

Alternatif çatıdan elde edilen dual Smarandache eğrileri ve regle yüzeyleri

Dual Smarandache curves and ruled surfaces obtained from the alternative frame

Veysi CENGİZ^{1,a}, Hatice KUŞAK SAMANCI^{*2,b}

¹ Bitlis Eren Üniversitesi Lisansüstü Eğitim Enstitüsü, Matematik Bölümü, 13000, Bitlis

² Bitlis Eren Üniversitesi Fen Edebiyat Fakültesi, Matematik Bölümü, 13000, Bitlis

• Geliş tarihi / Received: 03.10.2021

• Düzeltilerek geliş tarihi / Received in revised form: 07.02.2022

• Kabul tarihi / Accepted: 13.02.2022

Öz

E-Study teoremi gereği dual uzayda dual birim küre üzerinde seçilen dual Smarandache eğrisi Öklid-3 uzayındaki yönlü doğruların oluşturmuş olduğu regle yüzeye karşılık gelir. Bu çalışmada alternatif çatının dual bileşenlerinin yardımıyla oluşturulan dual Smarandache eğrilerine karşılık gelen regle yüzeylerine ait bazı karakterizasyonlar incelenmiştir.

Anahtar kelimeler: Alternatif çatı, Dual eğri, Dual Smarandache eğrisi, Dual uzay, E-Study teoremi, Smarandache eğrisi

Abstract

According to the E-Study theorem, the dual Smarandache curve chosen on the dual unit sphere in dual space corresponds to the ruled surface formed by the directional lines in the Euclidean 3-space. In this study, some characterizations of ruled surfaces corresponding to dual Smarandache curves constructed with the help of dual components of the alternative frame are investigated.

Keywords: Alternative frame, Dual curve, Dual Smarandache curve, Dual space, E-Study theorem, Smarandache curve

^{*b} Hatice KUŞAK SAMANCI; hkusak@beu.edu.tr; Tel: (0541) 344 97 91; orcid.org/ 0000-0001-6685-236X

^a orcid.org/0000-0001-7843-6793

1. Giriş

1. Introduction

Yüzeyler teorisi üzerine ilk inceleme Monge (1795) tarafından yazılmıştır (Monge, 1809). Serret-Frenet vektörleri sayesinde eğrinin eğrilik ve burulması hesaplanabilmektedir. Adını Jean Frédéric Frenet (1847) ve Joseph Alfred Serret (1851)'den alan Serret-Frenet çatısının elemanları olan $\{\vec{T}, \vec{N}, \vec{T} \wedge \vec{N} = \vec{B}\}$ vektörleri sırasıyla bir α regüler eğrisinin teğet, normal ve bu iki vektörün vektörel çarpımı ile elde edilen binormal vektördür (Izumiya & Takeuchi, 2004; Hacısalihoğlu, 1983a, 1983b). Eğrinin bir alternatif hareketli çatısı $\{\vec{N}, \vec{C}, \vec{W}\}$ olup bu çatı 2016 yılında Uzunoğlu ve arkadaşları tarafından oluşturulmuştur (Uzunoğlu, 2016). Özel bir eğri çeşidi olan Smarandache eğrileri de farklı uzay ve çatılar üzerinde çalışma yapılan özel bir eğri çeşididir (Gürses vd., 2016; Karaman vd., 2014). Konum vektörü başka bir düzgün eğri üzerindeki Serret-Frenet çatısı vektörlerinden oluşan düzenli bir eğriye Smarandache eğrisi denir (Ascbacher, 1997). A.T. Ali, Öklid uzayında bazı özel Smarandache eğrilerini incelemiştir (Ali, 2010). Bektaş ve Yüce (2013), üç boyutlu Öklid uzayında özel Smarandache eğrilerinin Darboux çatısını incelemiştir (Bektaş & Yüce, 2013). Regle yüzeyleri ilk olarak Monge (1850) tarafından tanımlansa da bunun üzerine çalışmalar Guggenheimer tarafından yapılmıştır. Karmaşık sayılarla Öklid düzleminde sadece dönme işleminin yapılabilmesi öteleme hareketinin yapılamaması sonucu araştırmacılar bir arayış içine girmişlerdir. Bu arayış sonunda hem dönme hem de öteleme hareketlerinin yapılabilmesini sağlayan dual sayıların keşfi sağlanmıştır. Dual uzayın elemanları olan dual sayılar ilk kez 1873 yılında W.K. Clifford (1873) tarafından keşfedilmiştir (Clifford, 1873). E-Study dual sayıları dual vektörleri oluşturmak için kullanmış ve birim dual küre ile yönlü doğru arasındaki bağıntıyı açıklamıştır (Study, 1903). Dual sayılar ve dual vektörler uygulamalı geometride robotik hareketleri kolay bir biçimde gerçekleştirebilmek için kullanılmaktadır. Baky (2002) dual uzayda Blaschke çatısını ve dual Serret-Frenet çatısını tanımlamıştır (Abdel-Baky, 2002). Dual küresel eğriler Öklid uzayında bir regle yüzeyine karşılık geldiği için birçok araştırmacı tarafından ele alınmıştır (Aslan Güven, 2010; Yaylı & Saraçoğlu, 2012; Yılmaz vd., 2010). Yaylı ve Saraçoğlu dual uzayda dual küresel eğrilerine karşılık gelen regle yüzeylerini çalışmıştır (Yaylı & Saraçoğlu, 2012). Bu çalışmada dual NCW çatısının dual bileşenleri

yardımıyla oluşturulmuş regle yüzeylere ait bazı karakterizasyonlar incelenmiştir.

2. Materyal ve metot

2. Material and method

Öklid 3-uzayında birim hızlı bir α eğrisinin Frenet vektörleri, Frenet türev formülleri ve eğrilikleri sırasıyla,

$$\begin{aligned}\vec{T} &= \vec{\alpha}' \\ \vec{N} &= \frac{\vec{\alpha}''}{\|\vec{\alpha}''\|}, \vec{B} = \vec{T} \wedge \vec{N} \\ \vec{T}' &= \kappa \vec{N}, \vec{N}' = -\kappa \vec{T} + \tau \vec{B}, \vec{B}' = -\tau \vec{N}\end{aligned}$$

şeklinde verilir. Burada Serret-Frenet çatısında κ eğrilik ve τ burulmayı verir. Öklid 3-uzayında vektörel çarpım \wedge sembolü ile gösterilir. $\alpha = \alpha(s)$ birim hızlı eğrinin Bishop formülleri ve eğrilikleri

$$\begin{aligned}\vec{T}' &= k_1 \vec{N}_1 + k_2 \vec{N}_2, \vec{N}'_1 = -k_1 \vec{T}, \vec{N}'_2 = -k_2 \vec{T} \\ k_1 &= \kappa \cos \varphi(s), \quad k_2 = \kappa \sin \varphi(s)\end{aligned}$$

ile verilir.

Burada Bishop çatısı, Frenet çatısının $\varphi(s) = -\int \tau ds$ açısı kadar döndürülmüş halidir (Bishop, 1975; Karacan 2008; Bükcü & Karacan, 2008a, 2008b, 2009, 2010; Yılmaz & Turgut, 2010; Samancı & Kocayığıt, 2019).

$\alpha(s)$ birim hızlı eğrisinin $\{\vec{T}, \vec{N}, \vec{B}\}$ Frenet çatısından elde edilen

$$\begin{aligned}V_{TN}(s) &= \frac{1}{\sqrt{2}}(\vec{T} + \vec{N}), \\ V_{TB}(s) &= \frac{1}{\sqrt{2}}(\vec{T} + \vec{B}) \\ V_{NB}(s) &= \frac{1}{\sqrt{2}}(\vec{N} + \vec{B}), \\ V_{TNB}(s) &= \frac{1}{\sqrt{3}}(\vec{T} + \vec{N} + \vec{B})\end{aligned}$$

eğrilere, sırasıyla, $\vec{T}\vec{N}$ Smarandache eğrisi, $\vec{T}\vec{B}$ Smarandache eğrisi, $\vec{N}\vec{B}$ Smarandache eğrisi, $\vec{T}\vec{N}\vec{B}$ Smarandache eğrisi denir (Gürses vd., 2016; Karaman vd., 2014).

1995 yılında Scofield, \vec{C} vektörünü tanımlamış (Scofield, 1995), Uzunoğlu vd (Uzunoğlu vd., 2016) $\{\vec{N}, \vec{C}, \vec{N} \wedge \vec{C} = \vec{W}\}$ şeklinde yeni bir alternatif hareketli çatı oluşturmuşlardır. Bu alternatif çatıda verilen \vec{W} birim Darboux vektörü olmak üzere $\vec{C} = \vec{W} \wedge \vec{N}$ ile verilmektedir. Alternatif hareketli çatının türev vektörleri arasında

$$\vec{N}' = f\vec{C}, \quad \vec{C}' = -f\vec{N} + g\vec{W}, \quad \vec{W}' = -g\vec{C}$$

bağıntısı vardır. Burada f, g, σ ve H ifadeleri

$$f = \kappa\sqrt{1+H^2}, \quad g = \sigma f,$$

$$H = \frac{\tau}{\kappa}, \quad \sigma = \frac{H'}{\kappa(1+H^2)^{\frac{3}{2}}} = sbt$$

şeklinde verilir (Uzunoğlu vd., 2016). Ayrıca Frenet çatısı ve alternatif çatı arasındaki bağıntı

$$\vec{C} = -\bar{\kappa}\vec{T} + \bar{\tau}\vec{B} \qquad \vec{T} = -\bar{\kappa}\vec{C} + \bar{\tau}\vec{W}$$

$$W = \bar{\tau}\vec{T} + \bar{\kappa}\vec{B} \qquad B = \bar{\tau}\vec{C} + \bar{\kappa}\vec{W}$$

eşitlikleri ile elde edilir. Burada $\bar{\kappa} = \frac{\kappa}{\sqrt{\kappa^2 + \tau^2}}$ ve $\bar{\tau} = \frac{\tau}{\sqrt{\kappa^2 + \tau^2}}$ olarak alınır ve \vec{N} asli normal vektörü her iki çatı için de aynıdır (Şenyurt & Çalışkan, 2020).

Yaylı ve arkadaşları birim hızlı bir eğrinin normal vektörü boyunca alternatif hareketli çatısının keyfi bir θ açısı kadar döndürülmesiyle elde edilen ve N-Bishop çatısı olarak adlandırdıkları yeni bir alternatif hareketli çatı tanımlamışlardır. θ açısı \vec{N}_1 ve \vec{C} vektörleri arasındaki açı olmak üzere $\{\vec{N}, \vec{C}, \vec{W}\}$ çatısı ve N-Bishop çatısı $\{\vec{N}, \vec{N}_1, \vec{N}_2\}$ arasındaki bağıntı

$$\vec{N} = \vec{N},$$

$$\vec{C} = \cos \theta (s)\vec{N}_1 + \sin \theta (s)\vec{N}_2,$$

$$\vec{W} = -\sin \theta (s)\vec{N}_1 + \cos \theta (s)\vec{N}_2$$

ile verilir. N-Bishop çatısının türev denklemleri $\vec{N}' = k_1\vec{N}_1 + k_2\vec{N}_2$, $\vec{N}_1' = -k_1\vec{N}$, $\vec{N}_2' = -k_2\vec{N}$ eşitlikleri ile elde edilir. Burada N-Bishop çatısının eğrilikleri $k_1 = f \cos \theta (s)$ ve $k_2 = f \sin \theta (s)$ dir. Ayrıca $\theta = \int_{s_0}^s g(t) dt = \arctan\left(\frac{k_2}{k_1}\right)$ olarak da elde edilir (Keskin & Yaylı, 2017).

$\alpha(s)$ birim hızlı eğrisinin $\{\vec{N}, \vec{C}, \vec{W}\}$ alternatif çatısından elde edilen

$$V_{NC}(s) = \frac{1}{\sqrt{2}}(\vec{N} + \vec{C}),$$

$$V_{NW}(s) = \frac{1}{\sqrt{2}}(\vec{N} + \vec{W}), \quad V_{CW}(s) = \frac{1}{\sqrt{2}}(\vec{C} + \vec{W}),$$

$$V_{NCW}(s) = \frac{1}{\sqrt{3}}(\vec{N} + \vec{C} + \vec{W})$$

eğrilere sırasıyla $\vec{N}\vec{C}$ Smarandache eğrisi, $\vec{N}\vec{W}$ Smarandache eğrisi $\vec{C}\vec{W}$ Smarandache eğrisi ve $\vec{N}\vec{C}\vec{W}$ Smarandache eğrisi denir. Bu eğrilere ait bazı özellikler (Şenyurt & Çalışkan, 2015; Şenyurt vd. 2016a, 2016b; Şenyurt & Kaya, 2018; Çalışkan & Şenyurt, 2020; Şenyurt vd., 2021) kaynaklarında verilmiştir.

$\mathbb{D} = \{\hat{A} = a + \varepsilon a^* : a, a^* \in \mathbb{R}, \varepsilon \neq 0, \varepsilon^2 = 0\}$ cümlesinin elemanlarına dual sayı denir. \mathcal{E} bir dual birim olmak üzere dual sayılar cümlesinde toplama, çarpma, bölme ve eşitlik işlemleri, sırasıyla,

$$\hat{A} \pm \hat{B} = (a + b) \pm \varepsilon(a^* + b^*)$$

$$\hat{A} \cdot \hat{B} = ab + \varepsilon(ab^* + a^*b)$$

$$\frac{\hat{A}}{\hat{B}} = \frac{a}{b} + \varepsilon \frac{a^*b - ab^*}{b^2}$$

$$\hat{A} = \hat{B} \Leftrightarrow a = b \vee \varepsilon a^* = \varepsilon b^*.$$

eşitlikleri ile tanımlıdır. Dual sayılar halkası sıfır bölümlü olmadığından $\mathcal{E}a^*$ elemanlarının tersi yoktur. Bu nedenle dual sayılar cümlesi bir cisim belirtmez sadece değişmeli bir halka belirtmektedir. $\mathbb{D}^3 = \mathbb{D} \times \mathbb{D} \times \mathbb{D}$ cümlesi dual sayılar cümlesi üzerinde bir uzay yapısına ulaşır ve bu uzay \mathbb{D} -modül olarak isimlendirilir (Clifford, 1873). $\hat{A} \neq (\mathbf{0}, a) \in \mathbb{D}$ olmak üzere $\|\hat{A}\| = (1, 0)$ koşulunu sağlayan noktalar cümlesine birim dual vektör adı verilir. Dual kürenin dual noktaları üç boyutlu Öklid uzayında yönlü doğrulara birebir karşılık gelir (Study, 1903).

3. Bulgular

3. Results

E-Study dönüşümü yardımıyla dual birim küre üzerinde seçilen $\{\vec{N}, \vec{C}, \vec{W}\}$ alternatif hareketli çatısının elemanları ile dual uzayda çizilen kapalı eğriler \mathbb{E}^3 Öklid uzayında bir regle yüzey temsil etmektedir. Buradan seçilen dual eğriler $\vec{N} = \vec{N} + \varepsilon\vec{N}^*$, $\vec{C} = \vec{C} + \varepsilon\vec{C}^*$, $\vec{W} = \vec{W} + \varepsilon\vec{W}^*$ olmak üzere, bu eğrilerin belirttiği regle yüzeyler, sırasıyla, aşağıdaki gibidir:

$$\varphi_N(s, v) = \beta_N(s) + v\vec{N}(s), \quad \beta_N(s) = \vec{N} \wedge \vec{N}^*, \quad (1)$$

$$\varphi_C(s, v) = \beta_C(s) + v\vec{C}(s), \quad \beta_C(s) = \vec{C} \wedge \vec{C}^*, \quad (2)$$

$$\varphi_W(s, v) = \beta_W(s) + v\vec{W}(s), \quad \beta_W(s) = \vec{W} \wedge \vec{W}^*. \quad (3)$$

(1), (2), (3) ifadelerinde $\alpha(s)$ yerine

$$\alpha_{NC}(s) = \frac{1}{\sqrt{2}}(\vec{N} + \vec{C})$$

vektörünün çizdiği eğri alınırsa vektörel moment vektörleri

$$\vec{N}^* = \vec{\alpha} \wedge \vec{N} = \left(\frac{\vec{N} + \vec{C}}{\sqrt{2}} \right) \wedge \vec{N} = -\frac{\vec{W}}{\sqrt{2}}$$

$$\vec{C}^* = \vec{\alpha} \wedge \vec{C} = \left(\frac{\vec{N} + \vec{C}}{\sqrt{2}} \right) \wedge \vec{C} = \frac{\vec{W}}{\sqrt{2}}$$

$$\vec{W}^* = \vec{\alpha} \wedge \vec{W} = \left(\frac{\vec{N} + \vec{C}}{\sqrt{2}} \right) \wedge \vec{W} = \frac{\vec{N} - \vec{C}}{\sqrt{2}}$$

şeklinde elde edilir. Bulunan bu değerler (1), (2), (3) denklemlerinde yerine yazılırsa yüzeylerinin denklemleri

$$\vec{\psi}_N(s, v) = \vec{N} \wedge \left(-\frac{\vec{W}}{\sqrt{2}} \right) + v\vec{N} = \frac{\vec{C}}{\sqrt{2}} + v\vec{N}$$

$$\vec{\psi}_C(s, v) = \vec{C} \wedge \left(\frac{\vec{W}}{\sqrt{2}} \right) + v\vec{C} = \frac{\vec{N}}{\sqrt{2}} + v\vec{C}$$

$$\vec{\psi}_W(s, v) = \vec{W} \wedge \left(\frac{\vec{N} - \vec{C}}{\sqrt{2}} \right) + v\vec{W} = \frac{1}{\sqrt{2}}(\vec{N} + \vec{C}) + v\vec{W}$$

olur. Benzer şekilde $\alpha(s)$ yerine

$$\alpha_{\vec{N}\vec{W}}(s) = \frac{1}{\sqrt{2}}(\vec{N} + \vec{W})$$

$$\alpha_{\vec{C}\vec{W}}(s) = \frac{1}{\sqrt{2}}(\vec{C} + \vec{W})$$

ve

$$\alpha_{\vec{N}\vec{C}\vec{W}}(s) = \frac{1}{\sqrt{3}}(\vec{N} + \vec{C} + \vec{W})$$

alındığından bu vektörlerin çizdiği eğriler kullanılarak (1), (2), (3) de verilen yüzeyler tekrar oluşturulur ve sonra da elde edilen yüzeylerin invaryantları hesaplanacaktır.

Teorem 3.1. \vec{NC} - Smarandache eğrisinin Frenet aparatlarından elde edilen $(\vec{N}), (\vec{C}), (\vec{W})$ dual eğrilere çizgiler uzayında karşılık gelen kapalı regle yüzeylerin dağılma parametreleri sırasıyla

$$P_{\vec{N}} = \frac{g}{\sqrt{2}f}, P_{\vec{C}} = 0 \text{ ve } P_{\vec{W}} = \frac{-f}{\sqrt{2}g}$$

şeklinde verilir.

İspat. (\vec{N}) dual eğrisinin belirttiği kapalı regle yüzeyinin dağılma parametresi

$$P_{\vec{N}} = \frac{\det((\vec{N} \wedge \vec{N}^*), \vec{N}, \vec{N}')}{\|\vec{N}'\|^2}$$

bağıntısından hesaplanır. Buradan $P_{\vec{N}}$ dağılma parametresi

$$\det((\vec{N} \wedge \vec{N}^*), \vec{N}, \vec{N}') = \begin{vmatrix} \frac{-f}{\sqrt{2}} & 0 & \frac{g}{\sqrt{2}} \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & f & 0 \end{vmatrix} = \frac{fg}{\sqrt{2}}$$

eşitliğinden yararlanarak

$$P_{\vec{N}} = \frac{g}{\sqrt{2}f} \tag{4}$$

şeklinde bulunur. Benzer işlemler (\vec{C}) ve (\vec{W}) yüzeyleri için de yapılırsa

$$P_{\vec{C}} = 0 \text{ ve } P_{\vec{W}} = \frac{-f}{\sqrt{2}g}$$

olur. Bu teoremden, dayanak eğrisi (\vec{NC}) Smarandache eğrisi ile üretilen (\vec{W}) dual eğrisine karşılık gelen $\vec{\psi}_{\vec{N}\vec{C}}$ kapalı regle yüzeyini için $g = 0$ veya $\frac{t}{\kappa} = sbt$ olması durumunda dağılma parametresinin hesaplanamadığı sonucu elde edilmektedir.

Teorem 3.2. \vec{NC} - Smarandache eğrisinin Frenet aparatlarından elde edilen $(\vec{N}), (\vec{C}), (\vec{W})$ dual eğrilere çizgiler uzayında karşılık gelen kapalı regle yüzeylerin Gauss ve ortalama eğrilikleri sırasıyla

$$K_{\vec{N}} = -\frac{2f^2g^2}{(g^2 + 2v^2f^2)^2}, K_{\vec{C}} = 0,$$

$$K_{\vec{W}} = -\frac{g^2f^2}{2(f^2 + v^2g^2 - \sqrt{2}vfg)^2},$$

$$H_{\vec{N}} = \frac{gf^4}{\sqrt{2}(g^2 + v^2f^2)^3},$$

$$H_{\vec{C}} = \frac{fg(f-1) + \sqrt{2}v(gf' - fg')}{2\sqrt{2}v^2(f^2 + g^2)^{3/2}},$$

$$H_{\vec{W}} = \frac{(f - f' - 2f^2)(\sqrt{2}vfg - f) + g^2f(2v^2 - 3)}{4(v^2g^2 - \sqrt{2}vfg + f^2)^{3/2}}$$

bağıntısıyla verilir.

İspat. (\vec{N}) dual eğrisinin belirttiği kapalı regle yüzeyinin Gauss ve ortalama eğriliğini bulmak için I. esas form ve II. esas form ile birlikte normal vektör alanı hesaplanmalıdır. Öncelikle \vec{N} eğrisinin sırasıyla s ve v parametrelerine göre yönlü türevleri alınmalıdır.

$\vec{\psi}_{\vec{N}s} = \left[\frac{-f\vec{N} + g\vec{W}}{\sqrt{2}} + vf\vec{C} \right]$ ve $\vec{\psi}_{\vec{N}v} = \vec{N}$ dir. Buradan yönlü türevlerin iç çarpımı yardımıyla I. esas formun katsayıları sırasıyla;

$$E = \langle \vec{\psi}_{\vec{N}s}, \vec{\psi}_{\vec{N}s} \rangle = \frac{f^2}{2} + \frac{g^2}{2} + v^2f^2,$$

$$F = \langle \vec{\psi}_{\vec{N}v}, \vec{\psi}_{\vec{N}s} \rangle = \frac{-f}{\sqrt{2}} \text{ ve}$$

$$G = \langle \vec{\psi}_{\vec{N}v}, \vec{\psi}_{\vec{N}v} \rangle = 1$$

olarak bulunur. Daha sonra bulunan bu eşitlikler yardımıyla I. esas form

$$I = \left(\frac{f^2}{2} + \frac{g^2}{2} + v^2f^2 \right) ds^2 - (\sqrt{2}f) dsdv + Idv^2$$

denklemleri ile elde edilir. Şimdi de II. esas formun katsayılarını bulabilmek için (\vec{N}) dual eğrisinin belirttiği normal vektör alanı hesaplanmalıdır. (\vec{N}) dual eğrisinin belirttiği yüzey normali

$$\vec{n} = \frac{\frac{g}{\sqrt{2}}\vec{C} - vf\vec{W}}{\sqrt{v^2 f^2 + \frac{g^2}{2}}} \tag{5}$$

olarak elde edilir. (\hat{N}) dual eğrisinin belirttiği yüzey normali yardımıyla bu eğriye ait II. esas formun katsayılarını bulalım. (\hat{N}) dual eğrisinin S ve V ye göre türev alındığında

$$\vec{\psi}_{\hat{N}_{ss}} = \frac{-f'\vec{N} - f(f'\vec{C}) + g'\vec{W} + g(-g'\vec{C})}{\sqrt{2}} + vf'\vec{C} + vf(-f'\vec{N} + g'\vec{W})$$

olarak hesaplanır. Benzer işlemlerle $\psi_{\hat{N}_{sv}} = f\vec{C}$ ve $\psi_{\hat{N}_{vv}} = 0$ olarak bulunur. Şimdi bu yönlü türevler ve (5) denkleminde II. esas formun katsayıları

$$L = \langle \vec{\psi}_{\hat{N}_{ss}}, \vec{n} \rangle = \left\{ \frac{\frac{g}{\sqrt{2}}((vf)'\frac{g^2}{\sqrt{2}} - \frac{f^2}{\sqrt{2}}) - vf(g + \frac{g'}{\sqrt{2}})}{\sqrt{v^2 f^2 + \frac{g^2}{2}}} \right\},$$

$$M = \langle \vec{\psi}_{\hat{N}_{sv}}, \vec{n} \rangle = (\psi_n)_{s,v} = \frac{f\frac{g}{\sqrt{2}}}{\sqrt{v^2 f^2 + \frac{g^2}{2}}} \text{ ve}$$

$$N = \langle \vec{\psi}_{\hat{N}_{vv}}, \vec{n} \rangle = 0$$

olarak elde edilir. Buradan da

$$K_{\hat{N}} = -\frac{\left(\frac{f\frac{g}{\sqrt{2}}}{\sqrt{v^2 f^2 + \frac{g^2}{2}}}\right)^2}{\frac{f^2}{2} + \frac{g^2}{2} + v^2 f^2 - \frac{f^2}{2}} = -\frac{f^2 g^2}{2\left(\frac{g^2}{2} + v^2 f^2\right)^2},$$

$$H_{\hat{N}} = \frac{-2\left(\frac{f\frac{g}{\sqrt{2}}}{\sqrt{v^2 f^2 + \frac{g^2}{2}}}\right)\frac{-f}{\sqrt{2}}}{2\left(\frac{f^2}{2} + \frac{g^2}{2} + v^2 f^2 - \frac{f^2}{2}\right)} = \frac{(f^2 g)\frac{f^2}{2}}{2\sqrt{\left(\frac{g^2}{2} + v^2 f^2\right)^3}}$$

denklemleri elde edilir. Benzer işlemler ile (\hat{C}) ve (\hat{W}) dual eğrileri için Gauss ve ortalama eğrilik hesaplanır ve böylelikle ispat tamamlanmış olur.

Teorem 3.3. \overline{NC} - Smarandache eğrisinin Frenet aparatlarından elde edilen $(\hat{N}), (\hat{C}), (\hat{W})$ dual vektörlerin oluşturduğu (\vec{w}) Darboux ve (\vec{D}) dual Steiner vektörü

$$\vec{w} = g\vec{N} + f\vec{W} + \varepsilon\left(\frac{f\vec{N} - g\vec{C}}{\sqrt{2}}\right) \text{ ve}$$

$$\vec{D} = \oint \vec{w} = \vec{N} \oint g + \vec{W} \oint f + \varepsilon\left(\vec{N} \oint \left(\frac{f}{\sqrt{2}}\right) - \vec{W} \oint \left(\frac{g}{\sqrt{2}}\right)\right)$$

bağıntısıyla verilir.

İspat. Darboux vektörünün tanımından

$$\vec{w} = w + \varepsilon w^* \tag{6}$$

$$\vec{w}^* = \alpha \wedge \vec{w} = \left(\frac{\vec{N} + \vec{C}}{\sqrt{2}}\right) \wedge (g\vec{N} + f\vec{W}) = \frac{f\vec{N} - f\vec{C} - g\vec{W}}{\sqrt{2}} \tag{7}$$

olur. (7) denklemini (6) da yerine yazılırsa

$$\vec{w} = g\vec{N} + f\vec{W} + \varepsilon\left(\frac{f\vec{N} - f\vec{C} + g\vec{W}}{\sqrt{2}}\right) \text{ olarak}$$

elde edilir. Dual Steiner vektörün tanımından

$$D = \oint \vec{w} = \vec{N} \oint g + \vec{W} \oint f + \varepsilon\left(\vec{N} \oint \left(\frac{f}{\sqrt{2}}\right) - \vec{C} \oint \left(\frac{f}{\sqrt{2}}\right) - \vec{W} \oint \left(\frac{g}{\sqrt{2}}\right)\right)$$

olarak elde edilir. Böylelikle ispat tamamlanmış olur.

Teorem 3.4. \overline{NC} - Smarandache eğrisinin Frenet aparatlarından elde edilen $(\hat{N}), (\hat{C}), (\hat{W})$ dual eğrilerinin çizgiler uzayında karşılık geldiği kapalı regle yüzeylerin dual açıları sırasıyla;

$$\Lambda_{\hat{N}} = \oint g, \Lambda_{\hat{C}} = \frac{\varepsilon}{\sqrt{2}} \oint f \text{ ve } \Lambda_{\hat{W}} = \oint f$$

bağıntısıyla hesaplanır.

İspat.

$$\Lambda_{\hat{N}} = -\langle \vec{D}, \vec{N} \rangle = -\langle \vec{d} + \varepsilon \vec{d}^*, \vec{N} + \varepsilon \vec{N}^* \rangle \tag{8}$$

(8) denklemini düzenlendiğinde

$$\begin{aligned} A_{\vec{N}} &= \left\langle \vec{N} \oint g + \vec{W} \oint f, \vec{N} \right\rangle \\ &+ \varepsilon \left(\left\langle \left(\vec{N} \oint g + \vec{W} \oint f, -\frac{\vec{W}}{\sqrt{2}} \right) \right\rangle \right) \\ &+ \left\langle \vec{N} \oint \left(\frac{f}{\sqrt{2}} \right) - \vec{W} \oint \left(\frac{g}{\sqrt{2}} \right), \vec{N} \right\rangle \end{aligned}$$

elde edilir.

Burada iç çarpımlar yapıldığında

$$A_{\vec{N}} = \oint g$$

denklemini elde edilir. Benzer işlemlerle (\hat{C}) ve (\hat{W}) dual eğrilerine ait dual eğilim açısı hesaplanır ve böylelikle ispat tamamlanmış olur.

$\alpha(s)$ eğrisine ait $\alpha_{\vec{NW}}(s) = \frac{\vec{N} + \vec{W}}{\sqrt{2}}$ Smarandache

eğrisini için $(\hat{N}), (\hat{C}), (\hat{W})$ dual eğrilerinin belirttiği regle yüzeyleri sırasıyla

$$\vec{\psi}_{\vec{N}}(s, \varphi) = \frac{\vec{W}}{\sqrt{2}} + v\vec{N},$$

$$\vec{\psi}_{\vec{C}}(s, v) = \frac{\vec{N} + \vec{W}}{\sqrt{2}} + v\vec{C},$$

$$\vec{\psi}_{\vec{W}}(s, v) = \frac{\vec{N}}{\sqrt{2}} + v\vec{W}$$

olarak verilir.

Teorem 3.5. \vec{NW} - Smarandache eğrisinin Frenet aparatlarından elde edilen $(\hat{N}), (\hat{C}), (\hat{W})$ dual eğrilerin çizgiler uzayında karşılık geldiği kapalı regle yüzeylerinin dağılma parametreleri sırasıyla $P_{\vec{N}} = 0, P_{\vec{C}} = 0$ ve $P_{\vec{W}} = 0$ şeklinde verilir.

İspat. (\hat{N}) dual eğrisinin belirttiği kapalı regle yüzeyinin dağılma parametresi

$$P_{\vec{N}} = \frac{\det((\vec{N} \wedge \vec{N}^*)', \vec{N}, \vec{N}')}{\|\vec{N}'\|^2}$$

denklemini ile hesaplanır. Dağılma parametresindeki determinant

$$\det((\vec{N} \wedge \vec{N}^*)', \vec{N}, \vec{N}') = \begin{vmatrix} 0 & -\frac{g}{\sqrt{2}} & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & f & 0 \end{vmatrix} = 0 \quad (9)$$

olarak elde edilir. (9) denklemini hesaplandığında, $P_{\vec{N}} = 0$ sonucu elde edilir. Benzer işlemler yapıldığında (\hat{C}) dual eğrisinin belirttiği kapalı regle yüzeyinin dağılma parametresi

$$P_{\vec{C}} = \frac{\det((\vec{C} \wedge \vec{C}^*)', \vec{C}, \vec{C}')}{\|\vec{C}'\|^2}$$

olarak verilebilir. Dağılma parametresindeki determinantı hesaplayabilmek için öncelikle

$$(\vec{C} \wedge \vec{C}^*)' = \left(\frac{\vec{N} + \vec{W}}{\sqrt{2}} \right)' = \frac{(f-g)\vec{C}}{\sqrt{2}}$$
 eşitliği elde

edilir. Daha sonra,

$$\det((\vec{C} \wedge \vec{C}^*)', \vec{C}, \vec{C}') = \begin{vmatrix} 0 & \frac{(f-g)}{\sqrt{2}} & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ -f & 0 & g \end{vmatrix} = 0$$

determinantı hesaplandığında, dağılma parametresi $P_{\vec{C}} = 0$ olarak bulunur. (\hat{W}) dual eğrisinin belirttiği kapalı regle yüzeyinin dağılma parametresi

$$P_{\vec{W}} = \frac{\det((\vec{W} \wedge \vec{W}^*)', \vec{W}, \vec{W}')}{\|\vec{W}'\|^2}$$

olarak verilir. Verilen bu determinantı hesaplayabilmek için öncelikle

$$(\vec{W} \wedge \vec{W}^*)' = \left(\frac{\vec{N}}{\sqrt{2}} \right)' = \frac{f\vec{C}}{\sqrt{2}}$$

eşitliği elde edilir. $P_{\vec{W}}$ dağılma parametresi eşitliğindeki

$$\det((\vec{W} \wedge \vec{W}^*)', \vec{W}, \vec{W}') = \begin{vmatrix} 0 & \frac{f}{\sqrt{2}} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & -g & 0 \end{vmatrix} = 0$$

determinantı hesaplandığında verilen dual eğrinin dağılma parametresi $P_W = 0$ olur ve böylelikle ispat tamamlanmış olur. Sonuç olarak $P_{\hat{N}} = 0$, $P_C = 0$ ve $P_{\hat{W}} = 0$ dağılma parametreleri bulunur.

Teorem 3.6. \overline{NW} - Smarandache eğrisinin Frenet aparatlarından elde edilen $(\hat{N}), (\hat{C}), (\hat{W})$ dual eğrilerinin karşılık geldiği kapalı regle yüzeylerin Gauss ve ortalama eğrilikleri sırasıyla,

$$K_{\hat{N}} = 0, K_{\hat{C}} = 0 \text{ ve } K_{\hat{W}} = 0,$$

$$H_{\hat{N}} = \frac{g}{\sqrt{2}g - 2vf},$$

$$H_{\hat{C}} = \frac{fg' - gf'}{2v(f^2 + g^2)^{3/2}},$$

$$H_{\hat{W}} = \frac{f}{2vg - \sqrt{2}f},$$

bağıntılarıyla verilir.

İspat. (\hat{N}) dual eğrisinin belirttiği kapalı regle yüzeyinin Gauss ve ortalama eğriliğini bulmak için I. esas form ve II. esas form ile birlikte normal vektör alanı bulunmalıdır. Öncelikle (\hat{N}) eğrisinin sırasıyla s ve v ye göre yönlü türevleri alındığında

$$\vec{\psi}_{\hat{N}_s} = \left[\frac{-g\vec{c}}{\sqrt{2}} + vf\vec{c} \right] = \frac{(\sqrt{2}vf - g)}{\sqrt{2}}\vec{c} \text{ ve } \vec{\psi}_{\hat{N}_v} = \vec{N}$$

eşitlikleri elde edilir. Buradan yönlü türevlerin iç çarpımı yardımıyla I. esas formun katsayıları sırasıyla;

$$E = \langle \vec{\psi}_{\hat{N}_s}, \vec{\psi}_{\hat{N}_s} \rangle = \frac{(\sqrt{2}vf - g)^2}{2},$$

$$F = \langle \vec{\psi}_{\hat{N}_v}, \vec{\psi}_{\hat{N}_s} \rangle = 0 \text{ ve}$$

$$G = \langle \vec{\psi}_{\hat{N}_v}, \vec{\psi}_{\hat{N}_v} \rangle = 1$$

olarak bulunur. Buradan da I. esas form

$$I = \frac{(\sqrt{2}vf - g)^2}{2} ds^2 + Idv^2 \text{ olarak elde edilir.}$$

Şimdi de II. esas formun katsayılarını bulabilmek için (\hat{N}) dual eğrisinin belirttiği normal vektör alanı bulunmalıdır. (\hat{N}) dual eğrisinin belirttiği normal vektör alanı

$$\vec{n} = \frac{-\frac{(\sqrt{2}vf - g)}{\sqrt{2}}\vec{W}}{\sqrt{\frac{(\sqrt{2}vf - g)^2}{2}}} = -\vec{W} \tag{10}$$

olarak elde edilir. (\hat{N}) dual eğrisinin belirttiği normal vektör alanı yardımıyla bu eğriye ait II. esas formun katsayılarını bulalım. (\hat{N}) dual eğrisinin s ve v ye göre tekrardan yönlü türev alma işlemi uygulandığında;

$$\vec{\psi}_{\hat{N}_{ss}} = -f\vec{N} \frac{(\sqrt{2}vf - g)}{\sqrt{2}} + \left(\frac{(\sqrt{2}vf - g)}{\sqrt{2}} \right)' \vec{c} + g\vec{W} \frac{(\sqrt{2}vf - g)}{\sqrt{2}}$$

denklemi elde edilir. Benzer işlemlerle $\vec{\psi}_{\hat{N}_{sv}} = f\vec{C}$ ve $\psi_{\hat{N}_{vv}} = 0$ olarak bulunur. Şimdi bu yönlü türevler ve (10) denkleminde II. esas formun katsayıları

$$L = \langle \vec{\psi}_{\hat{N}_{ss}}, \vec{n} \rangle = -g \frac{(\sqrt{2}vf - g)}{\sqrt{2}},$$

$$M = \langle \vec{\psi}_{\hat{N}_{sv}}, \vec{n} \rangle = (\vec{\psi}_n)_{s,v} = 0 \text{ ve}$$

$$N = \langle \vec{\psi}_{\hat{N}_{vv}}, \vec{n} \rangle = 0$$

şeklinde elde edilir. Buradan da Gauss ve ortalama eğrilikleri

$$K_{\hat{N}} = 0 \text{ ve } H_{\hat{N}} = \frac{g}{(\sqrt{2}g - 2vf)}$$

olarak bulunur. Benzer işlemler ile (\hat{C}) ve (\hat{W}) dual eğrileri için Gauss ve ortalama eğrilik hesaplanır ve böylelikle ispat tamamlanmış olur.

Teorem 3.7. \overline{NW} - Smarandache eğrisinin Frenet aparatlarından elde edilen $(\hat{N}), (\hat{C}), (\hat{W})$ dual vektörlerin oluşturduğu (\vec{w}) Darboux ve (\vec{D}) dual Steiner vektörü

$$\vec{w} = g\vec{N} + f\vec{W} + \varepsilon \left(\frac{-f + g}{\sqrt{2}} \vec{C} \right) \text{ ve}$$

$$\vec{D} = \oint \vec{w} = \vec{N} \oint g + \vec{W} \oint f + \varepsilon \left(\vec{C} \oint \left(\frac{-f + g}{\sqrt{2}} \right) \right)$$

bağıntısıyla verilir.

İspat. Darboux vektörünün tanımından

$$\vec{w} = w + \varepsilon w^* \tag{11}$$

$$\begin{aligned} \vec{\omega}^* &= \alpha \wedge \vec{\omega} = \left(\frac{\vec{N}+\vec{W}}{\sqrt{2}}\right) \wedge (g\vec{N} + f\vec{W}) = \\ \frac{-f\vec{C}+g\vec{C}}{\sqrt{2}} &= \frac{-f+g}{\sqrt{2}} \vec{C} \end{aligned} \quad (12)$$

olur. (12) denklemi (11) de yerine yazılırsa $\vec{\omega} = g\vec{N} + f\vec{W} + \varepsilon \left(\frac{-f+g}{\sqrt{2}} \vec{C}\right)$ olarak elde edilir. Dual Steiner vektörün tanımından $\vec{D} = \phi R = \vec{N} \phi g + \vec{W} \phi f + \varepsilon \left(\vec{C} \phi \left(\frac{-f+g}{\sqrt{2}}\right)\right)$ olarak elde edilir. Böylelikle ispat tamamlanmış olur.

Teorem 3.8. \overline{NW} - Smarandache eğrisinin Frenet aparatlarından elde edilen $(\vec{N}), (\vec{C}), (\vec{W})$ dual eğrilerinin çizgiler uzayında karşılık geldiği kapalı regle yüzeylerin dual açıları sırasıyla;

$$A_{\vec{N}} = \phi g, \quad A_{\vec{C}} = 0 \quad \text{ve} \quad A_{\vec{W}} = \phi f$$

bağıntısıyla hesaplanır.

İspat.

$$A_{\vec{N}} = -\langle \vec{D}, \vec{N} \rangle = -\langle \vec{d} + \varepsilon \vec{d}^*, \vec{N} + \varepsilon \vec{N}^* \rangle \quad (13)$$

(13) denklemi biraz düzenlenirse

$$\begin{aligned} A_{\vec{N}} &= \left\langle \vec{N} \phi g + \vec{W} \phi f, \vec{N} \right\rangle \\ &+ \varepsilon \left\langle \left(\vec{N} \phi g + \vec{W} \phi f, \frac{\vec{C}}{\sqrt{2}} \right) \right\rangle \\ &+ \left\langle \vec{C} \phi \left(\frac{-f+g}{\sqrt{2}} \right), \vec{N} \right\rangle \end{aligned}$$

elde edilir. Burada iç çarpımlar alındığında,

$A_{\vec{N}} = \phi g$ sonucu elde edilir. Benzer işlemlerle (\vec{C}) ve (\vec{W}) dual eğrilerine ait dual eğilim açısı hesaplanır ve böylelikle ispat tamamlanmış olur.

$\alpha(s)$ eğrisine ait $\alpha_{CW}(s) = \frac{\vec{C} + \vec{W}}{\sqrt{2}}$ Smarandache eğrisini için $(\vec{N}), (\vec{C}), (\vec{W})$ dual eğrilerinin belirttiği regle yüzeyleri sırasıyla

$$\vec{\psi}_{\vec{N}}(s, \varphi) = \vec{N} \wedge \vec{N}^* + v\vec{N} = \frac{\vec{W} + \vec{C}}{\sqrt{2}} + v\vec{N},$$

$$\vec{\psi}_{\vec{C}}(s, v) = \frac{\vec{W}}{\sqrt{2}} + v\vec{C} \quad \text{ve}$$

$$\vec{\psi}_{\vec{W}}(s, v) = \frac{-\vec{N}}{\sqrt{2}} + v\vec{W} \quad \text{olarak verilir.}$$

Teorem 3.9. \overline{CW} - Smarandache eğrisinin Frenet aparatlarından elde edilen $(\vec{N}), (\vec{C}), (\vec{W})$ dual

eğrilerinin çizgiler uzayında karşılık geldiği kapalı regle yüzeylerin dağılma parametreleri

$$P_{\vec{N}} = \frac{fg}{\sqrt{2}(f^2+g^2)}, \quad P_{\vec{C}} = 0 \quad \text{ve} \quad P_{\vec{W}} = \frac{f}{\sqrt{2}g}$$

Teoremden, dayanak eğrisi $\hat{C}\hat{W}$ Smarandache eğrisi ile üretilen (\vec{W}) dual eğrisine karşılık gelen $\psi_{\hat{C}\hat{W}}$ kapalı regle yüzeyini için $g = 0$ veya $\frac{\tau}{\kappa} = sbt$ olması durumunda dağılma parametresinin hesaplanamadığı sonucu elde edilmektedir.

Teorem 3.10. \overline{CW} - Smarandache eğrisinin Frenet aparatlarından elde edilen $(\vec{N}), (\vec{C}), (\vec{W})$ dual eğrilerinin çizgiler uzayında karşılık geldiği kapalı regle yüzeylerin Gauss ve ortalama eğrilikleri

$$K_{\vec{N}} = \frac{2f^2g^2}{[(\sqrt{2}vf+f-g)^2+g^2][(\sqrt{2}vf-g)^2+g^2]},$$

$$K_{\vec{C}} = 0, \quad K_{\vec{W}} = 0$$

$$H_{\vec{N}} =$$

$$\frac{-2g^3 - f^2g(1+2v^2) + \sqrt{2}fg(-2+2vg+v) + \sqrt{2}v(gf' - fg')}{\sqrt{2}((\sqrt{2}vf-g)^2+g^2)\sqrt{(\sqrt{2}vf+f-g)^2+g^2}}$$

$$H_{\vec{C}} = \frac{g'f - f'g - g^2f}{2v[f^2+g^2]^{3/2}},$$

$$H_{\vec{W}} = \frac{f}{\sqrt{2}f - 2vg}$$

bağıntılarıyla verilir.

Teorem 3.11. \overline{CW} - Smarandache eğrisinin Frenet aparatlarından elde edilen $(\vec{N}), (\vec{C}), (\vec{W})$ dual vektörlerin oluşturduğu $(\vec{\omega})$ Darboux ve (\vec{D}) dual Steiner vektörü

$$\vec{\omega} = g\vec{N} + f\vec{W} + \varepsilon \left(\frac{-f+g}{\sqrt{2}} \vec{C}\right) \quad \text{ve}$$

$$\vec{D} = \phi \hat{w} = \vec{N} \phi g + \vec{W} \phi f + \varepsilon \left(\vec{C} \phi \left(\frac{-f+g}{\sqrt{2}}\right)\right)$$

bağıntısıyla verilir.

Teorem 3.12. \overline{CW} - Smarandache eğrisinin Frenet aparatlarından elde edilen $(\vec{N}), (\vec{C}), (\vec{W})$ dual eğrilerinin çizgiler uzayında karşılık geldiği kapalı regle yüzeylerin dual açılım açıları sırasıyla

$$A_{\vec{N}} = \phi g, \quad A_{\vec{C}} = +\varepsilon \left(-2 \phi \frac{g}{\sqrt{2}}\right) \quad \text{ve} \quad A_{\vec{W}} = \phi f \quad \text{dir.}$$

$\alpha(s)$ eğrisine ait $\alpha_{\hat{N}\hat{C}\hat{W}}(s) = \frac{\vec{N} + \vec{C} + \vec{W}}{\sqrt{2}}$ Smarandache eğrisini için $(\vec{N}), (\vec{C}), (\vec{W})$ dual

eğrilerinin belirttiği regle yüzeyleri sırasıyla $\psi_{\hat{N}}(s, v) = \frac{\vec{W} + \vec{C}}{\sqrt{2}} + v\vec{N}$, $\psi_{\hat{C}}(s, v) = \frac{\vec{N} + \vec{W}}{\sqrt{2}} + v\vec{C}$ ve $\psi_{\hat{W}}(s, v) = \frac{\vec{N} + \vec{C}}{\sqrt{2}} + v\vec{W}$ olarak verilir.

Teorem 3.13. \overline{NCW} - Smarandache eğrisinin Frenet aparatlarından elde edilen $(\hat{N}), (\hat{C}), (\hat{W})$ dual eğrilerinin çizgiler uzayında karşılık geldiği kapalı regle yüzeylerin dağılma parametreleri $P_{\hat{N}} = \frac{g}{\sqrt{2}f}$, $P_C = 0$ ve $P_{\hat{W}} = \frac{-f}{\sqrt{2}g}$ bağıntısından hesaplanır.

Teoremden, dayanak eğrisi $\hat{N}\hat{C}\hat{W}$ Smarandache eğrisi ile üretilen (\hat{W}) dual eğrisine karşılık gelen $\psi_{\hat{N}\hat{C}\hat{W}}$ kapalı regle yüzeyini için $g = 0$ veya $\frac{\tau}{\kappa} = sbt$ olması durumunda dağılma parametresi hesaplanamadığı sonucu elde edilmektedir.

Teorem 3.14. \overline{NCW} - Smarandache eğrisinin Frenet aparatlarından elde edilen $(\hat{N}), (\hat{C}), (\hat{W})$ dual eğrilerinin çizgiler uzayında karşılık geldiği kapalı regle yüzeylerin Gauss ve ortalama eğrilikleri

$$K_{\hat{N}} = \frac{f^2 g^2}{v^2 f^2 + \sqrt{2} v f g + g^2},$$

$$K_{\hat{C}} = 0,$$

$$K_{\hat{W}} = -\frac{2g^2 f^2}{(f^2 + (\sqrt{2} v g + f - g)^2)^2} \text{ ve}$$

$$H_{\hat{N}} = \frac{\sqrt{2} f^2 g}{[(\sqrt{2} v f + g)^2 + g^2]^{3/2}},$$

$$H_{\hat{C}} = \frac{g' f - g f'}{2v(f^2 + g^2)^{3/2}}$$

$$H_{\hat{W}} = \frac{(\sqrt{2} v g + f)(f' - 2f^2 - f) - 5f g^2 - 2v f g}{4(v^2 g^2 + \sqrt{2} v f g + f^2)^{3/2}}$$

bağıntısıyla verilir.

Teorem 3.15. \overline{NCW} - Smarandache eğrisinin Frenet aparatlarından elde edilen $(\hat{N}), (\hat{C}), (\hat{W})$ dual vektörlerin oluşturduğu (\vec{w}) Darboux ve (\vec{D}) dual Steiner vektörü

$$\vec{w} = g\vec{N} + f\vec{W} + \varepsilon \left(\frac{f\vec{N} - g\vec{C}}{\sqrt{2}} \right) \text{ ve}$$

$$\vec{D} = \oint \vec{w} = \vec{N} \oint g + \vec{W} \oint f + \varepsilon \left(\vec{N} \oint \left(\frac{f}{\sqrt{2}} \right) - \vec{W} \oint \left(\frac{g}{\sqrt{2}} \right) \right)$$

bağıntısıyla verilir.

Teorem 3.16. \overline{NCW} - Smarandache eğrisinin Frenet aparatlarından elde edilen $(\hat{N}), (\hat{C}), (\hat{W})$

dual eğrilerinin çizgiler uzayında karşılık geldiği kapalı regle yüzeylerin dual açılım açıları sırasıyla $\Lambda_{\hat{N}} = \phi g$, $\Lambda_C = \sqrt{2} \varepsilon \phi f$ ve $\Lambda_{\hat{W}} = \phi f$ dir.

3. Sayısal örnekler

3.1. Nümeric Examples

3.1 Dual $\hat{N}\hat{C}$ Smarandache eğrisinin karşılık geldiği regle yüzeyi

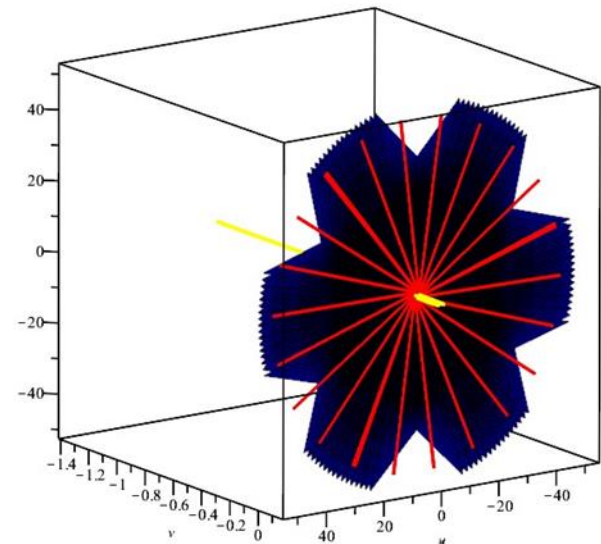
3.1 Ruled surface according to Dual $\hat{N}\hat{C}$ Smarandache curve

$$\alpha(s) = \left(\frac{2}{\sqrt{13}} \cos s, \frac{3}{\sqrt{13}} s, \frac{2}{\sqrt{13}} \sin s \right) \text{ eğrisi için dual}$$

$\hat{N}\hat{C}$ Smarandache eğrisinin karşılık geldiği regle yüzeyi

$$\begin{aligned} \vec{\psi}_{\hat{N}}(s, v) &= \vec{N} \wedge \vec{N}^* + v\vec{N} = \vec{N} \wedge \left(-\frac{\vec{W}}{\sqrt{2}} \right) + v\vec{N} \\ &= \frac{\vec{C}}{\sqrt{2}} + v\vec{N} \\ &= \left(\frac{1}{\sqrt{2}} \sin s, 0, -\frac{1}{\sqrt{2}} \cos s \right) \\ &\quad + v(-\cos s, 0, -\sin s) \\ &= \left(\frac{1}{\sqrt{2}} \sin s - v \cos s, 0, -\frac{1}{\sqrt{2}} \cos s - v \sin s \right) \end{aligned}$$

olarak elde edilir.



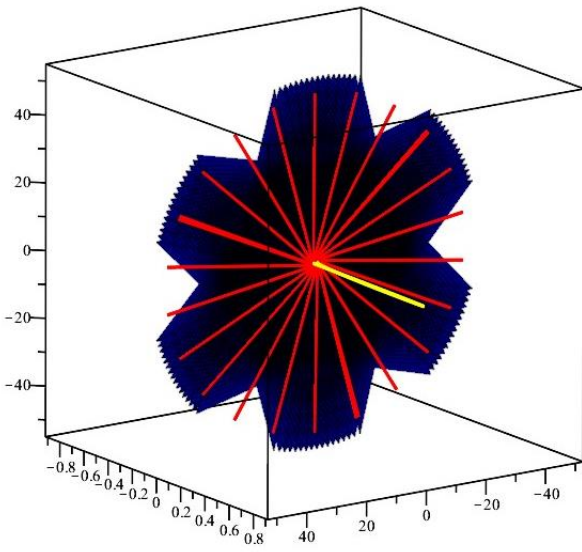
Şekil 1. $\vec{\psi}_{\hat{N}}(s, v) = \left(\frac{1}{\sqrt{2}} \sin s - v \cos s, 0, -\frac{1}{\sqrt{2}} \cos s - v \sin s \right)$ eğrisine ait regle yüzeyi

Figure 1. The ruled surface of the curve $\vec{\psi}_{\hat{N}}(s, v) = \left(\frac{1}{\sqrt{2}} \sin s - v \cos s, 0, -\frac{1}{\sqrt{2}} \cos s - v \sin s \right)$

Benzer yöntem ile

$$\begin{aligned} \vec{\psi}_{\vec{C}}(s, v) &= \vec{C} \wedge \vec{C}^* + v\vec{C} \\ &= \vec{C} \wedge \frac{\vec{W}}{\sqrt{2}} + v\vec{C} \\ &= \frac{\vec{N}}{\sqrt{2}} + v\vec{C} \\ &= \left(-\frac{1}{\sqrt{2}} \cos s, 0, -\frac{1}{\sqrt{2}} \sin s\right) \\ &\quad + v(\sin s, 0, -\cos s) \\ &= \left(-\frac{1}{\sqrt{2}} \cos s + v \sin s, 0, -\frac{1}{\sqrt{2}} \sin s - v \cos s\right) \end{aligned}$$

ve



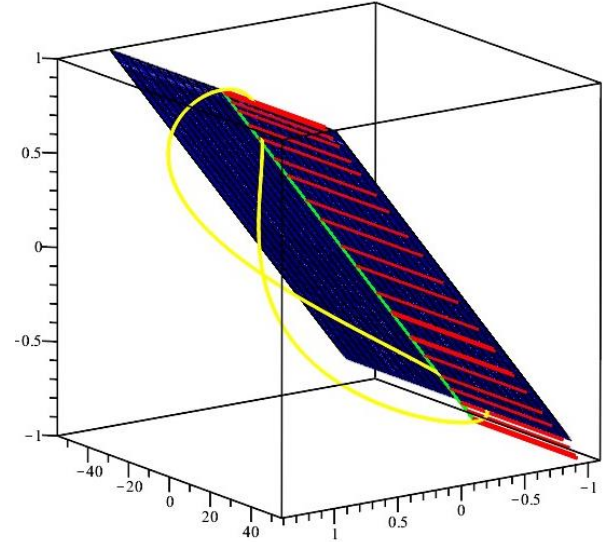
Şekil 2. $\vec{\psi}_{\vec{C}}(s, v) = \left(-\frac{1}{\sqrt{2}} \cos s + v \sin s, 0, -\frac{1}{\sqrt{2}} \sin s - v \cos s\right)$ eğrisine ait regle yüzeyi

Figure 2. The ruled surface of the curve $\vec{\psi}_{\vec{C}}(s, v) = \left(-\frac{1}{\sqrt{2}} \cos s + v \sin s, 0, -\frac{1}{\sqrt{2}} \sin s - v \cos s\right)$

$$\begin{aligned} \vec{\psi}_{\vec{W}}(s, v) &= \vec{W} \wedge \vec{W}^* + v\vec{W} \\ &= \vec{W} \wedge \left(\frac{\vec{N} - \vec{C}}{\sqrt{2}}\right) + v\vec{W} \\ &= \frac{\vec{N} + \vec{C}}{\sqrt{2}} + v\vec{W} \\ &= \left(-\frac{1}{\sqrt{2}} \cos s, 0, -\frac{1}{\sqrt{2}} \sin s\right) \\ &\quad + \left(\frac{1}{\sqrt{2}} \sin s, 0, -\frac{1}{\sqrt{2}} \cos s\right) \\ &\quad + (0, v, 0) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} &= \left(-\frac{1}{\sqrt{2}} \cos s + \frac{1}{\sqrt{2}} \sin s, v, -\frac{1}{\sqrt{2}} \sin s - \frac{1}{\sqrt{2}} \cos s\right) \end{aligned}$$

olarak hesaplanır.



Şekil 3. $\vec{\psi}_{\vec{W}}(s, v) = \left(-\frac{1}{\sqrt{2}} \cos s + \frac{1}{\sqrt{2}} \frac{\sqrt{26}}{4} \sin s, v, -\frac{1}{\sqrt{2}} \sin s - \frac{1}{\sqrt{2}} \cos s\right)$ eğrisine ait regle yüzeyi

Figure 3. The ruled surface of the curve $\vec{\psi}_{\vec{W}}(s, v) = \left(-\frac{1}{\sqrt{2}} \cos s + \frac{1}{\sqrt{2}} \frac{\sqrt{26}}{4} \sin s, v, -\frac{1}{\sqrt{2}} \sin s - \frac{1}{\sqrt{2}} \cos s\right)$

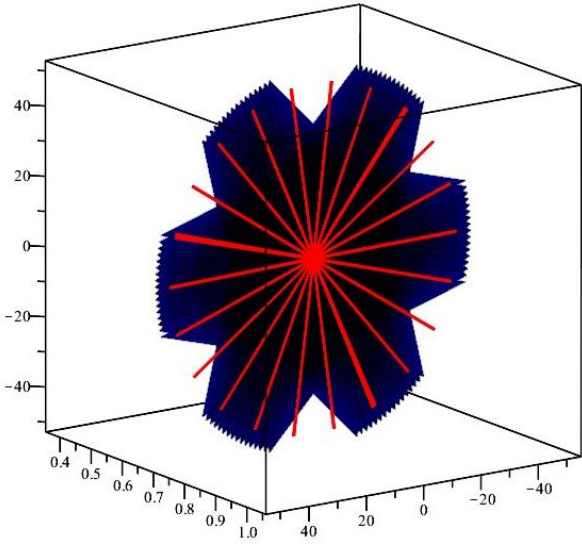
3.2 Dual $\widehat{N}\widehat{W}$ Smarandache eğrisinin karşılık geldiği regle yüzeyi

3.2. Ruled surface according to Dual $\widehat{N}\widehat{W}$ Smarandache curve

α eğrisi için dual $\widehat{N}\widehat{W}$ Smarandache eğrisinin karşılık geldiği regle yüzeyi

$$\begin{aligned} \vec{\psi}_{\widehat{N}}(s, v) &= \widehat{N} \wedge \widehat{N}^* + v\widehat{N} = \widehat{N} \wedge \left(\frac{\vec{C}}{\sqrt{2}}\right) + v\widehat{N} \\ &= \frac{\vec{W}}{\sqrt{2}} + v\widehat{N} \\ &= \left(0, \frac{1}{\sqrt{2}}, 0\right) + v(-\cos s, 0, -\sin s) \\ &= \left(-v \cos s, \frac{1}{\sqrt{2}}, -v \sin s\right) \end{aligned}$$

olarak elde edilir.

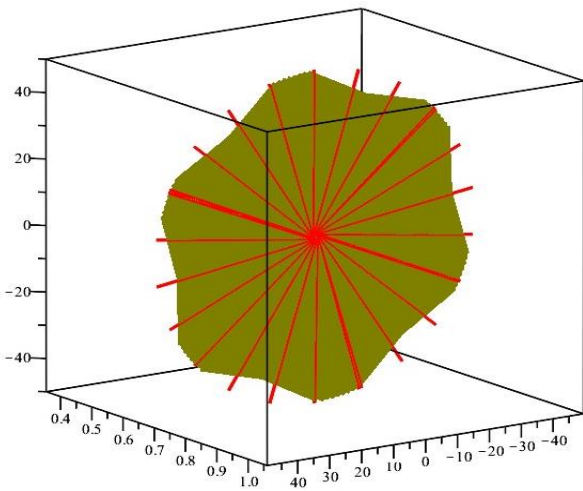


Şekil 4. $\vec{\psi}_{\vec{N}}(s, v) = \left(-v \cos s, \frac{1}{\sqrt{2}}, -v \sin s\right)$ eğrisine ait regle yüzeyi
Figure 4. The ruled surface of the curve $\vec{\psi}_{\vec{N}}(s, v) = \left(-v \cos s, \frac{1}{\sqrt{2}}, -v \sin s\right)$

Benzer yöntem ile

$$\begin{aligned} \vec{\psi}_{\vec{C}}(s, v) &= \vec{C} \wedge \vec{C}^* + v\vec{C} = \vec{C} \wedge \frac{\vec{W} - \vec{N}}{\sqrt{2}} + v\vec{C} \\ &= \frac{\vec{N} + \vec{W}}{\sqrt{2}} + v\vec{C} \\ &= \left(-\frac{1}{\sqrt{2}} \cos s, 0, -\frac{1}{\sqrt{2}} \sin s\right) + \left(0, \frac{1}{\sqrt{2}}, 0\right) \\ &\quad + v(\sin s, 0, -\cos s) \\ &= \left(-\frac{1}{\sqrt{2}} \cos s + v \sin s, \frac{1}{\sqrt{2}}, -\frac{1}{\sqrt{2}} \sin s - v \cos s\right) \end{aligned}$$

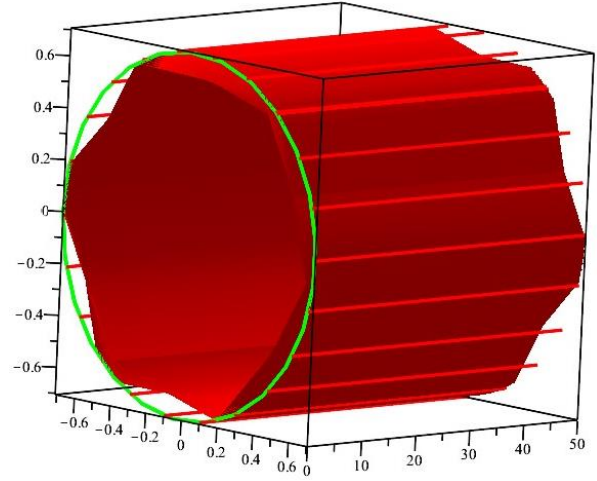
ve



Şekil 5. $\vec{\psi}_{\vec{C}}(s, v) = \left(-v \cos s, \frac{1}{\sqrt{2}}, -v \sin s\right)$ eğrisine ait regle yüzeyi
Figure 5. The ruled surface of the curve $\vec{\psi}_{\vec{C}}(s, v) = \left(-v \cos s, \frac{1}{\sqrt{2}}, -v \sin s\right)$

$$\begin{aligned} \vec{\psi}_{\vec{W}}(s, v) &= \vec{W} \wedge \vec{W}^* + v\vec{W} = \vec{W} \wedge \left(\frac{-\vec{C}}{\sqrt{2}}\right) + v\vec{W} \\ &= \frac{\vec{N}}{\sqrt{2}} + v\vec{W} \\ &= \left(-\frac{1}{\sqrt{2}} \cos s, 0, -\frac{1}{\sqrt{2}} \sin s\right) + (0, v, 0) \\ &= \left(-\frac{1}{\sqrt{2}} \cos s, v, -\frac{1}{\sqrt{2}} \sin s\right) \end{aligned}$$

olarak verilir.



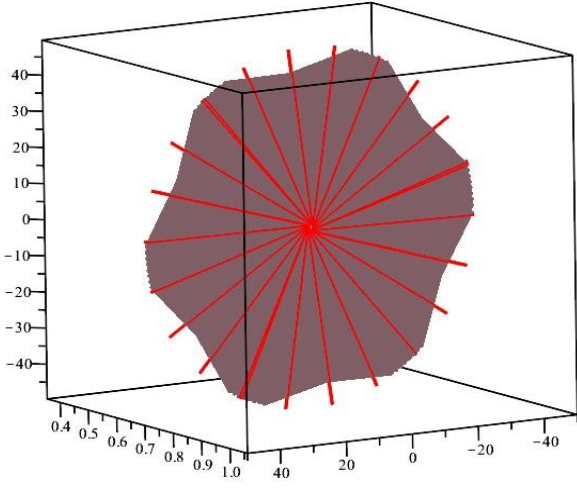
Şekil 6. $\vec{\psi}_{\vec{W}}(s, v) = \left(-\frac{1}{\sqrt{2}} \cos s, v, -\frac{1}{\sqrt{2}} \sin s\right)$ eğrisine ait regle yüzeyi
Figure 6. The ruled surface of the curve $\vec{\psi}_{\vec{W}}(s, v) = \left(-\frac{1}{\sqrt{2}} \cos s, v, -\frac{1}{\sqrt{2}} \sin s\right)$

3.3 Dual \widehat{CW} Smarandache eğrisinin karşılık geldiği regle yüzeyi

3.3. Ruled surface according to Dual \widehat{CW} Smarandache curve

α eğrisi için dual \widehat{CW} Smarandache eğrisinin karşılık geldiği regle yüzeyi

$$\begin{aligned} \vec{\psi}_{\vec{N}}(s, v) &= \vec{N} \wedge \vec{N}^* + v\vec{N} = \vec{N} \wedge \left(\frac{\vec{C} - \vec{W}}{\sqrt{2}}\right) + v\vec{N} \\ &= \frac{\vec{W} + \vec{C}}{\sqrt{2}} + v\vec{N} \\ &= \left(0, \frac{1}{\sqrt{2}}, 0\right) + \left(\frac{1}{\sqrt{2}} \sin s, 0, -\frac{1}{\sqrt{2}} \cos s\right) \\ &\quad + v(-\cos s, 0, -\sin s) \\ &= \left(\frac{1}{\sqrt{2}} \sin s - v \cos s, \frac{1}{\sqrt{2}}, -\frac{1}{\sqrt{2}} \cos s - v \sin s\right) \end{aligned}$$



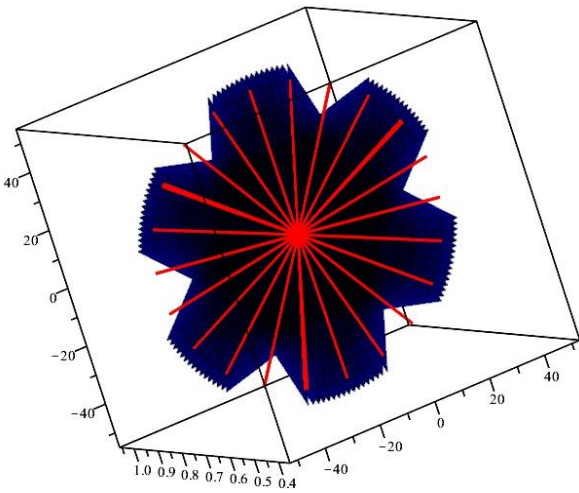
Şekil 7. $\vec{\psi}_N(s, v) = \left(\frac{1}{\sqrt{2}} \sin s - v \cos s, \frac{1}{\sqrt{2}}, -\frac{1}{\sqrt{2}} \cos s - v \sin s\right)$ eğrisine ait regle yüzeyi

Figure 7. The ruled surface of the curve $\vec{\psi}_N(s, v) = \left(\frac{1}{\sqrt{2}} \sin s - v \cos s, \frac{1}{\sqrt{2}}, -\frac{1}{\sqrt{2}} \cos s - v \sin s\right)$

olarak elde edilir. Benzer şekilde

$$\begin{aligned} \vec{\psi}_C(s, v) &= \vec{C} \wedge \vec{C}^* + v\vec{C} = \vec{C} \wedge \frac{-\vec{N}}{\sqrt{2}} + v\vec{C} \\ &= \frac{\vec{W}}{\sqrt{2}} + v\vec{C} \\ &= \left(0, \frac{1}{\sqrt{2}}, 0\right) + v(\sin s, 0, -\cos s) \\ &= \left(v \sin s, \frac{1}{\sqrt{2}}, -v \cos s\right) \end{aligned}$$

ve

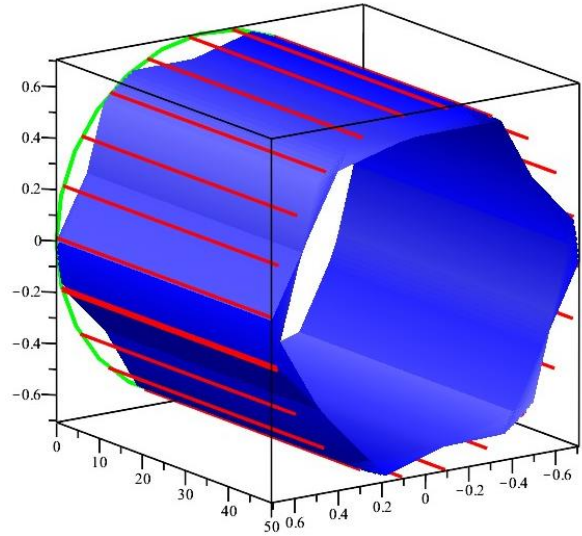


Şekil 8. $\vec{\psi}_C(s, v) = \left(v \sin s, \frac{1}{\sqrt{2}}, -v \cos s\right)$ eğrisine ait regle yüzeyi

Figure 8. The ruled surface of the curve $\vec{\psi}_C(s, v) = \left(v \sin s, \frac{1}{\sqrt{2}}, -v \cos s\right)$

$$\begin{aligned} \vec{\psi}_W(s, v) &= \vec{W} \wedge \vec{W}^* + v\vec{W} \\ &= \vec{W} \wedge \left(\frac{\vec{C} + \vec{W}}{\sqrt{2}}\right) + v\vec{W} \\ &= \frac{-\vec{N}}{\sqrt{2}} + v\vec{W} \\ &= \left(\frac{1}{\sqrt{2}} \cos s, 0, \frac{1}{\sqrt{2}} \sin s\right) + (0, v, 0) \\ &= \left(\frac{1}{\sqrt{2}} \cos s, v, \frac{1}{\sqrt{2}} \sin s\right) \end{aligned}$$

olarak bulunur.



Şekil 9. $\vec{\psi}_W(s, v) = \left(\frac{1}{\sqrt{2}} \cos s, v, \frac{1}{\sqrt{2}} \sin s\right)$ eğrisine ait regle yüzeyi

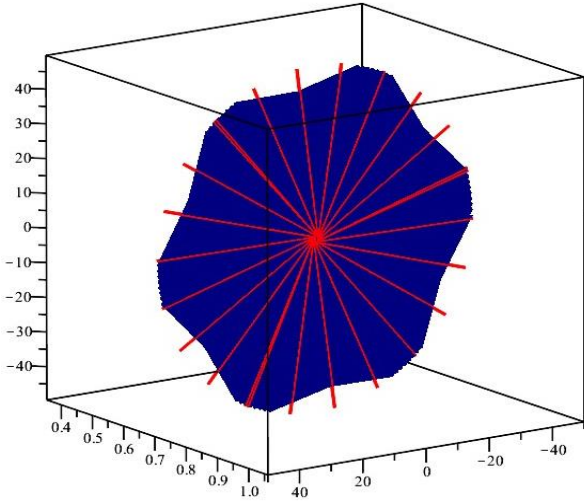
Figure 9. The ruled surface of the curve $\vec{\psi}_W(s, v) = \left(\frac{1}{\sqrt{2}} \cos s, v, \frac{1}{\sqrt{2}} \sin s\right)$

3.4 Dual \widehat{NCW} Smarandache eğrisinin karşılık geldiği regle yüzeyi

3.4. Ruled surface according to Dual \widehat{NCW} Smarandache curve

α eğrisi için Dual \widehat{NCW} Smarandache eğrisinin karşılık geldiği regle yüzeylerini

$$\begin{aligned} \vec{\psi}_N(s, v) &= \vec{N} \wedge \vec{N}^* + v\vec{N} = \vec{N} \wedge \left(\frac{\vec{C} - \vec{W}}{\sqrt{2}}\right) + v\vec{N} \\ &= \frac{\vec{W} + \vec{C}}{\sqrt{2}} + v\vec{N} \\ &= \left(0, \frac{1}{\sqrt{2}}, 0\right) + \left(\frac{1}{\sqrt{2}} \sin s, 0, -\frac{1}{\sqrt{2}} \cos s\right) \\ &\quad + (-v \cos s, 0, -v \sin s) \\ &= \left(\frac{1}{\sqrt{2}} \sin s - v \cos s, \frac{1}{\sqrt{2}}, -\frac{1}{\sqrt{2}} \cos s - v \sin s\right) \end{aligned}$$



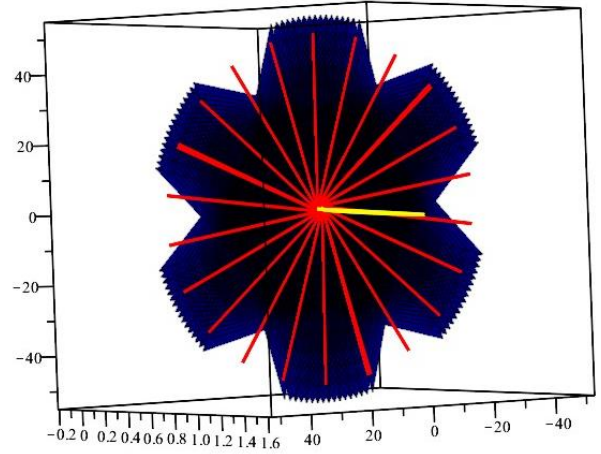
Şekil 10. $\vec{\psi}_N(s, v) = \left(\frac{1}{\sqrt{2}} \sin s - v \cos s, \frac{1}{\sqrt{2}}, -\frac{1}{\sqrt{2}} \cos s - v \sin s\right)$ eğrisine ait regle yüzeyi

Figure 10. The ruled surface of the curve $\vec{\psi}_N(s, v) = \left(\frac{1}{\sqrt{2}} \sin s - v \cos s, \frac{1}{\sqrt{2}}, -\frac{1}{\sqrt{2}} \cos s - v \sin s\right)$

olarak elde edilir. Benzer yöntem ile

$$\begin{aligned} \vec{\psi}_C(s, v) &= \vec{C} \wedge \vec{C}^* + v\vec{C} = \vec{C} \wedge \frac{\vec{W} - \vec{N}}{\sqrt{2}} + v\vec{C} \\ &= \frac{\vec{N} + \vec{W}}{\sqrt{2}} + v\vec{C} \\ &= \left(-\frac{1}{\sqrt{2}} \cos s, 0, -\frac{1}{\sqrt{2}} \sin s\right) + \left(0, \frac{1}{\sqrt{2}}, 0\right) \\ &\quad + (v \sin s, 0, -v \cos s) \\ &= \left(-\frac{1}{\sqrt{2}} \cos s + v \sin s, \frac{1}{\sqrt{2}}, -\frac{1}{\sqrt{2}} \sin s - v \cos s\right) \end{aligned}$$

ve

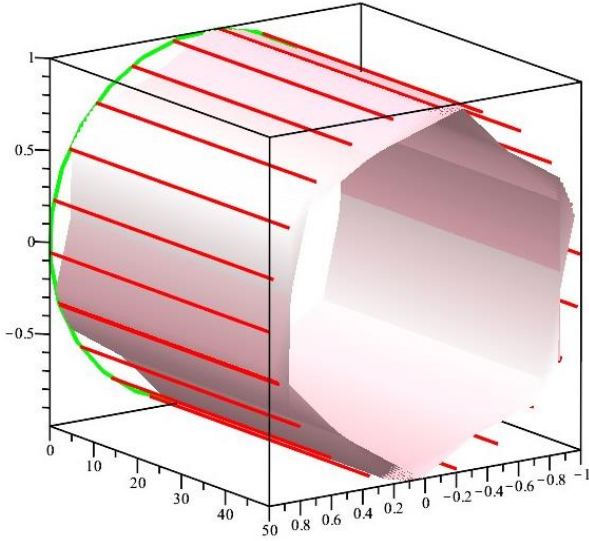


Şekil 11. $\vec{\psi}_C(s, v) = \left(-\frac{1}{\sqrt{2}} \cos s + v \sin s, \frac{1}{\sqrt{2}}, -\frac{1}{\sqrt{2}} \sin s - v \cos s\right)$ eğrisine ait regle yüzeyi

Figure 11. The ruled surface of the curve $\vec{\psi}_C(s, v) = \left(-\frac{1}{\sqrt{2}} \cos s + v \sin s, \frac{1}{\sqrt{2}}, -\frac{1}{\sqrt{2}} \sin s - v \cos s\right)$

$$\begin{aligned} \vec{\psi}_W(s, v) &= \vec{W} \wedge \vec{W}^* + v\vec{W} \\ &= \vec{W} \wedge \left(\frac{\vec{N} - \vec{C}}{\sqrt{2}}\right) + v\vec{W} \\ &= \frac{\vec{N} + \vec{C}}{\sqrt{2}} + v\vec{W} \\ &= \left(-\frac{1}{\sqrt{2}} \cos s, 0, -\frac{1}{\sqrt{2}} \sin s\right) \\ &\quad + \left(\frac{1}{\sqrt{2}} \sin s, 0, -\frac{1}{\sqrt{2}} \cos s\right) \\ &\quad + (0, v, 0) \\ &= \left(\frac{1}{\sqrt{2}} \sin s - \frac{1}{\sqrt{2}} \cos s, v, -\frac{1}{\sqrt{2}} \cos s - \frac{1}{\sqrt{2}} \sin s\right) \end{aligned}$$

olarak hesaplanır.



Şekil 12. $\vec{\psi}_W(s, v) = \left(\frac{1}{\sqrt{2}} \sin s - \frac{1}{\sqrt{2}} \cos s, v, -\frac{1}{\sqrt{2}} \cos s - \frac{1}{\sqrt{2}} \sin s \right)$ eğrisine ait regle yüzeyi

Figure 12. The ruled surface of the curve $\vec{\psi}_W(s, v) = \left(\frac{1}{\sqrt{2}} \sin s - \frac{1}{\sqrt{2}} \cos s, v, -\frac{1}{\sqrt{2}} \cos s - \frac{1}{\sqrt{2}} \sin s \right)$

4. Sonuç

4. Conclusions

Çalışmamızda, E-Study teoremi prensibinden yararlanılarak alternatif NCW çatının elemanları kullanılarak elde edilen dual birim küre üzerindeki dual Smarandache eğrileri tanımlanmıştır. Elde edilen yeni dual eğrilerin Öklid 3-uzayında oluşturduğu regle yüzeyler için Gauss ve ortalama eğrilikleri hesaplanıp, bu regle yüzeylere ait dual Steiner vektörü ve dual açısı bulunmuştur. Alternatif çatısından yararlanarak dual eğriler elde ettiğimiz bu çalışmamızda yeni eğriler ve yüzeyler tanımlanarak literatüre katkıda bulunulmuştur.

Yazar katkısı

Author contribution

Bu çalışma Hatice KUŞAK SAMANCI danışmanlığında yürütülen Veysi CENGİZ'in yüksek lisans tezinden üretilmiştir.

Etik beyanı

Declaration of ethical code

Bu makalenin yazarları, bu çalışmada kullanılan materyal ve yöntemlerin etik kurul izni ve/veya yasal-özel izin gerektirmediğini beyan etmektedir.

Çıkar çatışması beyanı

Conflicts of interest

Yazarlar herhangi bir çıkar çatışması olmadığını beyan eder.

Kaynaklar

References

- Arslan, İ. (2010). *Dual küresel eğriler ve yüzeyler*. [Doktora Tezi, Ankara Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü].
- Baky, R.A. (2002). An explicit characterization of dual spherical curve. *Communications Faculty of Sciences University of Ankara Series A1-Mathematics and Statistics*, 51(2), 1–9. http://dx.doi.org/10.1501/Commua1_0000000356.
- Bektaş, Ö., & Yüce, S. (2013). Special Smarandache curves according to Darboux frame in E^3 . *Romanian Journal of Mathematics and Computer Science*, 3, 48–59.
- Bishop, R.L. (1975). There is more than one way to frame a curve. *The American Mathematical Monthly*, 82(3), 246–251. <http://dx.doi.org/10.1080/00029890.1975.11993807>.
- Bükcü, B., & Karacan, M.K. (2008). Special Bishop motion and Bishop Darboux rotation axis of the space curve. *Journal of Dynamical Systems and Geometric Theories*, 6(1), 27–34. <http://dx.doi.org/10.1080/1726037X.2008.10698542>.
- Bükcü, B., & Karacan, M.K. (2008). Bishop frame of the spacelike curve with a spacelike principal normal in Minkowski 3-space. *Communications Faculty of Sciences University of Ankara Series A1-Mathematics and Statistics*, 57(1), 13–22. http://dx.doi.org/10.1501/Commua1_0000000185.
- Bükcü, B., & Karacan, M.K. (2009). The slant helices according to Bishop frame. *International Journal of Mathematics and Computer Science*, 3(2), 67–70.
- Bükcü, B., & Karacan, M.K. (2010). Bishop frame of the spacelike curve with a spacelike binormal in Minkowski 3-space. *Selçuk Journal of Applied Mathematics*, 11(1), 15–25.
- Clifford, W.K. (1873). Preliminary sketch of biquaternions. *Proceedings of the London Mathematical Society*, 4, 361–395.
- Çalışkan, A., & Şenyurt, S. (2020). Curves and ruled surfaces according to alternative frame in dual space. *Communications Faculty of Sciences*

- University of Ankara Series A1-Mathematics and Statistics, 69(1), 684–698. <http://dx.doi.org/10.31801/cfsuasmas.487789>.
- Gürses, N.B., Bektaş, O., & Yüce, S., (2016). Special Smarandache curves in R_1^3 . *Communications Faculty of Sciences University of Ankara Series A1-Mathematics and Statistics*, 65(2), 143–160.
- Hacısalıhoğlu, H.H. (Ed.). (1983). *Hareket geometrisi ve kuaterniyonlar teorisi*. Gazi Üniversitesi Yayınları.
- Hacısalıhoğlu, H.H. (Ed.). (1983). *Diferensiyel geometri*. İnönü Üniversitesi Yayınları.
- Izumiya, S., & Takeuchi, N. (2004). New special curves and developable surfaces. *Turkish Journal of Mathematics*, 28(2), 153-164.
- Kahraman, T., & Uğurlu, H.H. (2014). Dual Smarandache curves and Smarandache ruled surfaces. *Mathematical Sciences and Applications E-Notes*, 2(1).
- Karacan, M.K. (2008). Bishop frame of the timelike curve in Minkowski 3-space. *SDÜ Fen Edebiyat Fakültesi Fen Dergisi*, 3(1), 80-90.
- Keskin, O., & Yaylı, Y. (2017). An application of N-Bishop frame to spherical images for direction curves. *International Journal of Geometric Methods in Modern Physics*, 14(11), 1750162. <http://dx.doi.org/10.1142/S0219887817501626>.
- Kuşak Samancı, H., & Kocayığıt, H. (2019). N-Bishop Darboux vector of the spacelike curve with spacelike binormal. *Thermal Science*, 23(1), 353-360. <http://dx.doi.org/10.2298/TSCI181112048K>.
- Scofield, P.D. (1995). Curves of constant precession. *The American Mathematical Monthly*, 102(6), 531-537. <http://dx.doi.org/10.1080/00029890.1995.12004613>.
- Study, E. (Ed.). (1903). *Die geometrie der dynamen*. Verlag Teubner. Leipzig.
- Şenyurt, S., & Çalışkan, A. (2015). N*C*- Smarandache curves of Mannheim curve couple according to Frenet frame. *International Journal of Mathematical Combinatorics*, 1, 1-13. <https://doi.org/10.5281/zenodo.815111>.
- Şenyurt, S., Sivas, S., & Çalışkan, A. (2016a). N-C Smarandache curves of involute evolute curve couple according to Frenet frame algebras. *Groups And Geometries*, 33(2), 153-164.
- Şenyurt, S., Çalışkan, A., & Celik, U. (2016b). N*C*- Smarandache curve of Bertrand curves pair according to Frenet frame. *International Journal of Mathematical Combinatorics*, 1, 1-7. <https://doi.org/10.5281/zenodo.815715>.
- Şenyurt, S., & Kaya, G. (2018). NC-Smarandache curve and NW-Smarandache curve according to alternative frame. *Turkish Journal of Mathematics and Computer Science*, 10269–274.
- Şenyurt, S., Çalışkan, A., & Çelik, U. (2021). Smarandache curves of Bertrand curves pair according to Frenet frame. *Boletim da Sociedade Paranaense de Matemática*, 39(5), 163-173.
- Uzunoğlu, B., Gök İ., & Yaylı, Y. (2016). A new approach on curves of constant precession. *Applied Mathematics and Computation*, 275, 317-323. <http://dx.doi.org/10.1016/j.amc.2015.11.083>.
- Yaylı, Y., & Saracoğlu, S., (2011). Some notes on dual spherical curves. *Journal of Informatics and Mathematical Sciences*, 3(2), 177–189. <http://dx.doi.org/10.26713%2Fjims.v3i2.49>.
- Yılmaz, S., Özyılmaz, E., & Turgut, M. (2010). New spherical indicatrices and their characterizations. *An Saint. University Ovidius Constanta*, 18(2), 337-354.
- Yılmaz, S., & Turgut, M.A. (2010). New version of Bishop frame and an application to spherical images. *Journal of Mathematical Analysis and Applications*, 371(2), 764–776. <http://dx.doi.org/10.1016/j.jmaa.2010.06.012>.