1)^B - aA(r+1)^B - aP_i r^B(r+1)^B - a^2Ar^B(r+1)^B \quad (14)$$

Sıralama  $\pi'$  için;

$$C_j^{\pi'} = A + (P_j + aA)r^B \quad (15)$$

$$C_j^{\pi'} = A + P_j r^B + aAr^B \quad (16)$$

$$C_i^{\pi'} = C_j^{\pi'} + (P_i + aC_j^{\pi'})(r+1)^B \quad (17)$$

$$C_i^{\pi'} = A + P_j r^B + aAr^B + P_i(r+1)^B + aA(r+1)^B + aP_j r^B(r+1)^B + a^2Ar^B(r+1)^B \quad (18)$$

Erken tamamlanan işlerin maliyeti  $S'$  için hesaplama şöyledir:

$$S' = 2D - 2A - 2P_j r^B - 2aAr^B - P_i(r+1)^B - aA(r+1)^B - aP_j r^B(r+1)^B - a^2Ar^B(r+1)^B \quad (19)$$

Eğer erken tamamlanan işler için EUİZ öncelik kuralı optimum çizelgenin oluşmasına yardımcı oluyor ise  $S' - S > 0$  olmalıdır ve  $\pi$  sıralaması alternatifi olan  $\pi'$  sıralamasına karşı baskın bir çizelge sunar.

$$S' - S = 2D - 2A - 2P_j r^B - 2aAr^B - P_i(r+1)^B - aA(r+1)^B - aP_j r^B(r+1)^B - a^2Ar^B(r+1)^B - 2D + 2A + 2P_i r^B + 2aAr^B + P_j(r+1)^B + aA(r+1)^B + aP_i r^B(r+1)^B + a^2Ar^B(r+1)^B \quad (20)$$

$$S' - S = (P_i - P_j)(2r^B - (r+1)^B) + (P_i - P_j)(ar^B(r+1)^B) \quad (21)$$

$-1 \leq B \leq 0$ ,  $a > 0$ ,  $r^B > (r+1)^B > 0$  ve  $P_i > P_j$  bilindiğine göre  $S' - S$  ifadesi sıfırdan büyük bir değer alır ve sıralama  $\pi$  ile elde edilen çizelge, sıralama  $\pi'$  elde edilen çizelgeyi baskılar. Böylelikle, EUİZ öncelik kuralının pozisyon tabanlı öğrenme ve doğrusal bozulma etkilerini içeren  $1|d_j = d, LE, DE|\sum_{j=1}^n (E_j + T_j)$  problemindeki erken işlerin

optimal sıralamasında kullanılabilir olduğu ispat edilmiştir.

**Durum 2:** Sıra  $r'$ 'de işlenebilecek iki geç iş olan iş  $i$  ve iş  $j$  olduğu varsayalım. Sıra  $r-1$ 'de ki işin tamamlanma süresi  $A$  zaman birimine (zb) eşittir. Bu durumda  $i$  veya  $j$  işi  $A$  zb'de sıra  $r'$ 'de işlenmeye başlayabilir. İşlere ait işlem zamanları  $P_i$  ve  $P_j$ . Yine varsayımımıza göre  $P_i < P_j$ . Bu durumda iki alternatif sıralama oluşmaktadır. Bunlar sıralama  $\pi$  ve  $\pi'$  olarak adlandırılır. Sıralama  $\pi'$ 'de  $i$  işi  $j$  işinden önce işlenmektedir. İş  $i$ ,  $r$  sırasında atanmış iken iş  $j$  ise  $r+1$  sırasına atanmıştır. Sıralama  $\pi'$  için tam aksi durum geçerlidir. İş  $j$ ,  $r$  sırasında atanmış iken iş  $i$  ise  $r+1$  sırasına atanmıştır. Sıralama  $\pi'$  içerisinde  $j$  işi  $i$  işinden önce işlenmektedir. Maliyetler  $S$  ve  $S'$  ise sırasıyla sıralamalar  $\pi$  ve  $\pi'$  için geç işlerin maliyetleridir.

Eşitlikler (8-11)'deki hesaplamalar ile işler  $i$  ve  $j$  için tamamlanma zamanları  $C_i^\pi$  ve  $C_j^\pi$  değerleri bulunur. Bu işler geç tamamlanmış işlerdir ve geç tamamlanma süreleri  $T_i^\pi = C_i^\pi - D$  ve  $T_j^\pi = C_j^\pi - D$  olarak hesaplanır. Geç tamamlanan işlerin maliyeti  $S$  için hesaplamalar şöyledir:

$$S = T_i^\pi + T_j^\pi \quad (22)$$

$$S = C_i^\pi + C_j^\pi - 2D \quad (23)$$

$$S = 2A + 2P_j r^B + 2aAr^B + P_i(r+1)^B + aA(r+1)^B + aP_j r^B(r+1)^B + a^2Ar^B(r+1)^B - 2D \quad (24)$$

Geç tamamlanan işlerin maliyeti  $S'$  için hesaplama şöyledir:

$$S' = 2A + 2P_i r^B + 2aAr^B + P_j(r+1)^B + aA(r+1)^B + aP_i r^B(r+1)^B + a^2Ar^B(r+1)^B - 2D \quad (25)$$

Eğer geç tamamlanan işler için EKİZ öncelik kuralı optimum çizelgenin oluşmasına yardımcı oluyor ise  $S' - S > 0$  olmalıdır ve  $\pi$  sıralaması alternatifi olan  $\pi'$  sıralamasına karşı baskın bir çizelge sunar.



$$\begin{aligned}
S' - S &= 2A + 2P_i r^B + 2aAr^B \\
&+ P_j(r+1)^B \\
&+ aA(r+1)^B \\
&+ aP_i r^B(r+1)^B \\
&+ a^2 Ar^B(r+1)^B - 2D \\
&- 2A - 2P_j r^B - 2aAr^B \\
&- P_i(r+1)^B \\
&- aA(r+1)^B \\
&- aP_j r^B(r+1)^B \\
&- a^2 Ar^B(r+1)^B + 2D
\end{aligned} \quad (26)$$

$$\begin{aligned}
S' - S &= (P_j - P_i)(2r^B - (r+1)^B) \\
&+ (P_j \\
&- P_i)(ar^B(r+1)^B)
\end{aligned} \quad (27)$$

$-1 \leq B \leq 0$ ,  $a > 0$ ,  $r^B > (r+1)^B > 0$  ve  $P_i < P_j$  bilindiğine göre  $S' - S$  ifadesi sıfırdan büyük bir değer alır ve sıralama  $\pi$  ile elde edilen çizelge sıralama  $\pi'$  elde edilen çizelgeyi baskılar. Böylelikle, EKİZ öncelik kuralının pozisyon tabanlı öğrenme ve doğrusal bozulma etkilerini içeren  $1|d_j = d, LE, DE | \sum_{j=1}^n (E_j + T_j)$  problemindeki geç işlerin optimal sıralamasında kullanılabilir olduğu ispat edilmiştir.

Böylelikle,  $1|d_j = d, LE, DE | \sum_{j=1}^n (E_j + T_j)$  probleminin optimal çözümünün pozisyon bağımlı öğrenme ve doğrusal öğrenme etkileri altında V şekilli olduğuna dair Teorem 1'in ispatı tamamlanmış olur.

**Teorem 2:**  $1|d_j = d, LE, DE | \sum_{j=1}^n (E_j + T_j)$  probleminin optimal çözümünün pozisyon bağımlı öğrenme ve doğrusal olmayan öğrenme etkileri altında V şekillidir.

**İspat 2:** Teorem 2'yi ispat etmek için iki durumu incelememiz gerekmektedir. Bu durumlardan biri ortak teslim tarihinden önce tamamlanmış olan erken işler için diğeri ise teslim tarihinden sonra tamamlanan geç işler içindir. Birinci durumda EUİZ kuralı ile erken tamamlanan işlerin sıralanması incelenecektir. İkinci durumda ise EKİZ kuralı ile geç tamamlanan işlerin sıralanması incelenecektir.

**Durum 1:** Sıra  $r'$ 'de işlenebilecek iki erken iş olan iş  $i$  ve iş  $j$  olduğunu varsayalım. Sıra  $r-1'$ 'de ki işin tamamlanma süresi  $A$  zaman birimine (zb) eşittir. Bu durumda  $i$  veya  $j$  işi  $A$  zb'de sıra  $r'$ 'de işlenmeye başlayabilir. İşlere ait işlem zamanları  $P_i$  ve  $P_j$ . Yine varsayımımıza göre  $P_i > P_j$ . Bu durumda iki alternatif sıralama oluşmaktadır. Bunlar sıralama  $\pi$  ve  $\pi'$  olarak adlandırılır. Sıralama  $\pi'$ 'de  $i$  işi  $j$  işinden önce işlenmektedir. İş  $i$ ,  $r$  sırasında atanmış iken iş  $j$

ise  $r+1$  sırasına atanmıştır. Sıralama  $\pi'$  için tam aksi durum geçerlidir. İş  $j$ ,  $r$  sırasında atanmış iken iş  $i$  ise  $r+1$  sırasına atanmıştır. Sıralama  $\pi'$  içerisinde  $j$  işi  $i$  işinden önce işlenmektedir. Maliyetler  $S$  ve  $S'$  ise sırasıyla sıralamalar  $\pi$  ve  $\pi'$  için erken işlerin maliyetleridir.

Sıralama  $\pi$  için;

$$C_i^\pi = A + (P_i + aA^\beta)r^B \quad (28)$$

$$C_j^\pi = A + P_j r^B + aA^\beta r^B \quad (29)$$

$$C_j^\pi = C_i^\pi + (P_j + a(C_i^\pi)^\beta)(r+1)^B \quad (30)$$

Eşitlikler (28-30)'de, işler  $i$  ve  $j$  için tamamlanma zamanları  $C_i^\pi$  ve  $C_j^\pi$  ifadeleri ile gösterilmektedir. Bu işler erken tamamlanmış işlerdir ve erken tamamlanma süreleri  $E_i^\pi = D - C_i^\pi$  ve  $E_j^\pi = D - C_j^\pi$  olarak hesaplanır. Erken tamamlanan işlerin maliyeti  $S$  için hesaplamalar şöyledir:

$$S = E_i^\pi + E_j^\pi \quad (31)$$

$$S = 2D - C_i^\pi - C_j^\pi \quad (32)$$

$$S = 2D - 2C_i^\pi - P_j(r+1)^B - a(C_i^\pi)^\beta(r+1)^B \quad (33)$$

$$S = 2D - 2A - 2P_i r^B - 2aA^\beta r^B - P_j(r+1)^B - a(C_i^\pi)^\beta(r+1)^B \quad (34)$$

Sıralama  $\pi'$  için;

$$C_j^{\pi'} = A + (P_j + aA^\beta)r^B \quad (35)$$

$$C_i^{\pi'} = A + P_j r^B + aA^\beta r^B \quad (36)$$

$$C_i^{\pi'} = C_j^{\pi'} + (P_i + a(C_j^{\pi'})^\beta)(r+1)^B \quad (37)$$

Erken tamamlanan işlerin maliyeti  $S'$  için hesaplamalar şöyledir:

$$\begin{aligned}
S' &= 2D - 2A - 2P_j r^B - 2aA^\beta r^B \\
&- P_i(r+1)^B \\
&- a(C_j^{\pi'})^\beta(r+1)^B
\end{aligned} \quad (38)$$

Eğer erken tamamlanan işler için EUİZ öncelik kuralı optimum çizelgenin oluşmasına yardımcı oluyor ise  $S' - S > 0$  olmalıdır ve  $\pi$  sıralaması alternatifi olan  $\pi'$  sıralamasına karşı baskın bir çizelge sunar.

$$S' - S = 2D - 2A - 2P_j r^B - 2aA^\beta r^B - P_i(r+1)^B + a(C_j^{\pi'})^\beta (r+1)^B - 2D + 2A + 2P_i r^B + 2aA^\beta r^B + P_j(r+1)^B + a(C_i^\pi)^\beta (r+1)^B \quad (39)$$

$$S' - S = (P_i - P_j)(2r^B - (r+1)^B) + \left( (C_i^\pi)^\beta - (C_j^{\pi'})^\beta \right) (ar^B(r+1)^B) \quad (40)$$

$P_i > P_j$  ve  $r^B > (r+1)^B$  olduğu bilindiği için  $(P_i - P_j)(2r^B - (r+1)^B)$  ifadesinin sıfırdan büyük olduğunu biliyoruz. Ayrıca,  $r^B > (r+1)^B > 0$  olduğu içinde  $ar^B(r+1)^B > 0$  olduğu anlaşılmaktadır. Eğer  $(C_i^\pi)^\beta > (C_j^{\pi'})^\beta$  ise  $S' - S > 0$  olacaktır.  $(C_i^\pi)^\beta > (C_j^{\pi'})^\beta$  çünkü  $C_i^\pi > C_j^{\pi'}$ . Bunun detaylı ispatı aşağıdaki gibidir.

$$C_i^\pi - C_j^{\pi'} = A + P_i r^B + aA^\beta r^B - A - P_j r^B - aA^\beta r^B \quad (41)$$

$$C_i^\pi - C_j^{\pi'} = (P_i - P_j)r^B \quad (42)$$

$P_i > P_j$ ,  $r^B > 0$ ,  $C_i^\pi - C_j^{\pi'} > 0$ ,  $C_i^\pi > C_j^{\pi'}$ ,  $\beta > 0$ ,  $(C_i^\pi)^\beta > (C_j^{\pi'})^\beta$  ve  $(C_i^\pi)^\beta - (C_j^{\pi'})^\beta > 0$  olduğunu bildiğimiz için  $S' - S > 0$  olur. Böylelikle, EUİZ öncelik kuralının pozisyon tabanlı öğrenme ve doğrusal olmayan bozulma etkilerini içeren  $1|d_j = d, LE, DE | \sum_{j=1}^n (E_j + T_j)$  problemindeki erken işlerin optimal sıralamasında kullanılabilir olduğu ispat edilmiştir.

Durum 2: Sıra  $r$ 'de işlenebilecek iki geç iş olan  $i$  ve  $j$  olduğu varsayalım. Sıra  $r-1$ 'de ki işin tamamlanma süresi  $A$  zaman birimine (zb) eşittir. Bu durumda  $i$  veya  $j$  işi  $A$  zb'de sıra  $r$ 'de işlenmeye başlayabilir. İşlere ait işlem zamanları  $P_i$  ve  $P_j$ . Yine varsayımımıza göre  $P_i < P_j$ . Bu durumda iki alternatif sıralama oluşmaktadır. Bunlar sıralama  $\pi$  ve  $\pi'$  olarak adlandırılmaktadır. Sıralama  $\pi$ 'de  $i$  işi  $j$  işinden önce işlenmektedir. İş  $i$ ,  $r$  sırasında atanmış iken iş  $j$  ise  $r+1$  sırasına atanmıştır. Sıralama  $\pi'$  için tam aksi durum geçerlidir. İş  $j$ ,  $r$  sırasında atanmış iken iş  $i$  ise  $r+1$  sırasına atanmıştır. Sıralama  $\pi'$  içerisinde  $j$  işi  $i$  işinden önce işlenmektedir. Maliyetler  $S$  ve  $S'$  ise sırasıyla sıralamalar  $\pi$  ve  $\pi'$  için geç işlerin maliyetleridir.

Eşitlikler (28-30)'deki hesaplamalar ile işler  $i$  ve  $j$  için tamamlanma zamanları  $C_i^\pi$  ve  $C_j^{\pi'}$  değerleri bulunur. Bu işler geç tamamlanmış işlerdir ve geç tamamlanma süreleri  $T_i^\pi = C_i^\pi - D$  ve  $T_j^{\pi'} = C_j^{\pi'} - D$  olarak hesaplanır. Geç tamamlanan işlerin maliyeti  $S$  için hesaplamalar şöyledir:

$$S = T_i^\pi + T_j^{\pi'} \quad (43)$$

$$S = C_i^\pi + C_j^{\pi'} - 2D \quad (44)$$

$$S = 2A + 2P_i r^B + 2aA^\beta r^B + P_j(r+1)^B + a(C_i^\pi)^\beta (r+1)^B - 2D \quad (45)$$

Geç tamamlanan işlerin maliyeti  $S'$  için hesaplamalar şöyledir:

$$S' = 2A + 2P_j r^B + 2aA^\beta r^B + P_i(r+1)^B + a(C_j^{\pi'})^\beta (r+1)^B - 2D \quad (46)$$

Eğer geç tamamlanan işler için EKİZ öncelik kuralı optimum çizelgenin oluşmasına yardımcı oluyor ise  $S' - S > 0$  olmalıdır ve  $\pi$  sıralaması alternatif olan  $\pi'$  sıralamasına karşı baskın bir çizelge sunar.

$$S' - S = 2A + 2P_j r^B + 2aA^\beta r^B + P_i(r+1)^B + a(C_j^{\pi'})^\beta (r+1)^B - 2D - 2A - 2P_i r^B + 2aA^\beta r^B - P_j(r+1)^B - a(C_i^\pi)^\beta (r+1)^B + 2D \quad (47)$$

$$S' - S = (P_j - P_i)(2r^B - (r+1)^B) + \left( (C_j^{\pi'})^\beta - (C_i^\pi)^\beta \right) (ar^B(r+1)^B) \quad (48)$$

$P_j > P_i$  ve  $r^B > (r+1)^B$  olduğu bilindiği için  $(P_j - P_i)(2r^B - (r+1)^B)$  ifadesinin sıfırdan büyük olduğu anlaşılır. Ayrıca,  $r^B > (r+1)^B > 0$  olduğu için  $ar^B(r+1)^B > 0$  olduğu anlaşılmaktadır. Eğer  $(C_j^{\pi'})^\beta > (C_i^\pi)^\beta$  ise  $S' - S > 0$  olacaktır.  $(C_j^{\pi'})^\beta > (C_i^\pi)^\beta$  çünkü  $C_j^{\pi'} > C_i^\pi$ . Bunun detaylı ispatı aşağıdaki gibidir.

$$C_j^{\pi'} - C_i^\pi = A + P_j r^B + aA^\beta r^B - A - P_i r^B - aA^\beta r^B \quad (49)$$

$$C_j^{\pi'} - C_i^\pi = (P_j - P_i)r^B \quad (50)$$

$P_j > P_i$  ,  $r^B > 0$  ,  $C_j^{\pi'} - C_i^{\pi} > 0$  ,  $C_j^{\pi'} > C_i^{\pi}$  ,  $\beta > 0$  ,  $(C_j^{\pi'})^{\beta} > (C_i^{\pi})^{\beta}$  ve  $(C_j^{\pi'})^{\beta} - (C_i^{\pi})^{\beta} > 0$  olduğunu bildiğimiz için  $S' - S > 0$  olur. Böylelikle, EKİZ öncelik kuralının pozisyon tabanlı öğrenme ve doğrusal olmayan bozulma etkilerini içeren  $1|d_j = d, LE, DE|\sum_{j=1}^n (E_j + T_j)$  problemindeki geç işlerin optimal sıralamasında kullanılabilir olduğu ispat edilmiştir.

Böylelikle,  $1|d_j = d, LE, DE|\sum_{j=1}^n (E_j + T_j)$  probleminin optimal çözümünün pozisyon bağımlı öğrenme ve doğrusal olmayan öğrenme etkileri altında V şekilli olduğuna dair Teorem 2'in ispatı tamamlanmış olur.

#### 4. Sayısal Örnek

Bu bölümde öğrenme ve bozulma etkileri altındaki ortak teslim tarihli tek makine erken/geç tamamlanma çizelgeleme probleminin optimal sıralamasının V-Şekilli özelliğinin daha iyi

Tablo 2

$P_{[r]} = (P_r + aC_{r-1})r^B$  problemi için optimal çözüm

	r=1	r=2	r=3	r=4	r=5	r=6	r=7	r=8	r=9	r=10
$j$	9	8	3	4	5	7	6	2	1	10
$P_j$	7	6	4	3	2	4	5	7	8	9
$P_{[r]}$	7	5,945	3,996	3,040	2,096	4	4,962	6,868	7,845	8,826
$C_r$	7	12,945	16,941	19,981	22,077	26,077	31,039	37,908	45,752	54,579
$E_j$	13	7,055	3,059	0,019	0	0	0	0	0	0
$T_j$	0	0	0	0	2,077	6,077	11,039	17,908	25,752	34,579

Ortak teslim tarihli pozisyon tabanlı öğrenme ve doğrusal olmayan bozulma etkileri altındaki işlere ait tek makine ortamındaki optimum sıralama Tablo 2'de görüldüğü gibi V-Şekillidir. Teslim tarihine (20 zb) kadar erken tamamlanan işler  $P_{[r]}$  gerçek işlem sürelerinin azalan sırası ile sıralanmıştır. Teslim tarihinden sonra geç tamamlanan işler  $P_{[r]}$  gerçek işlem sürelerinin artan sırası ile sıralanmıştır. İkinci yöntemin geçerli olduğu problemin optimal çözümü ticari bir çözücü ile elde edildiğinde işlerin hangi sıra

anlaşılabilmesi için bir sayısal örnek verilmektedir. Tek makine üzerinde işlenmek üzere bekleyen 10 tane iş ( $j \in \{1,2,3, \dots, 10\}$ ) olduğunu ve bu işlere ait işlem zamanlarının ise  $P_j = \{8,7,4,3,2,5,4,6,7,9\}$ zb olduğu bilinmektedir. Bu işlere ait ortak teslim zamanı  $D=20$  zb olduğu bilinmektedir. Atölye ortamında öğrenme ve bozulma etkileri olduğu bilinmektedir.

$B=-0,03$ ,  $a=0,01$ , ve  $\beta = 0.01$  olarak varsayılmaktadır. Öğrenme ve bozulma etkileri altındaki gerçek işlem sürelerinin hesabı için iki alternatif hesaplama yöntemi bulunmaktadır. Bunlar;  $P_{[r]} = (P_r + aC_{r-1})r^B$  ve  $P_{[r]} = (P_r + aC_{r-1}^{\beta})r^B$  şeklindedir. Birinci yöntem pozisyon tabanlı öğrenme etkisi ve doğrusal bozulma etkisi altındaki işlem süresi hesabıdır. İkinci yöntem ise pozisyon temelli öğrenme etkisi ve doğrusal olmayan bozulma etkisi altındaki işlem süresi hesabıdır. Birinci yöntemin geçerli olduğu problemin optimal çözümü ticari bir çözücü ile elde edildiğinde işlerin hangi sıra ile makinede işlendiği,  $P_{[r]}$ ,  $C_r$ ,  $E_i$  ve  $T_i$  değerleri aşağıdaki Tablo 2'de verilmektedir.

ile makinede işlendiği,  $P_{[r]}$ ,  $C_r$ ,  $E_i$  ve  $T_i$  değerleri aşağıdaki Tablo 3'de verilmektedir. Tablo 3'de görüldüğü üzere, ortak teslim tarihli pozisyon tabanlı öğrenme ve doğrusal olmayan bozulma etkileri altındaki işlere ait tek makine ortamındaki optimum sıralama da V-Şekillidir.

Tablo 3

 $P_{[r]} = (P_r + aC_{r-1}^\beta)r^B$  problemi için optimal çözüm

	r=1	r=2	r=3	r=4	r=5	r=6	r=7	r=8	r=9	r=10
$j$	9	8	3	4	5	7	6	2	1	10
$P_j$	7	6	4	3	2	4	5	7	8	9
$P_{[r]}$	7	5,887	3,88	2,888	1,916	3,8	4,726	6,586	7,499	8,409
$C_r$	7	12,887	16,767	19,654	21,57	25,37	30,097	36,683	44,182	52,591
$E_j$	13	7,113	3,233	0,346	0	0	0	0	0	0
$T_j$	0	0	0	0	1,57	5,37	10,097	16,683	24,182	32,591

Ticari çözücü tarafından her iki problem için de elde edilen optimal çizelgeler V-Şekil özelliğine sahiptirler. Problem boyutunun büyüklüğü nedeni ile kesin çözümün ticari çözücü tarafından uzun zamanda bulunduğu ya da ticari çözümün hiç kullanılmadığı durumlarda, problemin çözümü için sezgisel ya da üst sezgisel algoritmalarından faydalanılabilir. Bu algoritmaların içerisindeki yerel arama algoritmaları çözüme V-şekilli özellik kazandıracak şekilde ya da çözümün V-şekilli özelliğini koruyacak şekilde tasarlanabilir. Arık, Schutten ve Topan (2022) çalışmalarında paralel makine ortamında erken/geç tamamlanma problemini ele almışlardır. Problemlerinde optimal çözümün her makinesindeki işlerin sıralanışının V-Şekilli olduğunu ve bu özellikten yerel arama esnasında/sonrasında faydalanmışlardır. Önerdikleri yerel arama yöntemi rastgele çözümden kaldırılan bir işin tekrar bir pozisyona ekleneceği sırada sadece V-şekilli özelliğinin korunduğu yeni çözümlerin oluşmasına müsaade etmektedir. Yine yapmış oldukları çalışmada bir işin bir makineden alınıp başka bir makiye kaydırılması sonrasında her iki makinedeki işlerin sırasının V-şekilli olmasını sağlayacak şekilde ikinci bir yerel arama önermişlerdir. V-Şekil özelliğinin korunduğu bir diğer yerel arama algoritması da Arık (2021a) tarafından tek makine çizelgeleme problemi için kullanılmıştır. Literatürdeki örneklerden de anlaşılacağı üzere, ortak teslim tarihli ve pozisyon tabanlı öğrenme ve doğrusal/doğrusal olmayan öğrenme etkileri altındaki işlerin makine/makineler üzerinde sıralanmasında V-Şekilli özelliğinden faydalanılarak optimal çözüme ya da yakın optimal çözüme ulaşılabilir.

## 5. Sonuçlar

Bu çalışmada, pozisyon tabanlı öğrenme ve doğrusal/doğrusal olmayan öğrenme etkileri

altındaki işlere ve ortak teslim tarihine sahip olan tek makine erken/geç tamamlanma probleminin optimal çözümünün V-şekilli olduğu matematiksel olarak ispat edildi. Hem erken hem de geç işlerin optimal çözümdeki sıralanışının çözümdeki işlere ait işlem sürelerinin V-şekilli olduğu gösterildi. Bu çalışma içerisinde problemin ispat edilen V şeklindeki özelliğinden faydalanılarak, büyük ölçekteki problemlerin çözümü için kullanılacak olarak yerel arama algoritmaları tasarlanabilir. Böylelikle yerel arama ile bir işin makinesi ya da sırası değiştirilirken sadece çözümün V şeklindeki özelliğinin korunduğu alternatif çözümler elde edilir. Yerel arama esnasında çözümü V şeklinde kalmaya zorlamak en azından çözümün yerel optimum olmasını garanti altına alır ve her yeni yerel arama ile çözüm optimal çözüme ya da yakın optimal çözüme yaklaştırılır. Ayrıca, gelecek çalışmalarda problemin zaman bağımlı öğrenme ve/veya budanmış öğrenme etkileri altındaki diğer halleri için de optimal çözümün V şekilli özelliği araştırılabilir.

## Araştırmacıların Katkısı

Bu çalışmadaki tüm alanların hazırlanmasında Oğuzhan Ahmet ARIK haricinde katkısı olan birisi yoktur.

## Çıkar Çatışması

Yazar tarafından herhangi bir çıkar çatışması beyan edilmemiştir.

## Kaynaklar

Arık, O.A. (2021a). Fuzzy rule-based acceptance criterion in metaheuristic algorithms. Journal of King Saud University - Computer and Information

- Sciences (Basım Aşamasında). Doi: <https://doi.org/10.1016/j.jksuci.2021.09.012>
- Arik, O.A. (2021b). Population-Based Tabu Search with Evolutionary Strategies for Permutation Flow Shop Scheduling Problems under Effects of Position-Dependent Learning and Linear Deterioration. *Soft Computing*, 25(2), 1501–1518. Doi: <https://doi.org/10.1007/s00500-020-05234-7>
- Arik, O.A., ve Toksarı, M.D. (2018a). Fuzzy Chance Constrained Programming Technique for Single Machine Earliness/Tardiness Scheduling Problem under Effects of Fuzzy Learning and Deterioration. *Sakarya University Journal Of Science*, 22(2), 652–662. Doi: <https://doi.org/10.16984/saufenbilder.299354>
- Arik, O. A., ve Toksarı, M. D. (2018b). Multi-Objective Fuzzy Parallel Machine Scheduling Problems under Fuzzy Job Deterioration and Learning Effects. *International Journal of Production Research*, 56(7), 2488–2505. Doi: <https://doi.org/10.1080/00207543.2017.1388932>
- Arik, O. A., ve Toksarı, M.D. (2019). Fuzzy Parallel Machine Scheduling Problem Under Fuzzy Job Deterioration and Learning Effects With Fuzzy Processing Times. Pp. 49–67 in *Advanced Fuzzy Logic Approaches in Engineering Science*, edited by M. Ram. IGI Global. Erişim Adresi: <https://www.igi-global.com/chapter/fuzzy-parallel-machine-scheduling-problem-under-fuzzy-job-deterioration-and-learning-effects-with-fuzzy-processing-times/212329>
- Arik, O.A., ve Toksarı, M.D. (2020). Minimizing Makespan With Fuzzy Processing Times Under Job Deterioration And Learning Effect. *Journal of Industrial Engineering*, 31(1), 1–17. Erişim Adresi: <https://dergipark.org.tr/tr/pub/endustrimuhen-disligi/issue/53786/612833>
- Arik, O.A., ve Toksarı, M.D. (2021). Genetic Algorithm Approach to Parallel Machine Scheduling Problems Under Effects of Position-Dependent Learning and Linear Deterioration. *International Journal of Applied Metaheuristic Computing*, 12(3), 195–211. Erişim Adresi: <https://www.igi-global.com/article/a-genetic-algorithm-approach-to-parallel-machine-scheduling-problems-under-effects-of-position-dependent-learning-and-linear-deterioration/284425>
- Arik, O.A., Schutten, M., Topan, E. (2022). Weighted earliness/tardiness parallel machine scheduling problem with a common due date. *Expert Systems with Applications*, 187(115916), 1–26. Doi: <https://doi.org/10.1016/j.eswa.2021.115916>
- Bachman, A. ve Janiak, A. (2004). Scheduling Jobs with Position-Dependent Processing Times. *Journal of the Operational Research Society*, 55, 257–264. Doi: <https://doi.org/10.1057/palgrave.jors.2601689>
- Biskup, D. (1999). Single-Machine Scheduling with Learning Considerations. *European Journal of Operational Research*, 115(1), 173–178. Doi: [https://doi.org/10.1016/S0377-2217\(98\)00246-X](https://doi.org/10.1016/S0377-2217(98)00246-X)
- Browne, S. ve Yechiali, U. (1990). Scheduling Deteriorating Jobs on a Single Processor. *Operations Research*, 38(3), 495–498. Doi: <https://doi.org/10.1287/opre.38.3.495>
- Cheng, T.C. E., Chin, C.W. ve Wen C.L. (2008). Some Scheduling Problems with Deteriorating Jobs and Learning Effects. *Computers and Industrial Engineering*, 54, 972–982. Doi: <https://doi.org/10.1016/j.cie.2009.11.008>
- Gordon, V.S., Potts, C. N., Strusevich, V. A. ve Whitehead, J. D. (2008). Single Machine Scheduling Models with Deterioration and Learning: Handling Precedence Constraints via Priority Generation. *Journal of Scheduling*, 11(5), 357–370. Doi: <https://doi.org/10.1007/s10951-008-0064-x>
- Gupta, J.N.D. ve Gupta, S.K. (1988). Single Facility Scheduling with Nonlinear Processing Times. *Computers and Industrial Engineering*, 14(4), 387–393. Doi: [https://doi.org/10.1016/0360-8352\(88\)90041-1](https://doi.org/10.1016/0360-8352(88)90041-1)
- Huang, X., Ming, Z.W. ve Ping, J. (2014). Parallel Machines Scheduling with Deteriorating and Learning Effects. *Optimization Letters*, 8(2), 493–500. Doi: <https://doi.org/10.1007/s11590-012-0490-8>
- Ji, M., Danli, Y., Qinyun, Y., ve Cheng, T. C. E. (2015). Machine Scheduling with Deteriorating Jobs and DeJong's Learning Effect. *Computers & Industrial Engineering*, 80, 195–200. Doi: <https://doi.org/10.1016/j.cie.2015.10.015>
- Kanet, J. (1981). Minimizing The Average Deviation Of Job Completion Times About A Common Due Date. *Naval Research Logistics Quarterly*, 28(4),

- 643–651. Doi: <https://doi.org/10.1002/nav.3800280411>
- Kuo, W.H., ve Yang, D. L. (2011). A Note on Due-Date Assignment and Single-Machine Scheduling with Deteriorating Jobs and Learning Effects. *Journal of the Operational Research Society*, 62(1), 206–210. Doi: <https://doi.org/10.1057/jors.2009.155>
- Lee, W.C. (2014). Single-Machine Scheduling with Past-Sequence-Dependent Setup Times and General Effects of Deterioration and Learning. *Optimization Letters*, 8(1),135–144. Doi: <https://doi.org/10.1007/s11590-012-0481-9>
- Mosheiov, G. (1991). V-Shaped Policies for Scheduling Deteriorating Jobs. *Operations Research*, 39(6), 979–991. Doi: <https://doi.org/10.1287/opre.39.6.979>
- Mosheiov, G. (1998). Multi-Machine Scheduling With Linear Deterioration. *INFOR: Information Systems and Operational Research*, 36(4), 205–214. Doi: <https://doi.org/10.1080/03155986.1998.11732359>
- Mosheiov, G. (2001). Scheduling Problems with a Learning Effect. *European Journal of Operational Research*, 132(3), 687–693. Doi: [https://doi.org/10.1016/S0377-2217\(00\)00175-2](https://doi.org/10.1016/S0377-2217(00)00175-2)
- Niu, Y.P., Wang, J. ve Yin., N. (2015). Scheduling Problems with Effects of Deterioration and Truncated Job-Dependent Learning. *Journal of Applied Mathematics and Computing* , 47(1–2), 315-325. Doi: <https://doi.org/10.1007/s12190-014-0777-2>
- Pei, J., Liu, X., Pardalos, P. M., Migdalas, A. ve Yang, S. (2017). Serial-Batching Scheduling with Time-Dependent Setup Time and Effects of Deterioration and Learning on a Single-Machine. *Journal of Global Optimization*, 67(1–2), 251-262. Doi: <https://doi.org/10.1007/s10898-015-0320-5>
- Toksarı, M.D., ve Arık, O. A. (2017a). Genetic Algorithm Applied to the Flow Shop Scheduling Problem under Effects of Fuzzy Learning and Deterioration with a Common Fuzzy Due Date. *New Trends and Issues Proceedings on Humanities and Social Sciences*, 4(10), 306–316. Doi: <https://doi.org/10.18844/prosoc.v4i10.3105>
- Toksarı, M. D., ve Arık, O. A. (2017b). Single Machine Scheduling Problems under Position-Dependent Fuzzy Learning Effect with Fuzzy Processing Times. *Journal of Manufacturing Systems*, 45,159–179. Doi: <https://doi.org/10.1016/j.jmsy.2017.08.006>
- Toksarı, M. D., ve Güner, E. (2010). Parallel Machine Scheduling Problem to Minimize the Earliness/Tardiness Costs with Learning Effect and Deteriorating Jobs. *Journal of Intelligent Manufacturing*, 21(6), 843-851. Doi: <https://doi.org/10.1007/s10845-009-0260-3>
- Toksarı, M.D., ve Güner, E. (2008). Minimizing the Earliness/Tardiness Costs on Parallel Machine with Learning Effects and Deteriorating Jobs: A Mixed Nonlinear Integer Programming Approach. *The International Journal of Advanced Manufacturing Technology*, 38(7–8),801–808. Doi: <https://doi.org/10.1007/s00170-007-1128-3>
- Toksarı, M. D., ve Güner, E. (2009). Parallel Machine Earliness/Tardiness Scheduling Problem under the Effects of Position Based Learning and Linear/Nonlinear Deterioration. *Computers and Operations Research*, 36(8), 2394–2417. Doi: <https://doi.org/10.1016/j.cor.2008.09.012>
- Toksarı, M. D., Oron, D. ve Güner, E. (2009). Single Machine Scheduling Problems under the Effects of Nonlinear Deterioration and Time-Dependent Learning. *Mathematical and Computer Modelling*, 50(3–4), 401-406. Doi: <https://doi.org/10.1016/j.mcm.2009.05.026>
- Wang, J.B. 2006. A Note on Scheduling Problems with Learning Effect and Deteriorating Jobs. *International Journal of Systems Science*, 37(12), 827–833. Doi: <https://doi.org/10.1080/00207720600879260>
- Wang, J.B., Lin, L. ve Shan, F. (2008). Flow Shop Scheduling with Effects of Learning and Deterioration. *Journal of Applied Mathematics and Computing*, 26(1–2), 367–379. Doi: <https://doi.org/10.1007/s12190-007-0033-0>
- Wang, J.B., Liu, L. ve Wang, C. (2013). Single Machine SLK/DIF Due Window Assignment Problem with Learning Effect and Deteriorating Jobs. *Applied Mathematical Modelling* 37(18–19), 8394-8400. Doi: <https://doi.org/10.1016/j.apm.2013.03.041>
- Wang, J.B., ve Wang, C. (2011). Single-Machine Due-Window Assignment Problem with Learning Effect and Deteriorating Jobs. *Applied*

*Mathematical Modelling* 35(8), 4017-4022. Doi:  
<https://doi.org/10.1016/j.apm.2011.02.023>

Wang, J.B. (2007). Single-Machine Scheduling Problems with the Effects of Learning and Deterioration. *Omega*, 35(4), 397-402. Doi:  
<https://doi.org/10.1016/j.omega.2005.07.008>

Yang, D.L. ve Kuo, W.K. (2010). Some Scheduling Problems with Deteriorating Jobs and Learning Effects. *Computers and Industrial Engineering*, 58(1), 25-28. Doi:  
<https://doi.org/10.1016/j.cie.2009.06.016>

Yang, S.J. (2010). Single-Machine Scheduling Problems with Both Start-Time Dependent Learning and Position Dependent Aging Effects under Deteriorating Maintenance Consideration. *Applied Mathematics and Computation*, 217(7), 3321-3329. Doi:  
<https://doi.org/10.1016/j.amc.2010.08.064>

Yin, Y. ve Xu, D. (2011). Some Single-Machine Scheduling Problems with General Effects of Learning and Deterioration. *Computers and Mathematics with Applications*, 61(1), 100-108. Doi:  
<https://doi.org/10.1016/j.camwa.2010.10.036>

Zhu, Z., Sun, L., Chu, F., ve Liu, M. (2011). Due-Window Assignment and Scheduling with Multiple Rate-Modifying Activities under the Effects of Deterioration and Learning. *Mathematical Problems in Engineering*, 2011, 1-19. Doi: <https://doi.org/10.1155/2011/151563>