



Navigasyon Sistemleri Çalışma Prensiplerinin Geometrik Tasarımı Üzerine

Pınar KOÇ^{1*} , Engin CAN² 

¹ Sakarya Gençlik ve Spor İl Müdürlüğü, Serdivan, Sakarya, pinar.koc@gsb.gov.tr

² Mühendislik Temel Bilimleri Bölümü, Teknoloji Fakültesi, Sakarya Uygulamalı Bilimler Üniversitesi,
ecan@subu.edu.tr

ÖZ

Bu çalışmada, düzlemsel elips ve hiperbolik koni kesitleri teorisinin küre yüzeyi üzerindeki halleri üzerinde durulmuştur. Projektif izdüşümler yardımıyla düzlemsel ve küresel koni kesitlerinin arasındaki ilişki gösterilmiştir ve projektif tasarımları yapılmıştır. Sonuç olarak, çemberde çevre açısı teoreminin küre yüzeyi üzerindeki bilinen en önemli kullanım alanlarından biri olan Omega Navigasyon Sistemi tanıtılmış ve geometrik tasarımları ile açıklanmıştır. Bu çalışmadaki tüm şekiller Open Geometry [1] ile oluşturulmuş ve Corel Photo Paint ile isimlendirilmiştir.

Anahtar Kelimeler: Hiperbolik koni kesitleri, Küresel üçgen, Küresel çevre açısı, Omega Navigasyon Sistemi.

On the Geometric Design of the Operating Principles of Navigation Systems

ABSTRACT

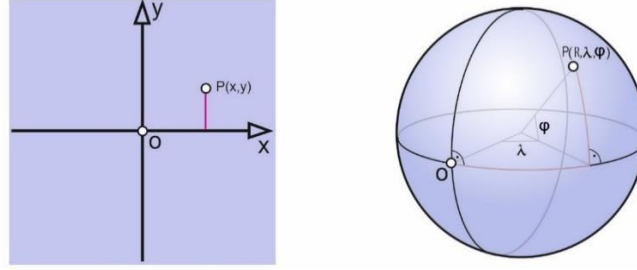
In this study, the theory of plane elliptical and hyperbolic conic sections is emphasized on the spherical surface. The relationship between planar and spherical cone sections is shown with the help of projective projections and projective designs are given. Finally, Omega Navigation System, which is one of the most important known usage areas of the peripheral angle theorem on the sphere surface, is introduced and explained with its geometric designs. All figures in this study were created with Open Geometry [1] and named with Corel Photo Paint.

Keywords: Hyperbolic cone sections, Spherical triangles, Spherical periphery angle, Omega Navigation System.

1 Giriş

Düzlemde herhangi bir P noktası (x, y) Kartezyen koordinatlarıyla işaretlidir ve bu koordinatlar yardımıyla düzlemdeki doğrular ve eğriler de belirlenebilir. Örneğin; eğer $P = (x, y)$ noktası düzlemde bir doğru üzerindeyse o zaman $k, d \in R$ olmak üzere $y = kx + d$ dir.

* Corresponding Author's email: pinar.koc@gsb.gov.tr



Şekil 1: Düzlem ve küre üzerinde bir noktanın koordinatlandırılması

Düzlemdeki koordinat sistemi gibi, R yarıçapıyla küre üzerinde bir koordinat sistemini x -eksenin rolünü küre yüzeyi üzerinde ekvator, y -eksenin rolünü küre yüzeyi üzerinde yarı boylamların üstlendiği koordinat eksenleri olacak şekilde oluşturulmuş (Şekil 1).

Küre üzerindeki her bir P noktası, R yarıçapı, λ boylamı ve ϕ enlemiyle gösterilir. Bir noktanın düzlemdeki kartezyen koordinatları sonsuz olabilirken, küre üzerinde bir noktanın boylamı 0° - 360° arasında ve enlemi kuzey kutbuna 0° - 90° arasında, güney kutbuna enlemi 0° - (-90°) arasında olur. Böylece, λ , ϕ den oluşturulan bir fonksiyonla, küre yüzeyindeki bir noktayı $P(R, \lambda, \phi)$ olarak tanımlayabiliriz.

Öklid düzleminde farklı iki A ve B noktaları arasındaki uzaklığın

$$|AB| = \sqrt{(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2}$$

olduğunu biliyoruz. Küre yüzeyinde A ve B noktalarının arasındaki uzaklık da, iki nokta arasındaki en kısa bağlantı çizgisidir ve bu uzaklık A ve B den geçen AB büyük çember yayındaki en kısa mesafedir ve $|AB|$ ile gösterilir. Büyük çember yayı, küre üzerinde uzaklık fonksiyon rolünü üstlenir. Bu da R yarıçapı ve küre merkezi ile oluşturulan açı $\delta = \widehat{AMB}$ ile belirlenir. Verilen A ve B noktaları ile $|AB| = \delta$ ve $|AB| = 360^\circ - \delta$ büyük çember yayları oluşur.

Bir AB büyük çemberinin M merkez noktasından geçen kesitine M noktasından çizilen dikmelerin küre yüzeyi ile kesişim noktaları P , P' olsun. Bu noktalara AB 'nin *kutup noktaları* denir. Dolayısıyla, AB büyük çember üzerindeki tüm noktalar için $|PX| = |P'X| = 90^\circ$ dir.

1.1 Küresel Açılar

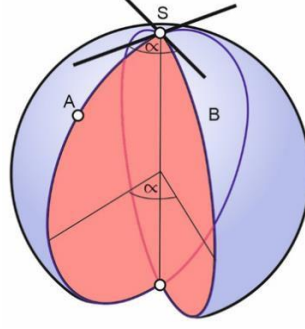
AS ve BS büyük çemberlerinin arasındaki açı, S' 'den geçen teğet doğrularının arasındaki Şekil 2'de gösterilen α açısıdır.

Ve burada, eğer;

i) $AS \neq BS \Leftrightarrow 0^\circ < \alpha < 180^\circ$,

ii) $AS = BS \Leftrightarrow \alpha = 0^\circ$ ya da $\alpha = 180^\circ$

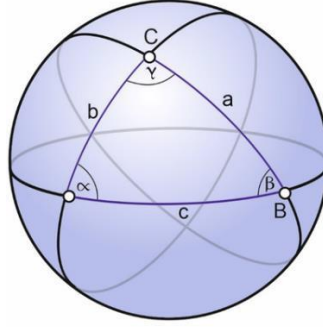
dir [1].



Şekil 2: AS ve BS büyük çemberlerinin arasındaki α açısı

Eğer iki büyük çember arasındaki açı α ise kesit düzlemler arasındaki açı da α ' dır. S'de kesişen iki farklı büyük çember 4 farklı açı oluşturur. Aynı düzlemdeki gibi, karşılıklı açılar birbirinin aynı, yan yana olan açılar da 180° 'yi tamamlar.

1.2 Küre Üzerinde Üçgenler



Şekil 3: Euler Üçgenleri

Tanım 1.2.1. A, B ve C küre yüzeyi üzerinde üçü aynı büyük çember üzerinde olmayan noktalar olsunlar. Dolayısıyla $AB = c$, $BC = a$, $AC = b$ ile küre yüzeyi 8 parçaya bölünür. Her bir bölge üç büyük çemberden oluşur, bunlar da çember üçgenlerini oluştururlar. Böylece küresel üçgenler için büyük çemberler arasında bulunan açılar α , β ve γ olmak üzere;

$$\alpha, \beta \text{ ve } \gamma < 180^\circ$$

ve yay uzunlukları da

$$a, b, c < 180^\circ$$

dir. Böylece oluşan üçgenlere *Euler Üçgeni* denir (Şekil 3).

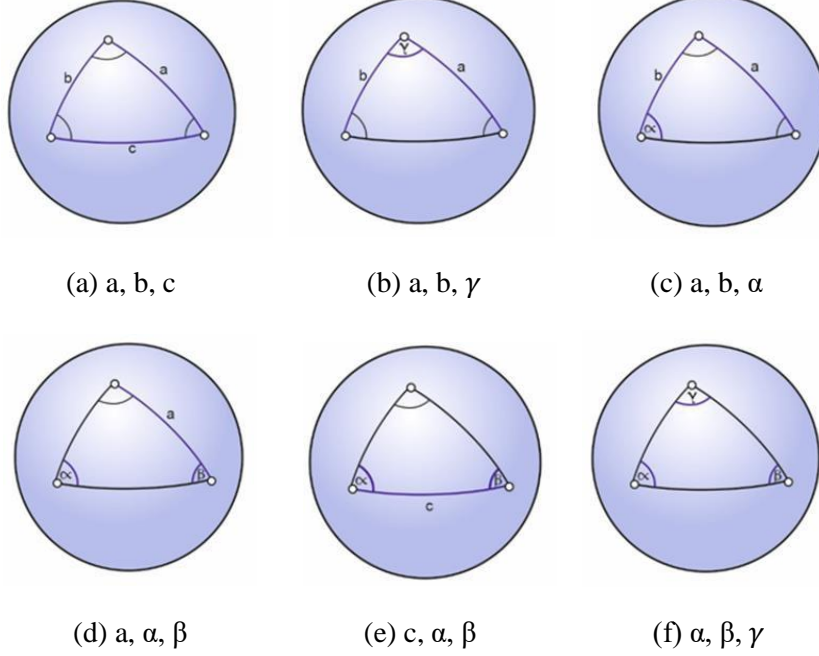
Bir Euler Üçgeni oluşturabilmek için, düzlemde üçgen oluşturma şartları olarak bilinen

1. Üç kenar a, b, c
2. İki kenar bir açı a, b, α ve a, b, γ
3. Bir kenar iki açı a, α, β ve c, α, β

üçgen oluşturma özelliklerine ek olarak, küre yüzeyi üzerinde

4. Üç açı α , β , γ

özelliği de mevcuttur (Şekil 4).



Şekil 4: Küre yüzeyi üzerinde Euler Üçgeni oluşturma görselleri

Teorem 1.2. (Neperche Kuralı [2]): Küresel yüzeydeki bir Euler üçgeninde C kenarı dik açılı olsun. Bu durumda a ve b açıları için, her parçanın kosinüsü komşuluk sırası: a , b , α , c , β olmak üzere komşu parçalarının kotanjant değerlerinin çarpımına ve komşu olmayan parçalarının sinüs değerlerinin çarpımına eşittir.

1.3 Gnomanik İzdüşüm

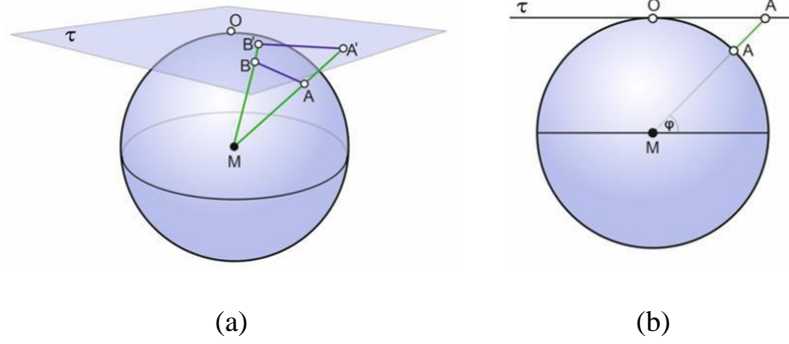
Tanım 1.3.1. Merkezi M olan bir kürenin küre yüzeyi üzerindeki herhangi bir O noktasından geçen \square teğet düzleme yansıtılmasına *Gnomanik İzdüşüm* denir (Şekil 5a)

Tanım 1.3.2. Gnomanik İzdüşüm ile elde edilen teğet düzlemindeki görüntü kümesine *Büyük Çember Haritası* denir [3].

Şekil 5(b) de görüleceği gibi kürenin büyük çemberleri ve açıları teğet düzlemde doğrulara dönüşür.

Bu izdüşüm teorisinin Navigasyon sistemlerinin kullanılmasında çok önemli bir anlamı vardır, öyle ki:

Büyük Çember Haritası üzerindeki herhangi A' ve B' noktalarının belirlediği doğru, aslında \widehat{AB} büyük çember yayının görüntüsü AB yayıdır ve küre üzerindeki A ve B noktalarının en kısa yoludur.

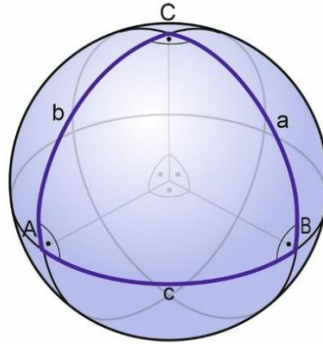


Şekil 5: (a) (b) Gnomonik İzdüşümü teğet düzlemi

1.4 Küresel Pisagor bağıntısı

Bu bölümde, Pisagor bağıntısının küre yüzeyi üzerinde geçerli olup olmadığını inceleyelim:

Bir ABC küre üçgenini alalım; Şayet Şekil 6 deki gibi $a = b = c = 90^\circ$ için düzlemdeki $a^2 + b^2 = c^2$ bağıntısının geçerli olmadığı açıktır.



Şekil 6: $a = b = c = 90^\circ$ için küresel üçgen

Dolayısıyla küre üzerinde Pisagor teoremini aşağıdaki teorem ile ifade edebiliriz [4].

Teorem 1.3. (Küresel Pisagor Teoremi)

$c = 90^\circ$ olmak üzere Euler üçgeni için;

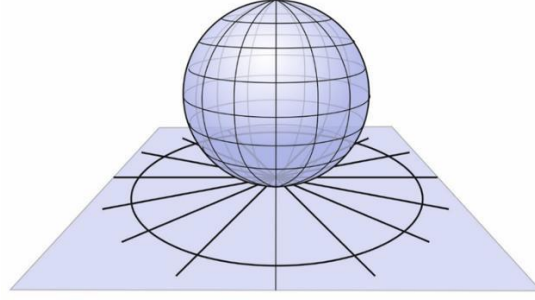
$$\cos(c) = \cos(a) \cdot \cos(b)$$

dir.

İspat:

İspat için bkz. [5]

Tanım 1.3.3. Kürenin üzerinde seçilen O noktası dünyanın kutup noktasına denk gelirse bu şekilde oluşan görüntü haritasına Kutup konumlu, eğer ekvator üzerindeyse Ekvator konumludur denir.



Şekil 7: Gnomonik izdüşümler

Dolayısıyla, bir kutup konumlu büyük çember haritası üzerindeki enlemler çemberlere, boylamlar doğrulara dönüşür. (Şekil 7)

Gnomonik iz düşümlerde açılar ve alanlar korunmaz. Dolayısıyla uzunluklar da korunmaz. φ açısındaki küçük bir değişiklik izdüşüm haritasında büyük bir değişikliğe sebep olur.

2 Küresel Kesitler

2.1 Küresel Elips

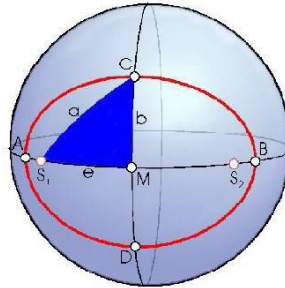
Tanım 2.1.1: k küresel elipsi, \mathfrak{N} küre üzerindeki bir P noktasından sabit $S_1 \in \mathfrak{N}$ ve $S_2 \in \mathfrak{N}$ odak noktalarından $2a$ uzunluğundaki noktaların kümesidir (Şekil 8).

$$k = \{P \in \mathfrak{N} \mid |\widehat{PS_1}| + |\widehat{PS_2}| = 2a\}$$

M , küresel elipsin merkez noktası ve $e = |\overline{MS_1}| = |\overline{MS_2}|$ ayrıca $a = |\overline{MA}| = |\overline{MB}|$, $b = |\overline{MC}| = |\overline{MD}|$ tanım 1.2 ve teorem 1.3'den

$$\cos(a) = \cos(b) \cdot \cos(e)$$

dir.



Şekil 8: Küresel elips

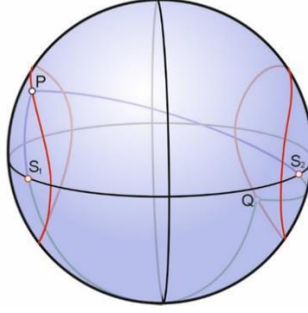
2.2 Küresel Hiperbol Çizgileri

Küre yüzeyi üzerinde Hiperbol aşağıdaki gibi tanımlanır.

Tanım 2.2.1: k küresel hiperbolü, \mathfrak{N} küresi üzerindeki sabit $S_1 \in \mathfrak{N}$ ve $S_2 \in \mathfrak{N}$ odak noktalarından aynı küresel uzaklık farkı $2a$ olan tüm P noktalarının kümesidir.

$$k = \{P \in \mathfrak{N} \mid |\widehat{PS_1}| - |\widehat{PS_2}| = 2a\} \quad (4)$$

Küresel hiperbol iki farklı daldan oluştuğundan Şekil 9 dan;



Şekil 9: Küresel hiperbol

$$|\widehat{S_1Q}| = 180^\circ - |\widehat{S_1P}| \quad \text{ve} \quad |\widehat{S_2Q}| = 180^\circ - |\widehat{S_2P}|$$

olduğundan,

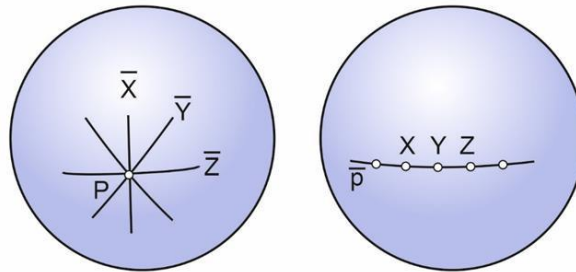
$$|\widehat{S_1Q}| - |\widehat{S_2Q}| = 180^\circ - |\widehat{S_1P}| - (180^\circ - |\widehat{S_2P}|) = -|\widehat{S_1P}| + |\widehat{S_2P}| = 2a$$

elde edilir. Böylece, Şekil 9 a göre küresel hiperbollerin aynı zamanda küresel elipsler olabileceği yorumu yapılabilir.

Sonuç 2.1: Küre üzerinde elips ile hiperbol arasında bir fark yoktur.

3 Küre Üzerindeki Projektiflikler

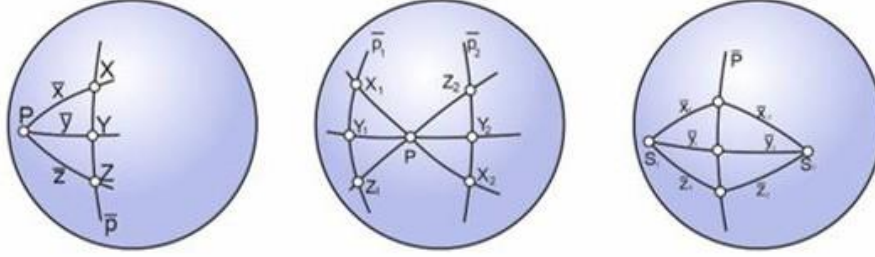
Öklid düzleminde olduğu gibi P noktasından geçen \hat{x} büyük çemberlerin kümesi $P(\hat{x})$ doğru demeti, bir \hat{p} büyük çemberinin üzerindeki tüm X nokta kümesi ise $\hat{p}(X)$ nokta dizisi olarak tanımlanır.



Şekil 10: Küre üzerinde $P(\hat{x})$ doğru demeti ve $\hat{p}(X)$ nokta dizisi

Küresel perspektifliğin 3 farklı tipinden bahsedilebilir. Bunlar,

- $P(\hat{x})$ doğru demeti $\hat{p}(X)$ nokta dizisi arasındaki perspektifliktir ve $P(\hat{x}) \bar{\wedge} \hat{p}(X)$ ile gösterilir.
- İki farklı $\hat{p}_1(X_1)$ ve $\hat{p}_2(X_2)$ nokta dizisi arasındaki perspektifliktir ve $\hat{p}_1(X_1) \bar{\wedge} \hat{p}_2(X_2)$ ile gösterilir, öyle ki X_1 ve X_2 noktalarından geçen büyük çemberler aynı zamanda P noktasından da geçer.
- İki doğru demeti $S_1(\hat{x}_1)$ ve $S_2(\hat{x}_2)$ arasındaki perspektifliktir ve $S_1(\hat{x}_1) \bar{\wedge} S_2(\hat{x}_2)$ ile gösterilir, öyle ki \hat{x}_1 ve \hat{x}_2 büyük çemberlerin kesişim noktası \hat{p} büyük çemberlerinin de üzerindedir.



Şekil 11: Küre üzerinde perspektiflikler

Tanım 3.1. Birden çok küresel perspektifliğin bileşkesine küresel projektiflik denir.

Hatırlatma:

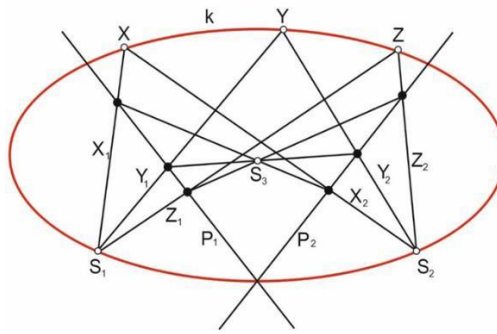
Bir düzlemdeki projektiflik, gnomonik iz düşümle küresel projektifliğe yansıtılabilir.

3.1 Küre Kesitinin Projektif Tanımı

Tanım 3.1.1: $\pi : S_1(x_1) \bar{\wedge} S_2(x_2)$ perspektifliği verilmiş olsun. π perspektiflik değil ve $S_1 \neq S_2$ ise bu durumda

$$k = \{X | X \text{ } I x_1, \text{ öyle ki } x_2 = \pi(x_1)\}$$

kümesine *Küre Kesiti Noktası* denir [6].



Şekil 12: İki nokta ve perspektifliklerle belirlenebilen düzlemsel koni kesiti

4 Sinyal Navigasyonu

Bu bölümde, çemberde çevre açısı teoreminin küre yüzeyi üzerindeki bilinen en önemli kullanım alanlarından biri olan Omega Navigasyon Sistemi tanıtılacak ve geometrik tasarımları ile açıklanacaktır.

Radyo sinyalleriyle konum belirlemede kullanılan yöntemlerin tümü sinyal navigasyonu olarak adlandırılır. Sinyal Navigasyonu, sabit gönderi istasyonlarından gönderilen sinyallerle alıcının konumunu belirleme temeline dayanır. Bu çalışmada hiperbol yöntemi ve dolayısıyla bunun sonucu olan Omega Navigasyon Sistemi'nden bahsedeceğiz [7].

4.1 Hiperbol yöntemi

Hiperbol yönteminde en az üç farklı istasyondan aynı anda sinyal gönderilir. Bu sinyallerin alıcıya ulaşma zamanına bakılır. Sinyallerin alıcıya geliş anına göre alıcı gönderici istasyonuna pozisyonu belirler. Böylece, sinyal gönderen istasyonun pozisyonu belirli olduğu için alıcının coğrafi pozisyonunun da hesaplanmasına yardımcı olur. Dolayısıyla hiperbol yöntemi yön belirleme yönteminden ziyade, uzaklık belirleme yöntemi temeline dayanır.

İki farklı sinyal gönderim istasyonunda gönderilen sinyallerin belirlediği bir hiperbol üzerinde tasarlanabilen alıcı pozisyonu için en az üç istasyona ihtiyaç vardır.

Bahsettiğimiz bu hiperbol yöntemi Loran-C, Decca ve Omega Navigasyon sistemlerinde kullanılır.

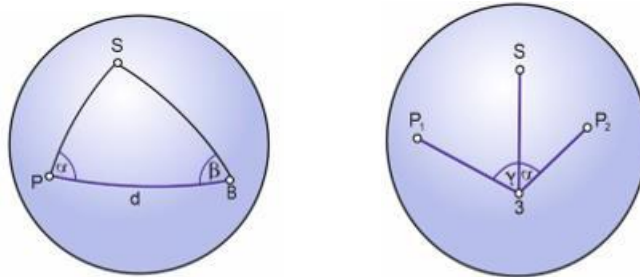
4.2 Omega Navigasyon Sistemi

Omega özel bir isimdir ve navigasyon sistemlerinin temellerindedir. Bu sistem ilk olarak 1968'de Amerika'da askeri amaçla kullanılmak için ortaya çıkmıştır.

Günümüzde kullanılan uydu tabanlı GPS teknolojisi keşfedilene kadar, Omega Navigasyon Sistemi, tüm dünyada yaygın olarak kullanılmıştır.

Matematiksel olarak Omega Navigasyon sistemini aşağıdaki gibi ifade edebiliriz:

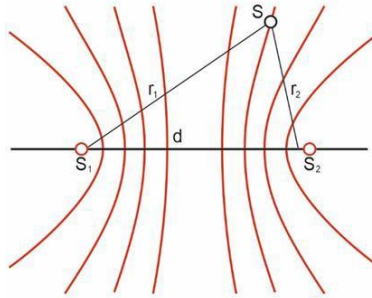
Kürenin büyük çemberleri gibi düşünülebilecek, S_1 ve S_2 sinyal göndericilerinden aynı frekansta ve aynı dalga boyunda elektromanyetik dalgalar yayılır. Bu dalgaların hareketi belirli noktalarda kesişir. Dünya küresi üzerindeki S_1 ve S_2 uzaklığının sabit olduğu tüm noktalarda dalga boyu farkları, gelen dalgalar aracılığıyla gözlenir. Bu noktalar Tanım 2.3'te verdiğimiz küresel hiperbolün odak noktalarıdır. Şekil 13 bu noktaların küresel bir tasarımı olarak verilmiştir.



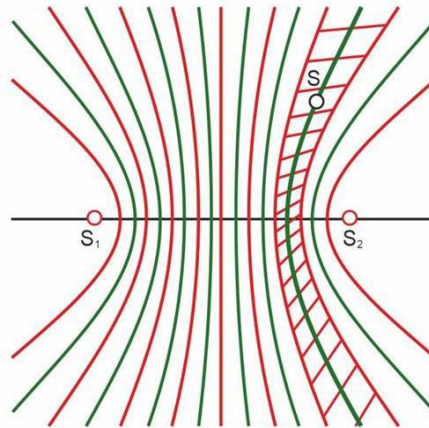
Şekil 13: Omega Navigasyonu için küresel hiperbolün odak noktaları

Dalga boyu farkı sıfır her yerde sabitlenip S_1 ve S_2 'den uzaklıkları $|r_1 - r_2| = n \cdot \lambda$ öyle ki $r_1 = |\widehat{S_1 S}|$, $r_2 = |\widehat{S_2 S}| \lambda$ dalga boyu ve $n = 0,1,2,3 \dots$ olmak üzere $n \neq 0$ için iki simetri hiperbol çizgileri vardır. Aradığımız yer bu çizgiler üzerindedir. $n = 0$ için aradığımız yer S_1 ve S_2 'nin tam orta noktalarından geçen dikme üzerindedir. Bunun dışındaki durumlar için $(0, 2\pi)$ değerler arasındaki aradığımız yer yine hiperbol çizgileri üzerindedir. Öyle ki bu hiperbol çizgileri arasındaki dalgaların ulaşım zamanı aynıdır. Aksi takdirde $\widehat{S_1 S}$ tabanlı sinyal ulaşım zamanı farkı λ dalgaboyunun hiperbol kolları arasındaki uzaklığa bağlıdır. Örneğin birbirine yakın hiperbol kolları arasındaki uzaklığı $d = \frac{\lambda}{2}$ alalım. S_1 ve S_2 arasındaki uzaklığı da $\lambda = 2d$ ' dir.

Omega Navigasyon yönteminde yayın frekansı (10,4 kHz) çok düşük ve dalga boyu ($\lambda = 29,4$ km) çok yüksek olduğu için hiperbol kollarının arasındaki ulaşımın zaman farkı $\frac{\lambda}{2} = 15$ km dir.

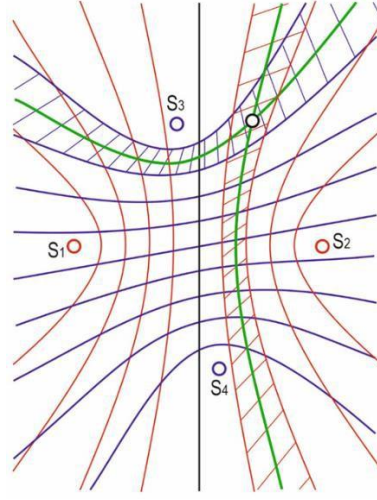


Şekil 14: Omega Navigasyon Sistemi geometrik tasarımı



Şekil 15: Hem S_1 ve S_2 den hem de S den gönderilen sinyallerle konum belirleme

Tersine herhangi bir S yeri verildiğinde S_1 ve S_2 gönderi istasyonunun yerini bulmaya çalışalım. Bunun için ilgili hiperbol kolu belli olmadığından karar verebilmek için; daha fazla ölçümler ve bilgilere ulaşmak gerekir. Örneğin, belli bir noktada bulunan geminin o anki konumunun ulaşım zamanı farkı sıfır alıp başlangıç noktası olarak kabul edelim. Bir harita üzerinde Omega Navigasyonu, yayın istasyonlarının oluşturduğu dalgalar ve hiperbol kolları Şekil 14 ve Şekil 15'deki gibi tasarlanabilir. Eğer S_3 ve S_4 ün gönderim istasyonu olduğunu kabul edersek, bir düzlemde çakışan iki farklı hiperbol dalgası oluşur. Böylece S , $S_1 S_2$ ve $S_3 S_4$ ikililerinin oluşturduğu hiperbol çizgilerinin kesiştiği noktalardan herhangi birindedir (Şekil 16).



Şekil 16: S_1S_2 ve S_3S_4 ikililerinin oluşturduğu hiperbol çizgileriyle konum belirleme

Herhangi bir konumu belirleyebilmek için Omega Navigasyon sisteminden bahsedilen sinyal gönderi istasyonları dünya üzerinde

1. Omega - Norveç (13°E; 66°N)
2. Omega - Liberya (11°W; 6°N)
3. Omega – Havai (156°W; 21°N)
4. Omega - Kuzey Dakota (98°W; 46°N)
5. Omega – Rçunion, Fransa (55°E; 21°S)
6. Omega - Arjantin (65°W; 43°S)
7. Omega - Avustralya (147°E; 38°S)
8. Omega – Japonya (129°E; 35°N)

olmak üzere sekiz farklı yerde konumlandırılmıştır.

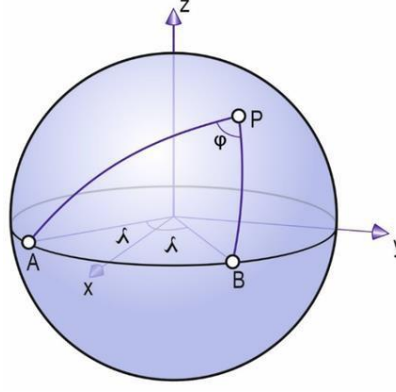
4.3 Küresel Çevre Açı Teoremi

4.3.1 Küresel çevre aç

O merkezli bir küre üzerindeki sabit A, B noktaları ve φ açısı verilmiş olsun. $\widehat{APB} = \varphi = \text{sabit}$ olacak şekilde küre üzerindeki tüm P noktalarını bulalım. Ayrıca, ekvator üzerinde,

$$\vec{a} = \overrightarrow{OA}, \vec{b} = \overrightarrow{OB}, \vec{p} = \overrightarrow{OP}$$

olsun (Şekil 17).



Şekil 17: Küresel çevre açısı

\vec{p} ve \vec{a} vektörleri tarafından gerilen düzlem sabit φ açısı, \vec{p} ve \vec{b} vektörleriyle oluşan düzlem ile çakıştırılırsa \vec{u} ve \vec{v} iki vektör olmak üzere;

$$\cos(\varphi) = \frac{\vec{u} \cdot \vec{v}}{|\vec{u}| \cdot |\vec{v}|} \text{ kuralından } \{\vec{p}, \vec{a}\} \text{ ve } \{\vec{p}, \vec{b}\} \text{ nin lineer bağımsızlık şartı gereği;}$$

$$(\vec{p} \times \vec{a}) \cdot (\vec{p} \times \vec{b}) = \cos(\varphi) \cdot |\vec{p} \times \vec{a}| \cdot |\vec{p} \times \vec{b}| = \cos(\varphi) \sqrt{(\vec{p} \times \vec{a})^2 (\vec{p} \times \vec{b})^2}$$

yazılabilir. Her iki tarafın karesi alınarak;

$$[(\vec{p} \times \vec{a}) \cdot (\vec{p} \times \vec{b})]^2 = \cos^2(\varphi) \cdot (\vec{p} \times \vec{a})^2 (\vec{p} \times \vec{b})^2$$

elde edilir. \vec{u} ve \vec{v} iki vektör olmak üzere;

$$\vec{u} \times \vec{v} = \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{pmatrix} := \begin{pmatrix} u_2 v_3 - u_3 v_2 \\ u_3 v_1 - u_1 v_3 \\ u_1 v_2 - u_2 v_1 \end{pmatrix}$$

kartezyen çarpımı;

$$\vec{q} = (\vec{u} \times \vec{v})$$

$$(\vec{u} \times \vec{v}) \cdot (\vec{u} \times \vec{v}) = (\vec{u} \cdot \vec{u})(\vec{v} \cdot \vec{v}) - (\vec{u} \cdot \vec{v})^2$$

olduğundan

$$(\vec{p} \times \vec{a})^2 (\vec{p} \times \vec{b})^2 = [(\vec{p} \times \vec{a}) \times (\vec{p} \times \vec{b})]^2 + [(\vec{p} \times \vec{a}) \cdot (\vec{p} \times \vec{b})]^2$$

ve ayrıca bu;

$$[(\vec{p} \times \vec{a}) \cdot (\vec{p} \times \vec{b})]^2 (1 - \cos^2(\varphi)) = \cos^2(\varphi) [(\vec{p} \times \vec{a}) \times (\vec{p} \times \vec{b})]^2$$

\vec{u} ve \vec{v} iki vektör olmak üzere;

$$\vec{u} \times \vec{v} = \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{pmatrix} := \begin{pmatrix} u_2 v_3 - u_3 v_2 \\ u_3 v_1 - u_1 v_3 \\ u_1 v_2 - u_2 v_1 \end{pmatrix}$$

kartezyen çarpımı;

$$\vec{q} = (\vec{u} \times \vec{v})$$

$$(\vec{u} \times \vec{v}) \cdot (\vec{u} \times \vec{v}) = (\vec{u} \cdot \vec{u})(\vec{v} \cdot \vec{v}) - (\vec{u} \cdot \vec{v})^2$$

olduğundan ve;

$$(\vec{r} \times \vec{s}) \times (\vec{u} \times \vec{v}) = \vec{s} \det(\vec{r} \vec{u} \vec{v}) - \vec{r} \det(\vec{s} \vec{u} \vec{v})$$

gereği;

$$[(\vec{p} \cdot \vec{p}) \cdot (\vec{a} \cdot \vec{b}) - (\vec{p} \cdot \vec{a}) \cdot (\vec{p} \cdot \vec{b})]^2 = \cot^2(\varphi) [\vec{a} \det(\vec{p} \vec{p} \vec{b}) - \vec{p} \det(\vec{a} \vec{r} \vec{b})]^2$$

elde edilir. Sonuç olarak

$$[(\vec{p} \cdot \vec{p}) \cdot (\vec{a} \cdot \vec{b}) - (\vec{p} \cdot \vec{a}) \cdot (\vec{p} \cdot \vec{b})]^2 = \cot^2(\varphi) (\vec{p} \cdot \vec{p}) [\det(\vec{a} \vec{b} \vec{p})]^2$$

bulunur ve koordinatları

$$\vec{p} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}, \quad \vec{a} = \begin{pmatrix} \cos(\lambda) \\ -\sin(\lambda) \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \vec{b} = \begin{pmatrix} \cos(\lambda) \\ \sin(\lambda) \\ 0 \end{pmatrix}$$

şeklinde seçersek

$$[(x^2 + y^2 + z^2)(\cos^2(\lambda) - \sin^2(\lambda)) - (x \cos(\lambda) - y \sin(\lambda))(x \cos(\lambda) + y \sin(\lambda))]^2 = \cot^2(\varphi) (x^2 + y^2 + z^2)(2z \sin(\lambda) \cos(\lambda))^2$$

ve devam edersek

$$\Phi : [-x^2 \sin^2(\lambda) + y^2 \cos^2(\lambda) + z^2 (\cos^2(\lambda) - \sin^2(\lambda))]^2 - (2z \sin(\lambda) \cos(\lambda) \cot(\varphi))^2 (x^2 + y^2 + z^2) = 0.$$

elde edilir.

Böylece, bu eğri kürenin merkezinden yansıtılırsa,

$$i) \cot(\varphi) = 0 \Rightarrow \varphi = \frac{\pi}{2}$$

için

$$-x^2 \sin^2(\lambda) + y^2 \cos^2(\lambda) + z^2 (\cos^2(\lambda) - \sin^2(\lambda)) = 0$$

eşitliği ile bir kuadratik küre kesiti,

$$ii) \cot(\varphi) \neq 0 \Rightarrow 4. \text{ dereceden bir küre kesiti elde edilir.}$$

4.4 Ivory Teoremi

4.4.1 Düzlemde Ivory teoremi

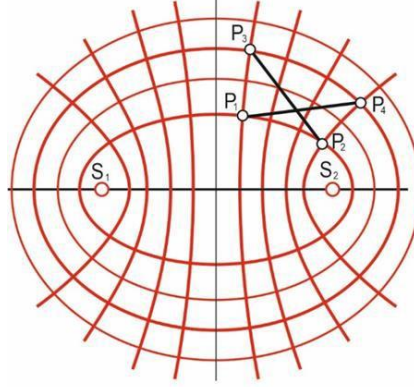
Tanım 4.1: Aynı odak noktaları ile belirli (elips ve hiperbol) küre kesitleri *konfokal* olarak adlandırılır.

Notlar:

1. Merkez noktalı küme kesitlerinin iki odak noktaları vardır. (Çember hariç)

2. Bir elips (hiperbol) bir konfokal hiperbolü (elipsi) dik keser.

Teorem 4.1 (Ivory Teoremi): Konfokal küre kesitlerinin oluşturduğu ağdaki her dörtgen, iki eşit uzunlukta köşegenlere sahiptir. (Şekil 18)



Şekil 18: Küre kesitlerinin oluşturduğu bir ağ örneği

Örnek olarak Şekil 18'deki P_1, P_2, P_3, P_4 noktalarından oluşan küresel dikkörtgeni seçelim. O halde, Ivory Teoremine göre

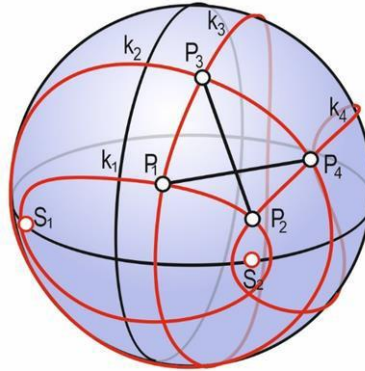
$$|\overline{P_1P_4}| = |\overline{P_2P_3}|$$

dir [8].

4.4.2 Küre üzerinde Ivory teoremi

Bu kısımda Ivory Teoreminin küre yüzeyi üzerindeki durumu araştırılacaktır.

k_1, k_2, k_3, k_4 , 4 ana eksenli, uzunlukları sırasıyla $a_1 = 40, a_2 = 60, a_3 = 10, a_4 = 30$ ve odak noktaları koordinatları $S_1(-35, 0)$ ve $S_2(35, 0)$ olan 4 konfokal küre kesiti olsun (Şekil 19).



Şekil 19: Konfokal küre kesiti

Şekil 19'daki küresel uzaklıklar

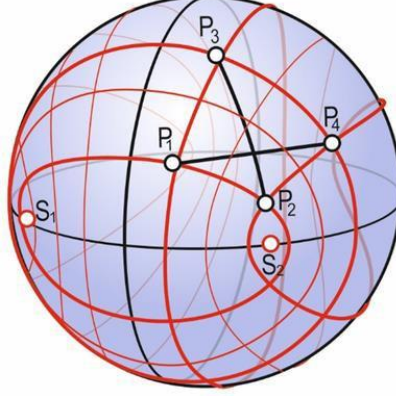
$$d_1 = |\overline{P_1P_4}| \text{ ve } d_2 = |\overline{P_2P_3}|$$

için $d_1 = d_2$ olduğu [5] de ispatlanmıştır.

Sonuç olarak Ivory Teoreminin dörtgen ağlarıyla örülen konfokal koni kesitleri için küresel versiyonu da geçerli olduğu aşağıdaki teoremle ifade edilebilir.

Teorem 4.2 (Küresel Ivory Teoremi)

Konfokal küresel koni kesitlerinin oluşturduğu dörtgen ağlarının köşegen uzunlukları birbirine eşittir (Şekil 20).



Şekil 20: Konfokal küresel koni kesitlerinin oluşturduğu dörtgen ağları

Bu teorem, sadece küre yüzeyinde değil hiperbolik uzaylarda ve daha genel olarak sabit eğriliği olan tüm uzaylarda geçerlidir.

5 Sonuç ve Öneriler

Yaşadığımız yerküre düzlem geometrisi ile küre yüzeyi üzerindeki ilişkiler bağlamında bizlere küre geometrisinin uygulamaları anlamında Projektif tasarımlar, dönüşümler ve izdüşümler ile benzerliğini ve matematiğin teorideki kavramlarının pratiğe nasıl dönüştürülebileceğini gösterir. Buna en uygun örnek olarak, bu çalışmada verilen küre yüzeyi üzerindeki temel teoremler, günümüzdeki Navigasyon sistemlerinin çalışma prensipleri matematiksel işlemler geometrik tasarımlarla görselleştirilerek verilmeye çalışılmıştır. Hayatın matematik ile olan birebir ilişkisine dair, konfokaller yardımıyla lazer ile insan vücudu taramalarındaki görüntü hassasiyetlerinde kullanılan bir teknoloji olarak da düşünülebilir. Sonuç olarak, hiperbolik dalgaların frekans yoğunlukları ile taramaların daha detaylı sonuçlar vereceği aşikârdır.

Bu anlamda, çalışma yeni Navigasyon sistemlerinin geometrik tasarımları başta olmak üzere, sadece pozisyon bulma yöntemi olarak değil, insan sağlığında vücudun lazer taramalarındaki teorileri anlamında da geliştirilebilir.

6 Beyanname

6.1 Çalışma Sınırlamaları

Yazarlar, bu çalışmada araştırma sonucunu önemli ölçüde etkileyebilecek herhangi bir sınırlama ile karşılaşmadığını beyan eder.

6.2 Teşekkür

Yazarlar, bu çalışmanın kalitesini artıran yapıcı öneriler için anonim hakemlere teşekkürlerini sunar.

6.3 Finansman Kaynağı

Yazar(lar) herhangi bir fon kaynağı beyan etmemiştir.

6.4 Rakip Çıkarlar

Bu çalışma kaynakçada [5] numarası ile belirtilen yüksek lisans tezinden üretilmiştir.

6.5 Yazar Katkıları

Pınar KOÇ: Çalışma sonuçların açıklanması, sunumu ve literatür taraması sorumluluğunu alma.

Engin CAN: Çalışma için fikir geliştirme, sonuçlara ulaşma yöntemlerini planlama ve çalışmanın tamamının oluşturulmasında sorumluluk alma.

7 İnsan ve Hayvanlarla İlgili Çalışma

Bu tür bir çalışma için resmi onay gerekli değildir.

7.1 Etik Onay

Bu çalışma bir masa başı incelemesi içerdiğinden, yazarlar tüm prosedürlerin ilgili kurumsal komitelerin etik standartlarına uygun olduğunu iddia etmektedir. Bu tür bir çalışma için resmi onay gerekli değildir.

7.2 Bilgilendirilmiş Onay

Çalışmaya dahil edilen tüm bireysel katılımcılardan bilgilendirilmiş onam alınmıştır.

Kaynaklar

- [1] G. Glaeser & H. Stachel, “*Solids in Open Geometry: OpenGL®+ Advanced Geometry*” (pp. 179-192): Springer, 1999.
- [2] H. Rixecker, “Moderne Trigonometrie“, *MU-Der Mathematikunterricht*, vol. 3, pp. 6-19, 1984.
- [3] K. Kollars & R. Müllner, “Darstellende Geometrie 1 für Bautechnik und Maschinenbau“. *HPT Verlag*, Wien, 1990.
- [4] H. Schupp, “Kegelschnitte“, *BI-Wiss.-Verlag*, 1988.
- [5] P. Koç, “Küre Yüzeyi Üzerinde Temel Teoremler ve Uygulamaları”, *Yüksek Lisans Tezi*, Sakarya Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü, 2021.
- [6] A. Gfrerrer, *Übungen zur Projektive Geometrie. TU Graz*, 2000.
- [7] H.G. Bigalke, “Funkortung nach dem Omega System- Sphärische Kegelschnitte“, *MU-DER Mathematikunterricht*, vol. 3, pp 48-57, 1984.
- [8] H. Stachel & J. Wallner, “Ivory's theorem in hyperbolic spaces”, *Siberian Mathematical Journal*, 45(4), 785-794, 2004.



© 2020 by the authors. Submitted for possible open access publication under the terms and conditions of the Creative Commons Attribution (CC BY) license (<http://creativecommons.org/licenses/by/4.0/>).