

# TÜRKİYE NÜFUSU İÇİN STOKASTİK ÖLÜMLÜLÜK MODELLERİ

Funda KUL\*  
Meral SUCU\*\*

Ölümlülük tahminleri, demografi ve aktüerya bilimlerinde önemli bir rol oynamaktadır. Önceki ölümlülük modellemesi çalışmalarında, zaman bağılı olarak ölüm oranlarındaki olası değişimler dikkate alınmamaktaydı. Zaman içinde bu değişimleri dikkate alan birçok stokastik ölümlülük modelleme yöntemleri geliştirilmiştir.

Bu çalışmanın amacı, Türkiye ölümlülüğünü incelemek ve kuşak etkisi olup olmadığını araştırmaktır. Ölüm sayıları ve riske maruz kalan birim sayıları, kadın ve erkekler için ayrı ayrı modellenmiştir. Karşılaştırma yapmak amacıyla, BIC değerleri, standartlaştırılmış artıklar, yaşlara ve takvim yılına göre tanımlanmış bazı artık karakteristikleri kullanılmış ve kadın ve erkek ölüm hızlarının modellenmesinde takvim yılı ve kuşak etkilerinin önemli olduğu görülmüştür.

## 1. GİRİŞ

Ölümlülük modelleri, Demografi alanında nüfus projeksiyonlarının yapılmasında ve Aktüerya Bilimleri alanında ise sosyal güvenlik kurumları, emeklilik ve hayat sigortası şirketlerinin yükümlülüklerine ilişkin sermaye gereksiniminin belirlenmesi ve değerlendirme çalışmalarında kullanılmaktadır (Biffi ve Clemente, 2012). Ayrıca ülkelerin geleceğe ilişkin planlamaları açısından da önemlidir.

Ölümlülük modelleri, deterministik ve stokastik ölümlülük modelleri olarak ikiye ayrılmaktadır: Deterministik ölümlülük modellerinde, ölüm hızları veya ölüm oranları yaşın bir fonksiyonu olarak tanımlanmaktadır (Tabeau ve diğerleri, 2001). Bu modellerde, gelecekteki ölüm hızlarının değişiminin de aynı şekilde devam edeceği varsayımı altında ölümlülük modellenmektedir. Deterministik ölümlülük modellerine Gompertz (1825), Makeham (1867) ve Heligman-Pollard (1980) yöntemleri gibi pek çok yöntem örnek olarak verilebilir.

Deterministik ölümlülük modellerinde zaman içinde ölüm hızlarındaki değişim dikkate alınmamakta ve popülasyon içindeki tüm bireylerin ölümlülüklerinin aynı olduğu düşünülmektedir. Bu modellerde, ölüm hızı veya oranının zamana ve farklı yaşlara göre değişimi dikkate alınmadığından, ölümlülük projeksiyonlarında önemli ölçüde sapmalar gözlenmiştir. Bu nedenle stokastik modeller geliştirilmiştir (Koissi ve Shapiro, 2008).

Zaman etkisini dikkate alan ilk stokastik ölümlülük modeli, 1992 yılında Ronald Lee ve Lawrance Carter tarafından oluşturulmuştur. Bu modelde tek bir zaman indeksi fonksiyonu ile ölümlülükteki uzun dönem değişimleri tanımlanmaya çalışılmıştır.

\* Arş. Gör., Hacettepe Üniversitesi, Aktüerya Bilimleri Bölümü

\*\* Doç.Dr., Hacettepe Üniversitesi, Aktüerya Bilimleri Bölümü

Lee-Carter yöntemi birçok ülke için geleceğe ilişkin ölüm hızlarının tahmin edilmesinde yaygın olarak kullanılmıştır. Bu çalışmalarda ileri yaşlarda ölüm sayılarının az olması nedeniyle, ileri yaşlarda ölüm hızlarının genç yaşlardakine göre daha düşük olduğu görülmüştür. Bu ve ikinci bölümde verilen sakıncalar nedeniyle, Lee-Carter yöntemi kullanılarak yapılan ölümlülük projeksiyonları yetersiz kalmıştır (Li ve diğerleri, 2009; Biffi ve Clemente, 2012).

Lee-Carter ölümlülük modelinin bazı sakıncalarını gidermek ve/ya ölümlülük üzerindeki kuşak etkisini de incelemek amacıyla, Lee-Carter (1992) yönteminin düzenlenmesiyle yeni modeller oluşturulmuştur.

Booth, Maindonald ve Smith (2002)'in çalışmasında, Lee ve Carter (1992) ölümlülük modelinde, takvim yılı etkisinin doğrusal ve daha yüksek dereceden parametrelerle ifade edildiği bir model oluşturulmuştur. Currie (2006)'nin çalışmasında Lee ve Carter (1992) ölümlülük modeline kuşak etkisi eklenerek yeniden modelleme yapılmıştır. Renshaw ve Haberman (2006)'nın çalışmasında ise, model hatalarının değişen varyanslı Poisson dağılımına uyduğu dikkate alınarak Currie (2006) çalışmasında oluşturulan stokastik ölümlülük modeli geliştirilmiştir. Cairns ve diğerlerinin (2006a, 2006b) çalışmalarında kaba ölüm hızları kullanılarak, karesel yaş etkisinin dikkate alındığı üç stokastik ölümlülük modeli oluşturulmuştur. Plat (2009)'in çalışmasında, Cairns ve diğerlerinin (2006a, 2006b) çalışmalarındaki modeller için kaba ölüm hızları yerine, merkezi ölüm hızları kullanılmış ve yaşa göre ölüm hızlarının zamana göre değişimi, yaşın üstten kesilmiş bir fonksiyonu şeklinde ifade edilmiştir.

Türkiye ölümlülüğünün stokastik modellenmesi ile ilgili bilinen ilk çalışma, Yıldırım (2010) tarafından yapılmıştır. Bu çalışmada Türkiye ölümlülüğü, Lee-Carter yöntemi ve alternatif olarak geliştirilen Bulanıklaştırılmış Lee-Carter yöntemi ile modellenmiş ve iki yönteme göre bulunan sonuçlar karşılaştırılmış, Bulanıklaştırılmış Lee-Carter yönteminin daha iyi sonuç verdiği görülmüştür. Bilinen ikinci çalışma Genç ve Gençtürk (2012) tarafından yapılmıştır. Bu çalışmada, Türkiye ölümlülüğünün modellenmesinde Lee-Carter ve Trend yöntemi kullanılmış ve her iki yöntemin benzer sonuçlar verdiği görülmüştür. En son çalışma ise, Demircioğlu ve Büyükyazıcı (2013) tarafından yapılmıştır. Bu çalışmada Poisson Log-Bilineer yaklaşımıyla Lee-Carter yöntemi kullanılarak Türkiye ölümlülüğü modellenmiş ve bu yaklaşımın Lee-Carter yöntemine göre farklı sonuçlar verdiği belirtilmiştir.

Literatürde Türkiye verisinden elde edilen ölüm hızlarında kuşak etkisinin de dikkate alındığı bir stokastik ölümlülük modeli çalışması olmadığı görülmüştür. Bu çalışmada, Türkiye'nin yaşa göre ölüm hızlarında kuşak etkisinin olup olmadığı incelenerek, kuşak etkisinin ölümlülük projeksiyonları üzerindeki etkisi gösterilecek ve tartışılacaktır. Çalışmada, literatürde yaygın olarak kullanılan kuşak etkisini içeren ve içermeyen 8 farklı stokastik ölümlülük modeli için, 1980-2012 yılları arasında cinsiyet ayrımındaki TÜİK (Türkiye İstatistik Kurumu) istatistik yıllıklarından derlenmiş, beşerli yaş gruplarına göre ölüm sayıları ve yıl ortası nüfus verisi kullanılarak, parametre tahminleri elde edilmiş, uyum iyiliği testleri ve artıklar incelenerek elde edilen sonuçlar yorumlanmıştır.

Çalışmanın ikinci bölümünde, giriş bölümünde verilen stokastik ölümlülük modellerinin matematiksel gösterimleri ve parametre tahmini yapılabilmesi için parametre değerlerine ilişkin bazı kısıtlar verilmiştir. Üçüncü bölümde kadın ve erkek nüfusuna ilişkin Türkiye verisi incelenmiş, parametre tahmin yöntemi verilmiş ve uyum iyiliği testleri yapılmıştır. Dördüncü bölümde elde edilen sonuçlar yorumlanmıştır.

## 2. STOKASTİK ÖLÜMLÜLÜK MODELLERİ

Bu çalışmada takvim yılı  $t$  ve en son tam yaş  $x$  ile gösterilmiştir. Yaş ve takvim yılına göre merkezi ölüm hızları şu şekilde elde edilmiştir:

$$m_{x,t} = \frac{D_{x,t}}{E_{x,t}} \quad (1)$$

Burada;

$D_{x,t}$  :  $t$ . takvim yılında  $x$  yaşında ölen kişi sayısını,

$E_{x,t}$  :  $t$ . takvim yılı ortasında  $x$  yaşındaki kişi sayısını

göstermektedir (Cairns ve diğerleri, 2007; Biffi ve Clemente, 2012 ).

Ölümlülük modellemesinin daha basit olarak yapılabilmesi amacıyla kesirli yaşlar için ölümlülüğün sabit olduğu varsayılmıştır. Bu durumda merkezi ölüm hızı,

$$m_{x+k,t} = m_{x,t} \quad , \quad 0 < k < 1 \quad (2)$$

olmaktadır. Stokastik ölümlülük modellemesinde yaygın olarak kullanılan diğer gösterim ise,  $q_{x,t}$  'dir.  $q_{x,t}$ ,  $t$  takvim yılında  $x$  yaş için kaba ölüm oranını göstermektedir.

Kesirli yaşlar için ölümlülüğün sabit olduğu varsayımı altında kaba ölüm oranı ve merkezi ölüm hızı arasındaki ilişki,

$$q_{x,t} = 1 - \exp(-m_{x,t})$$

eşitliği ile yazılmaktadır (Gerber, 1997).

Bu bölümde, literatürde yaygın olarak kullanılan stokastik ölümlülük modelleri ayrıntılı olarak incelenmiştir.

### 2.1. Model 1

Lee ve Carter (1992) modelinde, merkezi ölüm hızındaki takvim yılı etkisinin tanımlamak için ARIMA zaman serisi modeli kullanılmaktadır. Bu modelde, yaş ve takvim yılına göre merkezi ölüm hızı,

$$\log(m_{x,t}) = \beta_x^{(1)} + \beta_x^{(2)} \kappa_t^{(2)} + \varepsilon_{x,t} \quad (4)$$

eşitliği ile gösterilir. Burada;

$\beta_x^{(1)}$  :  $(x)$  yaşı için merkezi ölüm hızının doğal logaritmasının ortalamasını,

$\kappa_t^{(2)}$  : zamana göre ölüm hızındaki değişimi,

$\beta_x^{(2)}$  : yıllar itibariyle ölüm hızının genel düzeyindeki değişim hızını,

$\varepsilon_{x,t}$  : ortalaması sıfır ve sabit varyanslı Normal dağılıma sahip hata terimini

göstermektedir. Model, iki terimin toplamından oluşmaktadır. İlk terim, zamandan bağımsız sadece yaşa özel bileşeni, ikinci terim ise ölümlülüğün zamana göre genel seviyesindeki değişimi gösteren bileşendir. Hataların sabit varyanslı (homoscedastic) dağıldığı varsayımı, tüm yaşlarda zamana göre ölümlülük değişimlerinin tek bir faktör ile modellenmesi nedeniyle oluşan korelasyon yapısı ve ölümlülük değişiminde kuşak (cohort) etkisinin dikkate alınmaması bu yöntemin sakıncalarını göstermektedir (Kul, 2014). Bu modelde parametre tahminlerinin elde edilmesi amacıyla kullanılan varsayımlar şu biçimdedir :

$$\sum_x \beta_x^{(2)} = 1 \quad (5)$$

$$\sum_t \kappa_t^{(2)} = 0 \quad (6)$$

## 2.2. Model 2

Booth, Maindonald ve Smith (2002) ölümlülük modeli, Lee ve Carter (1992) modelindeki yıllar itibariyle ölüm hızının genel düzeyindeki değişimin n. dereceden etkisinin dikkate alınmasıyla oluşturulmuştur. Bu model, matematiksel olarak,

$$\log(m_{x,t}) = \beta_x^{(1)} + \beta_x^{(2)} \kappa_t^{(2)} + \dots + \beta_x^{(n)} \kappa_t^{(n)} + \varepsilon_{x,t} \quad (7)$$

eşitliği ile yazılır. Bu modelin parametre tahminlerinin bulunmasında Lee-Carter ölümlülük modelindeki kısıtlar kullanılmaktadır.

## 2.3. Model 3

Currie (2006) ölümlülük modeli, basit bir Yaş-Dönem-Kuşak (APC) modelidir (Cairns ve diğerleri, 2007). Bu model aşağıdaki eşitlik ile gösterilmektedir:

$$\log(m_{x,t}) = \beta_x^{(1)} + \kappa_t^{(2)} + \gamma_{t-x}^{(3)} + \varepsilon_{x,t} \quad (8)$$

Burada;

$\beta_x^{(1)}$  : (x) yaşı için merkezi ölüm hızının doğal logaritmasının ortalamasını,

$\kappa_t^{(2)}$  : zamana göre ölüm hızındaki değişimi,

$\gamma_{t-x}^{(3)}$  : yaş ve yıla göre kuşak etkisini

göstermektedir. Currie (2006) modelinde parametre tahminlerinin elde edilmesinde kullanılan kısıtlar şu biçimdedir :

$$\mathring{a}_{x,t} g_{t-x}^{(3)} = 0 \quad (9)$$

$$\sum_t \kappa_t^{(2)} = 0 \quad (10)$$

#### 2.4. Model 4

Renshaw ve Haberman (2006) tarafından kuşak etkisinin de dikkate alındığı genelleştirilmiş Lee-Carter (1992) ölümlülük modelidir (Cairns ve diğerleri, 2007). Model,

$$\log(m_{x,t}) = \beta_x^{(1)} + \beta_x^{(2)} \kappa_t^{(2)} + \beta_x^{(3)} \gamma_{t-x}^{(3)} + \varepsilon_{x,t} \quad (11)$$

eşitliği ile ifade edilmiştir. Burada;

$\beta_x^{(1)}$ : (x) yaşı için merkezi ölüm hızının doğal logaritmasının ortalamasını,

$\kappa_t^{(2)}$ : zamana göre ölüm hızındaki değişimi,

$\beta_x^{(2)}$ : zamana göre ölüm hızındaki değişimin yaşa etkisini,

$\gamma_{t-x}^{(3)}$ : yaş ve yıla göre kuşak etkisini,

$\beta_x^{(3)}$ : kuşak etkisinin yaşa göre değişimini

göstermektedir (Cairns ve diğerleri, 2007). Bu modelde,

$$\beta_x^{(3)} = \gamma_{t-x}^{(3)} = 0$$

olması durumunda model, Lee ve Carter ölümlülük modeline dönüşmektedir. Renshaw ve Haberman (2006) modelinin parametre tahminleri,

$$\sum_{x,t} \gamma_{t-x}^{(3)} = 0 \quad (12)$$

$$\sum_t \kappa_t^{(2)} = 0 \quad (13)$$

$$\sum_x \beta_x^{(2)} = 1 \quad (14)$$

$$\sum_x \beta_x^{(3)} = 1 \quad (15)$$

kısıtları altında elde edilmektedir.

#### 2.5. Model 5

Merkezi ölüm hızı yerine kaba ölüm oranı kullanılan ve zamandan bağımsız yaşa bağımlı parametrenin kullanılmadığı yeni bir model oluşturulmuştur. Bu model,

$$\log it(q_{x,t}) = \beta_x^{(1)} \kappa_t^{(1)} + \beta_x^{(2)} \kappa_t^{(2)} + \varepsilon_{x,t} \quad (16)$$

şeklindedir (Cairns, Blake ve Dowd, 2006a). Bu modelin parametreleri şu şekilde ifade edilmiştir:

$$\beta_x^{(1)} = 1 \quad (17)$$

$$\beta_x^{(2)} = x - \bar{x} \quad (18)$$

Burada,  $\bar{x}$  ilgili yaş grubundaki ortalama yaşı göstermektedir.

## 2.6. Model 6

Cairns, Blake ve Dowd (2006a) ölümlülük modeline kuşak etkisini gösteren parametre eklenmiştir:

$$\log it(q_{x,t}) = \beta_x^{(1)} \kappa_t^{(1)} + \beta_x^{(2)} \kappa_t^{(2)} + \beta_x^{(3)} \gamma_{t-x} \quad (19)$$

Bu ölümlülük modelinde parametreler şu şekildedir:

$$\beta_x^{(1)} = 1 \quad (20)$$

$$\beta_x^{(2)} = x - \bar{x} \quad (21)$$

$$\beta_x^{(3)} = 1 \quad (22)$$

## 2.7. Model 7

Cairns, Blake ve Dowd (2006b) ölümlülük modeline, yaşa göre karesel etkiyi içeren terim ve kuşak etkisi eklenmiştir:

$$\log it(q_{x,t}) = \beta_x^{(1)} \kappa_t^{(1)} + \beta_x^{(2)} \kappa_t^{(2)} + \beta_x^{(3)} \kappa_t^{(3)} + \beta_x^{(4)} \gamma_{t-x} \quad (23)$$

Bu ölümlülük modeli için parametreler şu biçimde ifade edilmiştir:

$$\beta_x^{(1)} = 1 \quad (24)$$

$$\beta_x^{(2)} = x - \bar{x} \quad (25)$$

$$\beta_x^{(3)} = (x - \bar{x})^2 - \hat{\sigma}_x^2 \quad (26)$$

$$\beta_x^{(4)} = 1 \quad (27)$$

Burada,  $\hat{\sigma}_x^2$  ilgili yaş grubundaki yaşların varyansını göstermektedir (Cairns, Blake ve Dowd, 2006b).

## 2.8. Model 8

Plat (2009) ölümlülük modelinde; Cairns, Blake ve Dowd (2006b) ölümlülük modelinden farklı olarak merkezi ölüm hızı kullanılmış ve  $\kappa_t^{(4)}$  parametresi ile yaşın üstten kesilmiş fonksiyonunun zamana göre ölüm hızlarında yaptığı değişimin etkisi gösterilmiştir:

$$\log(m_{x,t}) = \beta_x^{(1)} \kappa_t^{(1)} + \beta_x^{(2)} \kappa_t^{(2)} + \beta_x^{(3)} \kappa_t^{(3)} + \beta_x^{(4)} \kappa_t^{(4)} + \beta_x^{(5)} \gamma_{t-x}^{(5)} \quad (28)$$

Ölümlülük modeli için parametre değerleri şu şekilde tanımlanmıştır:

$$\beta_x^{(1)} = 1 \quad (29)$$

$$\beta_x^{(2)} = 1 \quad (30)$$

$$\beta_x^{(3)} = x - \bar{x} \quad (31)$$

$$\beta_x^{(4)} = (x - \bar{x})^+ \quad (32)$$

$$\beta_x^{(5)} = 1 \quad (33)$$

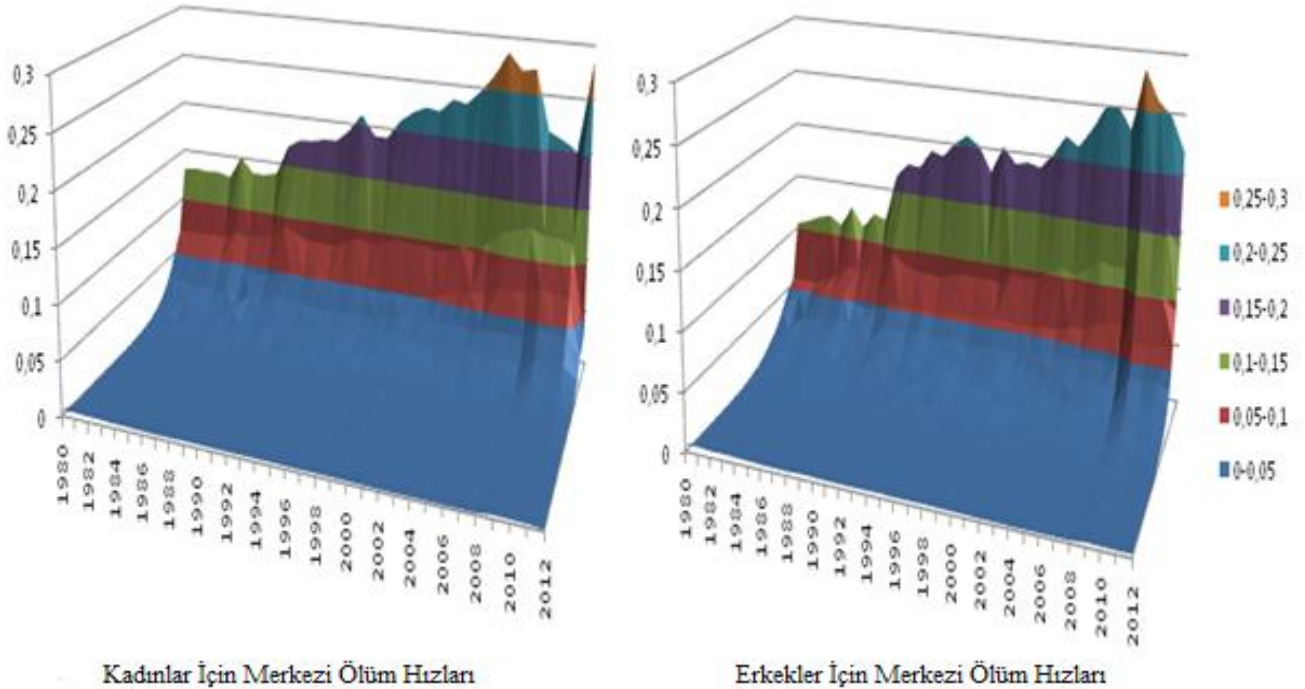
### 3. TÜRKİYE ÖLÜM VERİSİ İÇİN UYGULAMA

#### 3.1. Türkiye İçin Ölüm Hızlarının İncelenmesi

Bu bölümde, 1980-2012 yılları arasında Türkiye için cinsiyet ayrımında ölüm sayıları ve riske maruz kalan birim sayılarından elde edilen yaş gruplarına göre ölüm hızları, bir önceki bölümde açıklanan stokastik ölümlülük modelleri kullanılarak modellenmiştir.

Stokastik ölümlülük modelleri için parametre tahmini yapılmadan önce ölüm hızına ilişkin bazı incelemelerin yapılması gerekmektedir. Şekil 1'de kadın ve erkeklerin ölüm oranları verilmiştir:

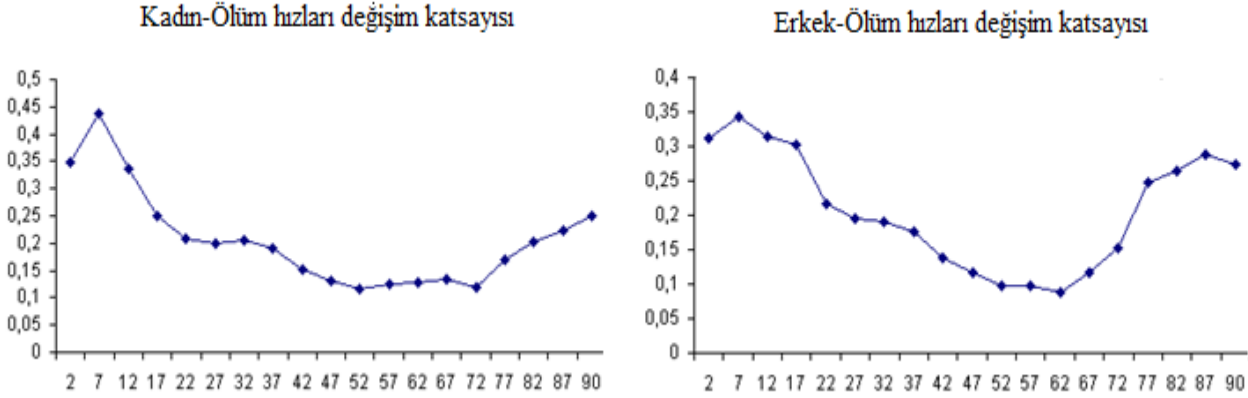
Şekil 1. Kadın ve erkekler için yaşa göre merkezi ölüm hızları (TÜİK)



Şekil 1 incelendiğinde, kadın ve erkeklerin ölüm hızlarının farklı değişim yapısına sahip olduğu, yaşa ve zamana göre ölüm hızlarının önemli biçimde değiştiği görülmektedir. 0-20 ve 60-80 yaş aralıklarında kadınların ölüm hızları, erkeklerin ölüm hızlarından daha yüksektir. Ayrıca kadınların ölüm hızlarındaki değişim, erkeklerin ölüm hızlarındaki değişimden daha fazladır.

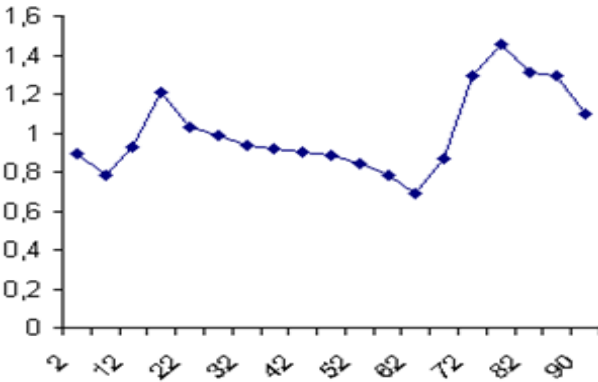
Kadın ve erkek ölüm hızlarının yaşa göre değişim katsayıları (variability coefficient) Şekil 2’de verilmiştir:

**Şekil 2. Kadın ve erkek ölüm hızları için yaşa göre değişim katsayısı (TÜİK)**



Kadın ve erkek nüfusu için ölüm hızları değişim katsayısı, konveks bir fonksiyon olup, 20’de küçük ve 70’den büyük yaşlar için diğer yaşlara göre daha büyük değerler almaktadır. Yaşlara göre erkeklerin ölüm hızlarındaki değişim katsayısının, kadınların ölüm hızlarındaki değişim katsayısına oranı Şekil 3’te verilmiştir:

**Şekil 3. Değişim katsayısı oranı (TÜİK)**



15-25 yaş aralığı ve 70’den büyük yaşlar için erkeklerin ölüm hızı değişim katsayısının kadınların ölüm hızı değişim katsayısına oranı 1’den büyüktür. Şekil 1, Şekil 2 ve Şekil 3 incelendiğinde, erkek ve kadınların ölüm hızlarının ayrı ayrı modellenmesi gerektiği görülmüştür.



### 3.2. Parametre Tahmini

Her bir takvim yılı ve yaş aralığı için, literatürde yaygın olarak kullanılan ölüm sayılarının Poisson dağılımına uyduğu varsayımı altında, ikinci bölümde açıklanan stokastik ölümlülük modelleri için parametre tahmini şu şekilde elde edilmiştir (Brouhns ve diğerleri, 2002):

$$D_{x,t} \sim \text{Poisson}(E_{x,t} m_{x,t})$$

Burada;

$D_{x,t}$ : t. takvim yılında x yaşında ölen kişi sayısını,

$E_{x,t}$ : t. takvim yılı ortasında x yaşındaki kişi sayısını,

$m_{x,t}$ : t. takvim yılında x yaş için merkezi ölüm hızını

göstermektedir (Cairns ve diğerleri, 2007; Biffi ve Clemente, 2012). Tüm modeller için parametre tahminleri En Çok Olabilirlik Yöntemi (MLE) kullanılarak elde edilmiştir. Stokastik bir ölümlülük modeli için  $\phi$  parametreler kümesini göstermek üzere log-olabilirlik fonksiyonu,

$$l(\phi; D, E) = \sum_{t,x} D_{x,t} \log [E_{x,t} m_{x,t}(\phi)] - E_{x,t} m_{x,t}(\phi) - \log [D_{x,t}!] \quad (34)$$

biçimindedir (Cairns ve diğerleri, 2007). Bu eşitlik kullanılarak parametre tahminleri, R programlama dilinde yazılmış “Lifemetrics” paketi kullanılarak elde edilmiştir.

### 3.3. Uyum İyiliği Testleri ve Duyarlılık Analizi

Modellerin parametre tahminleri bulunduktan sonra, oluşturulan modelin uyum iyiliği testi ve duyarlılık analizinin de yapılması gerekir. Çalışmalarda yaygın olarak kullanılan uyum iyiliği testi log-olabilirlik değeridir. Log-olabilirlik değeri, modeldeki parametre sayısına bağlı olarak artmaktadır (Biffi ve Clemente, 2012), bu nedenle başka uyum iyiliği testlerine de ihtiyaç duyulmaktadır.

Bu bölümde stokastik ölümlülük modellerine ilişkin parametre tahmini yapıldıktan sonra, optimal stokastik ölümlülük modelinin seçilmesi amacıyla bazı analizler yapılacaktır.

#### 3.3.1. Uyum iyiliği testi

Stokastik ölümlülük modellerinde parametre sayısı arttıkça log-olabilirlik değeri de artacaktır. Bu nedenle, optimal stokastik ölümlülük modelinin belirlenmesinde BIC (Bayesian Information Criteria) değeri kullanılmıştır. Tablo 1’de, ikinci bölümde anlatılan stokastik ölümlülük modelleri için BIC değerleri verilmiştir. Ayrıca, stokastik ölümlülük modelleri BIC değerleri kullanılarak optimallik durumuna göre sıralanmıştır:

**Tablo 1. BIC Değerleri ve Sıralama**

MODEL	Kadın		Erkek	
	BIC Değeri	Sıralama	BIC Değeri	Sıralama
<b>Model 1</b>	-8.458,30	7	-6.996,13	8
<b>Model 2</b>	-8.275,65	5	-6.524,46	2
<b>Model 3</b>	-8.379,20	6	-6.865,53	6
<b>Model 4</b>	-8.563,37	8	<b>-6.458,10</b>	1
<b>Model 5</b>	-8.126,40	4	-6.721,44	4
<b>Model 6</b>	-8.006,23	3	-6.813,75	5
<b>Model 7</b>	-7.902,10	2	-6.924,42	7
<b>Model 8</b>	<b>-7.864,70</b>	1	-6.586,72	3

Tablo 1 incelendiğinde, kadınlar için Model 8 ve erkekler için Model 4'ün optimal model olarak seçilebileceği görülmüştür. Optimal modelin seçiminde sadece BIC değerlerinin karşılaştırılması yeterli değildir. Parametre tahmini yapıldıktan sonra artık değerleri de incelenmelidir. Standartlaştırılmış artık değerleri,

$$\varepsilon_{x,t} = \frac{D_{x,t} - E_{x,t} \hat{m}_{x,t}}{\sqrt{E_{x,t} \hat{m}_{x,t}}} \quad (35)$$

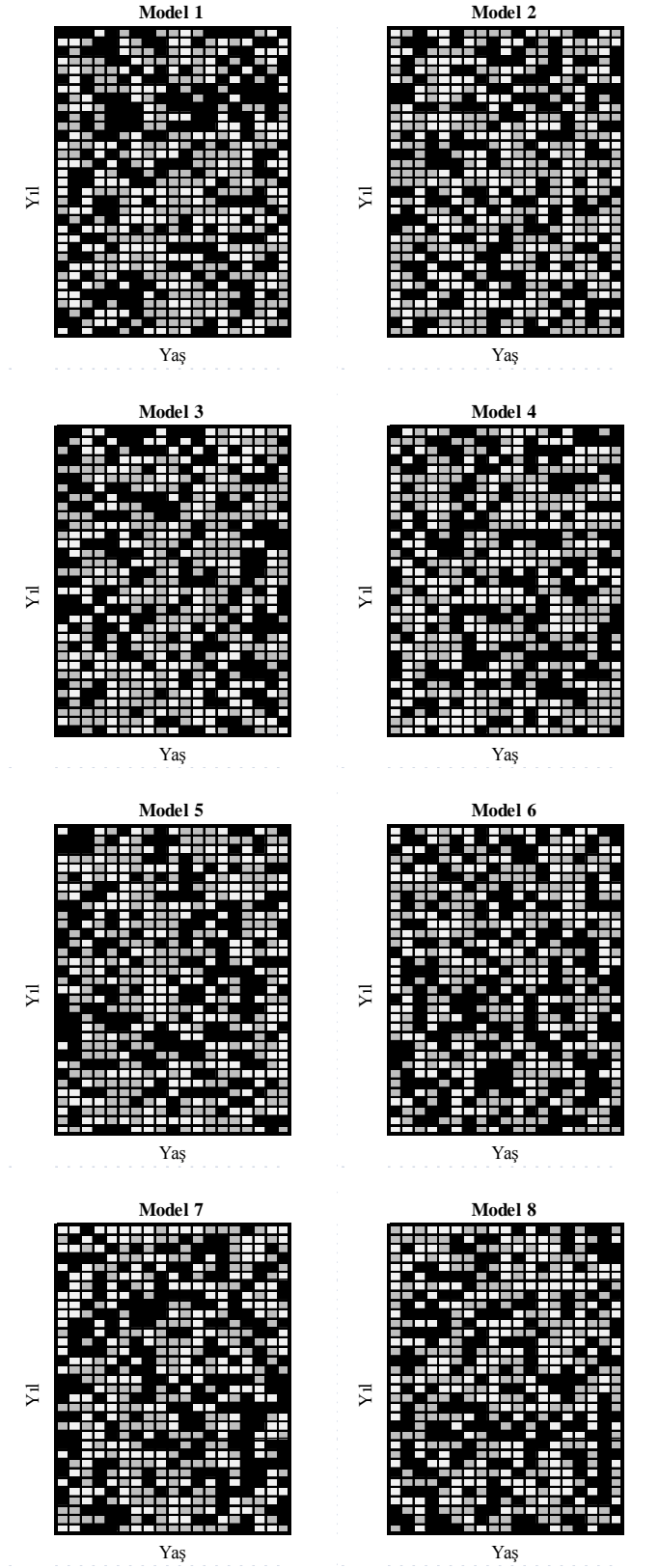
eşitliğinden bulunmaktadır (Cairns ve diğerleri, 2007). Şekil 4'te kadın ölüm hızları ve Şekil 5'te erkek ölüm hızları için standartlaştırılmış artık değerleri verilmiştir. Burada;

$$\begin{aligned} |\varepsilon_{x,t}| > 2 &: \text{Koyu} \\ 1 \leq |\varepsilon_{x,t}| \leq 2 &: \text{Orta koyu} \\ |\varepsilon_{x,t}| < 1 &: \text{Açık koyu} \end{aligned}$$

ile gösterilmiştir.



Şekil 5. Erkek ölüm hızları için standartlaştırılmış artık değerleri



Optimal stokastik ölümlülük modeli belirlenirken, pozitif ve negatif artık değerlerinin rastgele dağılması gerekmektedir (Biffi ve Clemente, 2012). Kadın ve erkek ölüm hızları için artık değerleri incelendiğinde, negatif ve pozitif değerlerde bazı gruplaşmalar olduğu görülmektedir. Bu nedenle standartlaştırılmış artık değerlerinin yanı sıra yıllara ve yaşlara göre artık değerlerine ilişkin bazı karakteristikler de incelenmiştir.

Yıllara göre artık değeri karakteristikleri R programında Demography paketi içinde tanımlanmıştır. Bunlar; ortalama hata (ME), ortalama karesel hata (MSE), ortalama yüzdesel hata (MPE), ortalama mutlak yüzdesel hata (MAPE) ve artıkların varyansıdır. Yıllara göre artık karakteristik değerleri kadın ölüm hızları için Tablo 2’de ve erkek ölüm hızları için Tablo 3’te verilmiştir.

Yaşlara göre artık değeri karakteristikleri R programında Demography paketi içinde tanımlanmıştır. Bunlar; bütünleşik hata (IE), bütünleşik karesel hata (ISE), bütünleşik yüzdesel hata (IPE) ve bütünleşik mutlak yüzdesel hata (IAPE)’dir. Yaşlara göre artık karakteristik değerleri, kadın ölüm hızları için Tablo 4’te erkek ölüm hızları için Tablo 5’te verilmiştir:

**Tablo 2. Kadın ölüm hızları için yıllara göre artık karakteristikleri**

MODEL	ME	MSE	MPE	MAPE	Varyans
Model 1	0,0124	0,0696	0,1029	0,1278	13,42
Model 2	0,0095	0,0787	0,0922	0,1472	11,60
Model 3	0,0128	0,0811	0,0824	0,1622	9,21
Model 4	0,0196	0,0920	0,0865	0,1567	12,15
Model 5	0,0082	<b>0,0257</b>	0,0275	0,1146	8,42
Model 6	0,0079	0,0468	0,0326	<b>0,1048</b>	8,96
Model 7	0,0098	0,0326	0,0872	0,1124	9,73
<b>Model 8</b>	<b>0,0052</b>	0,0657	<b>0,0156</b>	0,1737	<b>7,42</b>

Tablo 2’de verilen değerler incelendiğinde kadın ölüm hızları için Model 8’in beş test istatistiğinden üçü için en küçük değerleri aldığı görülmüştür. Sonuç olarak, yıllara göre artık karakteristikleri dikkate alındığında da kadın ölüm hızları için Model 8’in en uygun model olduğu söylenebilir.

**Tablo 3. Erkek ölüm hızları için yıllara göre artık karakteristikleri**

MODEL	ME	MSE	MPE	MAPE	Varyans
Model 1	0,0098	0,0192	0,0231	<b>0,0942</b>	6,58
Model 2	0,0193	0,0412	0,0396	0,1397	8,88
Model 3	0,0056	<b>0,0152</b>	0,0342	0,1138	6,10
Model 4	<b>0,0034</b>	0,0168	<b>0,0161</b>	0,1035	<b>5,43</b>
Model 5	0,0061	0,0399	0,0492	0,1121	8,73
Model 6	0,0179	0,0215	0,0513	0,1342	8,37
Model 7	0,0138	0,0298	0,4141	0,1402	9,12
Model 8	0,0152	0,0342	0,4320	0,1572	7,12

Tablo 3'te verilen değerler incelendiğinde, erkek ölüm hızları için Model 4'ün beş test istatistiğinden üçü için en küçük değerleri aldığı görülmüştür. Sonuç olarak, yıllara göre artık karakteristikleri dikkate alındığında da erkek ölüm hızları için Model 4, en uygun modeldir.

**Tablo 4. Kadın ölüm hızları için yaşlara göre artık karakteristikleri**

MODEL	IE	ISE	IPE	IAPE
Model 1	0,0184	0,0789	0,0417	<b>0,1042</b>
Model 2	0,0135	0,0735	0,0311	0,1183
Model 3	0,0146	<b>0,0634</b>	0,0459	0,1087
Model 4	0,0178	0,0696	0,0296	0,1244
Model 5	0,0199	0,0899	0,0398	0,1139
Model 6	0,0159	0,0849	0,0373	0,1275
Model 7	0,0167	0,0815	0,0272	0,1102
Model 8	<b>0,0126</b>	0,0862	<b>0,0235</b>	0,1201

Tablo 4 incelendiğinde, farklı stokastik ölümlülük modellerinde, kadın ölüm hızlarının yaşlara göre artık değerlerinin birbirlerine yakın olduğu görülmektedir. Sonuç olarak, tüm modellerin, kadın ölüm hızlarının yaşa göre değişimini, birbirine yakın derecede tanımladığı görülmüştür.

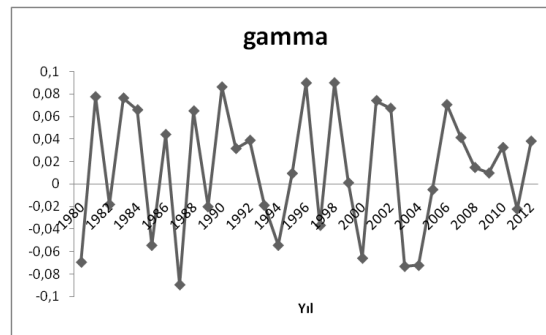
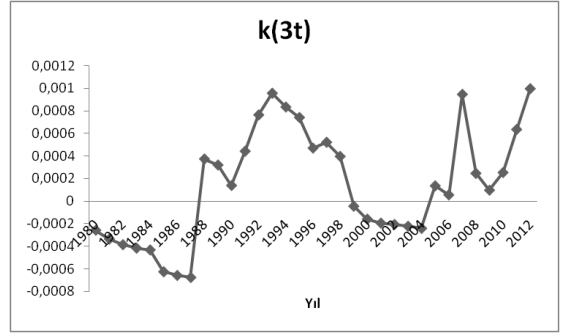
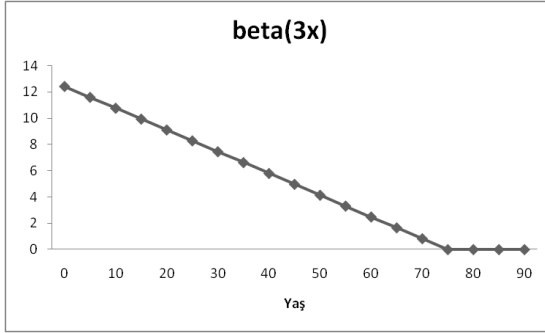
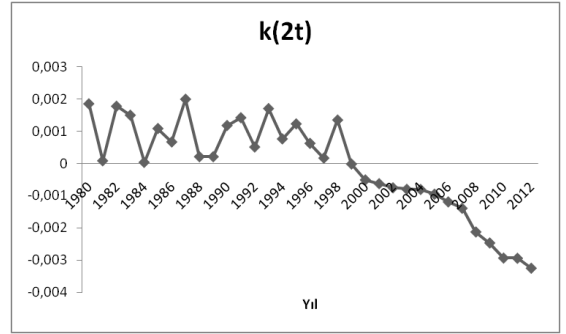
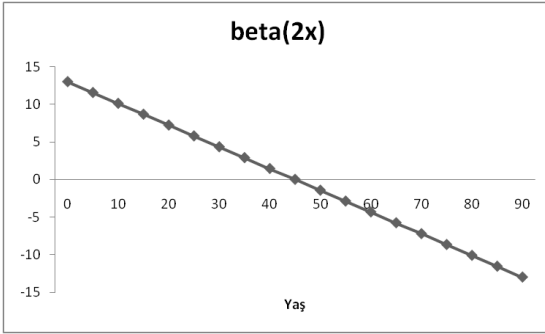
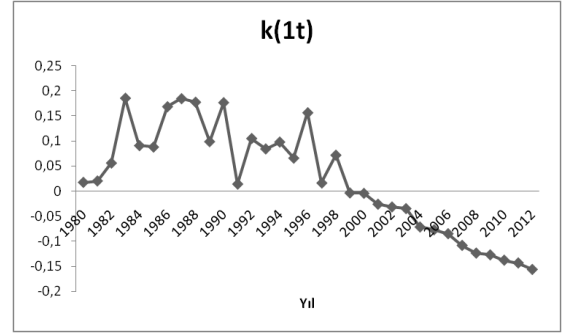
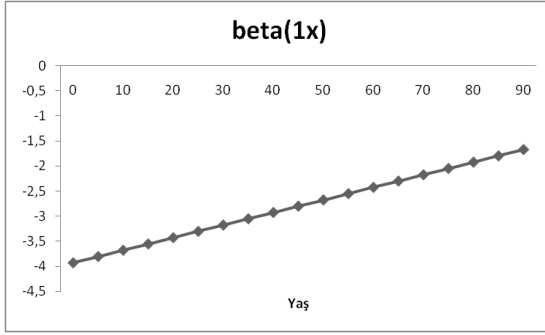
**Tablo 5. Erkek ölüm hızları için yaşlara göre artık karakteristikleri**

MODEL	IE	ISE	IPE	IAPE
Model 1	0,0169	0,0618	0,0237	0,0901
Model 2	0,0196	0,0649	<b>0,0197</b>	0,0896
Model 3	0,0157	0,0572	0,0312	0,0922
Model 4	<b>0,0112</b>	0,0465	0,0205	<b>0,0835</b>
Model 5	0,0189	0,0602	0,0396	0,0987
Model 6	0,0172	0,0596	0,0296	0,1003
Model 7	0,0135	<b>0,0366</b>	0,0347	0,0899
Model 8	0,0175	0,0511	0,0259	0,0965

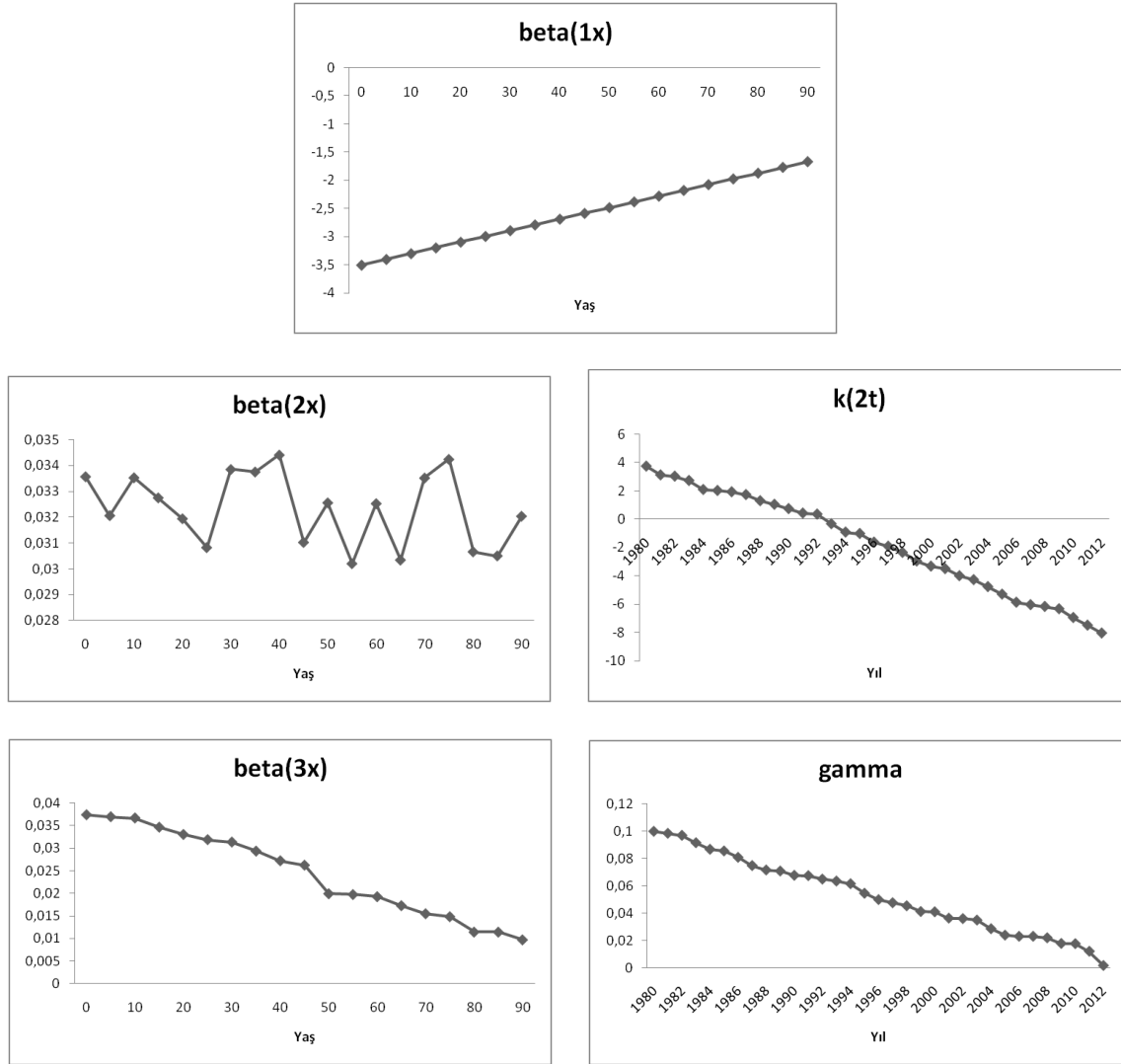
Tablo 5'te verilen sonuçlar incelendiğinde, kadın ölüm hızları için bulunan sonuçlara benzer sonuçların erkek ölüm hızları için de geçerli olduğu görülmüştür.

BIC değerleri ve artıklar incelendiğinde, kadın ölüm hızları için optimal stokastik modeline (Model 8) ilişkin parametre tahminleri Şekil 6 ve erkek ölüm hızlarına için optimal stokastik modeline (Model 4) ilişkin parametre tahminleri de Şekil 7'de verilmiştir:

Şekil 6. Kadın ölüm hızları için parametre tahmini



Şekil 7. Erkek ölüm hızları için parametre tahmini



#### 4. SONUÇLAR VE YORUM

Çalışmanın amacı, Türkiye için yaşa göre ölüm hızlarında kuşak etkisinin araştırılarak bunun ölümlülük projeksiyonlarına etkisini incelemek ve tartışmaktır. Çalışmanın ikinci bölümünde literatürde yaygın olarak kullanılan stokastik ölümlülük modelleri tanıtılmıştır. Üçüncü bölümde ise Türkiye kadın-erkek nüfus ve ölüm sayılarından elde edilen merkezi ölüm hızları incelenmiş, kadın ile erkek ölüm hızlarının farklı yapıya sahip olmaları nedeniyle ayrı ayrı modellenmeleri gerektiği sonucuna ulaşılmıştır. Optimal stokastik ölümlülük modelini seçmek için uyum iyiliği testleri yapılmıştır. Uyum iyiliği testlerine göre erkek ölüm hızları için Model 4 ve kadın ölüm hızları için Model 8 optimal model olarak bulunmuştur. Sonuç olarak, kadın ve erkek ölüm hızları için kuşak ve takvim yılı etkisinin önemli olduğu görülmüştür. Kadın ölüm hızları için takvim yılı etkisinin, erkek ölüm hızlarına göre daha önemli olduğu sonucuna varılmıştır.



Çalışmada bazı yıllar için, kullanılan veriden elde edilen (gözlenen) ve kadın ölüm hızları kullanılarak Lee-Carter (1992) ve Plat (2009) modellerine göre tahmin edilen doğuşta beklenen yaşam süreleri Tablo 8’de verilmiştir.

**Tablo 8. Kadın – Doğumda Beklenen Yaşam Süresi**

Yıl	KADIN		
	Gözlenen	Lee-Carter (1992)	Plat (2009)
1980	68,16	66,95	68,05
1985	69,82	68,58	70,08
1990	71,36	70,20	71,71
1995	72,80	71,83	72,93
2000	74,15	73,45	74,85
2005	75,71	75,08	76,78
2010	79,10	77,03	78,71
2015		79,66	80,64
2020		81,28	81,56
2025		82,91	82,49
2030		83,53	84,41

Erkek ölüm hızları kullanılarak bazı yıllara göre doğumda beklenen yaşam sürelerinin gözlenen, Lee-Carter (1992) ve Renshaw-Haberman (2006) modellerine göre tahmin edilen değerler Tablo 9’da verilmiştir.

**Tablo 9. Erkek – Doğumda Beklenen Yaşam Süresi**

Yıl	ERKEK		
	Gözlenen	Lee-Carter (1992)	Haberman (2006)
1980	63,08	62,41	63,05
1985	64,31	63,14	64,58
1990	65,47	64,87	65,90
1995	66,56	65,60	67,33
2000	67,58	66,33	68,75
2005	68,01	67,06	70,08
2010	73,90	69,82	72,69
2015		71,15	73,62
2020		72,88	74,54
2025		73,61	75,47
2030		74,34	76,39

Tablo 8 ve Tablo 9 birlikte incelendiğinde, kadın ve erkekler için optimal olarak belirlenen modellerden elde edilen beklenen yaşam sürelerinin, gözlenen yaşam sürelerine Lee-Carter (1992) modelinden bulunan yaşam süresi tahminlerine göre daha iyi sonuç verdiği görülmüştür. Gözlenen ve modellerden elde edilen beklenen yaşam süreleri arasındaki farkın dikkate alınmayan

(gözlemlenemeyen) açıklayıcı değişkenlerden kaynaklandığı düşünülmektedir. Daha sonraki çalışmalarda bu değişkenlerin etkisini de dikkate alan modeller incelenebilir.

Tekli yaşlar için ölüm sayıları ve riske maruz değerleri içeren veri kullanılması durumunda ölümlülük tahminleri daha sağlıklı biçimde yapılabilecektir.

## KAYNAKÇA

Biffi P., Clemente G.P., (2012), "Selecting stochastic mortality models for the Italian population", **Decisions Economics and Finance**, DOI 10.1007/s10203-012-0131-9.

Booth, H., Maindonald, J. and Smith, L., (2002), "Age-Time Interactions in Mortality Projection:Applying Lee-Carter to Australia", **ANU, Demography and Sociology Program, Research School of Social Sciences, Working Papers No. 85.**

Cairns, A.J.G., Blake, D., and Dowd, K., (2006a), "Pricing death: Frameworks for the valuation and securitization of mortality risk", **ASTIN Bulletin**, 36: 79-120.

Cairns, A.J.G., Blake, D., and Dowd, K., (2006b), "A Two-Factor Model for Stochastic Mortality with Parameter Uncertainty: Theory and Calibration", **Journal of Risk and Insurance**, 73: 687-718.

Cairns, A.J.G., Blake, D., Dowd, K., Coughlan, G.D., Epstein, D., Ong, A., Balevich, I., (2007), "A quantitative comparison of stochastic mortality models using data from England & Wales and the United States", **The Pensions Institute**, 13(1):1-35.

Currie, I.D., (2006), "Smoothing and forecasting mortality rates with P-splines", **Talk given at the Institute of Actuaries**, June 2006.

Demircioğlu, S., Büyükyazıcı, M., (2013), "Poisson log-bilineer yaklaşımıyla Lee-Carter modellemesi ve Türkiye Uygulaması", **İstatistikçiler Dergisi**, Vol. 6, 14-40.

Gençtürk Y., Genç T., (2012), "Türkiye il-ilçe merkezlerindeki ölüm oranlarının trend ve Lee-carter yöntemleri ile tahmini", **Anadolu Üniversitesi Bilim ve Teknoloji Dergisi – B**, 2 (1), 63-74.

Gerber H.U., 1997, "Life Insurance Mathematics", **Springer**, Berlin.

Gompertz B., (1825), "On the nature of the function expressive of the law of human mortality", **Phil. Trans. Roy. Soc.**, 115, 513-585.

Heligman L., Pollard J.H., (1980), "The age pattern of mortality", **Journal of the Institute of Actuaries**, 107, 49-80.

Koissi, M.C., Shapiro, A.F., (2008), "The Lee-Carter Model Under The Condition of Variables Age-Specific Parameters", **Actuarial Research Conference, Regina, Canada, 2.**

Kul, F. , 2014, “Ölümlülük Yapısındaki Değişimin Modellenmesi ve Projeksiyonu”, **Hacettepe Üniversitesi, Fen Bilimleri Enstitüsü, Aktüerya Bilimleri AnaBilim Dalı**, Doktora Tezi (Devam ediyor).

Lee, R.D. , Carter, L., (1992), “Modeling and Forecasting U.S. Mortality”, **Journal of the American Statistical Association**, **87**, 419.

Li J.S., Hardy M.R., Tan K.S., (2009), “Uncertainty in Mortality Forecasting: An extension to the classical Lee-Carter approach”, **ASTIN Bulletin**, **39** (1), 137-164.

Makeham, W.M., (1867), “On the law of mortality”, **Journal of the Institute of Actuaries**, **8**, 325-358.

Plat, R., (2009), “On stochastic mortality modeling”, **Insurance: Mathematics and Economics**, **45** (3), 393–404.

Renshaw, A.E., Haberman, S.A., (2006), “Cohort based extension to the Lee–Carter model for mortality reduction factors”, **Insurance: Mathematics and Economics**, **38** (3), 556–570.

Tabeau, E., Van Den Berg Jeths, A. , Heathcote, C., (2001), “Forecasting Mortality in Developed Countries Insights From A Statistical, Demographic, and Epidemiological Perspective”, **Demographic and Epidemiological Perspective**, Kluwer Academic Publishers, London, 3,5,7.

Yıldırım F., (2010), “Türkiye Ölümlülük Yapısının Lee-Carter ve Bulanık Lee-Carter İle Modellenmesi”, **Hacettepe Üniversitesi, Fen Bilimleri Enstitüsü Yüksek Lisans Tezi**.

<http://www.turkstat.gov.tr/>

## SUMMARY

### STOCHASTIC MORTALITY MODELS FOR THE POPULATION OF TURKEY

Mortality forecasts are playing an important role for demography and actuarial science. Early attempts to model mortality did not take account of potential future improvements in mortality rates. Many stochastic mortality modelling methodologies are developed in time.

The aim of this paper is to have a close look at Turkish mortality and see whether there are any patterns suggestive of cohort effects. Deaths and exposures to risk of male and female population are modelled separately. For the sake of comparison, BIC values, standardized residuals and some residual characteristics, which are defined by ages and years are used. As a result, it is found that calendar year and cohort effect are important for male and female mortality rate modelling.