Dikdörtgen Oluşturmadan Maksimum Sayıda Kutu Karalama Sorusu ve Çözüm için Bir Alt Sınır

Scratching Maximum Number of Boxes Without Forming a Rectangle and a Lower Bound for the Solution

ANTALYA
İL MİLLÎ EĞİTİM MÜDÜRLÜĞÜ

Ceren ŞAHİN

Kocaeli ENKA Fen ve Teknoloji Lisesi, Kocaeli, Türkiye.
Kocaeli ENKA Science and Technology High School, Kocaeli, Türkiye

cerensahin2023@gmail.com
ORCID: 0000-0002-5090-6260

MAKALE BİLGİSİ / ARTICLE INFORMATION

Geliş Tarihi / Date Received
17.12.2021

Kabul Tarihi / Date Accepted
30.12.2021

Yayın Tarihi / Date Published
Ağustos / August 2022

Yayın Sezonu / Pub Date Season
Ağustos - Ocak / August - January

ATIF / CITE as

Şahin, C. (2022) "Dikdörtgen Oluşturamadan Maksimum Sayıda Kutu Karalama Sorusu ve Çözüm için Bir Alt Sınır"/"Scratching Maximum Number of Boxes Without Forming a Rectangle and a Lower Bound for the Solution". bilar:Bilim Armonisi Dergisi, 5 (1): 48-53. doi: 10.37215/bilar.1037944

https://dergipark.org.tr/tr/pub/bilar

Dikdörtgen Oluşturmadan Maksimum Sayıda Kutu Karalama Sorusu ve Çözüm için Bir Alt Sınır

Scratching Maximum Number of Boxes Without Forming a Rectangle and a Lower Bound for the Solution

ANTALYA
İL MİLLÎ EĞİTİM MÜDÜRLÜĞÜ

ÖZET

Bu çalışmanın amacı henüz çözülemediği iddia edilen Dikdörtgen Oluşturmadan Maksimum Sayıda Kutu Karalama Sorusu'nun çözümü için bir alt sınır sunmaktır. Makale boyunca Dikdörtgen Oluşturmadan Maksimum Sayıda Kutu Karalama Sorusu adıyla anılan soru şu şekildedir: $n \times m$ lik bir çizelgede dikdörtgen oluşturulmadan en fazla kaç kutu karalanabilir? Öncelikle sorunun Sonlu Matematikte çokça kullanılan güvercin yuvası ilkesiyle ilgili olduğu fark edilmiştir. Daha sonra sorunun bir alt versiyonları incelenmiştir. Sorunun bir alt versiyonu her satırda en fazla y sayıda kutu karalanırsa ne olur, z tane renk kullanılırsa ne olur tarzında çözülebilir sorulardır. Bu soruyla bir alt versiyonu arasındaki ilişki gözetilerek problemin çözümü için bir alt sınır oluşturulmuştur. Soru iki farklı durumda incelenmiştir. Birinci duruma doğrudan ispat tekniğiyle çözüm bulunmuştur. İkinci duruma doğrudan ispat tekniği ve kodlamadan yararlanılarak bir alt sınır bulunmuştur. Bulunan sonucun doğruluğu bolca örnekle test edilmiştir. Sonuç olarak, genelliği bozmadan $n \leq m$ alındığında, n satır ve m sütunluk bir çizelgede $C(n, 2) \leq m$ ise dikdörtgen oluşturmadan karalanabilecek maksimum kare sayısı $C(n, 2) + m$ olarak bulunmuştur. $C(n, 2) > m$ ise dikdörtgen oluşturmadan karalanabilecek maksimum kare sayısı için bir alt sınır bulunmuştur. Bu alt sınır $2m + x$ 'tir. Bahsedilen x değişkeni bir kod yazarak bulunmuştur ve m, n sayılarının değerine göre değişir.

Anahtar Sözcükler: Sonlu Matematik, Boyama İlkesi, Güvercin Yuvası İlkesi

ABSTRACT

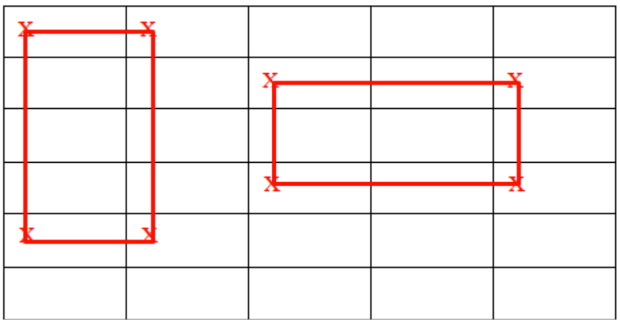
The aim of this study is to present a lower bound for the solution to the unsolved question "Scratching Maximum Number of Boxes Without Forming a Rectangle''. The question that will be referred to as the "Scratching Maximum Number of Boxes Without Forming a Rectangle'' throughout the article is: How many boxes can be scratched in a $m \times n$ table without forming a rectangle? Firstly, it has been noticed that the problem is related to the pigeonhole principle, which is widely used in Finite Mathematics. Later, subversions of the question were examined. Subversions of the problem are solvable questions such as what happens if at most y boxes are scribbled on each line, and what happens if z colours are used. Considering the relationship between this question and the subversions, a lower bound was created to solve the problem. The problem was considered in 2 cases. The direct proof technique was used to solve the first case of the problem. A lower bound was found for the second case of the problem with the help of the direct proof technique and coding. The accuracy of the result found has been tested with lots of samples. As a result of the study, if $n \leq m$ is taken without breaking the generality, if $C(n, 2) \leq m$ in a table with n rows and m columns, the maximum number of squares that can be drawn without forming a rectangle is $C(n, 2) + m$. If $C(n, 2) > m$, a lower bound has been found for the maximum number of squares that can be drawn without forming a rectangle. This lower bound is $2m + x$. The mentioned variable x was found by writing a code that changes according to the values of m, n numbers.

Key Words: Finite Mathematics, Painting Principle, Dirichlet Principle

1. GİRİŞ

Matematik Dünyası dergisinde "Karenin Dikdörtgensiz Altkümeleri" başlıklı makalede belirtilen soru şu şekildedir: $n \times n$ lik bir çizelgede dikdörtgen oluşturulmadan en fazla kaç kutu karalanabilir (Matematik Dünyası Dergisi 2003-I)? Bu sorunun bir üst versiyonu olan, henüz çözülemediği bilinen ve makale boyunca "Dikdörtgen Oluşturmadan Maksimum Sayıda Kutu Karalama Sorusu" olarak bahsedilen soru ise şu şekildedir: $n \times m$ lik bir çizelgede dikdörtgen oluşturulmadan en fazla kaç kutu karalanabilir? "Dikdörtgen Oluşturmadan Maksimum Sayıda Kutu Karalama Sorusu" literatürde "Karalama Sorusu" olarak da geçmektedir. Soruda bahsedilen dikdörtgen tanımı çizelgenin sütunlarına ve satırlarına paralel olan doğruların kesişim kümesinin oluşturduğu dikdörtgenlerdir. Çizelge 1'de soruda bahsedilen dikdörtgenlere örnek verilmiştir. Karalanan kutucuklar makale boyunca üzerine x işareti konularak belirtilmiştir. Makalede Dikdörtgen Oluşturmadan Maksimum Sayıda Kutu Karalama Sorusu iki farklı durumda incelenmiştir. İlk durumda doğrudan ispat tekniğiyle soru çözülmüştür. İkinci durumda ise kodlama yöntemi ve doğrudan isğat tekniği yardımıyla sorunun çözümüne bir alt sınır bulunmuştur. Yapılan çalışmada alan uzmanlarının görüşleri alınmıştır.

Çizelge 1. Dikdörtgen Oluşturmadan Maksimum Sayıda Kutu Karalama Sorusu'nda bahsedilen dikdörtgenlerin örnekleri.



2. MATERYAL ve METOT

2.1. Dikdörtgen Oluşturmadan Maksimum Sayıda Kutu Karalama Sorusu ile Güvercin Yuvası İlkesinin ve Boyama İlkesinin İlişkilendirilmesi

Çizelge 2. 5 x 6 lık çizelgede karalama örneği.

X			X		
	X				
		X		X	X
X	X				
		X	X		X

Çizelge 2'deki karalamaya bakılırsa soruda belirtilen şartı sağlamadığı barizdir. Kırmızı ile işaretlenmiş karalamalar bir dikdörtgen oluşturur. Bir sütundan seçilen noktaların herhangi ikisinin başka bir sütunda da bulunması durumunda bir dikdörtgen oluşur. Bu durumda bir sütundan kaç farklı nokta r'lisi seçilir ve seçilen r noktadan herhangi ikisinin bir dahaki sütunlarda aynı satırda bulunmamaları için ne yapılmalıdır? Bu iki sorunun Güvercin Yuvası İlkesi ve Boyama İlkesiyle ilgili olduğu anlaşılmaktadır (Alizade, 2015). Kombinatorik ise bulunan alt sınırın sayılara dökülebilmesini sağlayan bir araç niteliği taşır.

2.2 Dikdörtgen Oluşturmadan Yapılan Bir Karalamanın Matematiksel Sunumu

Çizelge 3. 4 x 7 lik çizelgede karalama örneği.

X	X	X				
X			X	X		X
	X		X		X	
		X		X	X	

$\{1,(1,2)\},\{2,(1,3)\},\{3,(1,4)\},\{4,(2,3)\},\{5,(2,4)\},\{6,(3,4)\},\{7,(2)\}$

Çizelge 3'te 4×7 lik çizelgede yapılması gereken karalama modeli yapılmıştır. Bu modelde 7. sütunda 2. kutu yerine 1, 3 veya 4 numaralı kutu karalandığında da çözüm oluşur. $\{y, (a, b)\}$ notasyonu y. sütundan a. ve b. satırdaki iki noktanın karalandığını belirtir. Yukarıda yazan $\{y, (a, b)\}$ ikilileri de nasıl bir algoritma izlendiğini anlatır. Bu soru güvercin yuvası ilkesine göre çözülebilir. Şu ikililere bakılır: $\{1, (a, b)\}$ ve $\{c, (a^1, b^1)\}$. $(c \neq 1)$ Bu gösterimde (a, b) 1. sütundan rastgele seçilerek karalanan nokta ikilisini; $\{c, (a^1, b^1)\}$ ise diğer sütunlarda (a, b) nin karşısında olan nokta ikililerini temsil etmektedir.

3. BULGULAR

3.1. $C(n, 2) \leq m$ Durumu İçin Dikdörtgen Oluşturmadan Maksimum Sayıda Kutu Karalama Sorusunun Çözümü

Önerme:

$C(n,2) \leq m$ ise dikdörtgen oluşturmadan en fazla

$$[C(n,2)].2 + [m - C(n,2)].1 = m + C(n,2)$$

tane kutu karalanabilir.

İspat için yol gösterme:

$n \times m$ lik bir çizelgede genelliği bozmadan $n < m$ alınır. Çizelge döndürülerek n tane satır ve m tane sütun olacak şekilde ayarlanır. Her sütunda 2 tane nokta karalanır. Bir sütundan seçilebilecek $C(n, 2)$ farklı nokta ikilisi olduğundan [$C(n, 2) + 1$]. sütuna gelindiğinde hangi 2 nokta karalanırsa karalansın daha önceden karalanmış bir (a, b) ikilisi oluşturacak ve dolayısıyla dikdörtgen oluşturacaktır. Bu yüzden [$C(n, 2)$]. sütundan sonra her sütun için sadece 1 nokta karalanabilir. Örneğin, 4×7 lik bir çizelgede $C(4, 2) = 6$ olduğu için 7. sütuna gelindiğinde herhangi 2 nokta karalanırsa kesinlikle bir dikdörtgen oluşur. Bu yüzden 7. sütundan sadece 1 nokta karalanabilir, bu nokta da rastgele seçilir.

3.2. $C(n, 2) > m$ Durumu İçin Dikdörtgen Oluşturmadan Maksimum Sayıda Kutu Karalama Sorusu İçin Bir Alt Sınır Bulunması

$C(n, 2) > m$ ise bulunan sayı karalanabilecek maksimum kare sayısına bir alt sınır oluşturur.

En başta, aynı algoritmaya göre $C(n, 2). 2 - [C(n, 2) - m]. 2 = 2m$ tane nokta karalanabilir ama burada daha fazla nokta karalanabilir çünkü çizelge yeteri kadar büyük olmadığından tüm *(a, b)* ikilileri karalanmamıştır. Bir örnekle durum anlatılır.

Çizelge 4. 5 x 6 lık çizelgede karalama örneği.

X	X	X	X		
X				X	X
	X			X	
		X			X
			X		X

$C(n, 2) > m > n$ olan bir durum ele alınır. Örneğin Çizelge 4'te,$n = 5$ *ve* $m = 6$ için $C(5, 2) = 10 > 6 > 5$.

Yine aynı algoritma uygulanır: {1, (1,2)} , {2, (1,3)} , {3, (1,4)} , {4, (1,5)} , {5, (2,3)} , {6, (2,4)}. Çizelgede yer olmadığından dolayı (2, 5), (3, 4), (3, 5), (4, 5) karalamaları yapılamadı. Fazladan kutu karalanabilir çünkü henüz tüm (a, b) ikilileri karalanamadı. Şimdi karalanmamış, daha doğrusu çizelge küçük olduğundan karalanamayan ikilileri devreye sokmak için son sütunda normalde kullanılan algoritmaya göre karalı olan 2 kutudan alttaki kutunun altındaki bütün kutular karalanırsa hiçbir dikdörtgen oluşturmaz çünkü yeni (a, b) ikilileri oluşturulmuş olur. Yeni karalananlar Çizelge 4'te kırmızı ile gösterilmiştir.

Bu durumda C(n, 2) > m ise {1, (1, 2)}, {2, (1, 3)} , {3, (1, 4)} , …, {n − 1, (1, n)} , {n,(2, 3)}, $\{n+1,(2, 4)\}$, …,$\{2n-2,(2, n)\}$, …,{C(n, 2), $(n-1, n)\}$ olacak şekilde karalanır. $C(n, 2) >$ m olduğundan $\{C(n, 2)$, $(n - 1, n)\}$ ‘ e kadar karalanamaz ama m. sütuna kadar bu algoritmayla karalanır, oluşan çizelgeye yeni karalamalar eklenebilir. Bunu yapmak için de m. sütuna gelince boyanan son iki kutudan alttaki kutunun altındaki bütün kutular boyanır. Böylece henüz oluşmamış yeni (a, b) ikilileri oluşur. Aşağıda birkaç örnekle açıklanmıştır. Ek olarak boyananlar kırmızıyla gösterilmiştir.

Çizelge 5. 6 x 9 luk çizelgede karalama örneği.

X	X	X	X	X				
X					X	X	X	X
	X				X			
		X				X		
			X				X	
				X				X

Aynı algoritma uygulandığında son sütunda karalanan 2 kutucuktan altta olanın altında başka kutucuk olmadığından ek karalama yapılamaz. Dolayısıyla, 6×9 luk bir çizelge için karalanabilecek en fazla kutu sayısı 9×2 = 18'den az olamaz.

Çizelge 6. 6 x 10 luk çizelgede karalama örneği.

X	X	X	X	X					
X					X	X	X	X	
	X				X				X
		X				X			X
			X				X		X
				X				X	X

Son sütundaki karalı kutulardan altta olanın altındaki 2 kutu da boyanır ve hiç dikdörtgen oluşmaz, çünkü bu kutucuklar karalanarak daha önce olmayan yeni (3, 6) , (3, 5) , (4, 6) , (4, 5), (5, 6) ikilileri yaratılmıştır. Dolayısıyla 6×10 luk çizelgede karalanabilecek maksimum kare sayısı 10×2 + 2 = 22 kareden az olamaz.

Çizelge 7. 6 x 7 lik çizelgede karalama örneği.

X	X	X	X	X		
X					X	X
	X				X	?
		X				X
			X			X
				X		X

Son sütundaki karalı kutulardan altta olanının altındaki 2 kutu da boyanarak daha önce olmayan yeni (2, 6) , (2, 5) , (4, 6) , (4, 5) , (5, 6) ikilileri yaratılır.

Son sütunda bulunan iki karalanmış kutunun arasındaki kutular, Çizelge 7'de ? ile gösterilmiş, karalanamaz çünkü karalanırsa önceden olan (a,b) ikilileri oluşturulmuş olur. Örneğin, Çizelge

7'de ? olan yer işaretlenirse (2, 3) ikilisi 2. defa oluşacak ve bir dikdörtgen oluşacaktır.

Dolayısıyla 6×7 lik bir çizelgede karalanabilecek maksimum kare sayısı 7×2 + 2 = 16 dan az olamaz.

Genelleştirilirse, "son sütundaki karalı kutucuklardan altta olanının altındaki kutucuk sayısı"= x olmak üzere $C(n, 2) > m > n$ olduğunda karalanabilecek maksimum kutu sayısı için alt sınır

$$[C(n,2)].2 - [C(n,2) - m].2 + x = 2m + x$$

olur.

3.3. Alt Sınırı İfade Ederken Kullanılan x Sayısının Hesaplanması

Alt sınırı ifade etmek için kullanılan x sayısının herhangi bir $n \times m$'lik çizelge için bulunmasında kodlamadan yararlanılır.

x sayısını farklı n, m ikilileri için veren kod parçası aşağıdaki gibidir.

Bu kod, $C(n, 2) > m$ durumu için yazılmıştır. Diğer durumlarda kullanılmamalıdır (Şekil 1).

```
# { Y, (a,b) }
y = 0
a = 0
b = 1
c = 1

def find(n, m):
   global b, a, y, c
   while y < m - 1:
       while b < n - 1 and y < m-1:
           b += 1
           y += 1
       if y == m - 1:
           return a, b
       c += 1
       b = c
       y += 1
       a += 1
   return a, b


def get_x(n, m):
   d, e = find(n, m)
   return n - 1 - e

# Örnek
print(get_x(6, 10))  # prints 2.
```

Şekil 1. x değerini veren kod parçası.

4. SONUÇ VE TARTIŞMA

$n \times m$ lik bir çizelge (genelliği bozmadan $n \leq m$ alınır, n satır ve m sütun olacak şekilde) $C(n, 2) \leq m$ ise, dikdörtgen oluşturmadan karalanabilecek maksimum kare sayısı

$C(n, 2).2 + [m - C(n,2)].1 = m + C(n,2)$ olur.

$C(n, 2) > m$ ise

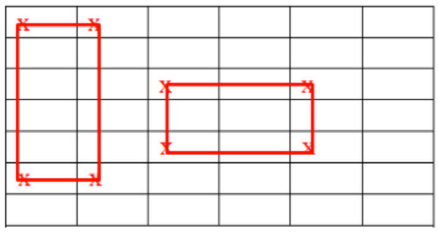
x bulgular bölümünde anlatılan algoritmaya göre karalanan çizelgenin son sütununda - m. sütununda - karalı olan 2 noktadan altta olan noktanın altındaki boş kutu sayısını göstermek üzere, karalanabilecek maksimum kutu sayısı için alt sınır

$$C(n, 2).2 - [C(n, 2) - m].2 + x = 2m + x$$

olarak bulunur. x değeri 3.2. bölümünde verilen kod sayesinde her n ve m değeri için kolaylıkla bulunabilir.

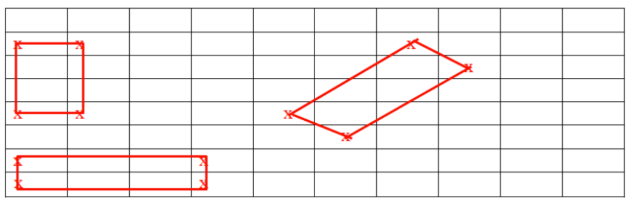
Bu sonuçların yanında "Sadece birbiriyle kesişen 2 yatay ve 2 dikey doğru parçasının bir dikdörtgen oluşturduğu n x m lik bir çizelgede x sayıda renk kullanmak şartıyla - $x \in Z^+$ - köşeleri aynı renk olan bir dikdörtgen oluşturmadan en fazla kaç kutu boyanabilir?" sorusunun problemin bir başka versiyonu olduğu düşünülmektedir (Çizelge 8).

Çizelge 8. Farklı versiyondaki soruda geçerli olan dikdörtgenlerin örnekleri.



"Sadece 2 dikey ve 2 yatay doğru parçasının birbiriyle kesişmesi sonucu ve $n \times m$ lik ızgaradaki her bir karenin köşegenleri üzerinden geçen doğruların kesişmeleri sonucu oluşan dikdörtgenler sayılmak üzere $n \times m$ lik bir çizelgede x sayıda renk kullanmak şartıyla - $x \in Z^+$ - köşeleri aynı renk olan bir dikdörtgen oluşturmadan en fazla kaç kutu boyanabilir?" sorusunun da problemin bir başka versiyonu olduğu düşünülmektedir. (Çizelge 9).

Çizelge 9. Bir başka versiyonda geçerli olan dikdörtgenlerin örnekleri.



Dikdörtgen Oluşturmadan Maksimum Sayıda Kutu Karalama Sorusu, yapılan çalışmadan anlaşıldığı üzere belli bir algoritmayla en fazla sayıda kutunun boyanmasını olanaklı kılan bir problemdir. Bu sorunun çözülmesi oyunlar teorisi, boyama ilkesi ve güvercin yuvası ilkesine ek soru çeşidi olarak etki edecektir. Bunun yanında stratejili günlük oyunlara da bir yenisi eklenmiş olacaktır. Örneğin XOX, SOS belli berabere kalma veya kazanma stratejileri olan oyunlardır. Dikdörtgen Oluşturmadan Maksimum Sayıda Kutu Karalama Sorusu'nun da bir oyuna çevrilerek eğlenceli hale getirilebileceği düşünülmektedir.

KAYNAKLAR

Alizade, R. (2015). Sonlu Matematik: Altın Nokta Yayınları. İzmir – Türkiye.

Anonim 1 (2003). "Karenin Dikdörtgensiz Altkümeleri". Matematik Dünyası Dergisi. 4 (1):62