GUFBD / *GUJS* (2022) 12(3): 769-780
DOI: 10.17714/gumusfenbil.993353 Araştırma Makalesi / *Research Article*

Sanal sezgisel bulanık parametreli sezgisel bulanık esnek kümeler ve karar verme üzerine bir uygulaması

Virtual intuitionistic fuzzy parameterized intuitionistic fuzzy soft sets and their application in decision-making

Orhan DALKILIÇ*[1,a], Naime DEMİRTAŞ[2,b]
[1]*Mersin Üniversitesi, Fen-Edebiyat Fakültesi, Matematik Bölümü, 33110, Mersin*
[2] *Mersin Üniversitesi, Fen-Edebiyat Fakültesi, Matematik Bölümü, 33110, Mersin*

• Geliş tarihi / *Received*: 09.09.2021 • Düzeltilerek geliş tarihi / *Received in revised form*: 07.04.2022 • Kabul tarihi / *Accepted*: 17.04.2022

Öz
Bu çalışmada sezgisel bulanık parametreli sezgisel bulanık esnek kümeler için karar vericiler tarafından ifade edilen sezgisel bulanık değerlerin daha doğru bir şekilde ifade edilebilmesi hedeflenmiştir. Bunun için sanal alt ve üst sezgisel bulanık yaklaşım kavramları tanımlanarak sanal sezgisel bulanık parametreli sezgisel bulanık esnek kümeler kümeler önerilmiştir. Dahası bu hibrit küme tipi için temel küme işlemleri ilişkili özellikleriyle birlikte incelenmiştir. Ayrıca soft kümelere odaklanan belirsizlik problemlerine yönelik bir karar verme algoritması inşa edilmiştir. Son olarak elde edilen sonuçların bir irdelemesi yapılmıştır.

Anahtar kelimeler: Karar verme, Sezgisel bulanık parametreli sezgisel bulanık esnek küme, Sanal sezgisel bulanık parametreli sezgisel bulanık esnek küme

Abstract
In this paper, it is aimed to express more accurately the intuitionistic fuzzy values expressed by the decision-makers for intuitionistic fuzzy parameterized intuitionistic fuzzy soft sets. For this purpose, virtual intuitionistic fuzzy parameterized intuitionistic fuzzy soft sets are proposed by defining the concepts of virtual lower and upper intuitionistic fuzzy approaches. Moreover, the basic set operations for this hybrid set type are examined together with their associated properties. In addition, a decision-making algorithm focusing on virtual intuitionistic fuzzy parameterized intuitionistic fuzzy soft sets is constructed. Finally, an analysis of the obtained results was made.

Keywords*: Decision-making, Intuitionistic fuzzy parameterized intuitionistic fuzzy soft set, Virtual intuitionistic fuzzy parameterized intuitionistic fuzzy soft set*

[*a] Orhan DALKILIÇ; orhandlk952495@hotmail.com, Tel: (0544) 5840317, orcid.org/0000-0003-3875-1398
[b] orcid.org/0000-0003-4137-4810

1. Giriş
1. Introduction

Günümüzde insan ihtiyaçlarının farklılaşması ve çeşitlenmesiyle birlikte birçok alanda karşılaşılan belirsizlik problemlerine yönelik daha nitelikli matematiksel modellerin literatüre kazandırılması bir zorunluluk halini almıştır. Bu durum, birçok araştırmacı için bir motivasyon kaynağı olarak görülmüş ve belirsizlik problemlerine yönelik özellikle karar verme süreçlerinin daha ideale yakın bir şekilde yönetilebilmesi amaçlanmıştır. Literatürü incelediğimizde, belirsizliğin giderilebilmesine yönelik ilk matematiksel modellerden biri bulanık kümelerdir (Zadeh, 1965). Bulanık kümeler, bir elemanın herhangi bir kümeye aidiyetini [0,1] aralığında ifade eder. Bu yönüyle klasik matematikten uzaklaşmamıza olan katkısı nedeniyle çok önemlidir. İlerleyen yıllarda, bir elemanın herhangi bir kümeye ait olmamasını da irdeleyen sezgisel bulanık kümeler önerilmiştir (Atanassov, 1986). Her iki matematiksel model de oldukça başarılı yaklaşımlar önermesine karşın, belirsizlik problemlerine doğrudan uygulanabilmesi oldukça zordur. Bu durumun nedeni olarak, bir parametrizasyon aracı eksikliği olduğunu düşünen Molodtsov, esnek kümeleri literatüre kazandırmıştır (Molodtsov, 1999). Özellikle belirsizlik problemlerini pratik bir şekilde ifade edebilmesi, karşılaşılan belirsizlik üzerinde yapılabilecek işlemlerin kolaylığı açısından önemli olduğundan birçok araştırmacının dikkatini çekmeyi başarmıştır ve üzerine birçok çalışma yapılmıştır (Zou vd., 2008; Enginoğlu vd., 2015; Deli vd., 2016; Selvakumari, 2018; Demirtaş vd., 2019; Saeed vd.,2020; Demirtaş vd., 2020; Dalkılıç, 2021b; Dalkılıç, 2021c; Irkin vd., 2018; Demir, 2021; Güzel Ergül vd., 2019; Demirtaş vd., 2022).

Bir parametreleme aracının katkısıyla inşa edilen esnek kümeler, bu özelliğinden dolayı belirsizlikle mücadele kapsamında literatüre kazandırılan diğer matematiksel modellerle birlikte kolaylıkla hibrit yapılar kurabilir. Bu sayede daha karmaşık verilerin ayrıştırılabilmesine yönelik yapılan sınıflandırmaların daha kolay bir şekilde yapılabilmesine olanak tanınmış olur. Örneğin; bulanık kümeler ve sezgisel bulanık kümeler ile birlikte düşünülen esnek kümeler birçok hibrit matematiksel modelin inşa edilebilmesine ön ayak olmuştur (Maji vd., 2001a; Maji vd., 2001b; Enginoğlu vd., 2019; Sulukan vd., 2019).

Hibrit kümeler kendini oluşturan kümelerin tüm özelliklerini kendi bünyesinde barındırdığı için karşılaşılan belirsizlik problemlerini daha ideale yakın bir şekilde modelleyebilirler. Bahsedilen bulanık küme, sezgisel bulanık küme ve esnek kümelerden faydalanılarak inşa edilen bazı küme tipleri şöyle sınıflandırılmıştır:

Bulanık esnek kümeler (Maji vd., 2001a),
Sezgisel bulanık esnek kümeler (Maji vd., 2001b).,
Bulanık parametreli esnek kümeler (Çağman vd., 2011),
Sanal bulanık parametreli esnek kümeler (Dalkılıç vd., 2021),
Sezgisel bulanık parametreli esnek kümeler (Deli vd., 2015),
Bulanık parametreli bulanık esnek kümeler (Çağman vd., 2010),
Sanal bulanık parametreli bulanık esnek kümeler (Dalkılıç, 2021a),
Sezgisel bulanık parametreli bulanık esnek kümeler (El-Yagubi vd., 2013),
Sezgisel bulanık parametreli sezgisel bulanık esnek kümeler (Karaaslan, 2016) (Kısaca sbp-sbe-küme),
Sanal sezgisel bulanık parametreli sezgisel bulanık esnek kümeler (Bu çalışmada önerilen) (Kısaca ssbp-sbe-küme)

Bu çalışmada sbp-sbe-kümelerin bir genellemesi olan ssbp-sbe-küme kavramı tanıtılmıştır. Belirsizlikle mücadele kapsamında önemli bir matematiksel model olan sbp-sbe-kümeleri genelleştirmemizin en önemli nedeni, karar vericilerin sezgisel bulanık değerleri [0,1] aralığında doğru bir şekilde ifade edebilmesinin oldukça zor bir iş olmasıdır. Çünkü bu aralıkta çok sayıda rasyonel sayı vardır. Bu problemi çözebilmek için, bu çalışmada sanal alt ve üst sezgisel bulanık yaklaşımlar önerilmiştir. Bu yaklaşımlar sayesinde kazanılan bazı avantajlı durumlar şöyledir:

i. Karar vericilerin ifade ettiği sezgisel bulanık değerlerin daha doğru bir şekilde ifade edilebilmesi ve bu sayede olası bir hatanın önüne geçilmesi

ii. Her karar vericiye göre sanal alt ve üst sezgisel bulanık yaklaşımların değişkenlik gösterebilmesi sayesinde belirsizlik problemine daha esnek bir şekilde yaklaşılabilme olanağını tanımış olması

Bu çalışmanın amacı belirsizliğe yönelik karar verme sürecinin en doğru şekilde yönetilmesini sağlayacak karar vericiler tarafından ifade edilen sezgisel bulanık değerleri kolaylıkla tespit edebilmektir. Ayrıca bu çalışmada ssbp-sbe-kümeler için tümleyen, alt küme, birleşim, kesişim gibi temel küme işlemleri verilerek bazı ilişkili özellikleri irdelenmiştir. Dahası tanıtılan hibrit küme tipi için bir karar verme algoritması önerilmiştir. Son olarak bir karşılaştırmalı analiz sunulmuştur.

2. Materyal ve metot
2.Material and method

Bu bölümde sonraki bölümlerde verilen kavramların tanıtılmasında yararlanılan bazı matematiksel modeller hatırlatılmıştır.

Çalışma boyunca $E = \{e_1, e_2, \dots, e_n\}$ bir parametre kümesi, $U = \{u_1, u_2, \dots, u_m\}$ bir başlangıç evreni ve 2^U, U'nun kuvvet kümesi olarak ifade edilmiştir. Ayrıca; çalışma içerindeki küme tanımları, anlam hatası oluşmaması için gerek sayıda şart ile yetinilerek verilmiştir.

Tanım 2.1: (Zadeh, 1965) B, U üzerinde bir bulanık küme olmak üzere $\mu_B: U \to [0,1]$ fonksiyonu yardımıyla $B = \left\{\frac{u}{\mu_B(u)}: u \in U\right\}$ şeklinde ifade edilir. Her $u \in U$ elemanının B kümesine olan üyelik derecesi $\mu_B(u)$ olarak belirtilir.

Tanım 2.2: (Atanassov, 1986) U üzerinde bir sezgisel bulanık küme $\mu_S: U \to [0,1]$ ve $\nu_S: U \to [0,1]$ fonksiyonları yardımıyla her $u \in U$ için $0 \le \mu_S(u) + \nu_S(u) \le 1$ olacak şekilde ifade edilen $S = \left\{\frac{u}{\langle \mu_S(u), \nu_S(u)\rangle}: u \in U\right\}$ şeklindedir. Burada μ_S ve ν_S fonksiyonlarına sırasıyla S'nın üyelik ve üyelik olmama fonksiyonları denir. Dahası, $\mu_S(u)$ ve $\nu_S(u)$ değerlerine sırasıyla $u \in U$'nin üyelik derecesi ve üyelik olmama derecesi olarak ifade edilir.

Çalışma boyunca U üzerindeki tüm sezgisel bulanık kümelerinin ailesi $SB(U)$ şeklinde ifade edilmiştir.

$S, S_1, S_2 \in SB(U)$ için (Atanassov, 1986):

i. Her $u \in U$ için $\mu_S(u) = 0$ ve $\nu_S(u) = 1$ ise S boş sezgisel bulanık küme olarak adlandırılır ve $S_\emptyset$ ile gösterilir.
ii. Her $u \in U$ için $\mu_S(u) = 1$ ve $\nu_S(u) = 0$ ise S evrensel sezgisel bulanık küme olarak adlandırılır ve S_U ile gösterilir.
iii. Her $u \in U$ için $\mu_{S_1}(u) \le \mu_{S_2}(u)$ ve $\nu_{S_2}(u) \ge \nu_{S_1}(u)$ ise S_1, S_2'nin bir sezgisel bulanık alt kümesidir ve $S_1 \breve{\subseteq} S_2$ şeklinde gösterilir.
iv. S'nın tümleyeni $S^c = \left\{\left(\frac{u}{\langle \nu_S(u), \mu_S(u)\rangle}\right): u \in U\right\}$.
v. S_1ve S_2'nin kesişimi $S_1 \breve{\cap} S_2 = \left\{\left(\frac{u}{\langle \min\{\mu_{S_1}(u), \mu_{S_2}(u)\}, \max\{\nu_{S_1}(u), \nu_{S_2}(u)\}\rangle}\right): u \in U\right\}$.
vi. S_1ve S_2'nin birleşimi $S_1 \breve{\cup} S_2 = \left\{\left(\frac{r}{\langle \max\{\mu_{S_1}(u), \mu_{S_2}(u)\}, \min\{\nu_{S_1}(u), \nu_{S_2}(u)\}\rangle}\right): u \in U\right\}$.

Tanım 2.3: (Molodsov, 1999) U üzerinde bir esnek küme $K: E \to 2^U$ yaklaşım fonksiyonu yardımıyla ifade edilen $K = \{(e, K(e)): e \in E\}$ şeklindeki sıralı ikililerin bir kümesidir.

Tanım 2.5: (Dalkılıç ve Demirtaş, 2021) S, E üzerinde bir bulanık küme olsun. Bu durumda $1 \le i \le n$ değeri için her $0 \le \underline{\alpha_i} < \mu_S(e_i)$ değerine karşılık gelerek yazılabilecek parametre kümesine, bir alt sanal parametre kümesi denir ve $\underline{S} = \left\{e_1^{\underline{\alpha_1}}, e_2^{\underline{\alpha_2}}, \dots, e_n^{\underline{\alpha_n}}\right\}$ şeklinde ifade edilir. Burada $e_i^{\underline{\alpha_i}}$ parametresi şu anlama gelmektedir: "e_i parametresinin α_i sayısınca OLUMSUZ YÖNDE GELİŞİM PARAMETRESİ". Benzer şekilde; $1 \le i \le n$ değeri için her $0 \le \overline{\alpha_i} \le 1 - \mu_S(e_i)$ değerine karşılık gelerek yazılabilecek parametre kümesine bir üst sanal parametre kümesi denir ve $\overline{E} = \left\{e_1^{\overline{\alpha_1}}, e_2^{\overline{\alpha_2}}, \dots, e_n^{\overline{\alpha_n}}\right\}$ şeklinde ifade edilir. Burada $e_i^{\overline{\alpha_i}}$ parametresi şu anlama gelmektedir: "e_i parametresinin α_i sayısınca OLUMLU YÖNDE GELİŞİM PARAMETRESİ".

Tanım 2.6: (Dalkılıç ve Demirtaş, 2021) B, E üzerinde bir bulanık küme olmak üzere

$$\underline{F_B} = \left\{\left(\frac{e}{\underline{\mu_B}(e)}, \underline{f_B}\left(\frac{e}{\underline{\mu_B}(e)}\right)\right): e \in E\right\} \tag{1}$$

$$F_B = \left\{\left(\frac{e}{\mu_B(e)}, f_B\left(\frac{e}{\mu_B(e)}\right)\right) :\ e \in E\right\} \tag{2}$$

$$\overline{F_B} = \left\{\left(\frac{e}{\overline{\mu_B}(e)}, \overline{f_B}\left(\frac{e}{\overline{\mu_B}(e)}\right)\right) : e \in E\right\} \tag{3}$$

U üzerindeki bir VF_B sanal bulanık parametreli esnek küme (1), (2) ve (3) kümelerinin birleşimi, yani

$$VF_B = \underline{F_B} \cup F_B \cup \overline{F_B} \tag{4}$$

(4) ile tanımlanır. Burada $\mu_B(e) - \underline{\alpha} = \underline{\mu_B}(e) \leq \mu_B(e) \leq \overline{\mu_B}(e) = \mu_B(e) + \overline{\alpha}$ ve $\overline{f_B}\left(\frac{e}{\overline{\mu_B}(e)}\right) \subseteq f_B\left(\frac{e}{\mu_B(e)}\right) \subseteq \underline{f_B}\left(\frac{e}{\underline{\mu_B}(e)}\right)$ biçimindedir. Ayrıca karar vericiler tarafından ifade edilen değerler $0 \leq \underline{\alpha} < \mu_B(e)$ ve $0 \leq \overline{\alpha} \leq 1 - \mu_B(e)$ aralıklarındadır. Dahası; $\underline{f_B}: \underline{E} \to 2^U$, $f_B: E \to 2^U$ ve $\overline{f_B}: \overline{E} \to 2^U$ fonksiyonlarına sırasıyla alt yaklaşım, yaklaşım ve üst yaklaşım fonksiyonu, $\underline{\mu_B}: \underline{E} \to [0,1]$, $\mu_B: E \to [0,1]$ ve $\overline{\mu_B}: \overline{E} \to [0,1]$ fonksiyonlarına ise sırasıyla alt üyelik, üyelik ve üst üyelik fonksiyonu denir. Özel olarak $\mu_B(e) = 0$ ise $f_B(e) = \emptyset$ dir.

Tanım 2.4: (Karaaslan, 2016) $S = \{(e, \mu_S(e), \nu_S(e)): e \in E\}$, E üzerinde bir sezgisel bulanık küme ve $\phi_S: E \to SB(U)$ sezgisel bulanık yaklaşım fonksiyonu verilsin. Bu durumda U üzerinde bir sezgisel bulanık parametreli sezgisel bulanık esnek (sbp-sbe-)küme

$$\Omega_S = \left\{\left(\frac{e}{\langle \mu_S(e), \nu_S(e)\rangle}, \phi_S(e)\right) :\ e \in E\right\} \tag{5}$$

şeklinde ifade edilir. (5) kümesinde eğer her $p \in P$ için $\mu_S(e) = 0$ ve $\nu_S(e) = 1$ ise $\phi_S(e) = \emptyset$ dir.

3. Sanal sezgisel bulanık parametreli sezgisel bulanık esnek küme
3.Virtual intuitionistic fuzzy parameterized intuitionistic fuzzy soft set

Bu bölümde belirsizliğin giderilmesine yönelik yeni bir matematiksel model olan sbp-sbe (ssbp-sbe)-kümeler tanıtılmıştır. Ayrıca ssbp-sbe-kümelere yönelik alt küme, tümleyen, birleşim ve kesişim gibi temel küme işlemleri verilerek bazı özellikleri incelenmiştir.

Tanım 3.1: $\underline{S}$ ve $\overline{S}$ sırasıyla $\underline{E}$ ve $\overline{E}$ üzerinde bir sezgisel bulanık küme olmak üzere $\underline{E} = \left\{e^{\underline{\alpha^{1,2}}} : 0 \leq \underline{\alpha^1} \leq \mu_S(e), 0 \leq \underline{\alpha^2} \leq 1 - \nu_S(e)\right\}$ ve $\overline{E} = \left\{e^{\overline{\alpha^{1,2}}} : 0 \leq \overline{\alpha^1} \leq 1 - \mu_S(e), 0 \leq \overline{\alpha^2} \leq \nu_S(e)\right\}$ kümeleri sırasıyla bir alt ve üst sanal parametre kümesi olsun. O halde,

$$\underline{\Omega_S} = \left\{\left(\frac{e}{\langle \mu_{\underline{S}}(e^{\underline{\alpha^1}}), \nu_{\underline{S}}(e^{\underline{\alpha^2}})\rangle}, \underline{\phi_S}(e^{\underline{\alpha^{1,2}}})\right) : e \in E\right\} \tag{6}$$

$$\Omega_S = \left\{\left(\frac{e}{\langle \mu_S(e), \nu_S(e)\rangle}, \phi_S(e)\right) :\ e \in E\right\} \tag{7}$$

$$\overline{\Omega_S} = \left\{\left(\frac{e}{\langle \mu_{\overline{S}}(e^{\overline{\alpha^1}}), \nu_{\overline{S}}(e^{\overline{\alpha^2}})\rangle}, \overline{\phi_S}\left(e^{\overline{\alpha^{1,2}}}\right)\right) : e \in E\right\} \tag{8}$$

için U üzerindeki bir Ψ_X ssbp-sbe-kümesi (6), (7) ve (8)'den yararlanılarak

$$\Psi_S = \underline{\Omega_S} \cup \Omega_S \cup \overline{\Omega_S} \tag{9}$$

(9) şeklinde ifade edilir. Burada; $\underline{\phi_S}: \underline{E} \to SB(U)$, $\phi_S: E \to SB(U)$ ve $\overline{\phi_S}: \overline{E} \to SB(U)$ sezgisel bulanık yaklaşım fonksiyonlarına sırasıyla sanal alt sezgisel bulanık, sezgisel bulanık ve sanal üst sezgisel bulanık

yaklaşım fonksiyonu denir ve $\underline{\phi_S}(e^{\underline{\alpha}})$, $\phi_S(e)$ ve $\overline{\phi_S}(e^{\overline{\alpha}})$ sırasıyla her $e^{\underline{\alpha}} \in \underline{E}$, $e \in E$ ve $e^{\overline{\alpha}} \in \overline{E}$ için Ψ_S ssbp-sbe-kümesinin bir sanal alt sezgisel bulanık, sezgisel bulanık ve sanal üst sezgisel bulanık e-elemanıdır. Ayrıca

$\mu_{\underline{S}}: \underline{E} \to [0,1]$, $\nu_{\underline{S}}: \underline{E} \to [0,1]$ ve $\mu_{\overline{S}}: \overline{E} \to [0,1]$, $\nu_{\overline{S}}: \overline{E} \to [0,1]$ fonksiyonları için sırasıyla $\mu_{\underline{S}}\left(e^{\underline{\alpha^1}}\right) = \mu_S(e) - \underline{\alpha^1}$, $\nu_{\underline{S}}\left(e^{\underline{\alpha^2}}\right) = \nu_S(e) + \underline{\alpha^2}$ ve $\mu_{\overline{S}}\left(e^{\overline{\alpha^1}}\right) = \mu_S(e) + \overline{\alpha^1}$, $\nu_{\overline{S}}\left(e^{\overline{\alpha^2}}\right) = \nu_S(e) - \overline{\alpha^2}$ eşitlikleri geçerlidir.
Burada; $\mu_S(e) = 0$ ve $\nu_S(e) = 1$ ise $\phi_S(e) = \emptyset$ dir. Benzer şekilde $\mu_{\underline{S}}\left(e^{\underline{\alpha^1}}\right) = 0$ ve $\nu_{\underline{S}}\left(e^{\underline{\alpha^2}}\right) = 1$ ise $\underline{\phi_S}\left(e^{\underline{\alpha^{1,2}}}\right) = \emptyset$ ve dahası, $\mu_{\overline{S}}\left(e^{\overline{\alpha^1}}\right) = 0$ ve $\nu_{\overline{S}}\left(e^{\overline{\alpha^2}}\right) = 1$ ise $\overline{\phi_S}(e^{\overline{\alpha}}) = \emptyset$ dir.

Burada tercih edilen gösterimlerden olan $e^{\underline{\alpha^{1,2}}}$ ve $e^{\overline{\alpha^{1,2}}}$ ifadeleri üyelik olma ve üye olmama derecelerinin değişimine bağlı olan sezgisel bulanık yaklaşım fonksiyonlarındaki farklılığı ifade etmektedir.

Çalışma boyunca U üzerindeki tüm ssbp-se-kümelerinin ailesi $SSBP - SBE(U)$ şeklinde ifade edilmiştir.

Özellik 3.1: $\Psi_S \in SSBP - SBE(U)$ olsun. O halde; her $e \in E, e^{\underline{\alpha^{1,2}}} \in \underline{E}, e^{\overline{\alpha^{1,2}}} \in \overline{E}$ ve $u \in U$ için $\mu_{\overline{\phi_S}\left(e^{\overline{\alpha^{1,2}}}\right)}(u) \leq \mu_{\phi_S(e)}(u) \leq \mu_{\underline{\phi_S}\left(e^{\underline{\alpha^{1,2}}}\right)}(u)$ ve $\nu_{\underline{\phi_S}\left(e^{\underline{\alpha^{1,2}}}\right)}(u) \leq \nu_{\phi_S(e)}(u) \leq \nu_{\overline{\phi_S}\left(e^{\overline{\alpha^{1,2}}}\right)}(u)$ eşitsizlikleri gerçeklenir. Burada; $\mu_{\overline{\phi_S}\left(e^{\overline{\alpha^{1,2}}}\right)}$, $\mu_{\phi_S(e)}$, $\mu_{\underline{\phi_S}\left(e^{\underline{\alpha^{1,2}}}\right)}$ sırasıyla $\overline{\phi_S}\left(e^{\overline{\alpha^{1,2}}}\right)$, $\phi_S(e)$, $\underline{\phi_S}\left(e^{\underline{\alpha^{1,2}}}\right)$ sezgisel yaklaşım fonksiyonlarının üyelik fonksiyonlarıdır. Benzer şekilde; $\nu_{\overline{\phi_S}\left(e^{\overline{\alpha^{1,2}}}\right)}$, $\nu_{\phi_S(e)}$, $\nu_{\underline{\phi_S}\left(e^{\underline{\alpha^{1,2}}}\right)}$ sırasıyla $\overline{\phi_S}\left(e^{\overline{\alpha^{1,2}}}\right)$, $\phi_S(e)$, $\underline{\phi_S}\left(e^{\underline{\alpha^{1,2}}}\right)$ sezgisel yaklaşım fonksiyonlarının üye olmama fonksiyonlarıdır.

Kanıt: Tanım 3.1'den açıktır.

Örnek 3.1: Nesnelerin ve parametrelerin kümesi sırasıyla $U = \{u_1, u_2, u_3\}$ evren kümesi ve $E = \{e_1, e_2\}$ şeklinde verilsin. O halde alt ve üst sanal parametre kümeleri sırasıyla $\underline{E} = \left\{e_1^{\underline{\alpha_1^{1,2}}}, e_2^{\underline{\alpha_2^{1,2}}}\right\}$ ve $\overline{E} = \left\{e_1^{\overline{\alpha_1^{1,2}}}, e_2^{\overline{\alpha_2^{1,2}}}\right\}$ şeklinde ifade edilir. $\underline{E}$, E, $\overline{E}$ üzerindeki sezgisel bulanık kümeler ise sırasıyla $\underline{S} = \left\{\frac{e_1}{\langle 0.22,0.47\rangle}, \frac{e_2}{\langle 0.1,0.5\rangle}\right\}$, $S = \left\{\frac{e_1}{\langle 0.3,0.4\rangle}, \frac{e_2}{\langle 0.45,0.4\rangle}\right\}$, $\overline{S} = \left\{\frac{e_1}{\langle 0.6,0.21\rangle}, \frac{e_2}{\langle 0.7,0.2\rangle}\right\}$ olarak verilsin. Ayrıca sanal alt sezgisel bulanık, sezgisel bulanık ve sanal üst sezgisel bulanık yaklaşım fonksiyonları sırasıyla her parametre için

$$\underline{\phi_S}\left(\frac{e_1}{\langle 0.22,0.47\rangle}\right) = \left\{\frac{u_1}{\langle 0.7,0.1\rangle}, \frac{u_2}{\langle 0.82,0.14\rangle}, \frac{u_3}{\langle 0.63,0.1\rangle}\right\},$$
$$\underline{\phi_S}\left(\frac{e_2}{\langle 0.1,0.5\rangle}\right) = \left\{\frac{u_1}{\langle 0.85,0.12\rangle}, \frac{u_2}{\langle 0.71,0.2\rangle}, \frac{u_3}{\langle 0.8,0.14\rangle}\right\},$$
$$\phi_S\left(\frac{e_1}{\langle 0.3,0.4\rangle}\right) = \left\{\frac{u_1}{\langle 0.62,0.15\rangle}, \frac{u_2}{\langle 0.7,0.24\rangle}, \frac{u_3}{\langle 0.5,0.3\rangle}\right\},$$
$$\phi_S\left(\frac{e_2}{\langle 0.45,0.4\rangle}\right) = \left\{\frac{u_1}{\langle 0.5,0.28\rangle}, \frac{u_2}{\langle 0.66,0.31\rangle}, \frac{u_3}{\langle 0.42,0.35\rangle}\right\},$$
$$\overline{\phi_S}\left(\frac{e_1}{\langle 0.6,0.21\rangle}\right) = \left\{\frac{u_1}{\langle 0.4,0.3\rangle}, \frac{u_2}{\langle 0.5,0.47\rangle}, \frac{u_3}{\langle 0.32,0.53\rangle}\right\},$$
$$\overline{\phi_S}\left(\frac{e_2}{\langle 0.7,0.2\rangle}\right) = \left\{\frac{u_1}{\langle 0.3,0.5\rangle}, \frac{u_2}{\langle 0.4,0.5\rangle}, \frac{u_3}{\langle 0.2,0.64\rangle}\right\}$$

şeklinde olsun. Karar verici tarafından ifade edilen bu değerler rastgele değildir. Örneğin; e_1 için $\underline{\alpha_1^{1,2}}$, $0 \leq \underline{\alpha_1^1} = 0.08 \leq 0.3$, $0 \leq \underline{\alpha_1^2} = 0.1 \leq 0.4$ ve $\overline{\alpha_1^{1,2}}$, $0 \leq \overline{\alpha_1^1} = 0.3 \leq 0.6$, $0 \leq \overline{\alpha_1^2} = 0.19 \leq 0.4$ aralığında ifade edilmek zorundadır. Bu durumda Ψ_S sskümesi

$$\Psi_S = \left\{ \begin{array}{c} \left(\frac{e_1}{\langle 0.22,0.47\rangle}, \left\{\frac{u_1}{\langle 0.7,0.1\rangle}, \frac{u_2}{\langle 0.82,0.14\rangle}, \frac{u_3}{\langle 0.63,0.1\rangle}\right\}\right), \\ \left(\frac{e_2}{\langle 0.1,0.5\rangle}, \left\{\frac{u_1}{\langle 0.85,0.12\rangle}, \frac{u_2}{\langle 0.71,0.2\rangle}, \frac{u_3}{\langle 0.8,0.14\rangle}\right\}\right), \\ \left(\frac{e_1}{\langle 0.3,0.4\rangle}, \left\{\frac{u_1}{\langle 0.62,0.15\rangle}, \frac{u_2}{\langle 0.7,0.24\rangle}, \frac{u_3}{\langle 0.5,0.3\rangle}\right\}\right), \\ \left(\frac{e_2}{\langle 0.45,0.4\rangle}, \left\{\frac{u_1}{\langle 0.5,0.28\rangle}, \frac{u_2}{\langle 0.66,0.31\rangle}, \frac{u_3}{\langle 0.42,0.35\rangle}\right\}\right), \\ \left(\frac{e_1}{\langle 0.6,0.21\rangle}, \left\{\frac{u_1}{\langle 0.4,0.3\rangle}, \frac{u_2}{\langle 0.5,0.47\rangle}, \frac{u_3}{\langle 0.32,0.53\rangle}\right\}\right), \\ \left(\frac{e_2}{\langle 0.7,0.2\rangle}, \left\{\frac{u_1}{\langle 0.3,0.5\rangle}, \frac{u_2}{\langle 0.4,0.5\rangle}, \frac{u_3}{\langle 0.2,0.64\rangle}\right\}\right) \end{array} \right\}.$$

şeklinde ifade edilir. Dikkat edilmelidir ki; Ψ_S ssbp-sbe-kümesi

$$\underline{\Omega_S} = \left\{ \begin{array}{c} \left(\frac{e_1}{\langle 0.22,0.47\rangle}, \left\{\frac{u_1}{\langle 0.7,0.1\rangle}, \frac{u_2}{\langle 0.82,0.14\rangle}, \frac{u_3}{\langle 0.63,0.1\rangle}\right\}\right), \\ \left(\frac{e_2}{\langle 0.1,0.5\rangle}, \left\{\frac{u_1}{\langle 0.85,0.12\rangle}, \frac{u_2}{\langle 0.71,0.2\rangle}, \frac{u_3}{\langle 0.8,0.14\rangle}\right\}\right) \end{array} \right\},$$

$$\Omega_S = \left\{ \begin{array}{c} \left(\frac{e_1}{\langle 0.3,0.4\rangle}, \left\{\frac{u_1}{\langle 0.62,0.15\rangle}, \frac{u_2}{\langle 0.7,0.24\rangle}, \frac{u_3}{\langle 0.5,0.3\rangle}\right\}\right), \\ \left(\frac{e_2}{\langle 0.45,0.4\rangle}, \left\{\frac{u_1}{\langle 0.5,0.28\rangle}, \frac{u_2}{\langle 0.66,0.31\rangle}, \frac{u_3}{\langle 0.42,0.35\rangle}\right\}\right) \end{array} \right\},$$

$$\overline{\Omega_S} = \left\{ \begin{array}{c} \left(\frac{e_1}{\langle 0.6,0.21\rangle}, \left\{\frac{u_1}{\langle 0.4,0.3\rangle}, \frac{u_2}{\langle 0.5,0.47\rangle}, \frac{u_3}{\langle 0.32,0.53\rangle}\right\}\right), \\ \left(\frac{e_2}{\langle 0.7,0.2\rangle}, \left\{\frac{u_1}{\langle 0.3,0.5\rangle}, \frac{u_2}{\langle 0.4,0.5\rangle}, \frac{u_3}{\langle 0.2,0.64\rangle}\right\}\right) \end{array} \right\}.$$

olmak üzere üç tane sbp-sbe-kümenin birleşimiyle inşa edilmiştir.

Tanım 3.2: $\Psi_S \in SSBP - SBE(U)$ olsun. O halde; her $e^{\underline{\alpha^1}}, e^{\underline{\alpha^2}}, e^{\underline{\alpha^{1,2}}} \in \underline{E}$ ve $e^{\overline{\alpha^1}}, e^{\overline{\alpha^2}}, e^{\overline{\alpha^{1,2}}} \in \overline{E}$ için

i. $\underline{\phi_S}\left(e^{\underline{\alpha^{1,2}}}\right) = S_\emptyset$ ve $\mu_{\underline{S}}\left(e^{\underline{\alpha^1}}\right) = 0$, $\nu_{\underline{S}}\left(e^{\underline{\alpha^2}}\right) = 1$ ise Ψ_S'e, boş ssbp-sbe-küme denir ve $\Psi_\emptyset$ ile gösterilir.

ii. $\overline{\phi_S}\left(e^{\overline{\alpha^{1,2}}}\right) = S_U$ ve $\mu_{\overline{S}}\left(e^{\overline{\alpha^1}}\right) = 1$, $\nu_{\overline{S}}\left(e^{\overline{\alpha^2}}\right) = 0$ ise Ψ_S'e, evrensel ssbp-sbe-küme denir ve Ψ_E ile gösterilir.

Örnek 3.2: Örnek 3.1'i düşünelim. O halde,

$$\Upsilon_\emptyset = \left\{\left(\frac{e_1}{\langle 0,1\rangle}, \left\{\frac{u_1}{\langle 0,1\rangle}, \frac{u_2}{\langle 0,1\rangle}, \frac{u_3}{\langle 0,1\rangle}\right\}\right), \left(\frac{e_2}{\langle 0,1\rangle}, \left\{\frac{u_1}{\langle 0,1\rangle}, \frac{u_2}{\langle 0,1\rangle}, \frac{u_3}{\langle 0,1\rangle}\right\}\right)\right\},$$
$$\Upsilon_E = \left\{\left(\frac{e_1}{\langle 1,0\rangle}, \left\{\frac{u_1}{\langle 1,0\rangle}, \frac{u_2}{\langle 1,0\rangle}, \frac{u_3}{\langle 1,0\rangle}\right\}\right), \left(\frac{e_2}{\langle 1,0\rangle}, \left\{\frac{u_1}{\langle 1,0\rangle}, \frac{u_2}{\langle 1,0\rangle}, \frac{u_3}{\langle 1,0\rangle}\right\}\right)\right\}$$

Tanım 3.3: $\Psi_S, \Psi_T \in SSBP - SBE(U)$ ve "$\underline{S}$, $\underline{T}$; $\underline{E}$ üzerinde", "S, T; E üzerinde", "$\overline{S}$, $\overline{T}$; $\overline{E}$ üzerinde" bir sezgisel bulanık küme olsun. O halde,

i. $\underline{S}$, $\underline{T}$'nin sezgisel bulanık alt kümesi ve $\underline{\phi_S}$, $\underline{\phi_T}$'nin bir sezgisel bulanık alt kümesi

ii. S, T'nin sezgisel bulanık alt kümesi ve ϕ_S, ϕ_T'nin bir sezgisel bulanık alt kümesi

iii. $\overline{S}$, $\overline{T}$'nin sezgisel bulanık alt kümesi ve $\overline{\phi_S}$, $\overline{\phi_T}$'nin bir sezgisel bulanık alt kümesi olmak üzere Ψ_S, Ψ_T'nin ssbp-sbe-alt kümedir ve $\Psi_S \mathrel{\widehat{\sqsubseteq}} \Psi_T$ şeklinde gösterilir. Eğer $\Psi_S \mathrel{\widehat{\sqsubseteq}} \Psi_T$ ve $\Psi_T \mathrel{\widehat{\sqsubseteq}} \Psi_S$ ise Ψ_S ve Ψ_T ssbp-sbe-eşittir denir ve $\Psi_S = \Psi_T$ şeklinde gösterilir.

Özellik 3.2: $\Psi_S, \Psi_T, \Psi_R \in SSBP - SBE(U)$ olsun. O halde,

i. $\Psi_\emptyset \mathrel{\widehat{\sqsubseteq}} \Psi_S$

ii. $\Psi_S \mathrel{\widehat{\sqsubseteq}} \Psi_S$

iii. $\Psi_S \mathrel{\widehat{\sqsubseteq}} \Psi_T$ ve $\Psi_T \mathrel{\widehat{\sqsubseteq}} \Psi_R$ ise $\Psi_S \mathrel{\widehat{\sqsubseteq}} \Psi_R$

Tanım 3.4: $\Psi_S \in SSBP - SBE(U)$ olsun. Ψ_S'in tümleyeni Ψ_S^c aşağıdaki koşulları sağlar;

i. $\underline{S}, \underline{S^c}$; E üzerinde bir sezgisel bulanık küme olmak üzere $\underline{S^c}$, $\underline{S}$'nin sezgisel bulanık tümleyeni ve $\underline{\phi_{S^c}}$, $\underline{\phi_S}$'nin bir sezgisel bulanık tümleyenidir.

ii. S, S^c; E üzerinde bir sezgisel bulanık küme olmak üzere S^c, S'nin sezgisel bulanık tümleyeni ve ϕ_{S^c}, ϕ_S'nin bir sezgisel bulanık tümleyenidir.

iii. $\overline{S}, \overline{S^c}$; E üzerinde bir sezgisel bulanık küme olmak üzere $\overline{S^c}$, $\overline{S}$'nin sezgisel bulanık tümleyeni ve $\overline{\phi_{S^c}}$, $\overline{\phi_S}$'nin bir sezgisel bulanık tümleyenidir.

Örnek 3.2: Örnek 3.1'i tekrar ele alalım. O halde,

$$\Psi_S^c = \left\{ \begin{array}{c} \left(\frac{e_1}{\langle 0.47,0.22\rangle}, \left\{\frac{u_1}{\langle 0.1,0.7\rangle}, \frac{u_2}{\langle 0.14,0.82\rangle}, \frac{u_3}{\langle 0.1,0.63\rangle}\right\}\right), \\ \left(\frac{e_2}{\langle 0.5,0.1\rangle}, \left\{\frac{u_1}{\langle 0.12,0.85\rangle}, \frac{u_2}{\langle 0.2,0.71\rangle}, \frac{u_3}{\langle 0.14,0.8\rangle}\right\}\right), \\ \left(\frac{e_1}{\langle 0.4,0.3\rangle}, \left\{\frac{u_1}{\langle 0.15,0.62\rangle}, \frac{u_2}{\langle 0.24,0.7\rangle}, \frac{u_3}{\langle 0.3,0.5\rangle}\right\}\right), \\ \left(\frac{e_2}{\langle 0.4,0.45\rangle}, \left\{\frac{u_1}{\langle 0.28,0.5\rangle}, \frac{u_2}{\langle 0.31,0.66\rangle}, \frac{u_3}{\langle 0.35,0.42\rangle}\right\}\right), \\ \left(\frac{e_1}{\langle 0.21,0.6\rangle}, \left\{\frac{u_1}{\langle 0.3,0.4\rangle}, \frac{u_2}{\langle 0.47,0.5\rangle}, \frac{u_3}{\langle 0.53,0.32\rangle}\right\}\right), \\ \left(\frac{e_2}{\langle 0.2,0.7\rangle}, \left\{\frac{u_1}{\langle 0.5,0.3\rangle}, \frac{u_2}{\langle 0.5,0.4\rangle}, \frac{u_3}{\langle 0.64,0.2\rangle}\right\}\right) \end{array} \right\}.$$

Tanım 3.5: $\Psi_S, \Psi_T \in SSBP - SBE(U)$ olsun. O halde Ψ_S, Ψ_T ssbp-sbe-kümelerinin birleşimi

i. her $e^{\underline{\alpha^1}}, e^{\underline{\beta^1}}, e^{\underline{\gamma^1}}, e^{\underline{\alpha^2}}, e^{\underline{\beta^2}}, e^{\underline{\gamma^2}}, e^{\underline{\alpha^{1,2}}}, e^{\underline{\beta^{1,2}}}, e^{\underline{\gamma^{1,2}}} \in \underline{E}$ ve $e \in E$ için $\mu_{\underline{SUT}}\left(e^{\underline{\gamma^1}}\right) = \max\left\{\mu_{\underline{S}}\left(e^{\underline{\alpha^1}}\right), \mu_{\underline{T}}\left(e^{\underline{\beta^1}}\right)\right\}$, $\nu_{\underline{SUT}}\left(e^{\underline{\gamma^2}}\right) = \min\left\{\nu_{\underline{S}}\left(e^{\underline{\alpha^2}}\right), \nu_{\underline{T}}\left(e^{\underline{\beta^2}}\right)\right\}$ ve $\underline{\phi_{S\cup T}}\left(e^{\underline{\gamma^{1,2}}}\right) = \underline{\phi_S}\left(e^{\underline{\alpha^{1,2}}}\right) \breve{\cup}\, \underline{\phi_T}\left(e^{\underline{\beta^{1,2}}}\right)$ sezgisel bulanık yaklaşım fonksiyonu,

ii. her $e \in E$ için $\mu_{SUT}(e) = \max\{\mu_S(e), \mu_T(e)\}$, $\nu_{SUT}(e) = \min\{\nu_S(e), \nu_T(e)\}$ ve $\phi_{S\cup T}(e) = \phi_S(e) \breve{\cup}\, \phi_T(e)$ sezgisel bulanık yaklaşım fonksiyonu,

iii. her e ∈ E ve $e^{\overline{\alpha^1}}, e^{\overline{\beta^1}}, e^{\overline{\gamma^1}}, e^{\overline{\alpha^2}}, e^{\overline{\beta^2}}, e^{\overline{\gamma^2}}, e^{\overline{\alpha^{1,2}}}, e^{\overline{\beta^{1,2}}}, e^{\overline{\gamma^{1,2}}}, \in \overline{E}$ için $\mu_{\overline{SUT}}\left(e^{\overline{\gamma^1}}\right) = \max\left\{\mu_{\overline{S}}\left(e^{\overline{\alpha^1}}\right), \mu_{\overline{T}}\left(e^{\overline{\beta^1}}\right)\right\}$, $\nu_{\overline{SUT}}\left(e^{\overline{\gamma^2}}\right) = \min\left\{\nu_{\overline{S}}\left(e^{\overline{\alpha^2}}\right), \nu_{\overline{T}}\left(e^{\overline{\beta^2}}\right)\right\}$ ve $\overline{\phi_{S\cup T}}\left(e^{\overline{\gamma^{1,2}}}\right) = \overline{\phi_S}\left(e^{\overline{\alpha^{1,2}}}\right) \breve{\cup}\, \overline{\phi_T}\left(e^{\overline{\beta^{1,2}}}\right)$ sezgisel bulanık yaklaşım fonksiyonu koşullarının gerçeklemesi ile inşa edilmiş olur ve $\Psi_S \mathbin{\hat{\cup}} \Psi_T$ şeklinde gösterilir. Benzer şekilde Ψ_S, Ψ_T ssbp-sbe-kümelerinin kesişimi ise

i. her $\underline{e^{\alpha^1}}, \underline{e^{\beta^1}}, \underline{e^{\gamma^1}}, \underline{e^{\alpha^2}}, \underline{e^{\beta^2}}, \underline{e^{\gamma^2}}, \underline{e^{\alpha^{1,2}}}, \underline{e^{\beta^{1,2}}}, \underline{e^{\gamma^{1,2}}} \in \underline{E}$ ve $e \in E$ için $\mu_{\underline{S \cap T}}\left(\underline{e^{\gamma^1}}\right) = \min\left\{\mu_{\underline{S}}\left(\underline{e^{\alpha^1}}\right), \mu_{\underline{T}}\left(\underline{e^{\beta^1}}\right)\right\}$, $\nu_{\underline{S \cap T}}\left(\underline{e^{\gamma^2}}\right) = \max\left\{\nu_{\underline{S}}\left(\underline{e^{\alpha^2}}\right), \nu_{\underline{T}}\left(\underline{e^{\beta^2}}\right)\right\}$ ve $\underline{\phi_{S \cap T}}\left(\underline{e^{\gamma^{1,2}}}\right) = \underline{\phi_S}\left(\underline{e^{\alpha^{1,2}}}\right) \mathbin{\breve{\cap}} \underline{\phi_T}\left(\underline{e^{\beta^{1,2}}}\right)$ sezgisel bulanık yaklaşım fonksiyonu,

ii. her $e \in E$ için $\mu_{S \cap T}(e) = \min\{\mu_S(e), \mu_T(e)\}$, $\nu_{S \cap T}(e) = \max\{\nu_S(e), \nu_T(e)\}$ ve $\phi_{S \cap T}(e) = \phi_S(e) \mathbin{\breve{\cap}} \phi_T(e)$ sezgisel bulanık yaklaşım fonksiyonu,

iii. her $e \in E$ ve $e^{\overline{\alpha^1}}, e^{\overline{\beta^1}}, e^{\overline{\gamma^1}}, e^{\overline{\alpha^2}}, e^{\overline{\beta^2}}, e^{\overline{\gamma^2}}, e^{\overline{\alpha^{1,2}}}, e^{\overline{\beta^{1,2}}}, e^{\overline{\gamma^{1,2}}}, \in \overline{E}$ için $\mu_{\overline{S \cap T}}\left(e^{\overline{\gamma^1}}\right) = \min\left\{\mu_{\overline{S}}\left(e^{\overline{\alpha^1}}\right), \mu_{\overline{T}}\left(e^{\overline{\beta^1}}\right)\right\}$, $\nu_{\overline{S \cap T}}\left(e^{\overline{\gamma^2}}\right) = \max\left\{\nu_{\overline{S}}\left(e^{\overline{\alpha^2}}\right), \nu_{\overline{T}}\left(e^{\overline{\beta^2}}\right)\right\}$ ve $\overline{\phi_{S \cap T}}\left(e^{\overline{\gamma^{1,2}}}\right) = \overline{\phi_S}\left(e^{\overline{\alpha^{1,2}}}\right) \mathbin{\breve{\cap}} \overline{\phi_T}\left(e^{\overline{\beta^{1,2}}}\right)$ sezgisel bulanık yaklaşım fonksiyonu

koşullarının gerçeklemesi ile inşa edilir ve $\Psi_S \mathbin{\hat{\cap}} \Psi_T$ şeklinde gösterilir.

Özellik 3.3: $\Psi_S, \Psi_T, \Psi_R \in SSBP - SBE(U)$ olsun. O halde,

i. $\Psi_S \mathbin{\hat{\cup}} \Psi_S = \Psi_S$ ve $\Psi_S \mathbin{\hat{\cap}} \Psi_S = \Psi_S$

ii. $\Psi_\emptyset \mathbin{\hat{\cup}} \Psi_S = \Psi_S$ ve $\Psi_\emptyset \mathbin{\hat{\cap}} \Psi_S = \Psi_\emptyset$

iii. $\Psi_S \mathbin{\hat{\cup}} \Psi_\emptyset = \Psi_S$ ve $\Psi_S \mathbin{\hat{\cap}} \Psi_\emptyset = \Psi_\emptyset$

iv. $\Psi_S \mathbin{\hat{\cup}} \Psi_E = \Psi_S$ ve $\Psi_S \mathbin{\hat{\cap}} \Psi_E = \Psi_S$

v. $\Psi_S \mathbin{\hat{\cup}} \Psi_T = \Psi_T \mathbin{\hat{\cup}} \Psi_S$ ve $\Psi_S \mathbin{\hat{\cap}} \Psi_T = \Psi_T \mathbin{\hat{\cap}} \Psi_S$

vi. $(\Psi_S \mathbin{\hat{\cup}} \Psi_T) \mathbin{\hat{\cup}} \Psi_R = \Psi_S \mathbin{\hat{\cup}} (\Psi_T \mathbin{\hat{\cup}} \Psi_R)$ ve $(\Psi_S \mathbin{\hat{\cap}} \Psi_T) \mathbin{\hat{\cap}} \Psi_R = \Psi_S \mathbin{\hat{\cap}} (\Psi_T \mathbin{\hat{\cap}} \Psi_R)$

Kanıt: Tanım 3.5'ten açıktır.

Özellik 3.4: $\Psi_S, \Psi_T \in SSBP - SBE(U)$ olmak üzere De Morgan kuralları gerçeklenir,

i. $(\Psi_S \mathbin{\hat{\cup}} \Psi_T)^c = \Psi_S^c \mathbin{\hat{\cap}} \Psi_T^c$

ii. $(\Psi_S \mathbin{\hat{\cap}} \Psi_T)^c = \Psi_S^c \mathbin{\hat{\cup}} \Psi_T^c$

Kanıt: Tanım 3.4 ve 3.5'ten faydalanılarak kolayca gösterilebilir.

Özellik 3.5: $\Psi_S, \Psi_T, \Psi_R \in SSBP - SBE(U)$ olsun. O halde,

i. $\Psi_S \mathbin{\hat{\cup}} (\Psi_T \mathbin{\hat{\cap}} \Psi_R) = (\Psi_S \mathbin{\hat{\cup}} \Psi_T) \mathbin{\hat{\cap}} (\Psi_S \mathbin{\hat{\cup}} \Psi_R)$

ii. $\Psi_S \mathbin{\hat{\cap}} (\Psi_T \mathbin{\hat{\cup}} \Psi_R) = (\Psi_S \mathbin{\hat{\cap}} \Psi_T) \mathbin{\hat{\cup}} (\Psi_S \mathbin{\hat{\cap}} \Psi_R)$

Kanıt: Özellik 3.3'ten açıktır.

4. Bir karar verme yaklaşımı
4. A decision making approach

Bu çalışmada tanıtılan ssbp-sbe-kümeler karşılaşılan belirsizlik problemlerine yönelik karar vericilerden alınan üyelik veri kümesinin daha iyi bir şekilde işlenebilmesini amaçlar. Bu amacı gerçekleştirebilmek için; sbp-sbe-kümelerin bir genellemesi olan bu yeni matematiksel modelde sezgisel bulanık değerlerin alt ve üst değerlerine yönelik sırasıyla alt ve üst bulanık yaklaşım kavramları verilmiştir. Bu bölümde ssbp-sbe-kümelerin karşılaşılan herhangi bir belirsizlik problemine uygulanabilmesi için bir karar verme algoritması önerilmiştir. Ayrıca algoritmanın bir uygulaması örneklendirilerek elde edilen sonuçlar irdelenmiştir.

Algoritma:

Adım 1. Mevcut belirsizlik problemini ifade eden nesne kümesi U, parametre kümeleri $\underline{E}, E, \overline{E}$ ve bu parametre kümeleri üzerindeki sezgisel bulanık kümeler sırasıyla $\underline{S}, S, \overline{S}$ olacak şekilde ifade edin.
Adım 2. Karar verici tarafından ifade edilen sezgisel bulanık değerlerden faydalanarak Ψ_S ssbp-sbe-kümesini girin.
Adım 3. Her $u \in U$ için nesnelerin toplam puanları

$$\Delta_{\Psi_S}(u) = \Sigma^{\mu}_{\Psi_S}(u) - \Sigma^{\nu}_{\Psi_S}(u) \tag{10}$$

şeklinde ifade edilen formülasyon yardımıyla hesapla. Burada

$$\Sigma^{\mu}_{\Psi_S}(u) = \frac{1}{3|E|}\begin{pmatrix} \sum_{e^{\underline{\alpha^{1,2}}} \in \underline{E}} \left(\mu_{\underline{S}}\left(e^{\underline{\alpha^1}}\right) - \nu_{\underline{S}}\left(e^{\underline{\alpha^2}}\right)\right) \mu_{\underline{\phi_S}\left(e^{\underline{\alpha^{1,2}}}\right)}(u) + \\ \sum_{e \in E}\left(\mu_S(e) - \nu_S(e)\right) \mu_{\phi_S(e)}(u) + \\ \sum_{e^{\overline{\alpha}} \in \overline{E}} \left(\mu_{\overline{S}}\left(e^{\overline{\alpha^1}}\right) - \nu_{\overline{S}}\left(e^{\overline{\alpha^2}}\right)\right) \mu_{\overline{\phi_S}\left(e^{\overline{\alpha^{1,2}}}\right)}(u) \end{pmatrix} \tag{11}$$

$$\Sigma^{\nu}_{\Psi_S}(u) = \frac{1}{3|E|}\begin{pmatrix} \sum_{e^{\underline{\alpha^{1,2}}} \in \underline{E}} \left(\mu_{\underline{S}}\left(e^{\underline{\alpha^1}}\right) - \nu_{\underline{S}}\left(e^{\underline{\alpha^2}}\right)\right) \nu_{\underline{\phi_S}\left(e^{\underline{\alpha^{1,2}}}\right)}(u) + \\ \sum_{e \in E}\left(\mu_S(e) - \nu_S(e)\right) \nu_{\phi_S(e)}(u) + \\ \sum_{e^{\overline{\alpha}} \in \overline{E}} \left(\mu_{\overline{S}}\left(e^{\overline{\alpha^1}}\right) - \nu_{\overline{S}}\left(e^{\overline{\alpha^2}}\right)\right) \nu_{\overline{\phi_S}\left(e^{\overline{\alpha^{1,2}}}\right)}(u) \end{pmatrix} \tag{12}$$

şeklinde ifade edilir. Formülasyonlarda kullanılan $|E|$, E'nin kardinalitesini ifade eder. Ayrıca; $\mu_{\overline{\phi_S}\left(e^{\overline{\alpha^{1,2}}}\right)}$, $\mu_{\phi_S(e)}$, $\mu_{\underline{\phi_S}\left(e^{\underline{\alpha^{1,2}}}\right)}$ sırasıyla $\overline{\phi_S}\left(e^{\overline{\alpha^{1,2}}}\right)$, $\phi_S(e)$, $\underline{\phi_S}\left(e^{\underline{\alpha^{1,2}}}\right)$ sezgisel yaklaşım fonksiyonlarının üyelik fonksiyonlarıdır. Benzer şekilde; $\nu_{\overline{\phi_S}\left(e^{\overline{\alpha^{1,2}}}\right)}$, $\nu_{\phi_S(e)}$, $\nu_{\underline{\phi_S}\left(e^{\underline{\alpha^{1,2}}}\right)}$ sırasıyla $\overline{\phi_S}\left(e^{\overline{\alpha^{1,2}}}\right)$, $\phi_S(e)$, $\underline{\phi_S}\left(e^{\underline{\alpha^{1,2}}}\right)$ sezgisel yaklaşım fonksiyonlarının üye olmama fonksiyonlarıdır.

Adım 4. $\Delta_{\Psi_S}(u_l) = \max\left\{\Delta_{\Psi_S}(u_k) : u_k \in U\right\}$ değerini bul.
Adım 5. Mevcut belirsizlik probleminde ifade edilen parametreleri sağlayan en iyi nesne u_l'dir.

Şimdi, ssbp-sbe-kümeler için inşa edilen bu karar verme algoritmasının bir belirsizlik problemi üzerinde nasıl uygulanması gerektiğini örnekleyelim;

Problem: Elektrikli bir araç almak isteyen bir kişinin kendisine en yakın galeriye gittiğini varsayalım. Galerideki mevcut elektrikli araçların kümesi $U = \{u_1, u_2, u_3, u_4, u_5\}$ ve bu kişinin daha önceden kendisi için belirlemiş olduğu parametrelerin kümesi $E = \{e_1 : hızlı, e_2 : konforlu, e_3 : ekonomik\}$ şeklinde verilmiş olsun. Galerici; bu kişinin ifade ettiği her parametrenin kendisi için ne kadar önemli ve önemsiz olduğunu ifade etmesini istemiştir. Böylece mevcut araçlar arasından en uygun elektrikli aracın tespiti galerici ya da araç almak isteyen kişi için tespit edilebilir. Ancak bu kişi sezgisel bulanık değerleri ifade edebilmekte oldukça zorlanmaktadır. Bu zorluğun sebebi [0,1] aralığında çok sayıda rasyonel sayı olması ve bu sayılardan hangisinin kendisi için doğru değer olabileceğini tespit edememesidir. Bu oldukça zor bir iştir. Bunun için bu kişiden her bir değer için bir alt ve üst değer de belirtmesi istenmiştir. Bu durumda bu kişi tarafından ifade edilen sezgisel bulanık değerler $\underline{E} = \left\{\frac{e_1}{\langle 0.4, 0.52\rangle}, \frac{e_2}{\langle 0.4, 0.55\rangle}, \frac{e_3}{\langle 0.52, 0.43\rangle}\right\}$, $E = \left\{\frac{e_1}{\langle 0.42, 0.5\rangle}, \frac{e_2}{\langle 0.6, 0.2\rangle}, \frac{e_3}{\langle 0.61, 0.3\rangle}\right\}$ ve $\overline{E} = \left\{\frac{e_1}{\langle 0.74, 0.2\rangle}, \frac{e_2}{\langle 0.7, 0.1\rangle}, \frac{e_3}{\langle 0.7, 0.25\rangle}\right\}$ olsun. Galerici tarafından ifade edilen parametreler için mevcut elektrikli araçların değerlendirilmesi

$$\Psi_S=\left\{\begin{array}{c}\left(\frac{e_1}{\langle 0.4,0.52\rangle},\left\{\frac{u_1}{\langle 0.8,0.1\rangle},\frac{u_2}{\langle 0.6,0.32\rangle},\frac{u_3}{\langle 0.72,0.2\rangle},\frac{u_4}{\langle 0.6,0.32\rangle},\frac{u_5}{\langle 0.7,0.04\rangle}\right\}\right),\\ \left(\frac{e_2}{\langle 0.4,0.55\rangle},\left\{\frac{u_1}{\langle 0.5,0.3\rangle},\frac{u_2}{\langle 0.62,0.25\rangle},\frac{u_3}{\langle 0.5,0.27\rangle},\frac{u_4}{\langle 0.8,0.15\rangle},\frac{u_5}{\langle 0.82,0.2\rangle}\right\}\right),\\ \left(\frac{e_3}{\langle 0.52,0.43\rangle},\left\{\frac{u_1}{\langle 0.8,0.1\rangle},\frac{u_2}{\langle 0.73,0.2\rangle},\frac{u_3}{\langle 0.64,0.32\rangle},\frac{u_4}{\langle 0.76,0.22\rangle},\frac{u_5}{\langle 0.9,0.06\rangle}\right\}\right),\\ \left(\frac{e_1}{\langle 0.42,0.5\rangle},\left\{\frac{u_1}{\langle 0.7,0.2\rangle},\frac{u_2}{\langle 0.5,0.4\rangle},\frac{u_3}{\langle 0.6,0.24\rangle},\frac{u_4}{\langle 0.45,0.35\rangle},\frac{u_5}{\langle 0.65,0.1\rangle}\right\}\right),\\ \left(\frac{e_2}{\langle 0.6,0.2\rangle},\left\{\frac{u_1}{\langle 0.4,0.37\rangle},\frac{u_2}{\langle 0.6,0.3\rangle},\frac{u_3}{\langle 0.48,0.3\rangle},\frac{u_4}{\langle 0.62,0.32\rangle},\frac{u_5}{\langle 0.75,0.21\rangle}\right\}\right),\\ \left(\frac{e_3}{\langle 0.61,0.3\rangle},\left\{\frac{u_1}{\langle 0.55,0.4\rangle},\frac{u_2}{\langle 0.5,0.3\rangle},\frac{u_3}{\langle 0.62,0.35\rangle},\frac{u_4}{\langle 0.64,0.44\rangle},\frac{u_5}{\langle 0.36,0.58\rangle}\right\}\right),\\ \left(\frac{e_1}{\langle 0.74,0.2\rangle},\left\{\frac{u_1}{\langle 0.64,0.3\rangle},\frac{u_2}{\langle 0.47,0.41\rangle},\frac{u_3}{\langle 0.55,0.3\rangle},\frac{u_4}{\langle 0.42,0.38\rangle},\frac{u_5}{\langle 0.55,0.2\rangle}\right\}\right),\\ \left(\frac{e_2}{\langle 0.7,0.1\rangle},\left\{\frac{u_1}{\langle 0.39,0.4\rangle},\frac{u_2}{\langle 0.57,0.31\rangle},\frac{u_3}{\langle 0.4,0.32\rangle},\frac{u_4}{\langle 0.6,0.33\rangle},\frac{u_5}{\langle 0.7,0.25\rangle}\right\}\right),\\ \left(\frac{e_3}{\langle 0.7,0.25\rangle},\left\{\frac{u_1}{\langle 0.52,0.42\rangle},\frac{u_2}{\langle 0.49,0.31\rangle},\frac{u_3}{\langle 0.6,0.37\rangle},\frac{u_4}{\langle 0.61,0.45\rangle},\frac{u_5}{\langle 0.2,0.6\rangle}\right\}\right)\end{array}\right\}$$

ssbp-sbe-kümesi yardımıyla ifade edilsin.
Şimdi Ψ_S ssbp-sbe-kümesinden faydalanılarak her bir nesne için toplam puanları hesaplayalım. Örneğin; ilk elektrikli araç olan u_1 için,

$$\Sigma^{\mu}_{\Psi_S}(u_1)=\frac{1}{9}\begin{pmatrix}(0.4-0.52)0.8+(0.4-0.55)0.5+(0.52-0.43)0.8+\\(0.42-0.5)0.7+(0.6-0.2)0.4+(0.61-0.3)0.55+\\(0.74-0.2)0.64+(0.7-0.1)0.39+(0.7-0.25)0.52\end{pmatrix}=0.10214$$

ve

$$\Sigma^{\nu}_{\Psi_S}(u_1)=\frac{1}{9}\begin{pmatrix}(0.4-0.52)0.1+(0.4-0.55)0.3+(0.52-0.43)0.1+\\(0.42-0.5)0.2+(0.6-0.2)0.37+(0.61-0.3)0.4+\\(0.74-0.2)0.3+(0.7-0.1)0.4+(0.7-0.25)0.42\end{pmatrix}=0.08313$$

olmak üzere $\Delta_{\Psi_S}(u)=\Sigma^{\mu}_{\Psi_S}(u)-\Sigma^{\nu}_{\Psi_S}(u)=0.10214-0.08313=0.01901$ olarak elde edilir. Benzer şekilde,

$$\Delta_{\Psi_S}(u_2)=0.0418,\quad \Delta_{\Psi_S}(u_3)=0.0346,$$
$$\Delta_{\Psi_S}(u_4)=0.0357,\quad \Delta_{\Psi_S}(u_5)=0.0352.$$

Buradan, $\max\{\Delta_{\Psi_S}(u_k): u_k\in U\}=\Delta_{\Psi_S}(u_2)=0.0418$ olduğundan u_2 elektrikli aracı bu kişi için en uygun elektrikli araç olarak tespit edilmiştir.

5. Bir karşılaştırma
5. A comparison

Belirsizliğe yönelik karar verme problemlerini değerlendirmek için faydalanılan ssbp-sbe-kümeler, sbp-sbe-kümelerin bir genellemesi olacak şekilde inşa edildiğinden sbp-sbe-kümelerden daha ideale yakın sonuçları elde eder. En kötü ihtimalle aynı sonuçlar elde edilir. Çünkü bu kümelerin inşasında ana sbp-sbe-kümenin dışında alt ve üst sezgisel bulanık değerlerin ifade edilebilmesine yönelik iki tane sbp-sbe-kümeden de faydalanılmıştır. Bu durumu yine bir örnekle şöyle ifade edilebilir:
Bir önceki bölümde verilen belirsizlik problemi, önerilen algoritma yardımıyla ana sbp-sbe-kümeler için çözümlenmiş olsaydı her bir elektrikli araç için elde edilen toplam puanlar şöyle hesaplanmıştır:
u_1 için,

$$\Sigma^{\mu}_{\Psi_S}(u_1)=\frac{1}{3}\big((0.42-0.5)0.7+(0.6-0.2)0.4+(0.61-0.3)0.55\big)=0.0915$$

ve

$$\Sigma^{\nu}_{\Psi_S}(u_1)=\frac{1}{3}\big((0.42-0.5)0.2+(0.6-0.2)0.37+(0.61-0.3)0.4\big)=0.0853$$

olmak üzere $\Delta_{\Psi_S}(u) = \Sigma^{\mu}_{\Psi_S}(u) - \Sigma^{\nu}_{\Psi_S}(u) = 0.0915 - 0.0853 = 0.0062$ olarak elde edilir. Benzer şekilde,

$$\Delta_{\Psi_S}(u_2) = 0.058, \quad \Delta_{\Psi_S}(u_3) = 0.0423,$$
$$\Delta_{\Psi_S}(u_4) = 0.058, \quad \Delta_{\Psi_S}(u_5) = 0.0346.$$

Buradan, $\max\{\Delta_{\Psi_S}(u_k): u_k \in U\} = \Delta_{\Psi_S}(u_2) = \Delta_{\Psi_S}(u_4) = 0.058$ olduğundan en iyi elektrikli araç seçilemez. Bu nedenle mevcut belirsizlik probleminin çözümlenmesine yönelik karar vericilerin sezgisel bulanık değerleri ifade edebilmesine yardımcı olan ssbp-sbe-kümelerin tercih edilmesi önerilir.

6. Sonuç
6. Conclusion

Bu çalışma, sezgisel bulanık parametreli sezgisel bulanık esnek kümelerde karar vericilerin sezgisel bulanık değerleri doğru bir şekilde ifade edebilmesini amaçlar. Buna yönelik sanal alt ve üst sezgisel bulanık yaklaşımlar tanıtılarak sezgisel bulanık parametreli sezgisel bulanık esnek kümelerin bir genellemesi olan sanal sezgisel bulanık parametreli sezgisel bulanık esnek küme kavramı tanımlanmıştır. Ayrıca bu hibrit küme tipi için alt küme, tümleyen, birleşim, kesişim gibi temel küme işlemleri verilmiştir. Dahası, sanal sezgisel bulanık parametreli sezgisel bulanık esnek kümelere odaklanan bir karar verme algoritması önerilmiştir ve bir belirsizlik problemine nasıl uygulanabileceği örneklendirilmiştir. Son olarak önerilen algoritma için bir karşılaştırma irdelenmiştir. Bu çalışmada önerilen hibrit matematiksel model sayesinde karmaşık değerli veri analizi konusunda karar vericilerden alınan değerlerin önemi vurgulanmıştır. Özellikle bu anlamda sanal sezgisel bulanık parametreli sezgisel bulanık esnek kümelerin gelecekte inşa edilmesi düşünülen matematiksel modeller için bir ilham kaynağı olabileceği düşünülmektedir.

Yazar katkısı
Author contribution

Araştırmacılardan Dalkılıç; makale fikrinin oluşturulması, literatür verilerin elde edilmesi, bulgular ve sonuç kısmının şekillendirilmesine yönelik (%50 oranında) katkı sunmuştur. Demirtaş ise, makalenin düzenlenmesi, ilerleyişinin denetlenmesi, ilgili tabloların/bulguların ve sonuç kısmının değerlendirilmesi hususunda (%50 oranında) katkı sunmuştur.

Etik beyanı
Declaration of ethical code

Bu çalışmada, "Yükseköğretim Kurumları Bilimsel Araştırma ve Yayın Etiği Yönergesi" kapsamında uyulması gerekli tüm kurallara uyulduğunu, bahsi geçen yönergenin "Bilimsel Araştırma ve Yayın Etiğine Aykırı Eylemler" başlığı altında belirtilen eylemlerden hiçbirinin gerçekleştirilmediğini taahhüt ederiz.

Çıkar çatışması beyanı
Conflicts of interest

Yazarlar herhangi bir çıkar çatışması olmadığını beyan eder.

Kaynaklar
References

Atanassov, K. T. (1986). Intuitionistic fuzzy sets. Fuzzy Sets and Systems, 20(1), 87–96.

Çağman, N., Çıtak, F., & Enginoğlu, S. (2010). Fuzzy parameterized fuzzy soft set theory and its applications. Turkish Journal of Fuzzy Systems, 1(1), 21–35.

Çağman, N., Çıtak, F., & Enginoğlu, S. (2011). FP-soft set theory and its applications. Annals of Fuzzy Mathematics and Informatics, 2(2), 219–226.

Dalkılıç, O. (2021a). An application of VFPFSS's in decision-making problems. Journal of Polytechnic, 1-11, https://doi.org/10.2339/politeknik.758474.

Dalkılıç, O. (2021b). Relations on neutrosophic soft set and their application in decision-making. Journal of Applied Mathematics and Computing, 67(1), 257-273.

Dalkılıç, O. (2021c). A novel approach to soft set theory in decision-making under uncertainty. International Journal of Computer Mathematics, 98(10), 1935-1945.

Dalkılıç, O., & Demirtas, N. (2021). VFP-soft sets and its application on decision making Problems. Journal of Polytechnic, 24(4): 1391-1399.

Deli, I., & Çağman, N. (2015). Intuitionistic fuzzy parameterized soft set theory and its decision making. Applied Soft Computing, 28, 109-113.

Deli, I., & Çağman, N. (2016). Application of soft sets in decision making based on game theory, Annals of Fuzzy Mathematics and Informatics, 11(3), 425-438.

Demir, İ. (2021). N-soft mappings with application in medical diagnosis. Mathematical Methods in the Applied Sciences, 44(8), 7343-7358.

Demirtaş, N., & Dalkılıç, O. (2019). An application in the diagnosis of prostate cancer with the help of bipolar soft rough sets, on Mathematics and Mathematics Education (ICMME 2019), KONYA, 283.

Demirtaş, N., Hussaın, S., & Dalkılıç, O. (2020). New approaches of inverse soft rough sets and their applications in a decision making problem. Journal of applied mathematics and informatics, 38(3-4), 335-349.

Demirtaş, N., Dalkılıç, O., & Riaz, M. (2022). A mathematical model to the inadequacy of bipolar soft sets in uncertainty environment: N-polar soft set. Computational and Applied Mathematics, 41(1), 1-19.

El-yagubi, E., & Salleh, A. (2013). Intuitionistic fuzzy parameterised fuzzy soft set. Journal of Quality Measurement and Analysis, 9(2), 73-81.

Enginoğlu, S., Çağman, N., Karataş, S., & Aydın, T. (2015). On soft topology. El-Cezerî Journal of Science and Engineering, 2(3), 23-38.

Enginoğlu, S., Memiş, S., & Çağman, N. (2019). A Generalization of fuzzy soft max-min decision-making method and its application to a performance-based value assignment in image denoising. El-Cezerî Journal of Science and Engineering, 6(3), 466-481.

Ergül, Z. G., & Yüksel, S. (2019). A new type of soft covering based rough sets applied to multicriteria group decision making for medical diagnosis. Mathematical Sciences and Applications E-Notes, 7(1), 28-38.

Irkin, R., Ozgur, N. Y., & Tas, N. (2018). Optimization of lactic acid bacteria viability using fuzzy soft set modelling. An International Journal of Optimization and Control: Theories and Applications, 8(2), 266-275.

Karaaslan, F. (2016). Intuitionistic fuzzy parameterized intuitionistic fuzzy soft sets with applications in decision making. Annals of Fuzzy Mathematics and Informatics, 11(4), 607-619.

Maji, P. K., Biswas, R., & Roy, A. R. (2001a). Fuzzy soft sets. Journal of Fuzzy Mathematics, 9(3), 589–602.

Maji, P. K., Biswas, R., & Roy, A. R. (2001b). Intuitionistic fuzzy soft sets. The Journal of Fuzzy Mathematics, 9(3), 677–692.

Molodtsov, D. A. (1999). Soft set theory–first results. Computers and Mathematics with Applications, 37(4–5), 19–31.

Saeed, M., Ahmad, M.R., Saqlain, M., & Riaz, M. (2020). Rudiments N-framed soft sets, Punjab University Journal of Mathematics, 52(5), 15-30.

Selvakumari, K. (2018). Solving game problem using weighted soft sets. Journal of Computer and Mathematical Sciences, 9(10), 1307-1311.

Sulukan, E., Çağman, N., & Aydın, T. (2019). Fuzzy parameterized intuitionistic fuzzy soft sets and their application to a performance-based value assignment problem. Journal of New Theory, (29), 79-88.

Zadeh, L. A. (1965). Fuzzy sets. Information and Control, 8, 338-353.

Zou, Y., & Xiao, Z. (2008). Data analysis approaches of soft sets under incomplete information. Knowledge Base System, 21, 941–945.