Araştırma Makalesi **BAUN Fen Bil. Enst. Dergisi, 24(2), 709-727, (2022)**

DOI:10.25092/baunfbed. 1000643 **J. BAUN Inst. Sci. Technol., 24(2), 709-727, (2022)**

İntegral sınır koşullu üçüncü mertebeden sınır değer probleminin çözümlerinin varlığı

Fercan Filiz, Erbil Çetin*

Ege Üniversitesi, Fen Fakültesi, Matematik Bölümü, Bornova, İzmir

Geliş Tarihi (Received Date): 25.10.2021
Kabul Tarihi (Accepted Date): 14.06.2022

Öz

Bu çalışmada, yarı sonsuz aralık üzerinde tanımlı üçüncü mertebeden üç noktalı integral koşullu, $\eta \in (0,\infty)$ sabit ve $g:(0,\infty)\times\mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}$ Nagumo koşullarını sağlayan bir fonksiyon olmak üzere

$$\vartheta'''(t) + r(t)g\big(t,\vartheta(t),\vartheta'(t),\vartheta''(t)\big) = 0, \qquad t \in (0,\infty),$$

$$\vartheta(0) = \int_0^\eta \vartheta(s)ds, \qquad \vartheta'(0) = A, \qquad \vartheta''(\infty) = \lim_{t\to\infty}\vartheta''(t) = B$$

sınır değer probleminin sınırlı veya sınırlı olmayan çözümlerinin varlığı ispatlanmıştır. Schäuder sabit nokta teoremi ve alt ve üst çözümler yöntemi uygulanarak istenilen sonuca ulaşılmıştır. Problemimizde uygun ve yeterli koşullar belirlenerek problemin en az bir çözümünün varlığı gösterilmiştir. Yarı sonsuz aralık üzerinde çalışılması zor olduğundan yarı sonsuz aralık üzerinde integral koşullu bu çalışma bu konuda yapılacak çalışmalar için litaratüre katkı sağlamış olacaktır. Ayrıca, bu sınır değer probleminin çözümleri sınırsız olabilir.

Anahtar kelimeler: *Alt ve üst çözümler, Nagumo koşulu, Schäuder sabit nokta teoremi, yarı sonsuz aralık.*

*Erbil ÇETİN, erbil.cetin@ege.edu.tr, http://orcid.org/ 0000-0002-3785-7011
Fercan FİLİZ, fercanfilizz@gmail.com, http://orcid.org/ 0000-0003-2346-5153

Existence of solutions for a third-order boundary value problem with integral boundary conditions

Abstract

In this study, the existence of bounded or unbounded solutions for the following third order three-point integral conditional boundary value problem on a half line

$$\vartheta'''(t) + r(t)g\big(t, \vartheta(t), \vartheta'(t), \vartheta''(t)\big) = 0, \qquad t \in (0, \infty),$$

$$\vartheta(0) = \int_0^{\eta} \vartheta(s)ds, \qquad \vartheta'(0) = A, \qquad \vartheta''(\infty) = \lim_{t\to\infty} \vartheta''(t) = B$$

where $\eta \in (0,\infty)$ fixed and $g:(0,\infty) \times \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}$ satisfies Nagumo's condition is proved. The expected result is obtained by applying Schäuder's fixed point theorem and the lower and upper solutions method. The existence of at least one solution of the problem has been shown by determining suitable and sufficient conditions in our problem. Since it is difficult to work on the semi-infinite interval, this study with integral conditions on the semi-infinite interval will contribute to the literature for studies on this subject. Also, the solutions to this boundary value problem can be unbounded.

Keywords: *Lower and upper solutions, Nagumo's condition, Schäuder's fixed point theorem, infinite interval.*

1. Giriş

Sınır değer problemlerine fizik ve mühendislikte sıkça rastlanır. Laplace denklemi kullanılarak elektrik potansiyelinin bulunması, dalga denklemi ile bir sistemin normal modlarının hesaplanması ve ısı denklemi ile bir çubukta ısının dağılımının çözülmesi örnek verilebilir [1]. Günümüzde de mühendislik alanı, kontrol teorisi ve optimizasyonu, akışkanlar mekaniğinin sınır tabakası, aero-elastisite, sandviç ışın analizi ve ışın sapma teorisi, elektromanyetik dalgalar, ince film ve sıkıştırılamaz akışkanlar teorisi gibi birçok uygulamada açıkça kendini göstermektedir [2,20].

İkinci ve üçüncü mertebeden sınır değer problemleri geçmiş yıllarda birçok matematikçi tarafından çalışılmıştır. 1937 yılında M. Nagumo çalışmasında Nagumo koşulundan bahsetmiştir [3]. Bu çalışmada, daha önce G. S Dragoni'nin de üzerinde çalıştığı [4],

$$u'' = f(t, u, u'), \qquad u(a) = A, \qquad u(b) = B$$

Dirichlet sınır değer probleminin en az bir çözümü olduğu ispatlanmıştır. Nagumo'nun koşulu genel ve basit olmasından dolayı başarılı olmuştur.

Üçüncü mertebeden sınır değer problemleri ile ilgili çalışmalar sıklıkla 1970'li yıllarda karşımıza çıkmaktadır. 1971 yılında L. Jackson ve K. Schrader [5],

$$y''' = f(x, y, y', y'')$$

eşitliği için aşağıdaki varsayımları kabul etmiştir:

A) (a, b) açık aralığında $f(x, y, y', y'')$ sürekli

B) $a < x_1 < x_2 < x_3 < b$ ve herhangi bir $y_1,\ y_2,\ y_3 \in \mathbb{R}$ için

$y''' = f(x, y, y', y'')$
$y(x_1) = y_1, \ \ y(x_2) = y_2, \ \ y(x_3) = y_3$
üçüncü mertebeden üç noktalı sınır değer probleminin bir çözümü vardır ve $[x_1, x_3]$ kapalı aralığında tek olduğu gösterilmiştir.

İntegral sınır koşullu sınır değer problemleri zor ve aynı zamanda önemli bir yere sahiptir. Özel durumlar olarak iki, üç, çok noktalı ve yerel olmayan sınır değer problemlerini içerirler.

2009 yılında A. Boucherif [6], $f: [0,1] \times \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}, \ h_1, h_2: \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$
$y'''(t) = f\big(t, y(t), y'(t), y''(t)\big), \quad 0 < t < 1$

$$\begin{cases} y(0) = 0 \\ y'(0) - a y''(0) = \int_0^1 h_1\big(y(s), y'(s)\big) ds \\ y'(1) + b y''(1) = \int_0^1 h_2\big(y(s), y'(s)\big) ds \end{cases}$$

üçüncü mertebeden doğrusal olmayan integral koşullu sınır değer problemi üzerinde çalışmıştır. Fonksiyonlar için gerekli ve yeterli koşullar sağlanarak problemin en az bir çözümünün var olduğu gösterilmiştir. Koniler üzerinde iyi tanımlanmış sabit nokta teoreminden yararlanılmıştır.

Literatürdeki çalışmaların çoğu sonlu aralık üzerinde yapılmıştır. Bu konuyla ilgili en son çalışmalar $[0, \infty)$ yarı sonsuz aralığı üzerindeki sınır değer problemleri üzerine devam etmiştir. Yapılan tüm çalışmalarda sınırlı ya da sınırlı olmayan çözümlerin varlığını belirlemek için ya bazı sabit nokta teoremleri ya da monoton iteratif teknikler kullanılmıştır [7-14,21].

İkinci, üçüncü ve daha yüksek mertebeden sınır değer problemlerinin varlığı ile ilgili temel yöntemlerden birisi de alt ve üst çözümler teorisidir. Lineer olmayan problemlerin çözümlerinin varlığını ispatlamada etkili bir yöntem olduğu bilinen alt ve üst çözüm yöntemleri, son yıllarda da iki noktalı ve çoklu noktalı sınır değer problemleri ikinci ve yüksek mertebeden adi diferansiyel denklemler için önem kazanmıştır [15].

Ardışık yaklaşımların kullanılması, alt ve üst çözümlerin varlığının araştırılması fikrini öne sürmüştür. 1893 yılının başlarında Picard [16], ikinci mertebeden

$$u'' + f(t, u) = 0, \ \ u(a) = 0, \ \ u(b) = 0 \tag{1.1}$$

sınır değer probleminin çözümlerini araştırmıştır. $u = 0$ fonksiyonunu bir çözüm ve $f(t, .)$ fonksiyonunu artan kabul ederek monoton ardışık yaklaşımların dizisini oluşturmuştur. Yani, (a, b) aralığı üzerinde $\alpha_0(t) > 0$ olmak üzere, ardışık yaklaşımın monoton dizisi $(\alpha_n)_n$
$\alpha_0 \leq \alpha_1 \leq \alpha_2 \leq \ldots$
(1.1) denkleminin çözümü olan u fonksiyonuna yakınsamaktadır.

2018 yılında $\lambda > 0, \ 0 < \lambda\eta < 1$ ve $f: [0, \infty) \times \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$ olmak üzere,

$$u''(x) + q(x) f\big(x, u(x), u'(x)\big) = 0, \qquad x \in (0, \infty)$$

$$u(0) = \lambda \int_0^\eta u(s) ds, \qquad u'(\infty) = C,$$

Nagumo koşulunu sağlayan yarı sonsuz aralık üzerinde ikinci mertebeden üç noktalı integral koşullu sınır değer problemi, U. Akcan ve E. Çetin tarafından çalışılmıştır [17].

Bu çalışmada Akcan ve Çetin ele aldıkları problemin sınırlı olmayan çözümlerinin varlığı alt ve üst çözümlerini ve Schäuder sabit nokta teoremini kullanarak göstermişlerdir.
Yine yarı sonsuz aralık üzerinde üçüncü mertebeden üç noktalı,
$x'''(t) + q(t)f\big(t, x(t), x'(t), x''(t)\big) = 0, \quad t \in (0, \infty)$
$x'(0) = A, \quad x(\eta) = B, \quad x''(\infty) = C,$
sınır değer problemi E. Çetin ve R.P.Agarwal tarafından 2015 yılında çalışılmıştır [7]. Bu çalışmada ele alınan problemin en az bir ve en az üç çözümünün var olduğunu göstermek için Schäuder sabit nokta teoremi ve alt ve üst çözümler metoduna başvurulmuştur.

Görüyoruz ki alt ve üst çözümler olarak adlandırılan α ve β fonksiyonları günümüzde önemli bir role sahiptir. Araştırmacılar bu yaklaşımlar yardımıyla alt ve üst çözüm yöntemlerini geliştirmişlerdir.

Bu çalışmada $\eta \in (0, \infty)$ sabit ve $r: (0, \infty) \longrightarrow (0, \infty)$, $g: (0, \infty) \times \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}$ sürekli olmak üzere yarı sonsuz aralık üzerinde tanımlı üç noktalı integral sınır koşullu üçüncü mertebeden

$$\vartheta'''(t) + r(t)g\big(t, \vartheta(t), \vartheta'(t), \vartheta''(t)\big) = 0, \qquad t \in (0, \infty)$$

$$\vartheta(0) = \int_0^\eta \vartheta(s)ds, \qquad \vartheta'(0) = A, \qquad \vartheta''(\infty) = \lim_{t\to\infty} \vartheta''(t) = B \tag{1.2}$$

sınır değer problemi ele alındı. Çalışmamızda amacımız ele aldığımız (1.2) probleminin alt ve üst çözümlerini kullanarak problemin çözümlerinin varlığını garantilemek için uygun ve yeterli koşullar belirlemektir.

Sınırlı bir aralık üzerinde yapılan çalışmalarda Arzela-Ascoli teoremi kullanılarak tanımlanan operatörün kompakt olduğunun gösterilmesi kolay iken yarı sonsuz aralık üzerinde çalışmada tanımlanan operatörün sürekli ve kompakt olduğunun gösterilmesi oldukça zordur [20]. Bunun için genelleştirilmiş Arzela-Ascoli teoremi kullanılır. Aynı zamanda problemimizin bir koşulu integral koşulludur. Bu tür integral koşullu yarı sonsuz aralık üzerindeki çalışmalar kısıtlıdır. İntegralli sınır koşulları daha çok fizikte elektrik ile ilgili olayların modellemesinde karşımıza çıkmaktadır. Bu yüzden çalışmamız bu konuda yapılacak çalışmalar için literatüre katkı sağlamış olacaktır. Bu çalışmadaki sınır değer probleminin çözümleri sınırlı olmak zorunda değildir.
Şimdi sabit nokta teoremini uygulayacağımız Banach uzayını belirleyelim.

$$\mathbb{X} = \left\{ \vartheta \in C^2[0,\infty) : \lim_{t\to\infty} \frac{\vartheta(t)}{1+t^2},\ \lim_{t\to\infty} \frac{\vartheta'(t)}{1+t} \text{ ve } \lim_{t\to\infty} \vartheta''(t) \text{ var} \right\}$$

$\mathbb{X}$ kümesi,

$$||\vartheta||_1 = \sup_{t\in[0,\infty)} \frac{|\vartheta(\mathrm{t})|}{1+t^2}, \quad ||\vartheta||_2 = \sup_{t\in[0,\infty)} \frac{|\vartheta'(\mathrm{t})|}{1+t}, \quad ||\vartheta||_\infty = \sup_{t\in[0,\infty)} |\vartheta''(\mathrm{t})|$$

olmak üzere $\big||\vartheta|\big| = \max\{||\vartheta||_1, ||\vartheta||_2, ||\vartheta||_\infty\}$ normu ile birlikte normlu uzaydır. $(\mathbb{X}, ||.||)$ uzayının bir Banach uzay olduğu kolaylıkla gösterilebilir.

Şimdi de çalışmamızda sonuca ulaşmak için kullanacağımız teoremleri ifade edelim.

Teorem 1.1 (Modifiye edilmiş Arzela - Ascoli Teoremi) [18], $\mathrm{M} \subset \mathbb{X}$ olmak üzere, aşağıdaki koşullar sağlandığı takdirde M mutlak kompaktır.

i.) M, $\mathbb{X}$ içinde sınırlıdır.

ii.) $\left\{y: y = \frac{\vartheta}{1+t^2},\ \vartheta \in M\right\}, \left\{z: z = \frac{\vartheta'}{1+t},\ \vartheta \in M\right\}$ ve $\{w: w = \vartheta''(t),\ \vartheta \in M\}$ içerisindeki fonksiyonlar $[0,\infty)$ yarı sonsuz aralığı üzerinde lokal olarak aynı dereceden süreklidir.

iii.) $\left\{y: y = \frac{\vartheta}{1+t^2},\ \vartheta \in M\right\}, \left\{z: z = \frac{\vartheta'}{1+t},\ \vartheta \in M\right\}$ ve $\{w: w = \vartheta''(t),\ \vartheta \in M\}$ içerisindeki fonksiyonlar ∞ da aynı dereceden yakınsaktır.

Problemin çözümünün varlığı ispatlamak için aşağıdaki Schäuder Sabit Nokta Teoremi kullanılmıştır.

Teorem 1.2 (Schäuder Sabit Nokta Teoremi) [19], E bir Banach uzay ve $\mathcal{B}$ de E uzayının sınırlı, kapalı ve konveks bir alt küme olsun. Eğer $T : \mathcal{B} \longrightarrow \mathcal{B}$ operatörü sürekli ve kompakt (tamamen sürekli) ise T operatörünün sabit bir noktası vardır.

2. Sonuçlar ve tanımlar

İlk olarak lineer sınır değer problemi,

$$\vartheta'''(t) + v(t) = 0, \qquad t \in (0,\infty)$$

$$\vartheta(0) = \int_0^\eta \vartheta(s)ds, \qquad \vartheta'(0) = A, \qquad \vartheta''(\infty) = \lim_{t\to\infty}\vartheta''(t) = B \tag{2.1}$$

için aşağıdaki lemmada Green fonksiyonu verilecektir.

Lemma 2.1 $v \in C[0,\infty)$ ve $\int_0^\infty v(t)dt < \infty$ olsun. Green fonksiyonu

$$G(t,\tau) = \frac{1}{(1-\eta)}\begin{cases} \dfrac{\eta^2\tau}{2} + \dfrac{\tau^3}{6} + t\tau - \dfrac{\tau^2}{2} - t\eta\tau, & 0 \le \tau \le \min\{\eta, t\} \\ \dfrac{\eta^2\tau}{2} - \dfrac{\tau^2\eta}{2} + \dfrac{\tau^3}{6} + \dfrac{t^2}{2} - \dfrac{t^2\eta}{2}, & 0 \le t \le \tau \le \eta \\ \dfrac{\eta^3}{6} + t\tau - \dfrac{\tau^2}{2} - t\eta\tau + \dfrac{\tau^2\eta}{2}, & 0 \le \eta \le \tau \le t \\ \dfrac{\eta^3}{6} + \dfrac{t^2}{2} - \dfrac{t^2\eta}{2}, & 0 \le \max\{\eta, t\} \le \tau \end{cases}$$

olmak üzere (2.1) probleminin $\vartheta \in C^2[0,\infty) \cap C^3(0,\infty)$ çözümü,

$$\vartheta(t) = A\left(t + \frac{\eta^2}{2(1-\eta)}\right) + B\left(\frac{t^2}{2} + \frac{\eta^3}{6(1-\eta)}\right) + \int_0^\infty G(t,\tau)v(\tau)d\tau$$

şeklindedir.

İspat $v \in C[0,\infty)$ ve $\int_0^\infty v(t)dt < \infty$ olsun.

(2.1) denklemi t'den ∞'a kadar integrali alınıp $\vartheta''(\infty) = B$ sınır koşulu kullanılarak

$$\vartheta''(t) = B + \int_t^\infty v(\tau)d\tau$$

denklemi elde edilir. Elde edilen bu denklem $[0,t]$ aralığı üzerinde integre edilip, $\vartheta'(0) = A$ sınır koşulu kullanılarak ve Fubini teoremi uygulanarak

$$\vartheta'(t) = A + Bt + \int_0^t \tau v(\tau)d\tau + \int_t^\infty t v(\tau)d\tau \tag{2.2}$$

denklemi elde edilir. (2.2) denklemi 0'dan t'ye integre edilerek

$$\vartheta(t)=\vartheta(0)+At+B\frac{t^2}{2}+\int_0^t(t\tau-\frac{\tau^2}{2})v(\tau)d\tau+\int_t^\infty\frac{t^2}{2}v(\tau)d\tau \qquad (2.3)$$

denklemi elde edilir. (2.3) denklemi 0'dan η'ya integre edilip, $\vartheta(0)=\int_0^\eta\vartheta(s)ds$ sınır koşulu kullanılarak

$$\vartheta(0)=\frac{1}{1-\eta}\left\{A\frac{\eta^2}{2}+B\frac{\eta^3}{6}+\int_{\tau=0}^{\eta}\left(\frac{\eta^2\tau}{2}-\frac{\tau^2\eta}{2}\right)v(\tau)d\tau+\int_{\tau=0}^{\eta}\frac{\tau^3}{6}v(\tau)d\tau+\int_{\tau=\eta}^{\infty}\frac{\eta^3}{6}v(\tau)d\tau\right\}$$

ifadesi elde edilir. Şimdi (2.3) denkleminde yukarıdaki $\vartheta(0)$ ifadesi yazılarak

$$\vartheta(t)=\frac{1}{1-\eta}\left\{A\frac{\eta^2}{2}+B\frac{\eta^3}{6}+\int_{\tau=0}^{\eta}\left(\frac{\eta^2\tau}{2}-\frac{\tau^2\eta}{2}\right)v(\tau)d\tau+\int_{\tau=0}^{\eta}\frac{\tau^3}{6}v(\tau)d\tau+\int_{\tau=\eta}^{\infty}\frac{\eta^3}{6}v(\tau)d\tau\right\}+At+B\frac{t^2}{2}+\int_0^t(t\tau-\frac{\tau^2}{2})v(\tau)d\tau+\int_t^\infty\frac{t^2}{2}v(\tau)d\tau$$

denklemi elde edilir. $t\le\eta$ ve $\eta\le t$ olarak iki farklı durum şeklinde yazarsak,

$$\vartheta(t)=A\left(t+\frac{\eta^2}{2(1-\eta)}\right)+B$$

$$+\frac{1}{(1-\eta)}\begin{cases}\int_0^t\left(\frac{\eta^2\tau}{2}+\frac{\tau^3}{6}+t\tau-\frac{\tau^2}{2}-t\eta\tau\right)v(\tau)d\tau+\int_t^\eta\left(\frac{\eta^2\tau}{2}-\frac{\tau^2\eta}{2}+\frac{\tau^3}{6}+\frac{t^2}{2}-\frac{t^2\eta}{2}\right)v(\tau)d\tau \\ \quad+\int_\eta^\infty\left(\frac{\eta^3}{6}+\frac{t^2}{2}-\frac{t^2\eta}{2}\right)v(\tau)d\tau, & t\le\eta \\ \int_0^\eta\left(\frac{\eta^2\tau}{2}+\frac{\tau^3}{6}+t\tau-\frac{\tau^2}{2}-t\eta\tau\right)v(\tau)d\tau+\int_\eta^t\left(\frac{\eta^3}{6}+t\tau-\frac{\tau^2}{2}-t\eta\tau+\frac{\tau^2\eta}{2}\right)v(\tau)d\tau \\ \quad+\int_t^\infty\left(\frac{\eta^3}{6}+\frac{t^2}{2}-\frac{t^2\eta}{2}\right)v(\tau)d\tau, & \eta\le t\end{cases}$$

elde edilir. Elde edilen bu denklem

$$\vartheta(t)=A\left(t+\frac{\eta^2}{2(1-\eta)}\right)+B\left(\frac{t^2}{2}+\frac{\eta^3}{6(1-\eta)}\right)+\int_0^\infty G(t,\tau)v(\tau)d\tau,\quad \forall t\in[0,\infty)$$

denklemi ile aynıdır. Böylece lemmanın ispatı tamamlanmış olur.

Tanım 2.1

$$\alpha'''(t)+r(t)g\big(t,\alpha(t),\alpha'(t),\alpha''(t)\big)\ge 0,\quad t\in(0,\infty),$$

$$\alpha'(t)\le A,\quad \alpha(0)\le\int_0^\eta\alpha(s)ds,\quad \alpha''(\infty)=\lim_{t\to\infty}\alpha''(t)\le B$$

eşitsizliklerini sağlayan $\alpha\in\mathbb{X}\cap C^3(0,\infty)$ fonksiyonuna (1.2) sınır değer probleminin bir alt çözümü denir. Benzer olarak

$$\beta'''(t)+r(t)g\big(t,\beta(t),\beta'(t),\beta''(t)\big)\le 0,\quad t\in(0,\infty),$$

$$\beta'(t)\ge A,\quad \beta(0)\ge\int_0^\eta\beta(s)ds,\quad \beta''(\infty)=\lim_{t\to\infty}\beta''(t)\ge B$$

eşitsizliklerini sağlayan $\beta\in\mathbb{X}\cap C^3(0,\infty)$ fonksiyonuna (1.2) sınır değer probleminin bir üst çözümü denir.

Sonuç 2.1 Eğer $\forall t\in[0,\infty)$ için $\alpha'(t)\le\beta'(t)$ ve

$$\int_0^\eta\alpha(s)ds\le\int_0^\eta\beta(s)ds \qquad (2.4)$$

ise $\forall t\in[0,\infty)$ için $\alpha(t)\le\beta(t)$ olur.

İspat $\alpha'(t) \leq \beta'(t)$ eşitsizliğini 0'dan t'ye integrallersek

$$\int_0^t \alpha'(s)ds \leq \int_0^t \beta'(s)ds \Rightarrow \alpha(t) - \alpha(0) \leq \beta(t) - \beta(0) \tag{2.5}$$

eşitsizliği elde edilir. (2.5) eşitsizliğinde alt ve üst çözüm tanımlarındaki

$$\alpha(0) \leq \int_0^\eta \alpha(s)ds, \qquad \beta(0) \geq \int_0^\eta \beta(s)ds$$

sınır koşulları kullanılırsa,

$$\alpha(t) - \int_0^\eta \alpha(s)ds \leq \beta(t) - \int_0^\eta \beta(s)ds$$

$$\int_0^\eta [\beta(s) - \alpha(s)]\, ds \leq \beta(t) - \alpha(t), \quad \forall t \in [0,\infty)$$

elde edilir. Buradan da (2.4) eşitsizliği kullanılarak, $\forall t \in [0,\infty)$ için $\alpha(t) \leq \beta(t)$ eşitsizliğine ulaşılır.

Tanım 2.2 $\alpha, \beta \in \mathbb{X} \cap \mathcal{C}^3(0,\infty)$, (1.2) probleminin sırasıyla alt ve üst çözümleri olsun, şöyleki $\forall t \in [0,\infty)$ için $\alpha'(t) \leq \beta'(t)$ ve

$$\int_0^\eta \alpha(s)ds \leq \int_0^\eta \beta(s)ds$$

olsun. Eğer $g: [0,\infty) \times \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}$ sürekli fonksiyonu, negatif olmayan $\varphi \in \mathcal{C}[0,\infty)$ ve pozitif $h \in \mathcal{C}[0,\infty)$ fonksiyonları olmak üzere,

$\forall$ $(t, y, z, w) \in [0,\infty) \times [\alpha(t), \beta(t)] \times [\alpha'(t), \beta'(t)] \times \mathbb{R}$ için,

$$|g(t, y, z, w)| \leq \varphi(t)h(|w|)$$

eşitsizliğini

$$\int_0^\infty \frac{s}{h(s)} ds = \infty$$

koşulu altında sağlıyorsa g fonksiyonu α, β fonksiyonlarına göre Nagumo koşulunu sağlıyor denir.

Şimdi elde ettiğimiz varlık teoremimizi ve ispatını verelim. Teoremin ispatında Schäuder sabit nokta teoremi kullanacağız. Bunun içinde daha önce belirlediğimiz Banach uzayında tanımlı operatörün sürekli ve kompakt olduğu gösterilecektir. Bu operatör Lemma 2.1 de elde edilen çözümün ifadesi kullanılarak tanımlanmıştır. Burada Green fonksiyonunun sadece sürekli olduğu bilindiğinden, Green fonksiyonunu alttan ve üstten sınırlayamadığımızdan sadece alt ve üst çözümler kullanılarak ve Schäuder sabit nokta teoremi uygulanarak operatörün sabit noktasının vardığı gösterilmiştir. Yarı sonsuz aralık üzerindeki çalışmalarda genellikle alt ve üst çözümler tekniğine başvurularak çözümlerin varlığı gösterilir.

3. Temel sonuç ve ispatı

Teorem 2.1 (1.2) probleminin α ve β fonksiyonları $\alpha'(t) \leq \beta'(t)$, $t \in [0,\infty)$ ve

$$\int_0^\eta \alpha(s)ds \leq \int_0^\eta \beta(s)ds$$

eşitsizlik koşullarını sağlayan sırasıyla alt ve üst çözümü olsun. $g : [0,\infty) \times \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}$ sürekli fonksiyonu α ve β fonksiyonlarına göre Nagumo koşullarını sağlasın.

Ayrıca, $(t, y, z, w) \in [0,\infty) \times [\alpha(t), \beta(t)] \times [\alpha'(t), \beta'(t)] \times \mathbb{R}$ için,

$$g(t, \alpha(t), z, w) \leq g(t, y, z, w) \leq g(t, \beta(t), z, w) \tag{2.6}$$

eşitsizlikleri sağlansın.

Eğer, $\varphi(t)$, g fonksiyonunun Nagumo koşulları içerisindeki bir fonksiyon olmak üzere,

$$\int_0^\infty \max\{s,1\} r(s)ds < \infty, \quad \int_0^\infty \max\{s,1\}\, \varphi(s) r(s)ds < \infty$$

ve

$$\mathrm{m} \coloneqq \sup_{t\in[0,\infty)} (1+t)^{\psi} r(t)\varphi(t) < \infty$$

olacak şekilde öyle bir $\psi > 1$ sabiti var ise, N sabit sayısı α, β ve h'ye bağlı olmak üzere (1.2) probleminin,

$$\begin{cases} \alpha(t) \le \vartheta(t) \le \beta(t), & \forall \mathrm{t} \in [0,\infty) \\ \alpha'(t) \le \vartheta'(t) \le \beta'(t), & \forall \mathrm{t} \in [0,\infty) \\ |\vartheta''(\mathrm{t})| < \mathrm{N}, & \forall \mathrm{t} \in [0,\infty) \end{cases}$$

eşitsizliklerini sağlayan en az bir $\vartheta \in \mathbb{X} \cap C^3(0,\infty)$ çözümü vardır.

İspat r sayısını,

$$\int_r^N \frac{s}{h(s)} ds > \mathrm{m}\left(\sup_{t\in[0,\infty)} \frac{\beta'(t)}{(1+t)^{\psi}} - \inf_{t\in[0,\infty)} \frac{\alpha'(t)}{(1+t)^{\psi}} + \frac{\psi}{\psi-1} \max\{||\beta||_2, ||\alpha||_2\} \right)$$

olacak şekilde

$$r \ge \max\left\{ \sup_{t\in[0,\infty)} |\alpha''(t)|, \sup_{t\in[0,\infty)} |\beta''(t)|, \mathrm{B} \right\}$$

ve $N > r$ şeklinde seçelim.Şimdi, g_1 ve g^* yardımcı fonksiyonlarını aşağıdaki şekilde tanımlayalım şöyleki t $\in [0,\infty)$ olmak üzere,

$$g_1(t,y,z,w) = \begin{cases} g(t,\beta,z,w), & y > \beta(t) \\ g(t,y,z,w), & \alpha(t) \le y \le \beta(t) \\ g(t,\alpha,z,w), & y < \alpha(t) \end{cases}$$

ve

$$g^*(t,y,z,w) = \begin{cases} g_1(t,y,\beta',w^*) + \dfrac{\beta'(t)-z}{1+|\beta'(t)-z|}, & z > \beta'(t) \\ g_1(t,y,z,w^*), & \alpha'(t) \le z \le \beta'(t) \\ g_1(t,y,\alpha',w^*) + \dfrac{\alpha'(t)-z}{1+|\,\alpha'(t)-z|}, & z < \alpha'(t) \end{cases}$$

şöyleki

$$w^* = \begin{cases} N, & w > N \\ w, & -N \le w \le N \\ -N, & w < -N \end{cases}$$

dir. Modifiye edilmiş

$$\vartheta'''(t) + r(t) g^*\big(t, \vartheta(t), \vartheta'(t), \vartheta''(t)\big) = 0, \qquad t \in (0,\infty)$$

$$\vartheta(0) = \int_0^\eta \vartheta(s)ds, \qquad \vartheta'(0) = A, \qquad \vartheta''(\infty) = \lim_{t\to\infty} \vartheta''(t) = B \tag{2.7}$$

üçüncü mertebeden üç noktalı integral koşullu sınır değer problemini ele alalım. Öncelikle bu problemin Schäuder sabit nokta teoreminin bir uygulaması olarak en az bir ϑ çözümünün olduğunu ispatlamak gereklidir. $\vartheta \in \mathbb{X}$ için,

$$(T_1\vartheta)(t) = \int_0^\infty G(t,s) r(s) g^*\big(s, \vartheta(s), \vartheta'(s), \vartheta''(s)\big) ds, \quad t \in [0,\infty)$$

ve

$$(T\vartheta)(t) = A\left(t + \frac{\eta^2}{2(1-\eta)}\right) + B\left(\frac{t^2}{2} + \frac{\eta^3}{6(1-\eta)}\right) + (T_1\vartheta)(t), \quad t \in [0,\infty)$$

şeklinde T_1 ve T operatörlerini tanımlayalım. Şimdi, $T : \mathbb{X} \longrightarrow \mathbb{X}$ operatörünün tamamen sürekli olduğunu gösterelim. İspatımızı aşağıdaki şekilde üç adıma bölebiliriz:

Adım 1. $T : \mathbb{X} \longrightarrow \mathbb{X}$ iyi tanımlıdır. Gösterelim:
$|g^*(s,\vartheta(s),\vartheta'(s),\vartheta''(s))| \leq |g_1(s,\vartheta(s),\vartheta'(s),\vartheta''(s))| + 1$ olduğundan ve g^* ve g_1'in tanımlarından, $\vartheta \in \mathbb{X}$ için,

$$\left|\int_0^\infty r(s)g^*\big(s,\vartheta(s),\vartheta'(s),\vartheta''(s)\big)ds\right| \leq \int_0^\infty |r(s)|\,|g^*(s,\vartheta(s),\vartheta'(s),\vartheta''(s))|ds$$
$$\leq \int_0^\infty r(s)\,(|g_1(s,\vartheta(s),\vartheta'(s),\vartheta''(s))| + 1)ds$$
$$= \int_0^\infty r(s)\,(|g(s,\vartheta(s),\vartheta'(s),\vartheta''(s))| + 1)ds$$

eşitsizliği elde edilir. Ayrıca, g fonksiyonu Nagumo koşulunu sağladığından,

$$\int_0^\infty r(s)\,(|g(s,\vartheta(s),\vartheta'(s),\vartheta''(s))| + 1)ds \leq \int_0^\infty r(s)(\varphi(s)h(|w|) + 1)ds$$

olur. $H_0 = \max\limits_{0\leq t\leq ||\vartheta||_\infty} h(t)$ olsun ve $h(t) \leq H_0$ olduğundan,

$$\int_0^\infty r(s)(\varphi(s)h(|w|) + 1)ds \leq \int_0^\infty r(s)(\varphi(s)H_0 + 1)ds$$

elde edilir. Buradan da,

$$\int_0^\infty r(s)(\varphi(s)H_0 + 1)ds \leq \int_0^\infty \max\{1,s\}r(s)(\varphi(s)H_0 + 1)ds < \infty$$

elde edilir. $\vartheta \in \mathbb{X}$ için,

$$\int_1^\infty sr(s)(\varphi(s)H_0 + 1)ds \leq \int_0^\infty \max\{1,s\}r(s)(\varphi(s)H_0 + 1)ds < \infty$$

olduğundan, $\lim\limits_{t\to\infty} tr(t)(\varphi(t)H_0 + 1) = 0$ olur.

$$0 \leq \int_t^\infty r(s)(\varphi(s)H_0 + 1)ds \leq \int_1^\infty sr(s)(\varphi(s)H_0 + 1)ds < \infty \quad (t \geq 1)$$

olduğundan,

$$\lim_{t\to\infty}\int_t^\infty r(s)(\varphi(s)H_0 + 1)ds = 0 \tag{2.8}$$

olur. Monoton yakınsaklık teoremi, (2.8) ve iki sefer L'Hospital kuralı kullanılarak

$$\left|\lim_{t\to\infty}\frac{(T_1\vartheta)(t)}{1+t^2}\right| \leq \lim_{t\to\infty}\int_0^\infty \frac{|G(t,s)|}{1+t^2} r(s)(\varphi(s)H_0 + 1)ds$$

$$\leq \lim_{t\to\infty}\frac{1}{|1-\eta|}\left\{\frac{\int_0^\eta \left|\frac{\eta^2 s}{2} + \frac{s^3}{6} + ts - \frac{s^2}{2} - t\eta s\right| r(s)(\varphi(s)H_0 + 1)ds}{1+t^2}\right.$$
$$\left. + \frac{\int_\eta^t \left|\frac{\eta^3}{6} + (ts - \frac{s^2}{2})(1-\eta)\right| r(s)(\varphi(s)H_0 + 1)ds}{1+t^2} + \frac{\int_t^\infty \left|\frac{\eta^3}{6} + \frac{t^2}{2} - \frac{t^2\eta}{2}\right| r(s)(\varphi(s)H_0 + 1)ds}{1+t^2}\right\}$$

$$\leq \lim_{t\to\infty}\frac{1}{|1-\eta|}\left\{\frac{\int_0^\eta \left(\frac{\eta^2 s}{2} + \frac{s^3}{6} + ts + \frac{s^2}{2} + t\eta s\right) r(s)(\varphi(s)H_0 + 1)ds}{1+t^2}\right.$$

$$+\frac{\int_\eta^t\left(\frac{\eta^3}{6}+(ts-\frac{s^2}{2})(1+\eta)\right)r(s)(\varphi(s)H_0+1)ds}{1+t^2}+\frac{\int_t^\infty\left(\frac{\eta^3}{6}+\frac{t^2}{2}+\frac{t^2\eta}{2}\right)r(s)(\varphi(s)H_0+1)ds}{1+t^2}\Bigg\}$$

$$=\lim_{t\to\infty}\frac{1}{|1-\eta|}\Bigg\{\frac{\int_0^\eta(s+\eta s)r(s)(\varphi(s)H_0+1)ds}{2t}$$

$$+\frac{\int_\eta^t(s+\eta s)r(s)(\varphi(s)H_0+1)ds+\left(\frac{\eta^3}{6}+(t^2-\frac{t^2}{2})(1+\eta)\right)r(t)(\varphi(t)H_0+1)}{2t}$$

$$+\frac{\int_t^\infty(t+t\eta)r(s)(\varphi(s)H_0+1)ds-\left(\frac{\eta^3}{6}+\frac{t^2}{2}+\frac{t^2\eta}{2}\right)r(t)(\varphi(t)H_0+1)}{2t}\Bigg\}$$

$$=\lim_{t\to\infty}\frac{1}{|1-\eta|}\Bigg\{\frac{t(1+\eta)r(t)(\varphi(t)H_0+1)}{2}+\frac{1}{2}\int_t^\infty(1+\eta)r(s)(\varphi(s)H_0+1)ds$$
$$-\frac{t(1+\eta)r(t)(\varphi(t)H_0+1)}{2}\Bigg\}=0$$

bulunur. Buradan $0\le\left|\lim_{t\to\infty}\frac{(T_1\vartheta)(t)}{1+t^2}\right|\le 0$ olduğundan $\lim_{t\to\infty}\frac{(T_1\vartheta)(t)}{1+t^2}=0$ elde edilir.
O halde,

$$\lim_{t\to\infty}\frac{(T\vartheta)(t)}{1+t^2}=\lim_{t\to\infty}\frac{A\left(t+\frac{\eta}{2(1-\eta)}\right)+B\left(\frac{t^2}{2}+\frac{\eta^3}{6(1-\eta)}\right)}{1+t^2}+\lim_{t\to\infty}\frac{(T_1\vartheta)(t)}{1+t^2}=\frac{B}{2}<\infty$$

elde edilir. L'Hospital kuralı kullanılarak

$$\left|\lim_{t\to\infty}\frac{(T_1\vartheta)'(t)}{1+t}\right|=\lim_{t\to\infty}\frac{1}{1+t}\left|\int_0^t sr(s)(\varphi(s)H_0+1)ds+\int_t^\infty tr(s)(\varphi(s)H_0+1)ds\right|$$
$$\le\lim_{t\to\infty}\frac{\int_0^t sr(s)(\varphi(s)H_0+1)ds+\int_t^\infty tr(s)(\varphi(s)H_0+1)ds}{1+t}$$
$$=\lim_{t\to\infty}\frac{tr(t)(\varphi(t)H_0+1)+\int_t^\infty r(s)(\varphi(s)H_0+1)ds-tr(t)(\varphi(t)H_0+1)}{1}=0$$

elde edilir. Buradan da $\lim_{t\to\infty}\frac{(T_1\vartheta)\prime(t)}{1+t}=0$ elde edilir. Böylece,

$$\lim_{t\to\infty}\frac{(T\vartheta)'(t)}{1+t}=\lim_{t\to\infty}\left(\frac{A}{1+t}+\frac{Bt}{1+t}+\frac{(T_1\vartheta)'(t)}{1+t}\right)=B<\infty$$

elde edilir. Son olarak,

$$\lim_{t\to\infty}(T\vartheta)''(t)=\lim_{t\to\infty}\left(B+\int_t^\infty r(s)(\varphi(s)H_0+1)ds\right)=B+0=B\ \text{(var)}$$

elde edilir. O halde, $T\vartheta\in\mathbb{X}$ elde edilir.

Adım 2. $T:\mathbb{X}\longrightarrow\mathbb{X}$ süreklidir. Gösterelim:
$\vartheta_n\to\vartheta$ şeklinde $\mathbb{X}'$de herhangi bir dizi olsun. $n\to\infty$ ve $t\in[0,\infty)$ olmak üzere,
$\vartheta_n(t)\to\vartheta(t),\quad \vartheta_n{}'(t)\to\vartheta'(t),\ \vartheta_n{}''(t)\to\vartheta''(t)$
olur. $n\to\infty$, s $\in[0,\infty)$ olmak üzere ve g^* sürekli olduğundan,
$|g^*(s,\vartheta_n(s),\vartheta_n{}'(s),\vartheta_n{}''(s))-g^*(s,\vartheta(s),\vartheta'(s),\vartheta''(s))|\longrightarrow 0$

olur. $\vartheta_n{}''(t) \to \vartheta''(t)$ olduğundan $\sup_{n\in\mathbb{N}} ||\vartheta_n||_\infty < \infty$ olur.
$H_1 = \max_{0\le t\le \max\{||\vartheta||_\infty, \sup||\vartheta_n||_\infty\}} h(t)$ olsun. O halde,
$|g^*(s,\vartheta_n(s),\vartheta_n{}'(s),\vartheta_n{}''(s))| \le \varphi(s)h(s)+1 \le \varphi(s)H_1+1$ olduğundan,

$$\int_0^\infty sr(s)|\, g^*(s,\vartheta_n(s),\vartheta_n{}'(s),\vartheta_n{}''(s)) - g^*(s,\vartheta(s),\vartheta'(s),\vartheta''(s))|ds$$
$$\le \int_0^\infty sr(s)|g^*(s,\vartheta_n(s),\vartheta_n{}'(s),\vartheta_n{}''(s))|ds + \int_0^\infty sr(s)\left|g^*\big(s,\vartheta(s),\vartheta'(s),\vartheta''(s)\big)\right|ds$$
$$\le 2\int_0^\infty sr(s)(\varphi(s)H_1+1)ds < \infty$$

eşitsizliği elde edilir.
$\eta < t$ olmak üzere ve monoton yakınsaklık teoreminden ve $\frac{t}{1+t^2} \le \frac{1}{2}$ olduğundan,

$$\frac{|T\vartheta_n(t) - T\vartheta(t)|}{1+t^2} = \frac{|T_1\vartheta_n(t) - T_1\vartheta(t)|}{1+t^2}$$
$$= \left|\int_0^\infty \frac{G(t,s)}{1+t^2} r(s)\left(g^*(s,\vartheta_n(s),\vartheta_n'(s),\vartheta_n''(s)) - g^*\big(s,\vartheta(s),\vartheta'(s),\vartheta''(s)\big)\right)ds\right|$$
$$\le \frac{1}{|1-\eta|}\left\{\int_0^\eta \frac{\left|\frac{\eta^2 s}{2}+\frac{s^3}{6}+ts-\frac{s^2}{2}-t\eta s\right|}{1+t^2} r(s)\left|g^*(s,\vartheta_n(s),\vartheta_n'^{(s)},\vartheta_n{}''(s)) - g^*(s,\vartheta(s),\vartheta'(s),\vartheta''(s))\right|ds\right.$$
$$+\int_\eta^t \frac{\left|\frac{\eta^3}{6}+(ts-\frac{s^2}{2})(1-\eta)\right|}{1+t^2} r(s)|g^*(s,\vartheta_n(s),\vartheta_n{}'(s),\vartheta''(s)) - g^*(s,\vartheta(s),\vartheta'(s),\vartheta''(s))|ds$$
$$\left.+\int_t^\infty \frac{\left|\frac{\eta^3}{6}+\frac{t^2}{2}-\frac{t^2\eta}{2}\right|}{1+t^2} r(s)|g^*(s,\vartheta_n(s),\vartheta_n{}'(s),\vartheta_n{}''(s)) - g^*(s,\vartheta(s),\vartheta'(s),\vartheta''(s))|ds\right\}$$
$$\le \frac{1}{|1-\eta|}\left\{\int_0^\eta \frac{\frac{\eta^2 s}{2}+\frac{s^3}{6}+ts+\frac{s^2}{2}+t\eta s}{1+t^2} r(s)|g^*(s,\vartheta_n(s),\vartheta_n{}'(s),\vartheta_n{}''(s)) - g^*(s,\vartheta(s),\vartheta'(s),\vartheta''(s))|ds\right.$$
$$+\int_\eta^t \frac{\frac{\eta^3}{6}+(ts-\frac{s^2}{2})(1+\eta)}{1+t^2} r(s)|g^*(s,\vartheta_n(s),\vartheta_n{}'(s),\vartheta_n{}''(s)) - g^*(s,\vartheta(s),\vartheta'(s),\vartheta''(s))|ds$$
$$\left.+\int_t^\infty \frac{\frac{\eta^3}{6}+\frac{t^2}{2}+\frac{t^2\eta}{2}}{1+t^2} r(s)|g^*(s,\vartheta_n(s),\vartheta_n{}'(s),\vartheta_n{}''(s)) - g^*(s,\vartheta(s),\vartheta'(s),\vartheta''(s))|ds\right\}$$

$$\leq \frac{1}{|1-\eta|}\left\{\int_0^\eta \frac{\frac{\eta ts}{2}+\frac{\eta ts}{6}+ts+\frac{ts}{2}+t\eta s}{1+t^2} r(s)|g^*(s,\vartheta_n(s),\vartheta_n{}'(s),\vartheta_n{}''(s)) - g^*(s,\vartheta(s),\vartheta'(s),\vartheta''(s))|ds\right.$$
$$+\int_\eta^t \frac{\frac{\eta ts}{6}+ts(1+\eta)}{1+t^2} r(s)|g^*(s,\vartheta_n(s),\vartheta_n{}'(s),\vartheta_n{}''(s)) - g^*(s,\vartheta(s),\vartheta'(s),\vartheta''(s))|ds$$
$$\left.+\int_t^\infty \frac{\frac{\eta ts}{6}+\frac{st}{2}+\frac{ts\eta}{2}}{1+t^2} r(s)|g^*(s,\vartheta_n(s),\vartheta_n{}'(s),\vartheta_n{}''(s)) - g^*(s,\vartheta(s),\vartheta'(s),\vartheta''(s))|ds\right\}$$
$$=\frac{1}{|1-\eta|}\left\{\int_0^\eta \frac{ts\left(\frac{\eta}{2}+\frac{\eta}{6}+1+\frac{1}{2}+\eta\right)}{1+t^2} r(s)|g^*(s,\vartheta_n(s),\vartheta_n{}'(s),\vartheta_n{}''(s)) - g^*(s,\vartheta(s),\vartheta'(s),\vartheta''(s))|ds\right.$$
$$+\int_\eta^t \frac{ts\left(\frac{\eta}{6}+1+\eta\right)}{1+t^2} r(s)|g^*(s,\vartheta_n(s),\vartheta_n{}'(s),\vartheta_n{}''(s)) - g^*(s,\vartheta(s),\vartheta'(s),\vartheta''(s))|ds$$
$$\left.+\int_t^\infty \frac{ts\left(\frac{\eta}{6}+\frac{1}{2}+\frac{\eta}{2}\right)}{1+t^2} r(s)|g^*(s,\vartheta_n(s),\vartheta_n{}'(s),\vartheta_n{}''(s)) - g^*(s,\vartheta(s),\vartheta'(s),\vartheta''(s))|ds\right\}$$
$$\leq \frac{\left(\frac{10\eta}{6}+\frac{3}{2}\right)}{|1-\eta|}\int_0^\infty \frac{ts}{1+t^2} r(s)|g^*(s,\vartheta_n(s),\vartheta_n{}'(s),\vartheta_n{}''(s)) - g^*(s,\vartheta(s),\vartheta'(s),\vartheta''(s))|ds$$
$$\leq \frac{\left(\frac{10\eta}{6}+\frac{3}{2}\right)}{|1-\eta|}\frac{1}{2}\int_0^\infty sr(s)|g^*(s,\vartheta_n(s),\vartheta_n{}'(s),\vartheta_n{}''(s)) - g^*(s,\vartheta(s),\vartheta'(s),\vartheta''(s))|ds$$

elde edilir. $t \leq \eta$ olmak üzere,

$$\frac{|T\vartheta_n(t)-T\vartheta(t)|}{1+t^2}=\frac{|T_1\vartheta_n(t)-T_1\vartheta(t)|}{1+t^2}$$
$$=\left|\int_0^\infty \frac{G(t,s)}{1+t^2} r(s)(g^*(s,\vartheta_n(s),\vartheta_n{}'(s),\vartheta_n{}''(s)) - g^*(s,\vartheta(s),\vartheta'(s),\vartheta''(s)))ds\right|$$
$$\leq \frac{1}{|1-\eta|}\left\{\int_0^t \frac{\left|\frac{\eta^2 s}{2}+\frac{s^3}{6}+ts-\frac{s^2}{2}-t\eta s\right|}{1+t^2} r(s)|g^*(s,\vartheta_n(s),\vartheta_n{}'(s),\vartheta_n{}''(s)) - g^*(s,\vartheta(s),\vartheta'(s),\vartheta''(s))|ds\right.$$
$$+\int_t^\eta \frac{\left|\frac{\eta^2 s}{2}-\frac{s^2\eta}{2}+\frac{s^3}{6}+\frac{t^2}{2}(1-\eta)\right|}{1+t^2} r(s)|g^*(s,\vartheta_n(s),\vartheta_n{}'(s),\vartheta_n{}''(s)) - g^*(s,\vartheta(s),\vartheta'(s),\vartheta''(s))|ds$$
$$\left.+\int_\eta^\infty \frac{\left|\frac{\eta^3}{6}+\frac{t^2}{2}-\frac{t^2\eta}{2}\right|}{1+t^2} r(s)|g^*(s,\vartheta_n(s),\vartheta_n{}'(s),\vartheta_n{}''(s)) - g^*(s,\vartheta(s),\vartheta'(s),\vartheta''(s))|ds\right\}$$

$$\leq \frac{1}{|1-\eta|}\left\{\int_0^t \frac{\frac{\eta^2 s}{2}+\frac{s^3}{6}+ts+\frac{s^2}{2}+t\eta s}{1+t^2} r(s)|g^*(s,\vartheta_n(s),\vartheta_n{}'(s),\vartheta_n{}''(s))\right.$$
$$-g^*(s,\vartheta(s),\vartheta'(s),\vartheta''(s))|ds$$
$$+\int_t^\eta \frac{\frac{\eta^2 s}{2}+\frac{s^2\eta}{2}+\frac{s^3}{6}+\frac{t^2}{2}+\frac{t^2\eta}{2}}{1+t^2} r(s)|g^*(s,\vartheta_n(s),\vartheta_n{}'(s),\vartheta_n{}''(s))-g^*(s,\vartheta(s),\vartheta'(s),\vartheta''(s))|ds$$
$$\left.+\int_\eta^\infty \frac{\frac{\eta^3}{6}+\frac{t^2}{2}+\frac{t^2\eta}{2}}{1+t^2} r(s)|g^*(s,\vartheta_n(s),\vartheta_n{}'(s),\vartheta_n{}''(s))-g^*(s,\vartheta(s),\vartheta'(s),\vartheta''(s))|ds\right\}$$

$$\leq \frac{1}{|1-\eta|}\left\{\int_0^t \frac{s\left(\frac{\eta^2}{2}+\frac{\eta^2}{6}+\eta+\frac{\eta}{2}+\eta^2\right)}{1+t^2} r(s)|g^*(s,\vartheta_n(s),\vartheta_n{}'(s),\vartheta_n{}''(s))\right.$$
$$-g^*(s,\vartheta(s),\vartheta'(s),\vartheta''(s))|ds$$
$$+\int_t^\eta \frac{s\left(\frac{\eta^2}{2}+\frac{\eta^2}{2}+\frac{\eta^2}{6}+\frac{\eta}{2}+\frac{\eta^2}{2}\right)}{1+t^2} r(s)|g^*(s,\vartheta_n(s),\vartheta_n{}'(s),\vartheta_n{}''(s))-g^*(s,\vartheta(s),\vartheta'(s),\vartheta''(s))|ds$$
$$\left.+\int_\eta^\infty \frac{s\left(\frac{\eta^2}{6}+\frac{\eta}{2}+\frac{\eta^2}{2}\right)}{1+t^2} r(s)|g^*(s,\vartheta_n(s),\vartheta_n{}'(s),\vartheta_n{}''(s))-g^*(s,\vartheta(s),\vartheta'(s),\vartheta''(s))|ds\right\}$$

$$=\frac{1}{|1-\eta|}\left\{\int_0^t \frac{s\left(\frac{10\eta^2}{6}+\frac{3\eta}{2}\right)}{1+t^2} r(s)|g^*(s,\vartheta_n(s),\vartheta_n{}'(s),\vartheta_n{}''(s))-g^*(s,\vartheta(s),\vartheta'(s),\vartheta''(s))|ds\right.$$
$$+\int_t^\eta \frac{s\left(\frac{10\eta^2}{6}+\frac{\eta}{2}\right)}{1+t^2} r(s)|g^*(s,\vartheta_n(s),\vartheta_n{}'(s),\vartheta_n{}''(s))-g^*(s,\vartheta(s),\vartheta'(s),\vartheta''(s))|ds$$
$$\left.+\int_\eta^\infty \frac{s\left(\frac{\eta^2}{6}+\frac{\eta}{2}+\frac{\eta^2}{2}\right)}{1+t^2} r(s)|g^*(s,\vartheta_n(s),\vartheta_n{}'(s),\vartheta_n{}''(s))-g^*(s,\vartheta(s),\vartheta'(s),\vartheta''(s))|ds\right\}$$

$$\leq \frac{1}{|1-\eta|}\left(\frac{10\eta^2}{6}+\frac{3\eta}{2}\right)\int_0^\infty sr(s)|g^*(s,\vartheta_n(s),\vartheta_n{}'(s),\vartheta_n{}''(s))-g^*(s,\vartheta(s),\vartheta'(s),\vartheta''(s))|ds$$

elde edilir. Sonuç olarak,

$$\|T\vartheta_n-T\vartheta\|_1 \leq \frac{\max\left\{\frac{1}{2}\left(\frac{10\eta}{6}+\frac{3}{2}\right),\left(\frac{10\eta^2}{6}+\frac{3\eta}{2}\right)\right\}}{|1-\eta|}\int_0^\infty sr(s)|g^*(s,\vartheta_n(s),\vartheta_n{}'(s),\vartheta_n{}''(s))$$
$$-g^*(s,\vartheta(s),\vartheta'(s),\vartheta''(s))|ds$$

$\xrightarrow{n\to\infty}$ 0 elde edilir. Benzer şekilde,

$$\|T\vartheta_n-T\vartheta\|_2 = \sup_{t\in[0,\infty)}\frac{|T\vartheta'_n(t)-T\vartheta'(t)|}{1+t} = \sup_{t\in[0,\infty)}\frac{\left|T_1\vartheta'_n(t)-T_1\vartheta'(t)\right|}{1+t}$$
$$\leq \sup_{t\in[0,\infty)}\left\{\int_0^t \frac{sr(s)}{1+t}\left|g^*\left(s,\vartheta_n(s),\vartheta_n{}'(s),\vartheta_n{}''(s)\right)-g^*\left(s,\vartheta(s),\vartheta'(s),\vartheta''(s)\right)\right|ds\right.$$
$$\left.+\int_t^\infty \frac{tr(s)}{1+t}\left|g^*\left(s,\vartheta_n(s),\vartheta_n{}'(s),\vartheta_n{}''(s)\right)-g^*\left(s,\vartheta(s),\vartheta'(s),\vartheta''(s)\right)\right|ds\right\}$$

$$\leq \int_0^\infty \frac{s}{1+t} r(s)\left|g^*\big(s,\vartheta_n(s),\vartheta_n{}'(s),\vartheta_n{}''(s)\big) - g^*(s,\vartheta(s),\vartheta'(s),\vartheta''(s))\right| ds$$
$$\leq \int_0^\infty sr(s)\left|g^*\big(s,\vartheta_n(s),\vartheta_n{}'(s),\vartheta''(s)\big) - g^*\big(s,\vartheta(s),\vartheta'(s),\vartheta''(s)\big)\right| ds \xrightarrow{n\to\infty} 0$$

elde edilir.

$$\|T\vartheta_n - T\vartheta\|_\infty = \sup_{t\in[0,\infty)} |T\vartheta_n{}''(t) - T\vartheta''(t)| = \sup_{t\in[0,\infty)} \left|T_1{}''\,\vartheta_n(t) - T_1{}''\vartheta(t)\right|$$
$$= \sup_{t\in[0,\infty)} \left|\int_t^\infty r(s)(g^*\big(s,\vartheta_n(s),\vartheta_n{}'(s),\vartheta_n{}''(s)\big) - g^*(s,\vartheta(s),\vartheta'(s),\vartheta''(s)))ds\right|$$
$$\leq \int_0^\infty r(s)\left|g^*\big(s,\vartheta(s),\vartheta_n{}'(s),\vartheta_n{}''(s)\big) - g^*\big(s,\vartheta(s),\vartheta'(s),\vartheta''(s)\big)\right|ds \xrightarrow{n\to\infty} 0$$

elde edilir. Sonuç olarak, $n \longrightarrow \infty$ iken $\|T\vartheta_n - T\vartheta\| \longrightarrow 0$ olur.
$\vartheta_n \longrightarrow \vartheta$ iken $T\vartheta_n \longrightarrow T\vartheta$ olduğundan T süreklidir.

Adım 3. $T : \mathbb{X} \longrightarrow \mathbb{X}$ kompaktır. Bunun için T dönüşümünün, $\mathbb{X}$'in sınırlı bir alt kümesini bağıl kompakt bir kümeye dönüştürdüğünü göstermek yeterlidir.
M, $\mathbb{X}$ uzayının sınırlı bir alt kümesi olsun.
$\vartheta \in M$ alalım. $H_2 = \max\limits_{\substack{0\leq t\leq \|\vartheta\|_\infty \\ \vartheta\in M}} h(t) < \infty$ olsun.

$$\|T\vartheta\|_1 = \sup_{t\in[0,\infty)} \frac{|T\vartheta(t)|}{1+t^2}$$
$$= \sup_{t\in[0,\infty)} \left|\frac{A\left(t+\frac{\eta}{2(1-\eta)}\right) + B\left(\frac{t^2}{2} + \frac{\eta^3}{6(1-\eta)}\right)}{1+t^2} + \int_0^\infty \frac{G(t,s)}{1+t^2} r(s) g^*\big(s,\vartheta(s),\vartheta'(s),\vartheta''(s)\big)ds\right|$$
$$\leq \frac{|A|}{2} + \left|\frac{A\,\eta}{2(1-\eta)}\right| + \left|\frac{B}{2}\right| + \left|\frac{B\,\eta^3}{6(1-\eta)}\right|$$
$$+ \frac{\max\left\{\frac{5\eta}{6}+\frac{3}{4}, \frac{5\eta^2}{3}+\frac{3\eta}{2}\right\}}{|1-\eta|} \int_0^\infty sr(s)\left|g^*\big(s,\vartheta(s),\vartheta'(s),\vartheta''(s)\big)\right|ds$$
$$\leq \frac{|A|}{2} + \left|\frac{A\,\eta}{2(1-\eta)}\right| + \left|\frac{B}{2}\right| + \left|\frac{B\,\eta^3}{6(1-\eta)}\right| + \frac{\max\left\{\frac{5\eta}{6}+\frac{3}{4}, \frac{5\eta^2}{3}+\frac{3\eta}{2}\right\}}{|1-\eta|} \int_0^\infty sr(s)(H_2\varphi(s)+1)ds$$
$$< \infty$$

elde edilir. Benzer şekilde,

$$\|T\vartheta\|_2 = \sup_{t\in[0,\infty)} \frac{|T'\vartheta(t)|}{1+t}$$
$$= \sup_{t\in[0,\infty)} \left|\frac{A+Bt}{1+t} + \frac{1}{1+t}\int_0^t s\,r(s) g^*\big(s,\vartheta(s),\vartheta'(s),\vartheta''(s)\big)ds\right.$$
$$\left. + \frac{1}{1+t}\int_t^\infty t\,r(s) g^*\big(s,\vartheta(s),\vartheta'(s),\vartheta''(s)\big)ds\right|$$
$$\leq |A| + |B| + \int_0^t s\,r(s)\left|g^*\big(s,\vartheta(s),\vartheta'(s),\vartheta''(s)\big)\right|ds$$
$$+ \int_t^\infty s\,r(s)\left|g^*\big(s,\vartheta(s),\vartheta'(s),\vartheta''(s)\big)\right|ds$$
$$\leq |A| + |B| + \int_0^\infty sr(s)(H_2\varphi(s)+1)ds < \infty$$

elde edilir. Yine benzer şekilde,

$$\|T\vartheta\|_\infty = \sup_{t\in[0,\infty)} |T''\vartheta(t)| = \sup_{t\in[0,\infty)} \left| B + \int_t^\infty r(s) g^*\big(s, \vartheta(s), \vartheta'(s), \vartheta''(s)\big) ds \right|$$
$$\leq |B| + \int_0^\infty r(s) \left| g^*\big(s, \vartheta(s), \vartheta'(s), \vartheta''(s)\big) \right| ds \leq |B| + \int_0^\infty r(s)(H_2\varphi(s) + 1) ds < \infty$$

elde edilir. Sonuç olarak, $\|T\,\vartheta\| < \infty$ olur. O halde, TM düzgün sınırlıdır.
Bunların yanı sıra, $k > 0$ için $t_1, t_2 \in [0, k]$ olsun.

$$\left| \frac{T\vartheta(t_1)}{1+{t_1}^2} - \frac{T\vartheta(t_2)}{1+{t_2}^2} \right|$$
$$\leq \left| \frac{A\left(t_1 + \frac{\eta}{2(1-\eta)}\right) + B\left(\frac{{t_1}^2}{2} + \frac{\eta^3}{6(1-\eta)}\right)}{1+{t_1}^2} - \frac{A\left(t_2 + \frac{\eta}{2(1-\eta)}\right) + B\left(\frac{{t_2}^2}{2} + \frac{\eta^3}{6(1-\eta)}\right)}{1+{t_2}^2} \right|$$
$$+ \int_0^\infty \left| \frac{G(t_1,s)}{1+{t_1}^2} - \frac{G(t_2,s)}{1+{t_2}^2} \right| r(s) \left| g^*\big(s, \vartheta(s), \vartheta'(s), \vartheta''(s)\big) \right| ds$$
$$\leq \left| \frac{A\left(t_1 + \frac{\eta}{2(1-\eta)}\right) + B\left(\frac{{t_1}^2}{2} + \frac{\eta^3}{6(1-\eta)}\right)}{1+{t_1}^2} - \frac{A\left(t_2 + \frac{\eta}{2(1-\eta)}\right) + B\left(\frac{{t_2}^2}{2} + \frac{\eta^3}{6(1-\eta)}\right)}{1+{t_2}^2} \right|$$
$$+ \int_0^\infty \left| \frac{G(t_1,s)}{1+{t_1}^2} - \frac{G(t_2,s)}{1+{t_2}^2} \right| r(s)(H_2\varphi(s) + 1) ds,$$

$$\left| \frac{(T\vartheta)'(t_1)}{1+{t_1}^2} - \frac{(T\vartheta)'(t_2)}{1+{t_2}^2} \right| \leq \left| \frac{A + Bt_1}{1+t_1} - \frac{A + Bt_2}{1+t_2} \right| + \int_0^\infty \left| \frac{\frac{\partial G(t_1,s)}{\partial t}}{1+{t_1}^2} - \frac{\frac{\partial G(t_2,s)}{\partial t}}{1+{t_2}^2} \right| r(s) \left| g^*\big(s, \vartheta(s), \vartheta'(s), \vartheta''(s)\big) \right| ds$$
$$\leq \left| \frac{A + Bt_1}{1+t_1} - \frac{A + Bt_2}{1+t_2} \right| + \int_0^\infty \left| \frac{\frac{\partial G(t_1,s)}{\partial t}}{1+{t_1}^2} - \frac{\frac{\partial G(t_2,s)}{\partial t}}{1+{t_2}^2} \right| r(s)(H_2\varphi(s) + 1) ds,$$

$$|(T\vartheta)''(t_1) - (T\vartheta)''(t_2)| = \left| \int_{t_1}^\infty r(s) g^*\big(s, \vartheta(s), \vartheta'(s), \vartheta''(s)\big) ds - \int_{t_2}^\infty r(s) g^*\big(s, \vartheta(s), \vartheta'(s), \vartheta''(s)\big) ds \right|$$
$$\leq \int_{t_1}^{t_2} r(s)(H_2\varphi(s) + 1) ds$$

elde edilir. Böylece herhangi bir $\varepsilon > 0$ için,

$$\left| \frac{T\vartheta(t_1)}{1+{t_1}^2} - \frac{T\vartheta(t_2)}{1+{t_2}^2} \right| < \varepsilon, \quad \left| \frac{(T\vartheta)'(t_1)}{1+{t_1}^2} - \frac{(T\vartheta)'(t_2)}{1+{t_2}^2} \right| < \varepsilon, \quad |(T\vartheta)''(t_1) - (T\vartheta)''(t_2)| < \varepsilon$$

ve $|t_1 - t_2| < \delta,\ \ t_1, t_2 \in [0, k]$ olacak şekilde bir $\delta > 0$ vardır. k keyfi olduğundan, $\left\{\frac{T\vartheta}{1+t^2}\right\}, \left\{\frac{(T\vartheta)'}{1+t}\right\}$ ve $\{(T\vartheta)''\}$ bağlı fonksiyonlar $[0, \infty)$ üzerinde aynı dereceden yerel süreklidir. $\vartheta \in \mathbb{X}$ için,

$$\left|\frac{(T\vartheta)(t)}{1+t^2} - \lim_{t\to\infty}\frac{(T\vartheta)(t)}{1+t^2}\right| = \left|\frac{(T\vartheta)(t)}{1+t^2} - \frac{B}{2}\right| \longrightarrow 0, \qquad t \to \infty$$

$$\left|\frac{(T\vartheta)'(t)}{1+t} - \lim_{t\to\infty}\frac{(T\vartheta)'(t)}{1+t}\right| = \left|\frac{(T\vartheta)'(t)}{1+t} - B\right| \longrightarrow 0, \qquad t \to \infty$$

$$\left|(T\vartheta)''(t) - \lim_{t\to\infty}(T\vartheta)''(t)\right| = |(T\vartheta)''(t) - B| = \left|\int_t^\infty r(s)g^*\big(s, \vartheta(s), \vartheta'(s), \vartheta''(s)\big)ds\right| \longrightarrow 0$$

elde edilir. Buradan, $\left\{\frac{T\vartheta}{1+t^2}\right\}, \left\{\frac{(T\vartheta)'}{1+t}\right\}$ ve $\{(T\vartheta)''\}$ bağlı fonksiyonlarının ∞'da aynı dereceden yakınsak olduğu görülür. Sonuç olarak, Teorem 1.1. (Modifiye edilmiş Arzela - Ascoli Teoremi) için koşullar sağlanmış olur. Böylece $T\vartheta$'in bağıl kompakt olduğu elde edilir. Bu nedenle $T : \mathbb{X} \longrightarrow \mathbb{X}$ tamamen süreklidir ve Schäuder sabit nokta teoremine göre T'nin (2.7) probleminin çözümü olan en az bir $\vartheta \in \mathbb{X}$ noktasının olduğu garantilenmektedir.

Şimdi, bu ϑ'in $\alpha'(t) \le \vartheta'(t) \le \beta'(t),\quad t \in [0, \infty)$ eşitsizliğini sağladığı gösterilmelidir.
Sonuç (2.1)'den yola çıkarak, $\alpha(t) \le \vartheta(t) \le \beta(t),\quad t \in [0, \infty)$ sonucuna varılacaktır. Bunun için her $t \in [0, \infty)$ için $\vartheta'(t) \le \beta'(t)$ şeklinde olduğu gösterilmelidir. Eğer bu doğru değil ise;

$$\vartheta'(t_0) - \beta'(t_0) = \sup_{t\in[0,\infty)}\big(\vartheta'(t) - \beta'(t)\big) > 0$$

olacak şekilde en az bir $t_0 \in [0, \infty)$ vardır. $\lim_{t\to\infty}\big(\vartheta''(t) - \beta''(t)\big) \le 0$ olmasından dolayı üç durumda değerlendirilmelidir:

Durum 1. $t_0 = 0$ olsun. O halde,

$$\vartheta'(0) - \beta'(0) = \lim_{t\to 0^+}\vartheta'(t) - \beta'(t) = \sup_{t\in[0,\infty)}\vartheta'(t) - \beta'(t) > 0$$

olur. $\vartheta'(0) = A,\ \beta'(0) \ge A$ sınır koşulları kullanılarak $\vartheta'(0) - \beta'(0) \le 0$ elde edilir ki bu bir çelişkidir. O halde, $t_0 = 0$ olamaz.

Durum 2. $t_0 \in (0, \infty)$ olsun. $\vartheta''(t_0) - \beta''(t_0) = 0,\ \ \vartheta'''(t_0) - \beta'''(t_0) \le 0$ olur.
g^* ın tanımı ve modifiye edilmiş (3.2) denkleminden ve ayrıca $N > \sup_{t\in[0,\infty)}|\beta''(t)|$ olduğundan

$$\vartheta'''(t_0) = -r(t_0)g^*(t_0, \vartheta(t_0), \vartheta'(t_0), \vartheta''(t_0))$$

olur. $\vartheta'(t_0) > \beta'(t_0)$ olduğundan

$$\vartheta'''(t_0) = -r(t_0)\left(g_1\big(t_0, \vartheta(t_0), \beta'(t_0), \beta''(t_0)\big) + \frac{\beta'(t_0) - \vartheta'(t_0)}{1 + |\beta'(t_0) - \vartheta'(t_0)|}\right)$$

olur. g_1 in tanımından ve (3.1) eşitsizliğinden

$$\vartheta'''(t_0) \ge -r(t_0)\left(g\big(t_0, \beta(t_0), \beta'(t_0), \beta''(t_0)\big) + \frac{\beta'(t_0) - \vartheta'(t_0)}{1 + |\beta'(t_0) - \vartheta'(t_0)|}\right)$$

olur. O halde,

$$\vartheta'''(t_0) \ge -r(t_0)\left(g\big(t_0, \beta(t_0), \beta'(t_0), \beta''(t_0)\big) + \frac{\beta'(t_0) - \vartheta'(t_0)}{1 + |\beta'(t_0) - \vartheta'(t_0)|}\right)$$

$\geq -r(t_0)(g(t_0, \beta(t_0), \beta'(t_0), \beta''(t_0)) - r(t_0)\dfrac{\beta'(t_0) - \vartheta'(t_0)}{1 + |\beta'(t_0) - \vartheta'(t_0)|}$
$> -r(t_0)g(t_0, \beta(t_0), \beta'(t_0), \beta''(t_0)) \geq \beta'''(t_0)$
olur. Yani, $\vartheta'''(t_0) > \beta'''(t_0)$ elde edilir ki bu da bir çelişkidir. O halde, $t_0 \in (0, \infty)$ olamaz.

Durum 3. $t_0 = \infty$ olsun. $\vartheta'(\infty) - \beta'(\infty) = \sup\limits_{t\in[0,\infty)} [\vartheta'(t) - \beta'(t)] > 0$
olur. $\vartheta''(\infty) = B$ ve $\beta''(\infty) \geq B$ sınır koşullarından $\vartheta''(\infty) - \beta''(\infty) \leq 0$ olur. Ayrıca, $\vartheta'''(\infty) \leq \beta'''(\infty)$ olduğundan Durum 2 ye benzer şekilde ispatlanır. Öyleyse, $\forall\, t \in [0, \infty)$ için $\vartheta'(t) \leq \beta'(t)$ elde edilir.
$t \in [0, \infty)$ için $\alpha'(t) \leq \vartheta'(t)$ eşitsizliğinin ispatı da benzer şekilde gösterilir. Yani, ϑ'in
$\alpha'(t) \leq \vartheta'(t) \leq \beta'(t), \quad t \in [0, \infty)$
eşitsizliğini sağladığı gösterilmiştir. Bu eşitsizliği 0 dan t integralleyip Sonuç (2.6) kullanılarak
$\alpha(t) \leq \vartheta(t) \leq \beta(t), \quad t \in [0, \infty)$ sonucuna varılmış olur.
Son olarak $t \in [0, \infty)$ için $|\vartheta''(t)| < N$ olduğu gösterelim.
$|\vartheta''(t)| \geq N$ sağlayacak şekilde bir $t \in [0, \infty)$ olsun. $\lim\limits_{t\to\infty} \vartheta''(t) = B < N$ olduğundan $t \geq T$ için $|\vartheta''(t)| < N$ eşitsizliğini sağlayan bir $T > 0$ vardır.
$t_1 = \inf\{t \leq T : |\vartheta''(s)| < N,\ \forall s \in [0, \infty)\}$ olsun. Her $t > t_1$ için $|\vartheta''(t_1)| = N$ ve $|\vartheta''(t)| < N$ olmak üzere her $t \in [t_2, t_1]$ için $|\vartheta''(t)| \geq N$ koşulunu sağlayan bir $t_2 < t_1$ vardır. Şimdi, $t \in [t_2, t_1]$ için $\vartheta''(t_1) = N$ ve $\vartheta''(t) \geq N$ veya $t \in [t_2, t_1]$ için $\vartheta''(t_1) = -N$ ve $\vartheta''(t) \leq -N$ durumları göz önüne alınmalıdır. $t \in [t_2, t_1]$ için $\vartheta''(t_1) = N$ ve $\vartheta''(t) \geq N$ olması durumunda,

$$\int_r^N \frac{s}{h(s)} ds \leq \int_B^N \frac{s}{h(s)} ds = -\int_{t_1}^{\infty} \frac{\vartheta''(s)}{h(\vartheta''(s))} \vartheta'''(s) ds$$
$$= -\int_{t_1}^{\infty} \frac{-r(s)g(s, \vartheta(s), \vartheta'(s), \vartheta''(s))\vartheta''(s)}{h(\vartheta''(s))} ds \ \leq \int_{t_1}^{\infty} r(s)\varphi(s)\vartheta''(s) ds$$
$$\leq \mathrm{m} \int_{t_1}^{\infty} \frac{\vartheta''(s)}{(1+s)^{\gamma}} ds = \mathrm{m}\left(\int_{t_1}^{\infty} \left(\frac{\vartheta'(s)}{(1+s)^{\gamma}}\right)' ds - \int_{t_1}^{\infty} \vartheta'(s) \left(\frac{1}{(1+s)^{\gamma}}\right)' ds\right)$$
$$\leq \mathrm{m}\left(\sup_{t\in[0,\infty)} \frac{\beta'(t)}{(1+t)^{\gamma}} - \inf_{t\in[0,\infty)} \frac{\alpha'(t)}{(1+t)^{\gamma}} + \frac{\gamma}{\gamma - 1} \max\{\|\beta\|_2, \|\alpha\|_2\}\right) < \int_r^N \frac{s}{h(s)} ds$$

elde edilir ve bu bir çelişkidir. $t \in [t_2, t_1]$ için $\vartheta''(t_1) = -N$ ve $\vartheta''(t) \leq -N$ olması durumunda da benzer bir çelişki elde edilir. Dolayısıyla, her $t \in [0, \infty)$ için $|\vartheta''(t)| < N$ olur. Bunun sonucunda yukarıda tanımladığımız yardımcı fonksiyonların tanımından ve elde edilen sonuçlardan
$$\vartheta'''(t) = -r(t)g^*(t, \vartheta(t), \vartheta'(t), \vartheta''(t)) = -r(t)g_1(t, \vartheta(t), \vartheta'(t), \vartheta''(t)) = -r(t)g(t, \vartheta(t), \vartheta'(t), \vartheta''(t))$$
elde edilir ve modifiye problemin (2.7) çözümü olan ϑ'in (1.2) probleminin de bir çözümü olduğu gösterilmiş olur.

4. Tartışma

Bu çalışmada, yarı sonsuz aralık üzerinde üçüncü mertebeden üç noktalı integral koşullu sınır değer problemi ele alınmıştır. Problemin sınır koşullarından birisi integral koşulludur. Son zamanlarda integral sınır koşullu diferansiyel denklemlerin kullanılması popüler hale gelmiştir. Diğer sınır koşulları da integral koşullu olarak alınarak da problem incelenebilir. Fakat bu sefer problemin integral denklem olarak ifade edilmesi bir hayli zorlaşmaktadır. Ayrıca sınır koşulları daha çok noktalı düşünülerek yeni bir problem olarak incelenebilir. Problemdeki $f(t,.)$ negatif olmayan fonksiyonu işaret değiştiren bir fonksiyon olması halinde başka bir çalışma daha ortaya çıkacaktır. Problemin yarı sonsuz aralık üzerinde tanımlı olması operatörün kompakt olduğunun gösterilmesini zorlaştırmaktadır. Problemimiz için Green fonksiyonu oluşturulmuştur. Green fonksiyonu alttan veya üstten sınırlı değildir. Bu yüzden alt ve üst çözümler ile Nagumo koşulu tanımlanmıştır. Problemimizin varsayılan alt ve üst çözümler arasında en az bir çözümünün varlığı Schäuder Sabit Nokta Teoremi kullanılarak ortaya koyulmuştur. Bu probleme diğer Krasnosels'kii, Leggett-williams, Avery-Anderson sabit nokta teoremleri gibi diğer sabit nokta teoremleri Green fonksiyonun alt ve üst sınırlarını bulamadığımızdan uygulanamamıştır.

Kaynaklar

[1] Anar, İ.E., Kısmi Diferansiyel Denklemler, Palme, Ankara, (2005).

[2] Agarwal, R.P., Boundary value problems for higher order differential equations, World Scientific, Singapore, (1986).

[3] Nagumo, M., Über die differentialgleichung, Proc. Phys. Math. Soc., Japan 19:861– 866, (1937).

[4] Dragoni, G.S., IL Problema dei valori ai limiti studiato in grande per gli integrali di una equazione differenziale del secondo ordine, Giornale di Mat., Battaglini, 69:77-112, (1931).

[5] Jackson, L. and Schrader, K., Third order differential equations, Journal of Differential Equations 9:46-54, (1971).

[6] Boucherif, A., Third order boundary value problems with integral boundary conditions, Nonlinear Anal., 70:364–371, (2009).

[7] Agarwal, R.P. and Çetin, E., Unbounded solutions of third order three point boundary value problems on a half-line, Advances in Nonlinear Analysis, 5 (2):105-119, (2015).

[8] Bai, C. and Li, C., Unbounded upper and lower solution method for third-order boundary value problems on the half-line, Electron J. Differ. Equ., 119:1-2, (2009).

[9] Eloe, P.W., Kaufmann, E.R. and Tisdell, C.C., Multiple solutions of a boundary value problem on an unbounded domain. Dyn. Syst. Appl., 15:53-63, (2006).

[10] Enguiça, R., Gavioli, A. and Sanchez, L., Solutions of second order and fourth-order ODEs on the half-line, Nonlinear Analysis, 73:2968-2979, (2010).

[11] Lian, H., Zha, J. and Agarwal, R.P., Upper and lower solution method for nth-order BVPs on an infinite interval, Boundary Value Problems, 2014:100 17, (2014).

[12] Lian, H., Wang, P. and Ge, W., Unbounded upper and lower solutions method for Sturm-Liouville boundary value problem on infinite intervals, Nonlinear Analysis, 70:2627-2633, (2009).

[13] Yan, B. and Liu, Y., Unbounded solutions of the singular boundary value problems for second order differential equations on the half-line, Appl. Math. Comput., 147:629-644, (2004).

[14] Zhao, Y., Chen, H. and Xu, C., Existence of multiple solutions for three-point

boundary-value problems on infinite intervals in Banach spaces, Electron. J. Differ. Equ., 44:1-11, (2012).

[15] Ege, Ş.M. ve Çetin, E., Yarı Sonsuz Aralık Üzerinde Dördüncü Mertebeden Üç Noktalı Sınır Değer Problemlerinin Çözümlerinin Varlığı, Ege üniversitesi Bilimsel Araştırma Projesi, Fen Fakültesi Matematik Bölümü, Bornova, İzmir, (2018).

[16] Picard, E., Sur I'application des méthodes d'approximations successives á I'étude de certaines équations différentielles ordinaires, J. De Math., 9:217-271, (1893).

[17] Akcan, U. ve Çetin, E., The lower and upper solution method for three-point boundary value problems with integral boundary conditions on a half-line, Filomat 32(1):341-353, (2018).

[18] Agarwal, R.P. and O'Regan, D., Infinite interval problems for differential, Difference and Integral Equations, Kluwer Academic Publishers, Dordrecht, (2001).

[19] Smart, D.R., Fixed point theorems. Cambridge University Press, Cambridge, (1974).

[20] Fei Yang, F., Lin, Y., Zhang, J. and Lou, Q., Positive Solutions for Third-Order Boundary Value Problems with the Integral Boundary Conditions and Dependence on the First-Order Derivatives, Journal of Applied Mathematics, Article ID 8411318, 6 pages, (2022)

[21] Cabada, A. and N.D. Dimitrov, N.D., Third-order differential equations with three-point boundary conditions, Open Mathematics, 19: 11–31, (2021).