



A bi-objective mathematical model for an unrelated parallel machine scheduling problem with job-splitting

Tuğba Saraç^{1*}, Büşra Tutumlu²

¹Eskişehir Osmangazi University, Faculty of Engineering and Architecture, Industrial Engineering Department,, 26480 Eskişehir, Turkey

²Kütahya Dumlupınar University, Faculty of Engineering, Industrial Engineering Department, 43100, Kütahya, Turkey

Highlights:

- Unrelated parallel machine scheduling problem with job splitting
- A multi-objective mathematical model
- A three-stage matheuristic algorithm

Keywords:

- Unrelated Parallel Machine Scheduling Problem
- Job-Splitting
- Multi-objective programming
- Matheuristic Algorithm

Article Info:

Research Article
Received: 08.07.2021
Accepted: 30.12.2021

DOI:

10.17341/gazimmfd.967343

Correspondence:

Author: Tuğba Saraç
e-mail: tsarac@ogu.edu.tr
phone: +90 530 315 2581

Graphical/Tabular Abstract

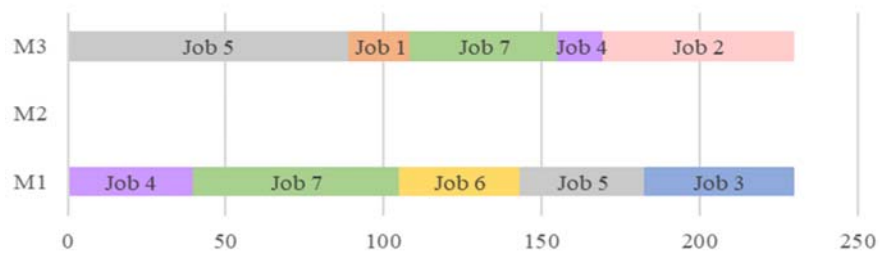


Figure A. Gantt Chart for the unrelated parallel machine scheduling problem with job-splitting

Purpose: The primary purpose of this study is to present a mathematical model which allows the splitting of jobs in an unrelated parallel machine scheduling problem with sequence and machine-dependent setup times and machine eligibility restrictions.

Theory and Methods:

In most studies on machine scheduling, it is assumed that jobs cannot be split. However, many businesses may prefer to split the jobs and produce them on different machines to complete as soon as possible. Although splitting jobs requiring setup time may lead to an increase in the total production time, it is essential to provide opportunities such as delivering the jobs on time or evenly distributing the jobs to the machines. Also, another critical issue for many businesses is to get jobs done with as few machines as possible. Since the number of machines in companies is usually fixed, minimizing the number of machines to be used does not seem advantageous. Whereas, it creates opportunities such as energy-saving, renting non-used machines to another company, or accepting additional orders as much as the capacity of empty machines. This study proposes two different bi-objective mathematical models for the unrelated parallel machine scheduling problem. The first model is for the unrelated parallel machine scheduling problem with non-job-splitting. In the second model, in which the jobs can split, besides the machines to which the jobs will be assigned and their order, it is also determined how the jobs will split and in which ratios the jobs will be processed on which machines. The objectives of both models are to minimize the completion time of the last job and the number of machines to be used. The objective functions of the proposed multi-objective mathematical models are scalarized by the epsilon constraint method. A matheuristic algorithm (MA) is proposed for solving large-size problems.

Results:

To show the solution performance of the mathematical models, randomly generated test problems were solved with GAMS / CPLEX. When the problems for which the optimum solution is obtained in the tests are examined, the proposed model without job-split can find a solution in an average of 85% less time than the model in the literature, and the model that removes the assumption that the jobs are not split, shortens the completion time of the last job in an average of 14%. It has been observed that the proposed MA for large-sized problems has obtained successful solutions in a much shorter time.

Conclusion:

All studies in the literature that have addressed the parallel machine scheduling problem up to now, it is assumed that jobs cannot be split. In this study, by removing this assumption, businesses are provided with opportunities such as delivering the jobs on time or evenly distributing the jobs to the machines.



İşlerin bölünebildiği ilişkisiz paralel makine çizelgeleme problemi için iki amaçlı bir matematiksel model

Tuğba Saraç^{1*}, Büşra Tutumlu²

¹Eskişehir Osmangazi Üniversitesi, Mühendislik-Mimarlık Fakültesi, Endüstri Mühendisliği Bölümü, 26480 Eskişehir, Türkiye

²Kütahya Dumlupınar Üniversitesi, Mühendislik Fakültesi, Endüstri Mühendisliği Bölümü, 43100, Kütahya, Türkiye

Ö N E Ç İ K A N L A R

- İş bölünmesine izin verilen ilişkisiz paralel makine çizelgeleme problemi
- Çok amaçlı bir matematiksel model
- Üç aşamalı bir matsezgisel algoritma

Makale Bilgileri

Araştırma Makalesi
Geliş: 08.07.2021
Kabul: 30.12.2021

DOI:

10.17341/gazimmfd.967343

Anahtar Kelimeler:

İlişkisiz paralel makine çizelgeleme problemi, iş bölünmesi, çok amaçlı programlama, matsezgisel algoritma.

ÖZ

Paralel makina çizelgeleme problemlerini ele alan çalışmalarda genellikle işlerin bölünemediği varsayılmaktadır. Ancak işlerin bölünmesi, gecikmelerin önlenmesi ya da işlerin makinalara dengeli dağıtılabilmesi gibi fırsatlar sunabilmektedir. Bu çalışmada, işlerin bölünemediği ve bölünebildiği ilişkisiz paralel makina çizelgeleme problemi için iki farklı çok amaçlı matematiksel model önerilmiştir. İlk model işlerin bölünemediği ilişkisiz paralel makine çizelgeleme problemi içindir ve Saraç ve Tutumlu [1] tarafından önerilen model baz alınarak geliştirilmiştir. İşlerin bölünebildiği ikinci modelde, işlerin hangi makinalara atanacağı ve sıralarının yanı sıra işlerin kaçta bölüneceği ve hangi oranlarda hangi makinalarda işleneceği de belirlenmektedir. Her iki modelin amaçları, son işin tamamlanma zamanının ve kullanılacak makina sayısının enküçülenmesidir. Çok amaçlı modeller epsilon kısıt yöntemiyle tek amaçlı yapıya dönüştürülmüştür. Rassal türetilen test problemleri, GAMS/Cplex çözücüsü kullanılarak önerilen modeller ile çözülmüş, elde edilen sonuçlar karşılaştırılmıştır. Yapılan testlerde eniyi çözümü elde edilen problemler dikkate alındığında, işlerin bölünemediği durum için önerilen model literatürde yer alan modelden [1] ortalama %85 daha kısa sürede çözüm bulmuş ve işlerin bölünemez olduğu varsayımının kaldırıldığı model ise aynı makina sayısı için son işin tamamlanma zamanını ortalama %14 kısaltmıştır. Ayrıca işlerin bölünmesine izin verilen matematiksel modelin çözemediği büyük boyutlu problemlerin çözümü için bir matsezgisel algoritma da önerilmiştir.

A bi-objective mathematical model for an unrelated parallel machine scheduling problem with job-splitting

H I G H L I G H T S

- Unrelated parallel machine scheduling problem with job splitting
- A multi-objective mathematical model
- A three-stage matheuristic algorithm

Article Info

Research Article
Received: 08.07.2021
Accepted: 30.12.2021

DOI:

10.17341/gazimmfd.967343

Keywords:

Unrelated parallel machine scheduling problem, job-splitting, multi-objective programming, matheuristic algorithm

ABSTRACT

Studies dealing with parallel machine scheduling problems generally assume that jobs are not split. However, splitting of jobs can offer opportunities such as delivering the jobs on time or evenly distributing the jobs to the machines. In this study, two different multi-objective mathematical models are proposed for the unrelated parallel machine scheduling problem without and with job-splitting. The first model is for the unrelated parallel machine scheduling problem without job-splitting and it was developed based on the model proposed by Saraç and Tutumlu [1]. In the second model, in which the jobs can split, besides the machines to which the jobs will be assigned and their order, it is also determined how the jobs will split and in which ratios the jobs will be processed on which machines. The objectives of both models are to minimize the completion time of the last job and the number of machines to be used. Multi-objective models were transformed into a single-objective structure with the epsilon constraint method. Randomly generated test problems were solved with the proposed models using the GAMS/Cplex solver, and the results were compared. Considering the problems for which the optimum solution is obtained, the first model found a solution in an average of 85% less time than the model in the literature [1], and the second model shortens the completion time of the last job in an average of 14%. In addition, a mathematical heuristic algorithm is proposed for solving large-size problems.

1. GİRİŞ (INTRODUCTION)

Paralel makina çizelgeleme problemi, işlerin paralel makinalardan hangisinde, hangi sırada işleneceğinin belirlenmesi problemidir. Eğer bir işin işlem süresi makine bazında farklılık gösteriyorsa bu probleme ilişkisiz paralel makina çizelgeleme problemi denir. Literatürde paralel makina çizelgeleme konusunda çok sayıda çalışma bulunmaktadır. Bu çalışmaların çoğunda, problemi basitleştirmek için işlerin bölünemediği ve atandığı makinada tamamlandığı varsayımı yapılmıştır. Saraç ve Tutumlu [1], Akyol Özer ve Saraç [2], Saraç vd. [3], Furugi [4] ve Tırkolae vd. [5] bu çalışmalara örnek olarak verilebilir. Oysa kaynak, plastik şekil verme, saç şekillendirme, talaşlı imalat gibi yöntemler ile paralel makinalarda üretim yapan pek çok sektörde işlerin büyük partiler halinde tek bir makinede üretilmesi yerine daha küçük partilere bölünerek farklı makinelerde tamamlanabilmesi mümkündür. Paralel makine çizelgeleme probleminde bir işin işlem süresi, genellikle ilgili işin bir partisinin üretimi için gereken süreye karşı gelmektedir. Eğer iş daha küçük partilere bölünür ve bu partiler farklı makinalarda üretilirse, doğal olarak işin işlem süresi de bölünmüş olur. İşlerin/işlem sürelerinin bölünmesi, bir işin aynı anda farklı makinalarda üretilmesini mümkün kıldığından, bir makinada üretilmesine kıyasla çok daha kısa sürede tamamlanabilmesi mümkün olur, böylece işlerin makinalara daha dengeli dağıtılması ve son işin daha erken tamamlanması sağlanabilir.

Son yıllarda işlerin bölünebilir olduğunu varsayan çizelgeleme çalışmalarının sayısı artmaya başlamıştır ([6]-[18]). Literatürde, işlerin bölünebilirliğini dikkate alan çalışmalarda genellikle iki yaklaşımdan birisinin benimsendiği görülmektedir. İlk yaklaşımda, işlerin sadece belirli sayıda parçaya bölünmesine izin verilmektedir. Sarıççek ve Çelik [6], Wang vd. [7], Liu vd. [8], Salimifard vd. [9], Kim vd. [10] ve Kim ve Kim [11]'in çalışmaları bu yaklaşıma örnek olarak verilebilir. Xing ve Zhang [12] ise özdeş paralel makina çizelgeleme probleminde bir işin sadece iki makinaya bölünebildiğini varsaymıştır. Wang vd. [13], hem özdeş paralel makina hem de ilişkisiz paralel makina çizelgeleme problemlerinde işlerin belli sayıda parçalara bölünebildiği durumları dikkate almışlardır. İkinci yaklaşımda ise işlerin kaç parçaya bölüneceği de bir karar problemidir. Lee ve Jang [14] ve Kim ve Lee [15] ilişkili (*uniform*) paralel makina çizelgeleme probleminde ve Lee ve Kim [16] ve Lee vd. [17] özdeş paralel makina çizelgeleme probleminde ikinci yaklaşımı benimseyen çalışmalara örnektir. Kim ve Kim [18], ise ilişkisiz paralel makina çizelgeleme probleminde iş bölünmesini ele almışlardır. Kim ve Kim [18]'in çalışmasında, bir iş, aynı birimlerden oluşan bir gruptan oluşmaktadır ve her iş bu birimin tam sayı katı olan birkaç alt işe bölünebilmektedir. İş bölünmesine izin verilen, sıralamaya bağlı hazırlık süreli ve uygunluk kısıtlı ilişkisiz paralel makina çizelgeleme problemi ise ilk defa bu çalışmada ele alınmıştır. İş bölünmesine izin veren çalışmalarda problemi basitleştirmesi nedeniyle sıklıkla

tercih edilen işlerin bölünebileceği parça sayısının önceden belli olduğu ilk yaklaşım yerine daha başarılı sonuçlara ulaşmayı mümkün kılması nedeniyle işlerin bölünüp bölünmeyeceğinin, bölünecekse kaç parçaya ve hangi oranlarda bölüneceğinin de model tarafından belirlendiği ikinci yaklaşım benimsenmiştir. Ayrıca problem yine literatürde nadir ele alınmış olan kullanılacak makina sayısının enküçüklenmesi amacının da dahil edilmesi ile çok amaçlı bir yapıya kavuşmuştur. Paralel makina çizelgeleme probleminde eniyi makina sayısının belirlenmesi amaç fonksiyonu literatürde ilk defa Saraç ve Tutumlu [1] tarafından ele alınmıştır. İşlerin mümkün olduğunca az sayıda makina ile gerçekleştirilmesi, işletmelere enerji tasarrufu sağlayabilmesi, kullanılmayan makinaların başka bir işletmeye kiralanabilmesi veya boş kalan makinaların kapasitesi kadar ek iş kabul edebilmesi gibi fırsatlar yaratması nedeniyle çok önemlidir.

Bu çalışmada işlerin bölünemediği ve bölünebildiği ilişkisiz paralel makina çizelgeleme problemi için çok amaçlı matematiksel modeller önerilmiştir. Her iki problemde de sıralamaya bağlı hazırlık süreleri ve uygunluk kısıtları yer almaktadır ve amaç fonksiyonları, son işin tamamlanma zamanının ve kullanılacak makina sayısının enküçüklenmesidir. İlk model, işlerin bölünemediği ilişkisiz paralel makina çizelgeleme problemi içindir. Bu model, Saraç ve Tutumlu [1] tarafından önerilen model baz alınarak geliştirilmiştir. İkinci model ise işlerin bölünebildiği ilişkisiz paralel makina çizelgeleme problemi içindir. Bu modelde, işlerin atanacakları makinaların ve sıralarının belirlenmesinin yanı sıra kaç bölüneceklerine ve hangi oranlarda hangi makinalara atanacaklarına da karar verilmektedir. Çok amaçlı problemin çözümünde epsilon kısıt yöntemi kullanılmıştır. Ele alınan problem NP-zor bir problem olduğundan önerilen matematiksel modeller belirlenen süre limitleri içerisinde büyük boyutlu problemlere çözüm bulamamaktadır. Bu nedenle, iş bölünebilirliğinin göz önünde bulundurulduğu büyük boyutlu problemleri çözebilmek için bir matsezigisel algoritma geliştirilmiştir.

Bu çalışmanın izleyen bölümünde ele alınan problem tanımlanmış ve karşılaştırma amaçlı literatürden alınan model ve önerilen matematiksel modeller açıklanmıştır. Üçüncü bölümde epsilon kısıt yöntemi tanıtılmıştır. Dördüncü bölümde önerilen matsezigisel algoritma açıklanmıştır. Beşinci bölümde deneysel sonuçlar son bölümde ise sonuç ve öneriler sunulmuştur.

2. PROBLEMİN TANIMLANMASI VE ÖNERİLEN MATEMATİKSEL MODELLER (PROBLEM DEFINITION AND PROPOSED MATHEMATICAL MODELS)

Ele alınan problemde sıfır anında atanmaya hazır n adet işin, m adet makinadan hangisinde, hangi sırada işlem göreceği belirlenecektir. Her işin her makinadaki üretim süresi farklıdır. Bir makina belli bir anda sadece bir işe tahsis edilebilmektedir. Her iş her makinada üretilmemektedir bu

nedenle işler makinalara atanırken makina uygunluk durumları göz önünde bulundurulmalıdır. Bir işe başlanabilmesi için hazırlık gerekmektedir ve hazırlık süreleri önceki işe ve işin atandığı makinaya bağlı olarak değişebilmektedir bir başka değişle sıra bağımlı hazırlık süreleri söz konusudur. Bu problem iş bölünmesine izin verilen ve verilmeyen iki durum için ayrı ayrı ele alınmış ve her iki durum için de bir matematiksel model önerilmiştir. Önerilen her iki model de iki amaçlıdır ve amaç fonksiyonları son işin tamamlanma zamanının ve kullanılacak makina sayısının enküçüklenmesidir. İş bölünmesine izin verilmeyen durumun ele alındığı ilk model (M1), Saraç ve Tutumlu [1] ve Avalos- Rosales vd. [19] tarafından önerilen modeller baz alınarak geliştirilmiştir. Baz alınan modellerden farklı olarak önerilen modelde işlerin tamamlanma zamanlarına karşı gelen karar değişkenleri ve tamamlanma zamanını hesaplatan kısıtlar çıkarılmıştır. Böylece Saraç ve Tutumlu [1] tarafından önerilen modelin (MST) çözüm süresinden çok daha kısa sürede çözümler elde etmek mümkün hale getirilmiştir. İşlerin bölünebilir olduğu durumu dikkate alan ikinci model (M2) ise ilk defa bu çalışmada önerilmiştir. Sadece işlerin hangi makinada hangi sırada üretileceğinin belirlendiği klasik probleme ek olarak her bir işin bölünüp bölünmeyeceği ve bölünecekse kaç ve hangi oranlarda bölüneceği kararları da verilmektedir. Literatürden alınan ve karşılaştırmada kullanılacak MST [1] modeli ve bu çalışmada önerilen M1 ve M2 modelleri aşağıda ayrı başlıklar altında verilmiştir.

2.1. MST Modeli (MST Model)

MST modeli Saraç ve Tutumlu [1] tarafından önerilen modeldir. Bu modelde kullanılan kümeler, indisler, parametreler, karar değişkenleri, amaç fonksiyonları ve kısıtlar aşağıda sunulmuştur.

Kümeler ve İndisler:

$N = \{1, 2, \dots, n\}$ iş kümesi

$M = \{1, 2, \dots, m\}$ makina kümesi,

$i, j \in N$ belirli bir işi göstermek için kullanılan indislerdir.

$k \in N$ iş sırasını göstermek için kullanılan indistir.

$l \in M$ belirli bir makina göstermek için kullanılan indistir.

Parametreler:

p_{jl} : j . işin l . makinadaki işlem süresi

b_{jl} : j . işi l . makinada üretilebiliyor ise 1, diğer durumda 0

h_{jl} : j . işin l . makinada ilk sıraya atanması durumunda hazırlık süresi

s_{ijl} : i . iş j . işten önce l . makinada çizelgelenmişse sıra ve makina bağımlı hazırlık süresi

M : Yeterince büyük bir pozitif sayı

Karar Değişkenleri:

x_{jkl} : eğer j . iş k . sırada l . makinaya atandıysa 1; diğer durumda 0

C_{enb} : Son işin tamamlanma zamanı

C_j : j . işinin tamamlanma zamanı

α_l : l . makina seçildiyse 1; diğer durumda 0

MST modelinde kullanılan amaç fonksiyonları Eş. 1 ve Eş. 2'de verilmiştir.

Amaç Fonksiyonları:

$$enk f_1 = C_{enb} \quad (1)$$

$$enk f_2 = \sum_l \alpha_l \quad (2)$$

Eş. 1, son işin tamamlanma zamanının enküçüklenmesini, Eş. 2 ise işlerin işlem göreceği toplam makina sayısını enküçüklenmesini sağlayan amaç fonksiyonudur.

MST [1] modeline ait kısıtlar aşağıda verilmiştir;

Kısıtlar:

$$C_j + M(1 - x_{jkl}) \geq h_{jl} + p_{jl} \quad \forall j, k, l : k = 1 \quad (3)$$

$$C_j - M(1 - x_{jkl}) \leq h_{jl} + p_{jl} \quad \forall j, k, l : k = 1 \quad (4)$$

$$C_j + M(2 - x_{jkl} - x_{i(k-1)l}) \geq C_i + p_{jl} + s_{ijl} \quad \forall i, j, k, i \neq j, k > 1 \quad (5)$$

$$C_j - M(2 - x_{jkl} - x_{i(k-1)l}) \leq C_i + p_{jl} + s_{ijl} \quad \forall i, j, k, i \neq j, k > 1 \quad (6)$$

$$C_{enb} \geq C_j \quad \forall j \quad (7)$$

$$\sum_j x_{jkl} \leq \alpha_l \quad \forall k, l \quad (8)$$

$$\sum_k \sum_l x_{jkl} = 1 \quad \forall j \quad (9)$$

$$\sum_j x_{jkl} - \sum_i x_{i(k-1)l} \leq 0 \quad \forall k, l : k > 1 \quad (10)$$

$$\sum_k x_{jkl} \leq b_{jl} \alpha_l \quad \forall j, l \quad (11)$$

$$x_{jkl} \in \{0,1\} \quad \forall i, k, l \quad (12)$$

$$\alpha_l \in \{0,1\} \quad \forall l \quad (13)$$

$$C_j \geq 0 \quad \forall j \quad (14)$$

$$C_{enb} \geq 0 \quad (15)$$

Eş. 3 ve Eş. 4 her makinadaki ilk işlerin ve Eş. 5 ve Eş. 6 ilk sıra haricindeki işlerin tamamlanma zamanını belirlemektedir. Eş.7 son işin tamamlanma zamanını hesaplamaktadır. Eş. 8 ve Eş. 9 sırasıyla bir makinanın bir sırasına e fazla bir işin atanabilmesini ve her işin mutlaka bir makinanın bir sırasına atanmasını sağlamaktadır. Eş. 10 aynı makinaya atanan işlerin sıra atlamadan işlenmesini sağlamaktadır. Eş. 11, ilgili makina seçildiyse, o makinada işlem görebilecek işlerin atanmasını sağlamaktadır. Eş. 12-Eş. 15 işaret kısıtlarıdır.

2.2. M1 Modeli (M1 Model)

M1 modeli, iş bölünmesine izin verilmeyen MST modelinin iyileştirilmiş bir eşdeğeridir. M1 modeli için bir önceki alt başlıkta tanımlanan indisler, indis kümeleri parametreler ve karar değişkenlerine ek olarak yeni bir karar değişkeni tanımlanmıştır.

Karar Değişkeni:

y_{ijl} : eğer i . iş j . işten önce l . makinada çizelgelenmişse 1; diğer durumda 0

M1 modelinin amaç fonksiyonları Eş. 1 ve Eş. 2'de verilen son işin tamamlanma zamanının ve kullanılan makina sayısının en küçükleme amaçlarıdır.

M1 modeli literatürden alınan MST modelinden tamamlanma zamanlarına karşı gelen C_j karar değişkenlerinin, tamamlanma zamanı hesaplama kısıtlarını (Eş. 3-Eş. 6), tamamlanma zamanlarını kullanarak C_{enb} 'ün hesaplamasını sağlayan kısıtın (Eş. 7) ve C_j ve C_{enb} karar değişkenlerine ine ait işaret kısıtlarının (Eş. 14, Eş. 15) çıkartılıp aşağıda verilen Eş. 16, Eş. 17 ve Eş. 18'de verilen kısıtların eklenmesi ile elde edilmiştir:

$$y_{ijl} + 1 \geq x_{i(k-1)l} + x_{jkl} \quad \forall i, j, k, l \quad i \neq j, k > 1 \quad (16)$$

$$C_{enb} \geq \sum_j h_{jl} x_{i1l} + \sum_i \sum_{j \neq i} s_{ijl} y_{ijl} + \sum_j \sum_k p_{jkl} x_{jkl} \quad \forall l \quad (17)$$

$$y_{ijl} \in \{0,1\} \quad \forall i, j, l \quad (18)$$

Eş. 16, eğer i . iş j . işten hemen önce aynı makinada işlem görmüşse, y_{ijl} karar değişkeninin '1' değerini almasını sağlamaktadır. Eş. 17, son işin tamamlanma zamanını işlerin tamamlanma zamanlarına gereksinim duymadan doğrudan ilgili makinaya atanan tüm işlerin hazırlık ve üretim sürelerinin toplanması ile hesaplamaktadır. Eş. 18, M1 için tanımlanmış y_{ijl} karar değişkenine ait işaret kısıtıdır.

2.3. M2 Modeli (M2 Model)

M2 modeli, iş bölünmesine izin verilen modeldir. M2 için yukarıda tanımlanan indisler, indis kümeleri parametreler ve karar değişkenlerine ek olarak yeni parametre ve karar değişkenleri tanımlanmıştır.

Parametre:

β : İşlerin makinalarda işlenebileceği en küçük oran

Karar Değişkeni:

θ_{jl} : j . işin l . makinada işleneceği oran

M1 modelinde olan Eş. 8, Eş. 10-Eş. 13, Eş. 16, Eş. 18 M2'de de yer almaktadır. M1'deki atama kısıtı (Eş. 9) ve son işin tamamlanma zamanının hesaplanması kısıtı (Eş. 17) işlerin bölünmesini dikkate alacak şekilde yeniden düzenlenmiş ve

sırasıyla Eş. 19 ve Eş. 20'de verilmiştir. Ayrıca yeni eklenen diğer kısıtlar da (Eş. 21-Eş. 24) aşağıda verilmiştir.

$$\sum_k \sum_l x_{jkl} \geq 1 \quad \forall j \quad (19)$$

$$C_{enb} \geq \sum_j x_{j1l} h_{jl} + \sum_i \sum_{j \neq i} s_{ijl} y_{ijl} + \sum_j \theta_{jl} p_{jkl} \quad \forall l \quad (20)$$

$$\sum_l \theta_{jl} = 1 \quad \forall j \quad (21)$$

$$\theta_{jl} \leq \sum_k x_{jkl} \quad \forall j, l \quad (22)$$

$$\theta_{jl} \geq \beta \sum_k x_{jkl} \quad \forall j, l \quad (23)$$

$$\theta_{jl} \geq 0 \quad \forall j, l \quad (24)$$

Eş. 19, her işin en az bir makinanın bir sırasına atanmasını sağlamaktadır. Eş. 20, son işin tamamlanma zamanını hesaplamaktadır. Eş. 21, işlerin makinalara bölünme oranlarının toplamının '1' olmasını sağlamaktadır. Eş. 22 ve Eş. 23, x_{jkl} ve θ_{jl} karar değişkenleri için ilişki kısıtlarıdır. Ayrıca Eş. 23, işlerin makinalara belirlenen en az orandan daha az bölünmemesini sağlamaktadır. İşlerin bir makinada işlenebileceği en küçük oran sınırlanmadığında, 0,00001 gibi gerçekte uygulanması mümkün olmayacak oranların seçilmesi riski doğmaktadır. Bu kısıtın modele eklenmesi ile böyle bir riskin ortaya çıkmasının önüne geçilmiştir. Eş. 24, θ_{jl} karar değişkenine ait işaret kısıtıdır.

Literatürden alınan MST modeli ve bu çalışmada önerilen M1 ve M2 modelleri aşağıda özet biçimde sunulmuştur.

(MST):

Amaçlar:

$$enkf_1, enfk_2$$

Kısıtlar:

$$(3)-(15)$$

(M1):

Amaçlar:

$$enkf_1, enfk_2$$

Kısıtlar:

$$(8)-(13), (16)-(18)$$

(M2):

Amaçlar:

$$enkf_1, enfk_2$$

Kısıtlar:

$$(8), (10)-(13), (16), (18), (19)-(24)$$

3. EPSILON KISIT YÖNTEMİ (ϵ -CONSTRAINT METHOD)

Çok amaçlı problemlerin çözümü için literatürde birçok amaç birleştirme yöntemi vardır. Literatürde yaygın olarak kullanılan yöntemlerden biri epsilon kısıt yöntemidir [5, 20]. Bu yöntemde amaç fonksiyonlarından birisi amaç olarak seçilirken geri kalan tüm amaç fonksiyonları modele epsilon kısıt olarak eklenmektedir. Böylelikle çok amaçlı bir problem tek amaçlı probleme dönüştürülmektedir [21]. Bu

çalışmada, son işin tamamlanma zamanının enküçüklenmesi olan birinci amaç sürekli, toplam kullanılan makina sayısının enküçüklenmesi olan ikinci amaç ise kesikli değerler almaktadır. Bu nedenle, birinci amaç fonksiyonu amaç olarak seçilmiş ve ikinci amaç fonksiyonu ise Eş. 25'te verildiği gibi epsilon kısıt olarak modele eklenmiştir. Burada ε kullanılacak makina sayısı amacına ait epsilon kısıtın sağ taraf sabitidir.

$$f_2 \leq \varepsilon \quad (25)$$

İki amaçlı MST, M1 ve M2 modellerinin epsilon kısıt yöntemi (EKY) ile skalerleştirilmiş versiyonları sırasıyla MST-EKY, M1-EKY ve M2-EKY olarak adlandırılmış ve aşağıda verilmiştir.

(MST-EKY):

Amaç:

$$enk f_1$$

Kısıtlar:

$$(3)-(15), (25)$$

(M1-EKY):

Amaç:

$$enk f_1$$

Kısıtlar:

$$(8)-(13), (16)-(18), (25)$$

(M2-EKY):

Amaç:

$$enk f_1$$

Kısıtlar:

$$(8), (10)-(13), (16), (18), (19)-(25)$$

Skalerleştirilmiş modelin epsilon kısıt yöntemi ile çözülebilmesi için izlenmesi gereken adımlar aşağıda verilmiştir.

(M: Makina sayısı, $\varepsilon \in K_\varepsilon = \{2, 3, \dots, m\}$, E: Baskın noktalar kümesi)

Adım 1. $\varepsilon=2$ olarak ata.

Adım 2. Skalerleştirilmiş modeli (MST-EKY/M1-EKY /M2-EKY) güncel ε değeri için çöz. Elde edilen çözümü (f_1^*, f_2^*), E kümesine ekle. ε değerini güncelle: $\varepsilon = \varepsilon + 1$.

Adım 3. Eğer $\varepsilon = m$ ise DUR. $\varepsilon \leq m$ ise Adım 2'ye git.

4. ÖNERİLEN MATSEZGİZEL ALGORİTMA (PROPOSED MATHEURISTIC ALGORITHM)

Matsezgisel algoritmalar, sezgisel/metsezgisel algoritmalarla, matematiksel programlama tekniklerinin bir arada kullanıldığı çözüm yaklaşımlarıdır [22]. Bu algoritmalar, son yıllarda NP-zor problemlerin çözümünde yaygın kullanılan çözüm yöntemlerinden birisidir. Literatürde, ilişkisiz paralel makina çizelgeleme problemlerinin çözümünde de kullanılmışlardır. Bu çalışmalara örnek vermek gerekirse; Li vd. [23], son işin tamamlanma zamanının enküçüklenmesi ilişkisiz paralel makina çizelgeleme problemi için üç aşamalı bir matsezgisel algoritma önermiştir. Önerdikleri matsezgisel algoritmanın

ilk aşamasında, işler sıralama kuralı kullanılarak çizelgenmektedir. İkinci aşamada, amaç fonksiyonu değerini iyileştirmek için bir yeniden atama prosedürü uygulanmaktadır. Son aşamada ise matematiksel model tabanlı bir yöntem ile seçilen iki makina arasında iş değişimleri gerçekleştirilmektedir. Cota vd. [24], enerji tüketiminin sürdürülebilir kullanımı ve çevresel etkilerin dikkate alındığı yeşil çizelgeleme problemini ele almıştır. Son işin tamamlanma zamanının ve toplam elektrik tüketiminin en küçükleme problemi için bir matsezgisel algoritma önerilmiştir. Ekici vd. [25], sıra bağımlı hazırlık sürelerinin dikkate alındığı paralel makine çizelgeleme probleminde toplam gecikmenin ve erkenliğin enküçüklenmesini amaçlamışlardır. Ele aldıkları problemin çözümü için yasaklı arama algoritması temelli bir matsezgisel algoritma önermişlerdir. Fanjul-Peyro vd. [26], kısıtlı kaynak kullanımının dikkate alındığı ve son işin tamamlanma zamanının enküçükleme ilişkisiz paralel makina çizelgeleme problemi için üç aşamalı bir matsezgisel algoritma önermişlerdir. Önerdikleri algoritmanın ilk aşamasında, işler makinalara atanmaktadır. İkinci aşamada, en büyük işlem sürelerine sahip işlerin işlem sürelerinin azalacağı makinalara atanması sağlanmaktadır. Son aşamada ise iyileştirme için ağırlıklı bir algoritma uygulanmaktadır. Bu çalışmada geliştirilen matsezgisel algoritmanın erişilen literatürdeki matsezgisel algoritmalarından en önemli farkı, iş bölünmesini dikkate alabilmesidir. Ayrıca yine erişilebilen literatürde daha önce ele alınmamış iki amaç fonksiyonunun dahil edildiği çok amaçlı bir yapı sunulmuştur.

Bu çalışmada işlerin bölünmesine izin verilen, hazırlık sürelerinin sıra bağımlı olduğu, uygunluk kısıtlı ilişkisiz paralel makina çizelgeleme problemi için bir matsezgisel algoritma (MA) geliştirilmiştir. Geliştirilen MA, M2-EKY modelinin yanı sıra M3, M4 ve M5 alt modellerini de kullanmaktadır. M3, işlerin hangi makinalara atandıkları ve iş sıraları biliniyorken atandıkları her bir makinada hangi oranda üretileceklerini belirlemektedir. M4, işlerin hangi makinalara atanacaklarına, işlerin bölünüp bölünmeyeceğine ve işler bölünüyorsa hangi oranlarda bölüneceğine karar vermektedir. M5 ise, M4 modeli ile hangi makinalarda üretilecekleri ve üretim oranları belirlenmiş işlerin, atandıkları makinadaki işlem sıralarını belirlemektedir.

4.1. M3 Modeli (M3 Model)

M3 modeli, iş oranlarını belirleyen modeldir. M3 için yeni parametreler ve kısıtlar tanımlanmıştır.

Parametreler:

μ_{jl}^p : j . işi l . makinaya atandıysa 1, diğer durumda 0

α_l^p : l . makina seçildiyse 1; diğer durumda 0

x_{jkl}^p : eğer j . iş k . sırada l . makinaya atandıysa 1; diğer durumda 0

y_{ijl}^p : eğer i . iş j . işten önce l . makinada çizelgelenmişse 1; diğer durumda 0

Kısıtlar:

$$C_{enb} \geq \sum_{\mu_{jl}^p=1} j: h_{jl} x_{j1l}^p + \sum_{\mu_{il}^p=1} i: \sum_{\substack{j: \\ i \neq j \text{ ve} \\ \mu_{jl}^p=1}} s_{ijl} y_{ijl}^p + \sum_{\mu_{jl}^p=1} j: p_{jl} \theta_{jl} \quad \forall l: \alpha_l^p = 1 \quad (26)$$

$$\sum_{\substack{l: \\ \alpha_l^p=1 \text{ ve} \\ \mu_{jl}^p=1}} \theta_{jl} = 1 \quad \forall j \quad (27)$$

$$\theta_{jl} \leq \sum_k x_{jkl}^p \quad \forall j, l: \alpha_l^p = 1 \text{ ve } \mu_{jl}^p = 1 \quad (28)$$

$$\theta_{jl} \geq \beta \sum_k x_{jkl}^p \quad \forall j, l: \alpha_l^p = 1 \text{ ve } \mu_{jl}^p = 1 \quad (29)$$

Eş. 26, son işin tamamlanma zamanı hesaplamaktadır. Eş. 27, işlerin atanma oranlarının toplamlarının '1' olmasını sağlamaktadır. Eş. 28, j . iş l . makinaya atanmadıysa $\theta_{jl}=0$ olmasını sağlayan kısıttır. Eş. 29, işlerin makinalara belirlenen en az orandan daha az bölünmemesini sağlamaktadır.

4.2. M4 Modeli (M4 Model)

M4 modeli, makinaları, iş atamalarını ve oranlarını belirleyen modeldir. M4 için ikinci bölümde tanımlanan indisler, indis kümeleri parametreler ve karar değişkenlerine ek olarak yeni bir karar değişkeni ve kısıtlar tanımlanmıştır.

Karar Değişkeni:

μ_{jl} : j . işi l . makinaya atandıysa 1, diğer durumda 0

Kısıtlar:

$$\mu_{jl} \leq b_{jl} \alpha_l \quad \forall j, l \quad (30)$$

$$\sum_l \mu_{jl} \geq 1 \quad \forall j \quad (31)$$

$$C_{enb} \geq \sum_j p_{jl} \theta_{jl} \quad \forall l \quad (32)$$

$$\theta_{jl} \leq \mu_{jl} \quad \forall j, l \quad (33)$$

$$\theta_{jl} \geq \beta \mu_{jl} \quad \forall j, l \quad (34)$$

$$\mu_{jl} \in \{0,1\} \quad \forall j, l \quad (35)$$

Eş. 30, j . işin l . makinaya atanmasına ancak l . makina seçildiysen ve j . iş l . makinada üretilabiliyorsa izin vermektedir. Eş. 31, her işin en az bir makinaya atanmasını sağlamaktadır. Eş. 32, son işin tamamlanma zamanını sadece işlerin işlem sürelerini dikkate alarak hesaplamaktadır. Eş. 33, θ_{jl} ve μ_{jl} karar değişkenlerinin ilişki kısıtıdır. Eş. 34, j . işin l . makinada işleneceği oranın işlerin makinalarda işlenebileceği en küçük orana eşit ya da büyük olmasını sağlamaktadır. Eş. 35, μ_{jl} karar değişkenine ait işaret kısıtıdır.

4.3. M5 Modeli (M5 Model)

M5 modeli iş sıralarını belirleyen modeldir. M5 için yeni tanımlanan parametreler, karar değişkenleri ve kısıtlar aşağıda sunulmuştur.

Parametreler:

q : belirli bir makinaryı göstermek için kullanılan döngü parametresidir. M5 modeli her $q \in M$: $\alpha_q^p = 1$ için çözümlür.

φ_l : l . makinaya atanan iş sayısı

θ_{jl}^p : j . işin l . makinada işleneceği oran

Karar Değişkenleri:

x_{jk}^σ : eğer j . iş k . sırada atandıysa 1; diğer durumda 0

y_{ij}^σ : eğer i . iş j . işten önce çizelgelenmişse 1; diğer durumda 0

Kısıtlar:

$$\sum_{\mu_{jl}^p=1} j: x_{jk}^\sigma = 1 \quad \forall k, l: \alpha_l^p = 1, l = q, k \leq \varphi_l \quad (36)$$

$$\sum_{k \leq \varphi_l} k: x_{jk}^\sigma = 1 \quad \forall k, l: \alpha_l^p = 1, l = q, \mu_{jl}^p = 1 \quad (37)$$

$$C_{enb} \geq \sum_{\mu_{jl}^p=1} j: h_{jl} x_{j1l}^\sigma + \sum_{\mu_{il}^p=1} i: \sum_{\substack{j: \\ i \neq j \\ \mu_{jl}^p=1}} s_{ijl} y_{ijl}^\sigma + \sum_{\mu_{jl}^p=1} j: p_{jl} \theta_{jl}^p \quad \forall l: \alpha_l^p = 1, l = q \quad (38)$$

$$y_{ij}^\sigma + 1 \geq x_{ik-1}^\sigma + x_{jk}^\sigma \quad \forall i, j, k, l: k > 1, i \neq j, l = q, \mu_{il}^p = 1, \mu_{jl}^p = 1, k \leq \varphi_l \quad (39)$$

$$x_{jk}^\sigma \in \{0,1\} \quad \forall j, k \quad (40)$$

$$y_{ij}^\sigma \in \{0,1\} \quad \forall i, j \quad (41)$$

Eş. 36, q makinasındaki her sıraya, o makinaya atanan işlerden birisinin atanmasını sağlamaktadır. Eş. 37, her işin, mutlaka atandığı makinanın bir sırasına atanmasını garanti etmektedir. Eş. 38, son işin tamamlanma zamanını hesaplamaktadır. Eş. 39, x_{jk}^σ ve y_{ij}^σ karar değişkenleri için ilişki kısıtıdır. Eş. 40, x_{jk}^σ ve Eş. 41 y_{ij}^σ karar değişkenine ait işaret kısıtıdır.

Önerilen MA içinde kullanılan M3, M4 ve M5 modelleri aşağıda özet biçimde sunulmuştur.

(M3):

Amaç:

$$enkf_1$$

Kısıtlar:

(24), (26)-(29)

(M4):

Amaç:

$enk f_1$

Kısıtlar:

(13), (21), (24), (25), (30)-(35)

(M5):

Amaç:

$enk f_1$

Kısıtlar:

(36)-(41)

Önerilen MA'nın adımları aşağıdaki gibidir.

Adım 1: ε 'a başlangıç değeri olarak '2' değerini ata ($\varepsilon=2$) ve M2-EKY modelini çöz.

Adım 2: M2-EKY modeli ile belirlenen süre limiti içerisinde eniyi çözüm bulunduysa; bulunan çözümü ve eniyi amaç fonksiyonu değerini ($Z_0^* = f_1$) sakla ve DUR. Eniyi çözüm

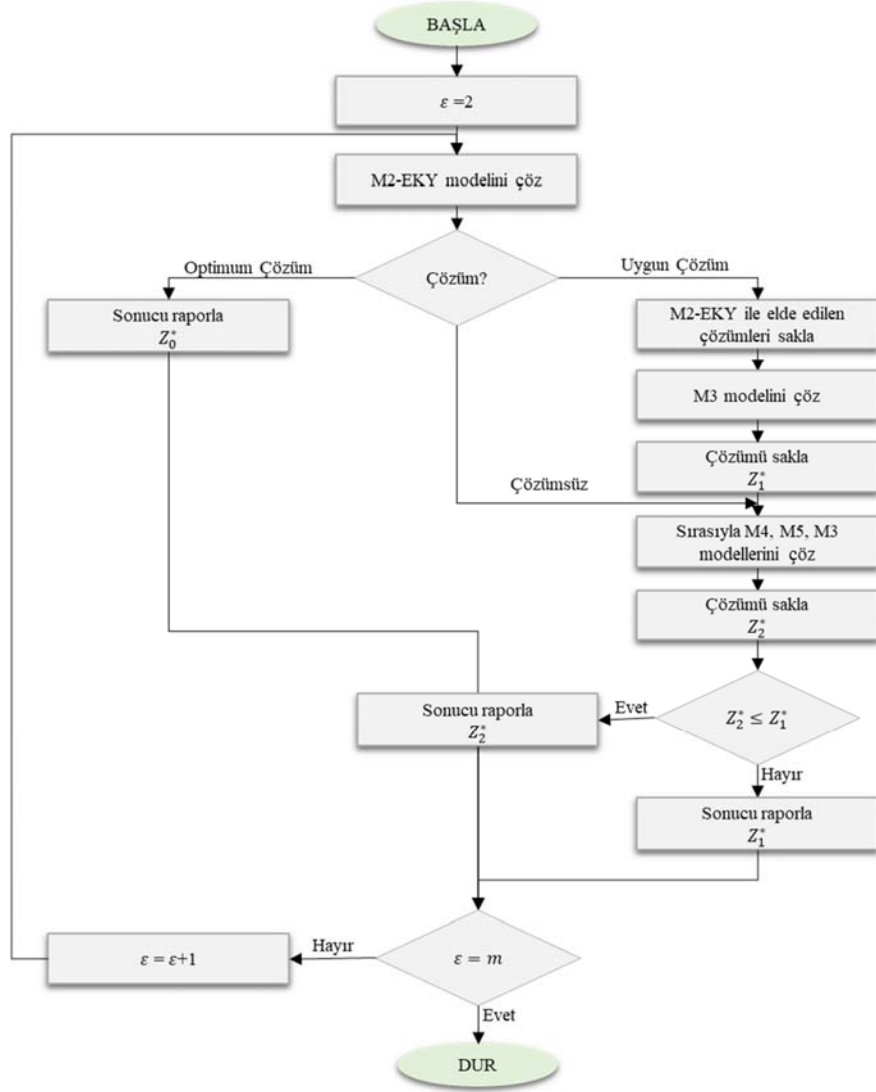
bulunamadıysa ama bir uygun çözüm bulunduysa; elde edilen çözümü sakla. Eğer uygun çözüm bulunamadıysa; *Adım 5*'e git.

Adım 3: M2-EKY modelinde elde edilen α_l , x_{jkl} ve y_{ijl} karar değişkenlerinin değerlerini M3'te kullanılmak üzere parametrelere aktar ($\alpha_l^p = \alpha_l$, $x_{jkl}^p = x_{jkl}$, $\mu_{jl}^p = \sum_k x_{jkl}$, $y_{ijl}^p = y_{ijl}$).

Adım 4: M3 modelini çöz. Elde edilen çözümü ve eniyi amaç fonksiyonu değerini ($Z_1^* = f_1$) sakla.

Adım 5: M4 modelini çöz ve elde edilen α_l , μ_{jl} ve θ_{jl} karar değişkenlerinin değerlerini ve her bir makinaya atanan iş sayılarını M5 modelinde kullanılmak üzere parametrelere aktar ($\alpha_l^p = \alpha_l$, $\theta_{jl}^p = \theta_{jl}$, $\mu_{jl}^p = \mu_{jl}$, $\varphi_l = \sum_j \mu_{jl}$).

Adım 6: Seçilen her makina için ($q \in M : \alpha_q^p = 1$) M5 modelini çöz ve iş sıralarını belirle.



Şekil 1. MA'nın Akış Şeması (Flow Chart of MA)

Adım 7: M3 modelini çöz. Elde edilen çözümü ve eniyi amaç fonksiyonu değerini ($Z_2^* = f_1$) sakla.

Adım 8: Eğer $Z_2^* \leq Z_1^*$ ise *Adım 7*'nin sonunda elde edilen çözümü raporla. Değilse, *Adım 4*'te M3 modeli ile elde edilen çözümü raporla.

Adım 9: Eğer $\varepsilon = m$ ise DUR. $\varepsilon \leq m$ ise, ε değerini bir arttır ($\varepsilon = \varepsilon + 1$) ve *Adım 2*'ye git.

Önerilen MA'nın akış şeması Şekil 1'de verilmiştir.

5. DENEYSEL SONUÇLAR (EXPERIMENTAL RESULTS)

Önerilen matematiksel modellerin performansını gösterebilmek için küçük boyutlu bir örnek problem ve farklı boyutlarda türetilen test problemleri MST-EKY, M1-EKY, M2-EKY ve MA kullanılarak GAMS/CPLEX ile çözülmüş ve elde edilen sonuçlar karşılaştırılmıştır.

5.1. Örnek Problem (Sample Problem)

Örnek problem 7 iş, 3 makina içermektedir. Tablo 1'de örnek problemin işlem süreleri (p_{jl}), ilk sıra hazırlık süreleri (h_{jl}) ve makina uygunluk değerleri (b_{jl}), Tablo 2'de ise sıra bağımlı hazırlık süreleri (s_{ijl}) verilmiştir.

Tablo 1. p_{jl}, h_{jl}, b_{jl} değerleri (The values of p_{jl}, h_{jl}, b_{jl})

j	l	p_{jl}	h_{jl}	b_{jl}	j	l	p_{jl}	h_{jl}	b_{jl}
1	1	63	73	1	4	3	97	2	1
1	2	37	68	0	5	1	10	31	1
1	3	37	19	0	5	2	45	22	1
2	1	14	34	1	5	3	43	52	1
2	2	18	79	1	6	1	76	23	0
2	3	2	93	0	6	2	64	25	0
3	1	83	43	1	6	3	35	98	1
3	2	77	82	1	7	1	35	77	1
3	3	43	95	1	7	2	40	4	1
4	1	95	85	1	7	3	81	30	1
4	2	10	73	1					

Tablo 2. s_{ijl} değerleri (The values of s_{ijl})

i	j	l	s_{ijl}	i	j	l	s_{ijl}	i	j	l	s_{ijl}	i	j	l	s_{ijl}	i	j	l	s_{ijl}	i	j	l	s_{ijl}				
1	2	1	35	2	1	1	65	3	1	1	14	4	1	1	79	5	1	1	2	6	1	1	99	7	1	1	89
1	2	2	40	2	1	2	81	3	1	2	7	4	1	2	83	5	1	2	45	6	1	2	85	7	1	2	89
1	2	3	88	2	1	3	28	3	1	3	89	4	1	3	99	5	1	3	26	6	1	3	17	7	1	3	30
1	3	1	18	2	3	1	99	3	2	1	98	4	2	1	33	5	2	1	39	6	2	1	76	7	2	1	37
1	3	2	96	2	3	2	82	3	2	2	67	4	2	2	82	5	2	2	55	6	2	2	78	7	2	2	2
1	3	3	83	2	3	3	98	3	2	3	61	4	2	3	3	5	2	3	81	6	2	3	99	7	2	3	43
1	4	1	99	2	4	1	28	3	4	1	75	4	3	1	81	5	3	1	46	6	3	1	47	7	3	1	29
1	4	2	87	2	4	2	98	3	4	2	27	4	3	2	1	5	3	2	20	6	3	2	90	7	3	2	83
1	4	3	7	2	4	3	26	3	4	3	5	4	3	3	69	5	3	3	17	6	3	3	50	7	3	3	54
1	5	1	16	2	5	1	75	3	5	1	42	4	5	1	100	5	4	1	14	6	4	1	70	7	4	1	30
1	5	2	35	2	5	2	6	3	5	2	5	4	5	2	5	5	4	2	31	6	4	2	12	7	4	2	57
1	5	3	9	2	5	3	71	3	5	3	16	4	5	3	62	5	4	3	50	6	4	3	99	7	4	3	52
1	6	1	83	2	6	1	21	3	6	1	33	4	6	1	51	5	6	1	97	6	5	1	40	7	5	1	14
1	6	2	93	2	6	2	73	3	6	2	95	4	6	2	89	5	6	2	99	6	5	2	72	7	5	2	84
1	6	3	7	2	6	3	83	3	6	3	55	4	6	3	76	5	6	3	67	6	5	3	10	7	5	3	22
1	7	1	7	2	7	1	48	3	7	1	50	4	7	1	57	5	7	1	11	6	7	1	21	7	6	1	2
1	7	2	79	2	7	2	84	3	7	2	92	4	7	2	60	5	7	2	37	6	7	2	98	7	6	2	55
1	7	3	59	2	7	3	27	3	7	3	57	4	7	3	10	5	7	3	6	6	7	3	14	7	6	3	12

Epsilon değerleri 2 ve 3 için MST-EKY, M1-EKY ve M2-EKY çözülmüştür. Elde edilen baskın noktalar Tablo 3'de verilmiştir.

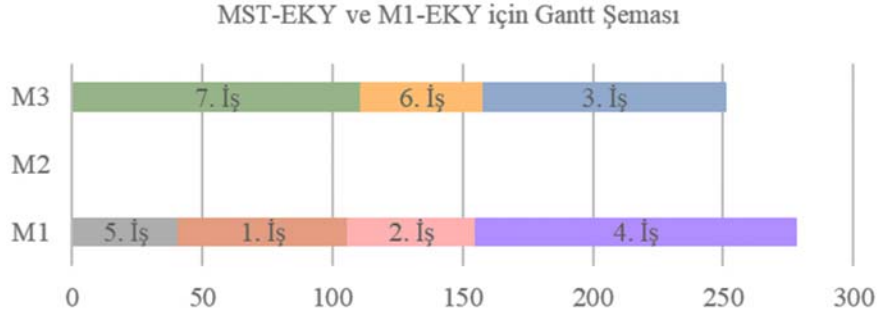
Tablo 3. Örnek problemin baskın noktaları (Non-dominated points of the sample problem)

	ε	f_1	f_2	t (s.)
MST-EKY	2	278,00	2	1,14
	3	161,00	3	2,83
M1-EKY	2	278,00	2	0,47
	3	161,00	3	0,30
M2-EKY / MA	2	229,61	2	1,09
	3	129,38	3	0,77

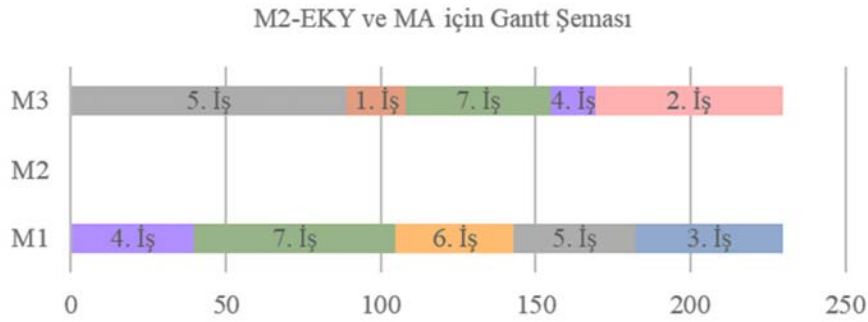
Örnek problem için elde edilen baskın noktalar incelendiğinde MST-EKY ile M1-EKY'nin ve M2-EKY ile MA'nın aynı noktaları elde ettiği görülmektedir. Ancak M1-EKY'nin çözüm süresi MST-EKY'den daha kısadır. Örnek problem çok küçük boyutlu olmasına rağmen çözüm süresinde %80,6 oranında iyileşme sağlanmıştır. Hatta işlerin bölündüğü M2-EKY ile bile MST-EKY'den daha kısa sürede çözüm elde edilmiştir. M2-EKY ve MA ile aynı çözümler aynı çözüm süreleri ile elde edilmiştir. Elde edilen baskın noktalar, diğer modellerin aynı epsilon değeri için elde ettiği noktalar ile karşılaştırıldığında ilk amacın daha küçük değerler aldığı görülmektedir. Bir başka deyişle işlerin bölünmesine izin verilmesi son işin tamamlanma zamanını küçültmüştür.

İş bölünmesine izin verilmeyen MST-EKY ve M1-EKY modelleri ile M2-EKY ve MA modelinin çözümlerinin daha ayrıntılı incelenebilmesi için epsilon değerinin "2" olduğu MST-EKY ve M1-EKY ile elde edilen baskın noktaya karşı gelen Pareto-eniyi çözümün Gantt Şeması Şekil 2'de, M2-EKY ve MA ile elde edilen pareto-eniyi çözümün Gantt Şeması ise Şekil 3'de verilmiştir.

Şekil 2 ve 3'deki Gantt Şemaları incelendiğinde epsilon "2" olduğundan sadece 2 makinanın seçildiği görülmektedir. Seçilen makinalar Makina 1 ve Makina 3'dür. Şekil 3 de 4,



Şekil 2. MST-EKY ve M1-EKY ile elde edilen çözümün Gantt şeması
(Gantt chart of the solution obtained by MST-EKY and M1-EKY)



Şekil 3. M2-EKY ve MA ile elde edilen çözümün Gantt şeması
(Gantt chart of the solution obtained by M2-EKY and MA)

5 ve 7. işlerin bölündüğü görülmektedir. 4. iş 1. makinada 0,1 ve 3. makinada 0,9 oranında, 5. iş 1. makinada 0,9 ve 3. makinada 0,1 ve 7. iş 1. makinada 0,889 ve 3. makinada 0,111 oranında işlem görmektedir. İşlerin bölünmesiyle son işin tamamlanma zamanı 278'den 229,61'e indirgenmiştir. Ayrıca Gantt şemalarında da görüldüğü gibi işlerin bölünmesi makinaların toplam iş yüklerinin daha iyi dengelenmesini de sağlamaktadır.

5.2. Test Sonuçları (Test Results)

Rassal olarak türetilen problemler, MST-EKY, M1-EKY, M2-EKY ve MA ile GAMS/CPLEX'de çözülmüş ve elde edilen çözümler kıyaslanmıştır. Tablo 4'de türetilen test problemlerinin iş ve makina sayıları verilmiştir. Test problemlerinin parametreleri literatüre uygun olarak türetilmiştir. İşlem süresi (p_{jl}), ilk işin hazırlık süresi (h_{jl}) ve sıra ve makina bağımlı hazırlık süresi (s_{ijl}), [1,100] aralığında düzgün dağılıma göre türetilmiştir. Makina uygunluk (b_{jl}) parametresi işlerin işlenebileceği makinalar için 1 değerini almaktadır. Bu parametrenin değerleri %75 oranında '1', %25 oranında ise '0' olacak şekilde rassal türetilmiştir.

Tüm testler Intel® Core(TM) i5-4210U CPU @2.40 GHz işlemcisi, 8 GB Ram olan bir bilgisayarda yapılmıştır. MST-EKY, M1-EKY ve M2-EKY modellerinin çözüm süresi 10800 saniye ile sınırlandırılmıştır. MA'daki M2-EKY modeli 500 ve M3, M4 ve M5 modelleri ise 1000 saniye ile sınırlandırılmıştır. Tablo 5'de TP-1, TP-2 ve TP-3

problemlerinin MST-EKY, M1-EKY, M2-EKY ve MA ile elde edilen baskın noktaları verilmiştir. Şekil 4'de TP-1, Şekil 5'de TP-2 ve Şekil 6'da TP-3 probleminin pareto çözümleri grafik üzerinde gösterilmiştir.

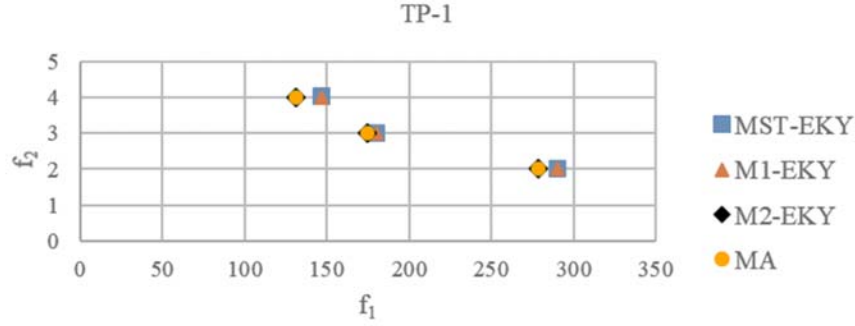
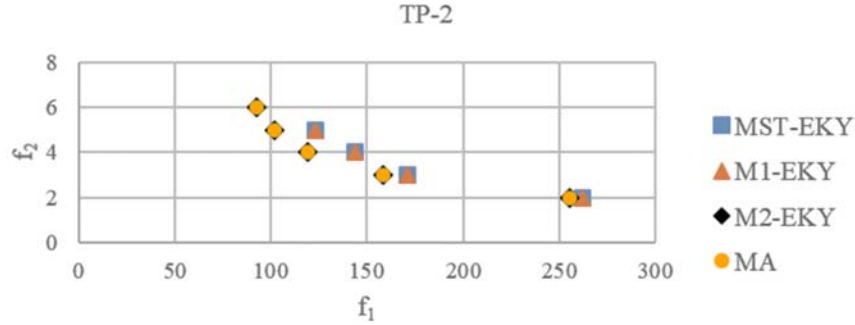
Tablo 4. Test problemleri (Test problems)

Test Problemi	n	m
TP-1	10	4
TP-2	10	6
TP-3	10	8
TP-4	30	4
TP-5	30	6
TP-6	30	8
TP-7	100	16

Tablo 5'deki TP-1, TP-2 ve TP-3 test problemleri için elde edilen baskın noktalar incelendiğinde MST-EKY ve M1-EKY'nin aynı çözümleri bulduğu fakat M1-EKY'nin çözüm süresinin çok daha kısa olduğu görülmektedir. TP-1'de tüm epsilon değerleri için MST-EKY'nin toplam çözüm süresi 779,6 saniye ve M1-EKY'nin toplam çözüm süresi ise 86,89 saniyedir. Toplam çözüm süresinde M1-EKY ile %86,89'lık bir iyileşme sağlanmıştır. TP-2'de MST-EKY'nin toplam çözüm süresi 1571,05 saniye ve M1-EKY'nin toplam çözüm süresi 354,15 saniyedir. Toplam çözüm süresinde M1-EKY ile %77,46'lık bir iyileşme sağlanmıştır. TP-3'de ise tüm epsilon değerleri için MST-EKY'nin toplam çözüm süresi 9948,94 saniye ve M1-EKY'nin toplam çözüm süresi 896,4 saniyedir. Toplam çözüm süresinde M1-EKY ile %91'lik bir iyileşme sağlanmıştır.

Tablo 5. TP-1, TP-2 ve TP-3 test problemlerinin önerilen modeller ile çözümünden elde edilen baskın noktaları (Non-dominated points obtained from solving TP-1, TP-2 and TP-3 test problems with proposed models)

Test Problemi	ϵ	MST-EKY			M1-EKY			M2-EKY			MA		
		f_1	f_2	t (s.)	f_1	f_2	t (s.)	f_1	f_2	t (s.)	f_1	f_2	t (s.)
TP-1	2	290	2	540,10	290	2	40,70	278,27	2	65,27	278,27	2	40,63
	3	180	3	130,10	180	3	31,36	174,33	3	290,10	174,33	3	234,80
	4	147	4	109,40	147	4	14,83	131,00	4	785,40	131,00	4	333,95
TP-2	2	262	2	627,84	262	2	74,44	255,59	2	126,24	255,59	2	97,56
	3	171	3	508,89	171	3	137,86	158,21	3	284,06	158,21	3	290,84
	4	144	4	328,38	144	4	111,94	119,00	4	1443,30	119,00	4	978,78
	5	123	5	105,94	123	5	29,91	101,74	5	4080,36	101,74	5	4557,72
	6	123	5	31,09	123	6	26,55	92,80	6	10133,21	92,80	6	3123,30
TP-3	2	316	2	5051,86	316	2	68,52	294,21	2	99,08	294,21	2	120,28
	3	202	3	1521,02	202	3	400,31	173,55	3	495,02	173,55	3	435,86
	4	161	4	2278,53	161	4	246,95	132,12	4	1173,95	132,12	4	1236,81
	5	135	5	879,83	135	5	82,28	110,83	5	10800,05	110,83	5	500,24
	6	128	6	217,70	128	6	98,34	95,43	6	10800,09	95,43	6	500,25
	7	128	7	435,86	128	7	3,36	84,13	7	10800,11	84,13	7	500,34
	8	128	8	138,42	128	8	3,56	79,06	8	10453,34	79,06	8	500,31

**Şekil 4.** TP-1 çözümlerin grafiği (Graphic of TP-1 solutions)**Şekil 5.** TP-2 çözümlerin grafiği (Graphic of TP-2 solutions)

M2-EKY'nin çözümleri diğer modellerin çözümleri ile kıyaslandığında ise işlerin bölünmesi sayesinde işlerin daha kısa sürede tamamlandığı görülmüştür. TP-1'in baskın çözümlerine bakıldığında f_1 amacı 290'dan %4 oranında iyileşme ile 278,3'e, 180'den %14,7 oranında iyileşme ile 153,6'ya ve 147'den %8,8 oranında iyileşme ile 131'e düşürülmüştür. TP-2'nin baskın çözümlerine bakıldığında f_1 amacı 262'den %2,4 oranında iyileşme ile 255,59'a, 171'den %7,5 oranında iyileşme ile 158,21'e, 144'den %17,4 oranında iyileşme ile 119'a ve 123'den %17,3 oranında iyileşme ile 101,74'e düşürülmüştür. TP-3'ün baskın çözümlerine bakıldığında ise f_1 amacı 316'dan %6,89

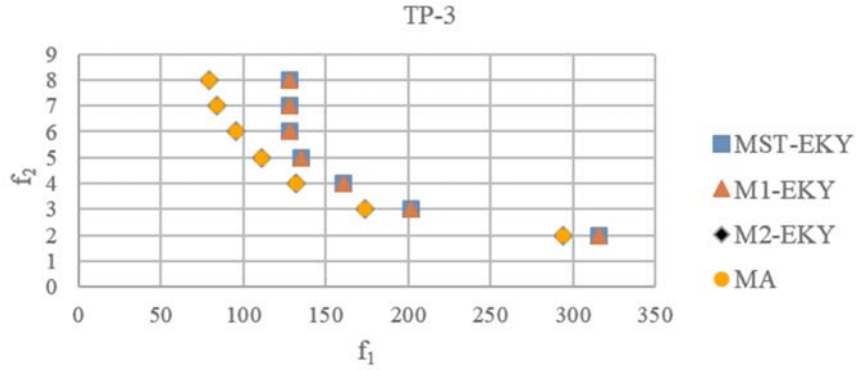
oranında iyileşme ile 294,21'e, 202'den %14,08 oranında iyileşme ile 173,55'e, 161'den %17,94 oranında iyileşme ile 132,12'e, 135'den %17,9 oranında iyileşme ile 110,83'e ve 217'den %25,44 oranında iyileşme ile 95,43'e düşürülmüştür. TP-3'ün M2-EKY çözümlerinde elde edilen (110,8 ; 5), (95,43 ; 6) ve (84,13 ; 7) noktalarının pareto eniyi çözüm olduğu garanti edilemez. Çünkü süre limiti ile çözüm durdurulmuştur. MA ile tüm epsilon değerleri için M2-EKY modeli ile aynı ve daha kısa sürede çözüm bulunmuştur. TP-1, TP-2 ve TP-3 problemlerin çözüm sürelerinde sırasıyla ortalama %38,1, %22 ve %52,36 oranında iyileşme sağlanmıştır.

Tablo 6’da TP-4, TP-5 ve TP-6 test problemlerinin önerilen modeller ile çözümünden elde edilen baskın noktaları verilmiştir. Şekil 7’de TP-4, Şekil 8’de TP-5 ve Şekil 9’da TP-6 probleminin pareto çözümleri grafik üzerinde gösterilmiştir.

Tablo 6’da TP-4 test probleminde epsilon değerinin 3’ten başlamasının sebebi, makina uygunluğuna göre en az 3 makinanın seçilme zorunluluğunun olmasıdır. TP-4, TP-5 ve TP-6’nın çözümleri incelendiğinde MST-EKY ile çoğu epsilon değerleri için verilen süre limiti içerisinde çözüm

bulunamamıştır. Önerilen M1-EKY ile MST-EKY’nin uygun çözüm bulamadığı epsilon değerleri için çözüm bulunmuştur. M2-EKY ile işlerin bölünmesine izin verilerek M1-EKY’den daha iyi çözümler elde edilmiştir. MA ise M2-EKY’den daha kısa sürede ortalama %15,33 oranında daha iyi çözümler bulunmuştur.

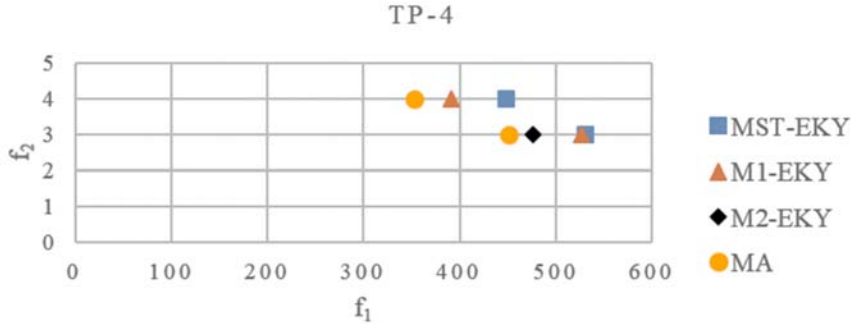
Problem boyutu 100 iş, 16 makinaya ulaştığında MST-EKY, M1-EKY ve M2-EKY ile 10800 sn. süre limiti içinde hiçbir epsilon değeri için uygun çözüm bulunamamıştır. Buna karşın, MA ile tüm epsilon değerleri için çözüm elde edilebilmiştir.



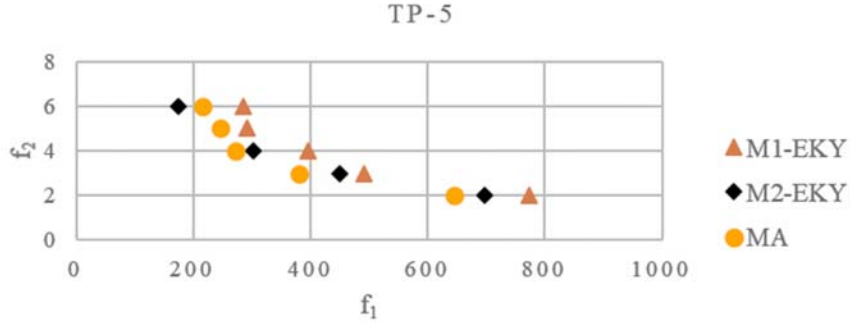
Şekil 6. TP-3 çözümlerin grafiği (Graphic of TP-3 solutions)

Tablo 6. TP-4, TP-5 ve TP-6 test problemlerinin önerilen modeller ile çözümünden elde edilen baskın noktaları (Non-dominated points obtained from solving TP-4, TP-5 and TP-6 test problems with proposed models)

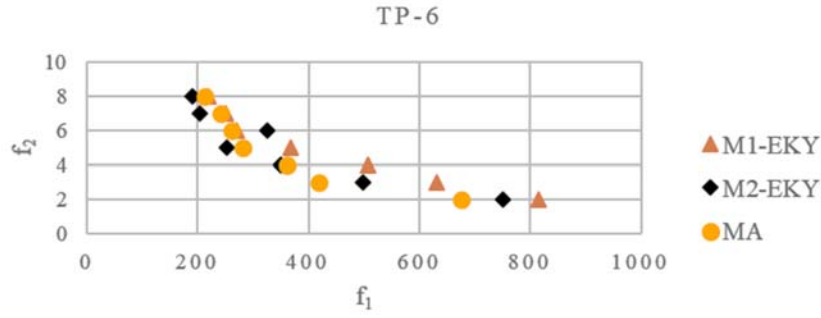
Test Problemi	ϵ	MST-EKY			M1-EKY			M2-EKY			MA		
		f_1	f_2	t (s.)	f_1	f_2	t (s.)	f_1	f_2	t (s.)	f_1	f_2	t (s.)
TP-4	3	530	3	10800	527	3	10800	476,15	3	10800	451,30	3	640,73
	4	448	4	10800	391	4	10800	-	-	10800	352,54	4	502,22
TP-5	2	-	-	10800	773	2	9286	697,01	2	10800	645,51	2	2189,31
	3	-	-	10800	492	3	10800	449,43	3	10800	381,60	3	545,47
	4	-	-	10800	395	4	10800	301,56	4	10800	271,59	4	509,39
	5	-	-	10800	292	5	10800	-	-	10800	246,69	5	503,58
	6	-	-	10800	285	6	10800	174,70	6	10800	216,60	6	502,74
	TP-6	2	-	-	10800	814	2	10800	751,91	2	10800	675,23	2
3	-	-	10800	631	3	10800	498,97	3	10800	419,63	3	583,99	
4	-	-	10800	508	4	10800	349,61	4	10800	361,00	4	506,81	
5	-	-	10800	367	5	10800	251,65	5	10800	282,15	5	501,86	
6	-	-	10800	271	6	10800	324,78	6	10800	260,50	6	502,17	
7	-	-	10800	251	7	10800	204,62	7	10800	242,00	7	501,67	
8	-	-	10800	220	8	10800	190,62	8	10800	212,20	8	500,97	



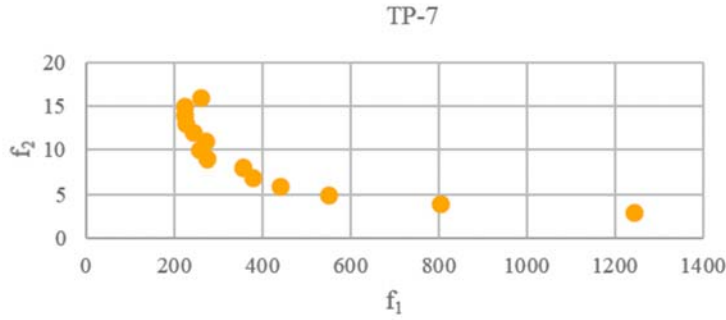
Şekil 7. TP-4 çözümlerin grafiği (Graphic of TP-4 solutions)



Şekil 8. TP-5 çözümlerinin grafiği (Graphic of TP-5 solutions)



Şekil 9. TP-6 çözümlerinin grafiği (Graphic of TP-6 solutions)



Şekil 10. TP-7 çözümlerinin grafiği (Graphic of TP-7 solutions)

Elde edilen baskın noktalar Tablo 7'de ve Şekil 10'da gösterilmiştir. Böylelikle geliştirilen MA'nın önerilen modeller ile çözülemeyen büyük boyutlu problemlere uygun çözümler bulabildiği gösterilmiştir. Tüm test problemlerinden elde edilen sonuçlar özetlenirse, işler bölünmediğinde M1-EKY modelinin MST-EKY modelinden daha hızlı ve daha iyi çözümler elde ettiği görülmektedir. İşler bölündüğünde ise M2-EKY modeli ile M1-EKY ve MST-EKY modellerine göre daha küçük C_{enb} değerleri elde edilmektedir. Bu sayede işlerin bölünmesine izin verilmesinin her bir bölünen iş için hazırlık gerekiyor olsa bile C_{enb} değerini azalttığı gösterilmiştir. M2-EKY modelinin çözemediği büyük boyutlu problemler için önerilen MA'nın da M2-EKY'den çok daha kısa sürede başarılı çözümler elde ettiği ve M2-EKY ile süre limiti içinde çözüm bulunamayan problemlere uygun çözüm bulabildiği görülmektedir.

6. SONUÇLAR VE TARTIŞMALAR (RESULTS AND DISCUSSIONS)

Bu çalışmada ilişkisiz paralel makina çizelgeleme probleminde son işin tamamlanma zamanını ve toplam kullanılan makina sayısını enküçüklemeyi amaçlayan iki farklı matematiksel model önerilmiştir. Her iki modelde de hem sıra bağımlı hazırlık süreleri hem de uygunluk kısıtları dikkate alınmıştır. Önerilen ilk model (M1) Saraç ve Tutumlu [1] tarafından geliştirilen modelin (MST) daha etkin bir eşdeğeridir. Önerilen ikinci modelde ise işlerin bölünemeyeceği varsayımı kaldırılmıştır. Önerilen her iki modelde son işin tamamlanma zamanının ve kullanılacak makina sayısının enküçüklenmesi amaçlarına sahiptir. Çok amaçlı modeller epsilon kısıt yöntemi (EKY) kullanılarak tek amaçlı yapıya dönüştürülmüştür. M1 ve M2 modellerinin başarısını ortaya koyabilmek amacıyla rassal türetilen test

problemleri, M1-EKY, M2-EKY ve MST-EKY modelleri ve MA, GAMS/CPLEX ile çözümlenerek elde edilen sonuçlar karşılaştırılmıştır. Test sonuçları genel olarak değerlendirildiğinde, MST-EKY ve M1-EKY'nin aynı çözümleri elde ettiği ancak M1-EKY'nin süre bakımından MST-EKY'ye göre daha avantajlı olduğu ve M2'nin ise işleri bölerek işlerin makinalara daha dengeli dağıtılabilmesine ve son işin tamamlanma zamanının azaltılabilmesine olanak sağladığı görülmüştür. Optimum çözüm elde edilen problemler dikkate alındığında, işlerin bölünemediği durum için önerilen model literatürde yer alan modelden [1] ortalama %85 daha kısa sürede çözüm bulmuş ve işlerin bölünemez olduğu varsayımının kaldırıldığı model ise aynı makina sayısı için son işin tamamlanma zamanını ortalama %14 kısaltmıştır.

Tablo 7. TP-7 test probleminin önerilen modeller ile çözümünden elde edilen baskın noktaları (Non-dominated points obtained from solving TP-7 test problem with proposed models)

Test Problemi	ϵ	MA		
		f_1	f_2	t (s.)
TP-7	3	1244,36	3	3541,39
	4	804,70	4	4573,73
	5	549,52	5	6128,84
	6	440,71	6	6051,33
	7	377,28	7	5051,52
	8	355,70	8	4100,92
	9	273,80	9	1493,14
	10	255,40	10	915,97
	11	269,60	11	1202,57
	12	241,70	12	573,41
	13	224,60	13	562,33
	14	222,20	14	735,72
	15	221,70	15	614,95
	16	260,00	16	526,58

İşlerin bölünmesini ele alan M2-EKY ile bazı büyük boyutlu problemler için süre limiti içerisinde uygun çözüm elde edilemediği görülmüştür. Bu nedenle büyük problemlerin çözümü için MA önerilmiştir. Önerilen MA, 10 işli problemlerin tamamında M2-EKY ile aynı çözümleri elde etmiştir. 30 işli problemlerin önemli bir çoğunluğunda MA daha başarılı çözümlere daha kısa süre de ulaşmıştır. Ayrıca M2-EKY'nin hiçbirisine uygun çözüm bulamadığı 100 iş, 16 makinalı büyük boyutlu problemde tüm epsilon değerleri için uygun çözümler bulabilmiştir. Gelecek çalışmalarda, farklı sezgisel/metasezgisel yöntemler ile önerilen MA karşılaştırılabilir. Ayrıca kullanılacak makinaların belirlenmesinde enerji tüketimlerini de dikkate alan bir model geliştirilebilir.

KAYNAKLAR (REFERENCES)

- Saraç T., Tutumlu B., A mix integer programming model and solution approaches to determine the optimum machine number in the unrelated parallel machine scheduling problem, Journal of the Faculty of Engineering and Architecture of Gazi University, 37 (1), 329 – 346, 2022.

- Akyol Özer E., Saraç T., MIP models and a matheuristic algorithm for an identical parallel machine scheduling problem under multiple copies of shared resources constraints, An Official Journal of the Spanish Society of Statistics and Operations Research, 27, 94–124, 2019.
- Saraç T., Sipahioglu A., Akyol Ozer E. A two-stage solution approach for plastic injection machines scheduling problem, Journal of Industrial & Management Optimization, 17 (3), 1289-1314, 2021.
- Furugi A., A tabu search algorithm for the unrelated parallel machine scheduling problem with machine availability constraint and sequence-dependent setup time, Journal of the Faculty of Engineering and Architecture of Gazi University, 36 (3), 1539-1549, 2021.
- Tirkolae E.B., Aydın N.S., Ranjbar-Bourani M., Weber G.W., A robust bi-objective mathematical model for disaster rescue units allocation and scheduling with learning effect, Computers & Industrial Engineering, 149, 2020.
- Sarıççek İ., Çelik C., Two meta-heuristics for parallel machine scheduling with job splitting to minimize total tardiness, Applied Mathematical Modelling, 35, 4117-4126, 2011.
- Wang C., Liu C., Zhang Z.H., Zheng L., Minimizing the total completion time for parallel machine scheduling with job splitting and learning, Computers & Industrial Engineering, 97, 170-182, 2016.
- Liu C., Wang C., Zhang Z.H., Zheng L., Scheduling with job-splitting considering learning and the vital-few law, Computers and Operations Research, 90, 264-274, 2018.
- Salimifard K., Li J., Mohammadi D., Moghdani R., A multi objective volleyball premier league algorithm for green scheduling identical parallel machines with splitting jobs, Applied Intelligence, 2020.
- Kim J.G., Song S., Jeong B.J., Minimising total tardiness for the identical parallel machine scheduling problem with splitting jobs and sequence-dependent setup times, International Journal of Production Research, 58 (6), 1628-1643, 2020.
- Kim Y.H., Kim R.S., Insertion of new idle time for unrelated parallel machine scheduling with job splitting and machine breakdowns, Computers & Industrial Engineering, 147, 2020.
- Xing W., Zhang J., Parallel machine scheduling with splitting jobs, Discrete Applied Mathematics, 103, 259-269, 2000.
- Wang W.L., Wang H.Y., Zhao Y.W., Zhang L.P., Xu X.L., Parallel machine scheduling with splitting jobs by a hybrid differential evolution algorithm, Computers and Operations Research, 40, 1196-1206, 2013.
- Lee J.H., Jang H., Uniform Parallel machine scheduling with dedicated machines, Sustainability, 11 (24), 2019.
- Kim H.J., Lee J.H., Scheduling uniform parallel dedicated machines with job splitting, sequence-dependent setup times, and multiple servers, Computers and Operations Research, 126, 2021.

16. Lee J.H., Kim H.J., A heuristic algorithm for identical parallel machine scheduling: splitting jobs, sequence-dependent setup times and limited setup operators, *Flexible Services and Manufacturing Journal*, 2020.
17. Lee J.H., Jang H., Kim H.J., Iterative job splitting algorithms for parallel machine scheduling with job splitting and setup resource constraints, *Journal of the Operational Research Society*, 2020.
18. Kim J., Kim H.J., Parallel machine scheduling with multiple processing alternatives and sequence-dependent setup times, *International Journal of Production Research*, 2020.
19. Rosales O.A., Bello F.A., Alvarez A., Efficient metaheuristic algorithm and re- formulations for the unrelated parallel machine scheduling problem with sequence and machine dependent setup times, *International Journal of Advanced Manufacturing Technology*, 76, 1705- 1718, 2015.
20. Meng R., Rao Y., Luo Q., Modeling and solving for bi-objective cutting parallel machine scheduling problem, *Annals of Operations Research*, 285 (1-2), 223-245, 2020.
21. Tosarkani B.M., Amin S.H., A possibilistic solution to configure a battery closed-loop supply chain: Multi-objective approach, *Expert Systems with Applications*, 92, 12-26, 2018.
22. Boschetti M., Maniezzo V., Roffilli M., Röhrer A.B., Matheuristics: optimization, Simulation and Control, Blesa M., Blum C., Raidl G., Roli A., Sampels M., Springer, Berlin, 171-177, 2010.
23. Li Y.T., Cote J.F., Coelho L.C., Wu P., Novel efficient formulation and matheuristic for large-sized unrelated parallel machine scheduling with release dates, *International Journal of Production Research*, 2021.
24. Cota L.P., Coelho V.N., Guimaraes F.G., Souza M.J.F., Bi-criteria formulation for green scheduling with unrelated parallel machines with sequence-dependent setup times, *International Transactions in Operational Research*, 28 (2), 996-1017, 2021.
25. Ekici A., Elyasi M., Ozener O.O., Sarikaya M.B., An application of unrelated parallel machine scheduling with sequence-dependent setups at Vestel Electronics, *Computers & Operations Research*, 111, 130-140, 2019.
26. Fanjul-Peyro L., Perea F., Ruiz R., Models and matheuristics for the unrelated parallel machine scheduling problem with additional resources, *European Journal of Operational Research*, 260 (2), 482-493, 2017.

