

# Elastik Ortamda Bulunan Homojen Olmayan Silindirik Kabukların Hidrostatik Basınç Yükü Etkisi Altında Stabilitesi

Zihni ZERİN

Ondokuz Mayıs Üniversitesi, Mühendislik Fakültesi, İnşaat Mühendisliği Bölümü , Samsun, Türkiye  
[zihniz@omu.edu.tr](mailto:zihniz@omu.edu.tr)

## Anahtar Kelimeler

Homojen olmama,  
Silindirik kabuk,  
Winkler zemini,  
Hidrostatik basınç yükü

## Özet

Bu çalışmada, elastik ortamda bulunan homojen olmayan silindirik kabukların hidrostatik basınç yükü etkisi altında stabilitesi incelenmektedir. Önce homojen olmayan silindirik kabuklar için temel bağıntılar oluşturulmakta ve elastik zemin etkisi dikkate alınarak statik stabilite ve deformasyon uygunluk denklemleri türetilmektedir. Galerkin yöntemi uygulanarak hidrostatik basınç yükü için analitik ifade elde edilir. Sayısal hesaplarda, Winkler zemini, homojen olmama ve kabuk karakteristikleri değişiminin kritik hidrostatik basınç yüküne etkisi incelenmektedir.

# The Stability Of The Non-Homogenous Cylindrical Shell In The Elastic Medium Subjected To Uniform Hydrostatic Pressure

## Keywords

Non-homogeneity,  
Cylindrical shell,  
Winkler foundation,  
Hydrostatic pressure

## Abstract

In this study, the stability of the non-homogenous cylindrical shells in the elastic medium and subjected to uniform hydrostatic pressure is investigated. Firstly, the basic relations for non-homogeneous cylindrical is formed and then by taking into consideration the effect of an elastic foundation, the static stability and deformation compatibility equations are derived. Applying Galerkin's method, the analytical statement is obtained for the critical uniform hydrostatic pressure. In numerical computations, influences of the Winkler foundation, non-homogeneity and the variation of shell characteristics on the critical hydrostatic pressure are studied.

## 1. Giriş

Homojen olmayan malzemelerden oluşan kompozit silindirik kabuklar inşaat, makine ve gemi mühendisliğinin değişik dallarında başlıca yapı elemanları olarak geniş kullanım alanına sahiptirler. Malzemenin homojen olmaması, doğal olabileceği gibi değişik etkiler sonucu homojen malzemenin elastik özelliklerinin değişime uğraması sonucu da meydana gelebilir. Örneğin;

malzemenin homojen olmaması radyasyon etkisi, nem etkisi ve imalat yöntemleri vs gibi sebeplerden dolayı da meydana gelebilir. Bu etkiler sonucu yapı elemanını oluşturan malzemenin mekanik özellikleri noktadan noktaya sürekli, parçalı sürekli veya rasgele olarak değişebilir. Günümüzde imalat yöntemlerindeki hızlı gelişmelere bağlı olarak homojen olmayan malzemelerin oluşumu, değişik yapı elemanlarında uygulanması ve elastik ortamlarda kullanımı daha da artmıştır. Homojen olmayan malzemelerden oluşan yapı elemanları daha az ağırlık, yüksek mukavemet vs gibi avantajlara sahip olduğu için onların burkulma davranışı ile ilgili hesap ve

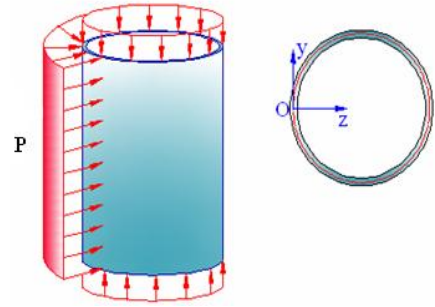
yöntemlerin yenilenmesi ve geliştirilmesi bir zorunluluk olarak mühendis araştırmacıların önüne çıkmaktadır. Literatürde homojen olmayan malzemelerin doğasını düzgün olarak ifade eden model sayısı epey sınırlıdır [1–4]. Söz konusu homojen olmama modelleri kullanılarak değişik ortamlarda değişik yapı elemanlarının davranışının incelenmesi ile ilgili bazı çalışmalar ortaya konulmuştur [5–8].

Yeraltında ve gömülü olan yağ ve gaz boru hatları dış yüzeyinden elastik toprak ile ve iç yüzeyinden basınçlı akışkan ile sürekli olarak temas halindedirler. Benzer olarak, deniz altındaki yağ ve gaz boru hatları ve ısı dönüştürücü tüpleri her iki yüzeyden akışkanla temas halindedirler. Böyle boru hatları ve tüpler elastik zemindeki ince silindirik kabuklar olarak dikkate alınabilir. Arazi silahlarının kabukları da elastik bir zemindeki silindirik kabuklar gibi göz önüne alınabilir. Literatürde değişik zemin modelleri vardır, bu modellerden biri de Winkler zemin modelidir. Kumlu topraklar ve sıvılar Winkler modeli ile ifade edilebilir. Son yirmi yılda homojen ve homojen olmayan kompozitlerden yapılan boruların geniş ve yaygın uygulamalarında ani bir artış olmuştur. Bu nedenle, elastik bir zemindeki homojen olmayan ortotrop silindirik kabukların hidrostatik basınç yükü etkisi altındaki burkulma analizinin incelenmesi büyük bir öneme sahiptir. Elastik zemin üzerinde bulunan kiriş ve plaklar üzerine çalışmalara kıyasla silindirik kabukların statik ve dinamik analizleri nispeten son yıllarda çalışıldığı için daha az sayıdadır [9–12]. Literatürde, elastik zemin üzerinde bulunan homojen olmayan silindirik kabukların stabilitesi ile ilgili sınırlı sayıda çalışmanın olduğu bilinmektedir [13–15].

Winkler zemin üzerinde bulunan ve üniform hidrostatik basınç yükü etkisi altında olan homojen olmayan elastik silindirik kabuğun stabilite probleminin henüz çalışılmadığı literatür taraması sonucu yazarlar tarafından tespit edilmiştir. Bu çalışmada söz konusu problemin çözümü için bir girişim yapılmıştır.

## 2. Temel Denklemler

Uzunluğu  $L$ , kalınlığı  $h$ , yarıçapı  $R$  olan, homojen olmayan elastik malzemeden oluşan, dairesel silindirik bir kabuk, kenarlardan basit mesnetli olsun. Kartezyen sistemini öyle seçelim ki,  $Z$  eksenini kabuğun orta yüzeyinin normaline doğrultusunda olsun,  $x$  ve  $y$  eksenleri ise eksenel ve çevresel doğrultularla çakışsın (Şekil 1).



Şekil 1. Hidrostatik basınç yükü etkisi altındaki silindirik kabuk

Malzemenin elastisite modülü kalınlık koordinatının sürekli fonksiyonu olduğunda [1–3, 6], Kirchhoff-Love varsayımı dikkate alınarak homojen olmayan elastik silindirik kabuğun gerilme-şekil değiştirme bağıntıları aşağıdaki gibi ifade edilir [2, 14, 18]:

$$\begin{bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \sigma_{xy} \end{bmatrix} = \frac{E_0 [1 + \mu \varphi(\bar{z})]}{1 - \nu^2} \begin{bmatrix} 1 & \nu & 0 \\ \nu & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 - \nu \end{bmatrix} \begin{bmatrix} e_x - z \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \\ e_y - z \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \\ e_{xy} - z \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} \end{bmatrix} \quad (1)$$

Burada,  $\sigma_x, \sigma_y, \sigma_{xy}$  gerilme bileşenleri;  $e_x, e_y, e_{xy}$  şekil değiştirme bileşenleri;  $w$  orta yüzeye normal doğrultuda yer değiştirme olup kabuk kalınlığından çok çok küçüktür;  $E_0$ , homojen malzemenin elastisite modülü;  $\nu$ , Poisson oranı olup, sabittir;  $\mu$ , elastisite modülünün değişim katsayısı ve  $\varphi(\bar{z})$ , homojen olmama fonksiyonu olup, şu eşitsizlikleri sağlamaktadırlar:  $0 \leq \mu \leq 1$  ve  $|\varphi(\bar{z})| \leq 1$ ;  $\bar{z} = z/h$  olup,  $z$  kabuğun kalınlık koordinatıdır.

Kuvvet ve moment bileşenleri aşağıdaki ifadelerden bulunur [18]:

$$\left[ (N_x, N_y, N_{xy}), (M_x, M_y, M_{xy}) \right] = \int_{-h/2}^{h/2} (1, z) [\sigma_x, \sigma_y, \sigma_{xy}] dz \quad (2)$$

Kuvvet bileşenleriyle Airy gerilme fonksiyonu  $\Phi$  arasındaki bağıntı şu şekildedir:

$$\{N_x, N_y, N_{xy}\} = \{\Phi_{,yy}, \Phi_{,xx}, -\Phi_{,xy}\} \quad (3)$$

(1) bağıntıları (2) ifadesinde yerine yazılıp elde edilen ifadeler (3) ile birlikte üniform hidrostatik basınç yükü

etkisi altında olan homojen olmayan silindirik kabuğun stabilite ve deformasyon uygunluk denklemlerinde [18] yerine yazıldığında, bazı işlemlerden sonra aşağıdaki matris şeklinde diferansiyel denklemler elde edilir:

$$\begin{bmatrix} \mathbf{L}_{11} & \mathbf{L}_{12} \\ \mathbf{L}_{21} & \mathbf{L}_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Phi \\ \mathbf{w} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{0} \\ \mathbf{0} \end{bmatrix} \quad (4)$$

Burada,  $L_{ij}$  ( $i, j = 1, 2$ ) diferansiyel operatör olup şu tanımlar geçerlidir

$$\begin{aligned} L_{11} &= c_{12} \left( \frac{\partial^4}{\partial x^4} + \frac{\partial^4}{\partial y^4} \right) + 2(c_{11} - c_{31}) \frac{\partial^4}{\partial x^2 \partial y^2} + \frac{1}{R} \frac{\partial^2}{\partial x^2}, \\ L_{12} &= -c_{13} \left( \frac{\partial^4}{\partial x^4} + \frac{\partial^4}{\partial y^4} \right) - 2(c_{14} + c_{32}) \frac{\partial^4}{\partial x^2 \partial y^2} - P \frac{\partial^2}{\partial x^2} - RP \frac{\partial^2}{\partial y^2} - K_w, \\ L_{21} &= b_{11} \left( \frac{\partial^4}{\partial x^4} + \frac{\partial^4}{\partial y^4} \right) + 2(b_{12} + b_{31}) \frac{\partial^4}{\partial x^2 \partial y^2}, \\ L_{22} &= \frac{1}{R} \frac{\partial^2}{\partial x^2} - b_{14} \left( \frac{\partial^4}{\partial x^4} + \frac{\partial^4}{\partial y^4} \right) - 2(b_{13} + b_{32}) \frac{\partial^4}{\partial x^2 \partial y^2} \end{aligned} \quad (5)$$

$$\begin{aligned} P_{kr} &= \frac{1}{(m_1^2 + n^2 R) R^2} \left\{ K_w R^4 + \left[ c_{13} (m_1^4 + n^4) + 2(c_{14} + c_{32}) m_1^2 n^2 \right] + \right. \\ &+ \left. \frac{\left[ m_1^2 R - c_{12} (m_1^4 + n^4) - 2(c_{11} - c_{31}) m_1^2 n^2 \right] \times \left[ m_1^2 R + b_{14} (m_1^4 + n^4) + 2(b_{13} + b_{32}) m_1^2 n^2 \right]}{b_{11} (m_1^4 + n^4) + 2(b_{12} + b_{13}) m_1^2 n^2} \right\} \quad (7) \end{aligned}$$

Yapılan hesaplar hidrostatik basınç yükünün kritik değerinde,  $m=1$  olduğu saptanmıştır. Bu nedenle burkulma yükünün minimum değeri (7) ifadesinin sadece  $n$  dalga sayısına göre minimize edilmesi ile elde edilir.

#### 4. Sayısal Analiz

Tablo 1' de, elastik zemin etkisi dikkate alınmadığında, basit mesnetli homojen silindirik kabuğun kritik hidrostatik basınç yükünün değerleri Hutchinson ve Amazigo [16] teorik sonuçları, Kasagi ve Sridharan [17] sonlu elemanlar yöntemi ve Shen ve Noda [5] sınır tabaka

Burada  $c_{ij}$ ,  $b_{ij}$  ( $i=1,2,3$ ) homojen olmayan malzeme özelliklerine ve kabuk karakteristiklerine bağlı ifadelerdir.

### 3. Temel Denklemlerin Çözümü

Silindirik kabuğun kenarları basit mesnetli olduğu için (4) diferansiyel denklemlerinin çözümü aşağıdaki şekilde aranır [18]:

$$\mathbf{w} = A \sin \frac{m_1 x}{R} \sin \frac{ny}{R}, \quad \Phi = B \sin \frac{m_1 x}{R} \sin \frac{ny}{R} \quad (6)$$

Burada  $A$  ve  $B$  bilinmeyen genlikler,  $m_1 = m\pi R / L$  olup  $m$  ve  $n$  sırasıyla,  $x$  ve  $y$  eksenleri doğrultusunda yarım dalga ve dalga sayılarıdır.

(6) ifadesi (4) denklemlerinde yerine yazılıp  $0 \leq x \leq L$  ve  $0 \leq y \leq 2\pi R$  aralığında Galerkin yöntemi uygulandığında ve bazı matematiksel işlemlerden sonra kritik hidrostatik basınç yükü için aşağıdaki ifade elde edilir:

teorisi ile elde edilen sonuçlarla karşılaştırılmıştır. Ayrıca,  $\bar{Z}_B = \left[ L^2 / (Rh) \right] (1 - \nu^2)^{1/2}$  Batdorf silindirik kabuk parametresi olarak adlandırılır [5]. Malzeme özellikleri Hutchinson ve Amazigo [16], çalışmasından alınmıştır:  $E_0 = 10 \times 10^6$  psi,  $\nu = 0.33$ . Parantez içindeki sayılar, kritik hidrostatik basınç yüke karşı gelen dalga sayılarıdır.

**Tablo 1.** Homojen elastik silindirik kabuğun kritik hidrostatik basınç yükü  $P_{kr}$  (psi) değerlerinin karşılaştırılması (R/h=200)

$\bar{Z}_B$	Shen ve Noda [5]	Hutchinson ve Amazigo [16]	Kasagi ve Sridharan [17]	Bu çalışma
10	87.077(1,18)	89.07(1,18)	88.65(1,18)	88.958(1,18)
50	35.167(1,13)	35.25(1,13)	35.09(1,13)	35.205(1,13)
100	24.305(1,11)	24.35(1,11)	24.26(1,11)	24.322(1,11)
500	10.436(1,8)	10.45(1,8)	10.42(1,8)	10.440(1,8)
1000	7.398(1,7)	7.412(1,7)	7.388(1,7)	7.401(1,7)
5000	3.416(1,5)	3.423(1,5)	3.412(1,5)	3.416(1,5)
10000	2.315(1,4)	2.319(1,4)	2.312(1,4)	2.315(1,4)

Sayısal hesaplarda homojen olmama fonksiyonu lineer,  $\varphi(\bar{Z}) = \bar{Z}$  ve kuadratik,  $\varphi(\bar{Z}) = \bar{Z}^2$  dikkate alınarak hesaplar yapılmıştır. Winkler zemin katsayısı ve kabuk karakteristikleri tablo içerisinde sunulmaktadır. Malzeme çelik olup elastik özellikleri şu şekildedir:  $E_0 = 2 \times 10^6$  (MPa),  $\nu = 0.3$ . Bu veriler kullanılarak homojen (H) ve homojen olmayan (HO) silindirik kabukların kritik üniform hidrostatik basınç yükü değerlerinin R/h ve L/R oranları değişimine bağlı dağılımı Tablo 2’de sunulmaktadır. Winkler zemininin etkisinin dikkate alındığı ve alınmadığı durumlarda, homojen ve homojen olmayan silindirik kabukların kritik hidrostatik basınç yükü değerleri R/h ve L/R oranları arttığında sürekli azalır. R/h arttığında çevresel dalga sayısı artar, L/R arttığında ise çevresel dalga sayısı azalır. Winkler zemini etkisi dikkate alınmadığında homojen olmamanın kritik yüke etkisi sabit kalır. Örneğin homojen olmama fonksiyonu

lineer ve kuadratik değiştiğinde kritik hidrostatik basınç yüküne etkiler sırasıyla yaklaşık %6.5 ve %13.85 olup R/h ve L/R oranlarının değişiminden bağımsızdır. R/h ve L/R oranları arttığında Winkler zeminin kritik hidrostatik basınç yüküne etkisi önemli derece de artar, fakat homojen olmamanın etkisi azalır. Örneğin homojen durum ve homojen olmamanın lineer ve kuadratik olduğu durumlarda kritik hidrostatik basınç yüküne etkiler R/h=100 için sırasıyla %1.42; %1.51; %1.25, R/h=300 için ise %37.75; %38.55; %33.87 olmaktadır. Benzer şekilde L/R=1 için etkiler sırasıyla %0.74; %78; %0.65, L/R=5 için ise %16.44; %17.63; %14.46 olmaktadır. L/R oranına kıyasla R/h oranının değişimi kritik hidrostatik basınç yüküne daha fazla etki etmektedir. Ayrıca, Tablo 2’de homojen ve homojen olmayan silindirik kabuğun kritik hidrostatik basınç yükü değerlerinin  $K_w$  değişimi de sunulmaktadır.  $K_w$  arttığında kritik hidrostatik basınç yükü değerlerine Winkler zemininin etkisinin arttığı görülmektedir.

**Tablo 2.** Homojen olmayan (HO) silindirik kabukların kritik hidrostatik basınç yükü değerlerinin R/h ve L/R oranları ve  $K_w$  zemin katsayısı değişimine bağlı dağılımı

	Homojen	HO Lineer	HO Kuadratik	Homojen	HO Lineer	HO Kuadratik
R/h	$P_{kr}$ (MPa) and ( $n_{kr}$ ) (L/R =2)			$P_{kr}^{K_w}$ (MPa) and ( $n_{kr}^{K_w}$ ) (L/R =2; $K_w=5 \times 10^5$ N/m <sup>3</sup> )		
100	0.9184(6)	0.8597(6)	1.0419(6)	0.9314(6)	0.8727(6)	1.0549(6)
200	0.1665(7)	0.1564(7)	0.1884(7)	0.1864(7)	0.1763(7)	0.2083(7)
300	0.0604(8)	0.0566(8)	0.0685(8)	0.0832(9)	0.0784(9)	0.0917(8)
L/R	$P_{kr}$ (MPa) and ( $n_{kr}$ ) (R/h =100)			$P_{kr}^{K_w}$ (MPa) and ( $n_{kr}^{K_w}$ ) (R/h =100; $K_w=1 \times 10^6$ N/m <sup>3</sup> )		
1	1.8362(8)	1.7235(8)	2.0795(8)	1.8498(8)	1.7370(8)	2.0930(8)
2	0.9184(6)	0.8597(6)	1.0419(6)	0.9444(6)	0.8857(6)	1.0679(6)
3	0.6133(5)	0.5735(5)	0.6963(5)	0.6516(5)	0.6118(5)	0.7346(5)
5	0.3710(4)	0.3460(4)	0.4219(4)	0.4320(4)	0.4070(4)	0.4829(4)

## 5. Sonuç

Bu çalışmada, elastik ortamda bulunan homojen olmayan silindirik kabukların hidrostatik basınç yükü etkisi altında stabilitesi incelenmiştir. Önce homojen olmayan silindirik kabuklar için temel bağıntılar oluşturulmakta ve elastik zemin etkisi dikkate alınarak statik stabilite ve deformasyon uygunluk denklemleri türetilmiştir. Galerkin yöntemi uygulanarak hidrostatik basınç yükü için analitik ifade elde edilmiştir. Sayısal hesaplarda, Winkler zemini, homojen olmama ve kabuk karakteristikleri değişiminin kritik hidrostatik basınç yüküne etkisi detaylı bir şekilde incelenmiştir.

## 6. Kaynaklar

- [1] Delale, F. and Erdogan F., "The crack problem for a non-homogeneous plane. ASME Journal of Applied Mechanics", 50, 609–614, 1983.
- [2] Khoroshun, L.P., Kozlov, S.Y., Ivanov, Y.A. and Koshevoi, I.K., "The generalized theory of plates and shells non-homogeneous in thickness direction", Naukova Dumka, Kiev, 1988 (in Russian).
- [3] Elishakoff, I., "Inverse buckling problem for inhomogeneous columns", International Journal of Solids and Structures, 38, 457-464, 2001.
- [4] Gupta, U.S., Lal, R. and Sharma, S., "Vibration of non-homogeneous circular Mindlin plates with variable thickness", Journal of Sound and Vibration, 302, 1–17, 2007.
- [5] Shen, H.S. and Noda, N., "Post-buckling of pressure-loaded FGM hybrid cylindrical shell in thermal environments" Composite Structures, 77, 546–560, 2007.
- [6] Sofiyev, A.H., Omurtag, M.H. and Schnack E., "The vibration and stability of orthotropic conical shells with non-homogeneous material properties under a hydrostatic pressure", Journal of Sound and Vibration, 319, 963–983, 2009.
- [7] Ieşan, D. and Quintanilla, R., "On the deformation of inhomogeneous orthotropic elastic cylinders", European Journal of Mechanics A/Solids 26, 999-1015, 2007.
- [8] Gupta, A.K., Johri, T. and Vats, R.P., "Study of thermal gradient effect on vibrations of a non-homogeneous orthotropic rectangular plate having bi-direction linearly thickness variations", Meccanica, 45, 393-400, 2010.
- [9] Paliwal, D.N. and Pandey, R.K., "The free vibration of a cylindrical shell on an elastic foundation", J. of Vibration and Acoustics, 120, 63-71, 1998.
- [10] Journal of Vibration and Acoustics, 120:63–71, 1998.
- [11] Omurtag, M.H. and Kadioglu, F., "Free vibration analysis of orthotropic plates resting on Pasternak foundation by mixed finite element formulation", Computers and Structures, 67, 253–265, 1998.
- [12] Ng, T.Y. and Lam, K.Y., "Effects of elastic foundation on the dynamic stability of cylindrical shells", International Journal of Structural Engineering and Mechanics, 8, 193-205, 1999.
- [13] Fok, S.L., "Analysis of the buckling of long cylindrical shells embedded in an elastic medium using the energy method", Journal of Strain Analysis and Engineering Design, 37, 375-383, 2002.
- [14] Morimoto, T. and Tanigawa, Y., "Elastic stability of inhomogeneous thin plates on an elastic foundation", Archive of Applied Mechanics, 77, 653–674, 2007.
- [15] Shen, H.S. "Postbuckling of shear deformable FGM cylindrical shells surrounded by an elastic medium", International Journal of Mechanical Sciences 51, 372-383, 2009.
- [16] Shah, A.G., Mahmood, T., Naeem, M.N. and Arshad, S.H. "Vibration characteristics of fluid-filled cylindrical shells based on elastic foundations" Acta Mechanica, 216, 17-28, 2011.
- [17] Hutchinson, J.W., and Amazigo, J.C., "Imperfection-sensitivity of eccentrically stiffened cylindrical shells" American Institute of Aeronautics and Astronautics Journal, 5, 392–401, 1967.
- [18] Kasagi, A. and Sridharan, S., "Buckling and post-buckling analysis of thick composite cylindrical shells under hydrostatic pressure", Composites Part B: Engineering, 3, 467–487, 1993.
- [19] Volmir, A.S., "Stability of Elastic Systems", Nauka: Moscow, 1967. English Translation: Foreign Tech. Division, Air Force Systems Command. Wright-Patterson Air Force Base, Ohio, AD628508.