

Kompakt Olmayan Yıldız Graf Üzerindeki Selfadjoint Olmayan Schrödinger Operatörünün Spektral Analizi

Gökhan Mutlu* 

Gazi Üniversitesi, Fen Fakültesi, Matematik Bölümü, 06500, Ankara, Türkiye

Öne Çıkanlar

- Kompakt olmayan yıldız grafi ele alınmıştır.
- Yıldız graf üzerinde etki eden selfadjoint olmayan Schrödinger operatörü incelenmiştir.
- Merkez köşede Neumann köşe koşulları altında operatörün spektral özellikleri araştırılmıştır.

Makale Bilgileri

Geliş: 29.01.2021
Kabul: 12.03.2021

Anahtar Kelimeler

Kuantum graf,
Schrödinger operatörü,
Selfadjoint olmayan
operatörler,
Özdeğerler,
Rezolvent operatör

Özet

Bu çalışmada n kenarlı ($n < \infty$), kenarlarının her biri sonsuz uzunluğa sahip kompakt olmayan yıldız graf üzerine etki eden selfadjoint olmayan Schrödinger operatörünün spektral özellikleri incelenmiştir. Burada grafın merkez köşesi üzerinde standart ya da Neumann koşulları olarak bilinen köşe koşulları ele alınmıştır. Literatürde metrik graflar üzerine etki eden diferensiyel operatörlerin spektral analizi ile ilgili oldukça fazla çalışma bulunmaktadır. Bu graflara üzerlerine etki eden diferensiyel operatörlerle birlikte kuantum graflar adı verilmektedir. Kuantum grafların fen bilimleri ve mühendislikte çok sayıda uygulamaları bulunması nedeniyle bu alan matematiksel fiziğin son yıllarda oldukça aktif bir araştırma alanı haline gelmiştir. Kuantum graflarla ilgili çalışmalarda genellikle Laplace operatörleri $f \rightarrow -f''$ dikkate alınmaktadır. Bununla birlikte Schrödinger operatörü $f \rightarrow -f'' + q(x)f$ ele alınarak yapılan çalışmalar da bulunmaktadır. Ancak bu çalışmalarda ele alınan potansiyel q reel değerlidir ve dolayısıyla uygun köşe koşullarıyla birlikte ortaya çıkan operatör selfadjointtir. Bu çalışmada ise q potansiyeli kompleks değerli bir fonksiyondur. Dolayısıyla ortaya çıkan operatör selfadjoint değildir. Bu ise spektral analizin tamamen değişmesi anlamı taşır. Bu makalede kompakt olmayan yıldız graf üzerine etki eden kompleks değerli potansiyele sahip Schrödinger operatörünün özdeğerleri, spektral tekillikleri ve rezolvent operatörü elde edilmiştir.

Spectral Analysis of Non-selfadjoint Schrödinger Operator on Non-compact Star Graph

Highlights

- Non-compact star graph is taken under consideration.
- Non-selfadjoint Schrödinger operator acting on star graph is investigated.
- Spectral properties of the operator subject to Neumann conditions at the central vertex is studied.

Article Info

Received: 29.01.2021
Accepted: 12.03.2021

Keywords

Quantum graph,
Schrödinger operator,
Non-selfadjoint
operators,
Eigenvalues,
Resolvent operator

Abstract

In this study, spectral properties of non-selfadjoint Schrödinger operator on non-compact star graph with n vertices having infinite length are investigated. Here, the vertex conditions on the central vertex are the conditions known as standard or Neumann conditions. There are numerous studies on the differential operators on metric graphs in the literature. These metric graphs together with the differential operators acting on them are called quantum graphs. Due to various applications of quantum graphs in science and engineering, it is an active field of research in mathematical physics in recent years. Most of the studies on quantum graphs concern Laplace operators $f \rightarrow -f''$. On the other hand there are some studies in which Schrödinger operators $f \rightarrow -f'' + q(x)f$ are considered. In these studies, the potential q is real-valued and hence the operator is selfadjoint with appropriate vertex conditions. However in this study, the potential q is complex-valued. Therefore, the resulting operator is non-selfadjoint. This means that the spectral analysis completely changes. In this paper, eigenvalues, spectral singularities and the resolvent operator of the Schrödinger operator with complex-valued potential acting on non-compact star graph are obtained.



1. GİRİŞ

Yarım ekseninde tek boyutlu Schrödinger denklemi

$$-y'' + q(x)y = k^2y, \quad 0 < x < \infty \quad (1)$$

olarak verilmektedir. Burada k^2 spektral parametre, q potansiyel fonksiyondur. (1) denklemi kuantum fizikte çok önemli bir yere sahiptir. Burada q potansiyeli reel değerli, $q \in L_2(0, \infty)$ ve $h \in \mathbb{R}$ olmak üzere

$$y'(0) - hy(0) = 0 \quad (2)$$

sınır koşulu ele alınır ise selfadjoint Schrödinger operatörü elde edilir. Bu operatörün spektral analizi detaylı olarak ele alınmıştır. Selfadjoint Schrödinger denklemiyle ilgili sonuçların bir derlemesi için [1] incelenebilir. (1) denkleminde q potansiyeli kompleks değerli bir fonksiyon olsun. q fonksiyonu

$$\int_0^{\infty} (1+t)\|q(t)\|dt < \infty$$

koşulunu sağlasın. (2) sınır koşulunda $h \in \mathbb{C}$ alınır ise elde edilen operatör selfadjoint olmayan singüler Schrödinger operatörüdür. Bu operatörün spektral analizi Naimark tarafından yapılmıştır [2]. Bu operatörün spektrumu sürekli spektrum ve nokta spektrumdan oluşmaktadır. Ayrıca sürekli spektrumda spektral tekillik adı verilen bazı noktalar tespit edilmiştir. Bu noktalar nokta spektrumda yer almayıp, rezolvent operatörünün çekirdeğinin kutup noktalarıdır. Spektral tekilliklerin fiziksel anlamı ve uygulamaları için [3, 4] incelenebilir.

Yarım ekseninde matris Schrödinger denklemi

$$-y'' + Q(x)y = k^2y, \quad 0 < x < \infty \quad (3)$$

şeklinde verilmektedir. Burada k^2 spektral parametre, Q , $n \times n$ matris değerli fonksiyon ve $y(x, k)$ dalga fonksiyonu bir vektör değerli fonksiyondur. (3) denkleminde $n = 1$ alınır ise (1) denkleminin elde edileceği açıktır. Dolayısıyla matris Schrödinger denklemleri skaler Schrödinger denklemlerini genellemektedir. Ayrıca matris Schrödinger denklemlerinin fizikte uygulamaları vardır. Örneğin; elastiklik teorisinde, elektromagnetik dalgaların tanımlanmasında ve nükleer yapılarda matris Schrödinger denklemleri kullanılmaktadır. Bu denklemler aynı zamanda kuantum mekaniğindeki saçılma problemleriyle ve özellikle kuantum graflarıyla yakından ilişkilidir. Bu nedenle matris Schrödinger denklemleri ile ilgili son yıllarda oldukça fazla sayıda çalışmalar yapılmaktadır. Selfadjoint matris Schrödinger operatörleri ile ilgili detaylı bilgilere [5, 6] kaynaklarından ulaşılabilir. Q matris değerli fonksiyonu selfadjoint, $(0, \infty)$ aralığında Lebesgue ölçülebilir ve sonlu birinci momente sahip olsun yani

$$\int_0^{\infty} (1+t)\|Q(t)\|dt < \infty \quad (4)$$

eşitsizliği herhangi bir $\|\cdot\|$ matris normu için sağlansın. $x = 0$ noktasındaki en genel selfadjoint sınır koşulları

$$My(0) + Ny'(0) = 0 \quad (5)$$

şeklinde verilebilir [7]. Burada M ve N , $n \times n$ tipinde sabit matrisleri aşağıdaki koşulları sağlamaktadır;

$$MN^* = NM^*, \quad (6)$$

$$\text{rank}(M|N) = n. \quad (7)$$

Burada $***$ matris adjointi göstermektedir. (3)-(7) eşitlikleriyle üretilen matris Schrödinger operatörü selfadjointtir [5, 6].

Literatürde selfadjoint olmayan matris Schrödinger operatörleri ile ilgili çalışmalar da bulunmaktadır [8-10]. Bu çalışmalarda (3) denklemindeki $n \times n$ matris potansiyeli Q selfadjoint (Hermityen) değildir. [8] çalışmasında $x = 0$ noktasında Dirichlet sınır koşulu ve [9, 10] çalışmalarında $x = 0$ noktasında spektral parametreye bağlı sınır koşulları ele alınmıştır. Bu çalışmalarda elde edilen sonuçlar [1] de elde edilen sonuçları genellemektedir. Bu çalışmalarda selfadjoint olmayan matris Schrödinger operatörlerinin özdeğerleri, spektral tekillikleri ve rezolvent operatörleri elde edilmiş ve bunların Q potansiyeli üzerindeki bazı koşullar altında özellikleri incelenmiştir [8-10].

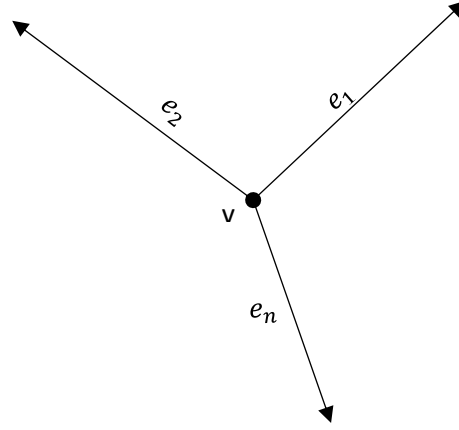
Şimdiye kadar bahsedilen matris Schrödinger operatörleri ile ilgili çalışmalarda (3) denklemindeki $n \times n$ matris potansiyeli Q sonlu boyutlu bir operatör (matris) dür yani $n < \infty$ dur [5-10]. Q potansiyelinin sonsuz boyutlu bir Hilbert uzayında tanımlı bir operatör olması durumunda (3) denkleminde yarım eksende Schrödinger operatör denklemi adı verilir. Bu konudaki ilk çalışma [11] de ele alınmıştır. Burada (3) denklemindeki Q potansiyelinin sonsuz boyutlu bir Hilbert uzayında tanımlı tamamen sürekli ve selfadjoint bir operatör fonksiyonu olması durumu incelenmiştir. Bu çalışmada orijinde Dirichlet sınır koşulu altında operatörün nokta spektrumu araştırılmıştır. Burada elde edilen operatör selfadjointtir. Son yıllarda selfadjoint olmayan operatör katsayılı Schrödinger operatör denklemleri ile ilgili çalışmalar yapılmaktadır [12-16]. Bu çalışmalarda ele alınan Q potansiyeli ise sonsuz boyutlu bir Hilbert uzayında tanımlı tamamen sürekli ve selfadjoint olmayan bir operatör fonksiyonudur. Dolayısıyla elde edilen operatörler selfadjoint değildir. Açıkça görülmektedir ki, [11-16] da ele alınan Schrödinger operatör denklemi ile ilgili çalışmalar matris Schrödinger denklemleri ile ilgili çalışmaları genellemekte ve problemleri sonsuz boyuta taşımaktadır. Problemin sonsuz boyutta ele alınması probleme yenilik ve orijinallik katmasının yanı sıra operatör teorisinin kullanılmasına olanak tanıyarak problemin daha da zenginleşmesini sağlamaktadır.

Graflar üzerinde etki eden diferensiyel operatörler ilk olarak [17, 18] de ele alınmıştır. Bu çalışmalarda kompakt ve kompakt olmayan graflar üzerinde reel değerli potansiyele sahip Schrödinger operatörü incelenmiştir. Literatürde diferensiyel operatörlerin etki ettiği graflara metrik graflar adı verilir. Kısaca bir metrik graf, bir grafın kenarlarına pozitif bir uzunluk ve yön atanmasıyla elde edilir. Γ bir metrik graf ve H, Γ üzerine etki eden bir diferensiyel operatör olsun. Ayrıca grafın her bir köşesi üzerinde köşe koşulları olarak bilinen sınır koşulları verilsin. Literatürde (Γ, H) ikilisine verilen köşe koşullarıyla birlikte kuantum graf adı verilmektedir. Kuantum graflar üzerine son yıllarda oldukça fazla sayıda çalışma yapılmıştır (yapılan çalışmaların bir derlemesi için [19, 20] incelenebilir). Bu konuda giderek artan ilginin nedeni kuantum grafların kuantum fiziğindeki uygulamalarının keşfedilmesidir. Ayrıca kuantum graflar matematik, fizik, kimya, mühendislik ve nanoteknoloji alanlarındaki problemlerin modellenmesinde kullanılmaktadır. Özel olarak kuantum graflar bir grafın komşuluğundaki bölgede dalga yayılımını modellemek için kullanılmaktadır [20]. Bu modeller organik kimya, mezoskopik fizik, nanoteknoloji, fotonik kristaller, saçılım teorisi, kuantum kaos vs. gibi alanlarda karşımıza çıkmaktadır [20]. Ayrıca kuantum graflar matris Schrödinger denklemleriyle yakından ilişkilidir.

Γ_n , kenarlarının her biri sonsuz uzunluğa sahip n kenarlı ($n < \infty$) yıldız grafı gösterebilir (bkz Şekil 1). Γ_n üzerinde Schrödinger operatörünü $H := -\frac{d^2}{dx_i^2} + q_i(x_i)$ ele alalım. Burada x_i koordinatı yerine basitlik olması açısından x yazılabilir. Ayrıca burada $q_i (i = 1, 2, \dots, n)$ potansiyelleri kompleks değerli fonksiyonlar olup $(0, \infty)$ aralığında Lebesgue ölçülebilir ve sonlu birinci momente sahip olsunlar yani

$$\int_0^\infty (1+t)|q_i(t)|dt < \infty, \quad i = 1, 2, \dots, n. \quad (8)$$

Star graflar üzerinde etki eden diferensiyel operatörleri ilgili detaylı bilgi için [21] incelenebilir. Merkez köşede (bkz Şekil 1) standart ya da Neumann köşe koşulları olarak bilinen ve kuantum graflarda en yaygın olarak kullanılan köşe koşullarının bulunduğunu kabul edelim. Bu koşullar aşağıdaki gibi ifade edilir;



Şekil 1. n kenarlı kompakt olmayan yıldız graf

$$y_i(0) = y_j(0), \quad 1 \leq i, j \leq n, \quad (9)$$

$$\sum_{i=1}^n y_i'(0) = 0. \quad (10)$$

(9)-(10) koşullarını

$$AF_v + BF_v' = 0 \quad (11)$$

şeklinde matris formunda ifade edebiliriz. Burada

$$F_v = \begin{bmatrix} y_1(0) \\ y_2(0) \\ \vdots \\ y_n(0) \end{bmatrix}, \quad F_v' = \begin{bmatrix} y_1'(0) \\ y_2'(0) \\ \vdots \\ y_n'(0) \end{bmatrix},$$

ve A ve B matrisleri $n \times n$ tipinde matrisler olup

$$A = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 1 & 1 & \cdots & 1 \end{bmatrix} \quad (12)$$

şeklinindedir. (11) köşe koşullarıyla verilen (Γ_n, H) kuantum grafına karşılık

$$L_2(\Gamma_n) := \bigoplus_{i=1}^n L_2(\mathbb{R}_+), \quad \mathbb{R}_+ := (0, \infty)$$

uzayında

$$H_{A,B}y := -y'' + Q(x)y, \quad 0 < x < \infty \quad (13)$$

matris Schrödinger operatörünü elde edebiliriz. Burada $y = (y_1, y_2, \dots, y_n)^T$, $y_i \in L_2(\mathbb{R}_+)$, $(i = 1, 2, \dots, n)$ ve $Q(x) = \text{diag}(q_1(x), q_2(x), \dots, q_n(x))$, $n \times n$ tipinde diyagonal matristir. Burada M^T ile M matrisinin transpozunu gösterilmektedir. Sınır koşulları ise

$$Ay(0) + By'(0) = 0 \quad (14)$$

şeklindedir. Burada A ve B matrisleri (12) eşitliğiyle verilen matrislerdir. Dikkat edilirse (13) ve (14) tarafından üretilen operatör selfadjoint değildir. Açıkça görülmektedir ki (11) köşe koşullarıyla verilen (Γ_n, H) kuantum grafi ile (13) eşitliği ile verilen ve (14) sınır koşuluna sahip matris Schrödinger operatörü spektral analiz anlamında eşdeğerdir. Bu makalede (11) köşe koşullarıyla verilen (Γ_n, H) kuantum grafinin spektral özellikleri incelenecektir. Özel olarak bu selfadjoint olmayan operatörün nokta spektrumu, spektral tekillikleri ve rezolvent operatörü elde edilecektir. Bunun için (13) ile verilen ve (14) sınır koşuluna sahip matris Schrödinger operatörünün spektral özellikleri kullanılacaktır. (13) ile verilen ve $Q(x) = \text{diag}(q_1(x), q_2(x), \dots, q_n(x))$ şeklinde potansiyele sahip, orijinde Dirichlet sınır koşuluna sahip selfadjoint olmayan matris Schrödinger operatörünün spektral analizi [22] de yapılmıştır. Ancak bizim çalışmamızda ele alınan sınır koşulları (14) eşitliğiyle verilen genel sınır koşullarıdır. Dikkat edilecek olursa (14) eşitliğinde $A = I_n$ ve $B = 0_n$ alınması ile Dirichlet koşulu elde edilir, burada I_n ile $n \times n$ tipindeki birim matris, 0_n ile $n \times n$ tipindeki sıfır matrisi gösterilmektedir. Dolayısıyla bizim çalışmamızda ele alınan problem daha geneldir.

Kuantum graflarda genel olarak Laplace operatörü $L := -\frac{d^2}{dx^2}$ ele alınmaktadır [19, 20]. Bununla birlikte Schrödinger operatörünü $S := -\frac{d^2}{dx^2} + q(x)$ inceleyen çalışmalar da bulunmaktadır [23-25]. Bu çalışmalarda ele alınan potansiyeller (q fonksiyonları) reel değerlidir. Dolayısıyla selfadjoint köşe koşulları kullanılarak selfadjoint kuantum graflar elde edilmiş ve spektral analizi incelenmiştir [19, 20, 23-25]. Ancak bizim çalışmamızda ele alınan kompakt olmayan yıldız graf üzerindeki Schrödinger operatörü kompleks değerli q potansiyeline sahiptir. Bu özellik ele alınan kuantum grafi selfadjoint olmayan bir graf yapmakta ve literatürdeki geçmiş çalışmalardan ayırmaktadır. Ayrıca kompakt kuantum grafların spektrumunun ayırık olduğu bilinmesine rağmen bu makalede ele alınan kompakt olmayan kuantum grafların spektral özellikleriyle ilgili yeterince çalışma bulunmamaktadır.

Bu makale 4 bölümden oluşmaktadır. 2. bölümde kuantum graflar ve yarım ekseninde matris Schrödinger operatörü ile ilgili ön bilgiler verilecektir. 3. bölümde kompakt olmayan yıldız graf üzerinde etki eden kompleks potansiyele sahip Schrödinger operatörünün spektral analizi ile ilgili elde edilen sonuçlar verilecektir. 4. Bölüm olan Tartışma bölümünde ise elde edilen sonuçlar literatürdeki diğer çalışmalarla kıyaslanacaktır.

2. ÖN BİLGİLER

Bu bölümde kuantum graflar ve yarım ekseninde matris Schrödinger operatörü ile ilgili genel bilgiler verilecektir.

Tanım 2.1. Γ , $E = \{e_1, e_2, \dots, e_m\}$ kenar kümesine ve $V = \{v_1, v_2, \dots, v_r\}$ köşe kümesine sahip bir graf olsun. Eğer her bir $e \in E$ kenarına pozitif bir l_e uzunluğu ve bir yön atarsak elde edilen grafa bir metrik graf denir. Bir metrik grafta her bir $e \in E$ kenarı reel eksenin $[0, l_e]$ şeklindeki sonlu ya da sonsuz bir aralığıyla ve graf üzerindeki her bir x noktası $[0, l_e]$ aralığındaki bir x_e koordinatı ile eşleştirilebilir. Eğer E kümesi herbiri sonlu uzunluğa sahip sonlu sayıda kenar içeriyorsa Γ ya kompakt graf aksi halde kompakt olmayan graf denir [19]. Γ metrik grafi üzerinde tanımlanan bir f fonksiyonu grafin her bir kenarı üzerinde tanımlı fonksiyonların oluşturduğu vektör değerli bir fonksiyon olarak düşünülebilir, yani

$$f = (f|_{e_1}, f|_{e_2}, \dots, f|_{e_m})$$

şeklindedir. Burada her $i = 1, 2, \dots, m$ için

$$f|_{e_i}: [0, l_{e_i}] \rightarrow \mathbb{C}$$

şeklindedir. Γ üzerinde bir diferensiyel operatörü tanımlamak için Γ üzerindeki fonksiyonların

$$L_2(\Gamma) := \bigoplus_{i=1}^m L_2[0, l_{e_i}]$$

Hilbert uzayı tanımlanır. Γ üzerinde Hamiltonyan olarak adlandırılan diferensiyel operatörleri $L_2(\Gamma)$ uzayı üzerinde tanımlanır. Genellikle Hamiltonyan olarak Schrödinger operatörü

$$H := -\frac{d^2}{dx_i^2} + q_i(x_i) \quad (15)$$

ele alınır. Burada x_i koordinatı yerine basitlik olması açısından x yazılabilir. Ayrıca Γ üzerindeki her köşe için köşe koşulları olarak bilinen sınır koşullarına ihtiyaç duyulur. Köşe koşulları bir f fonksiyonunun ve birinci türevinin o köşedeki değerlerini ilişkilendirir. Literatürde en çok kullanılan köşe koşulları standart ya da Neumann köşe koşulları olarak bilinen koşullardır. Bir $v \in V$ köşesi için Neumann koşulları aşağıdaki şekilde verilir;

1. f, v köşesinde süreklidir yani v köşesine komşu olan her e_i ve e_j kenarı için $f|_{e_i}(v) = f|_{e_j}(v)$,
2. $\sum_{e \sim v} \frac{df}{dx}(v) = 0$ dır. Burada toplam v köşesine komşu olan e kenarları üzerinden alınmaktadır ve türevler köşeden kenara giden yönde alınmaktadır [19].

Bir $v \in V$ köşesindeki köşe koşulları matrisler yardımıyla ifade edilebilir. v köşesine komşu olan kenarlar e_1, e_2, \dots, e_d olsun. Bu durumda

$$F_v := \begin{bmatrix} f_1(v) \\ f_2(v) \\ \vdots \\ f_d(v) \end{bmatrix}, \quad F_v' := \begin{bmatrix} f_1'(v) \\ f_2'(v) \\ \vdots \\ f_d'(v) \end{bmatrix}$$

vektörlerini tanımlayalım. Burada $f_i = f|_{e_i}$ dir. C_v ve D_v matrisleri $d \times d$ tipinde olmak üzere v köşesindeki en genel köşe koşulları

$$C_v F_v + D_v F_v' = 0 \quad (16)$$

şeklinde ifade edilir [19]. $H^2(e)$ ile e kenarı üzerinde ikinci mertebeden zayıf türevleri $L^2(e)$ uzayında bulunan fonksiyonların Sobolev uzayını gösterelim. (15) eşitliği ile verilen H Hamiltonyanının tanım kümesi aşağıdaki özellikleri sağlayan $f \in L_2(\Gamma)$ fonksiyonlarından oluşur;

- Her bir $e \in E$ kenarı için $f|_e \in H^2(e)$,
- Her $v \in V$ köşesinde (16) köşe koşulları sağlanır.

Eğer E kümesi sonlu ise (15) eşitliği ile verilen H Hamiltonyanının selfadjoint olması için gerek ve yeter şart her $v \in V$ köşesinde

$$\text{rank}(C_v | D_v) = d_v, \quad C_v D_v^* = D_v C_v^*$$

koşullarının sağlanmasıdır [19]. Burada d_v ile v köşesinin derecesi, M^* ile M matrisinin adjointi gösterilmektedir. Ayrıca eğer Γ kompakt ise (15) eşitliği ile verilen H Hamiltonyanının spektrumu ayrıktır yani spektrum her biri sonlu katlılığa sahip izole özdeğerlerden meydana gelmektedir [19].

(13) eşitliği ile verilen $H_{A,B}$ matris Schrödinger operatörünün özdeğer denklemini

$$-y'' + Q(x)y = k^2 y \quad (17)$$

ele alalım. Burada k^2 spektral parametre, $y = (y_1, y_2, \dots, y_n)^T, y_i \in L_2(\mathbb{R}_+), (i = 1, 2, \dots, n)$ ve $Q(x) = \text{diag}(q_1(x), q_2(x), \dots, q_n(x))$ olup q_i fonksiyonları kompleks değerlidir. (14) eşitliği ile verilen sınır koşullarını ele alalım. Bu şekilde elde edilen $H_{A,B}$ operatörü selfadjoint değildir.

(17) denkleminin

$$F(x, k) = e^{ikx}[I_n + o(1)], \quad F_x(x, k) = ike^{ikx}[I_n + o(1)], \quad x \rightarrow \infty, \quad k \in \overline{\mathbb{C}_+} \setminus \{0\} \quad (18)$$

asimptotik bağıntılarını sağlayan bir $n \times n$ matris çözümü $F(x, k)$ vardır [5]. $F(x, k)$ çözümüne (17) denkleminin Jost çözümü denir. Burada \mathbb{C}_+ ile kompleks düzlemin üst yarısı, $\overline{\mathbb{C}_+}$ ile onun kapanışı gösterilmektedir. Ayrıca $e_i(x, k)$, $-y'' + q_i(x)y = k^2y$ denkleminin Jost çözümü olmak üzere ($i = 1, 2, \dots, n$)

$$F(x, k) = \text{diag}(e_1(x, k), e_2(x, k), \dots, e_n(x, k))$$

biçimindedir [22].

(12) eşitliğiyle verilen A ve B matrislerinin

$$AB^T - BA^T = 0 \quad (19)$$

eşitliğini sağladığı kolayca görülebilir. Dolayısıyla (17) denkleminin

$$U(0, k) = B^T, \quad U'(0, k) = -A^T \quad (20)$$

başlangıç koşullarını sağlayan bir $n \times n$ matris çözümü $U(x, k)$ vardır [5]. Benzer şekilde $U(x, k)$ da bir diyagonal matristir. (17) denkleminin her $y(x, k)$ vektör çözümü

$$y(x, k) = F(x, k)\alpha + U(x, k)\beta$$

şeklinde yazılabilir [5]. Burada $\alpha, \beta \in \mathbb{C}^n$ sabit vektörlerdir.

$Y(x, k)$ ve $Z(x, k)$ fonksiyonları (17) denkleminin $n \times n$ tipinde iki matris çözümü olsun. $Y(x, k)$ ve $Z(x, k)$ diyagonal matrisler olduğundan $Y(x, k)$ ve $Z(x, k)$ çözümlerinin Wronskiyanı olan

$$[Y, Z] := YZ' - Y'Z$$

ifadesinin x değişkeninden bağımsız olduğu kolayca gösterilebilir.

3. SONUÇLAR

Γ_n , kenarlarının her biri sonsuz uzunluğa sahip n kenarlı ($n < \infty$) yıldız grafi gösterebilir (bkz Şekil 1). Γ_n üzerinde Schrödinger operatörünü $H = -\frac{d^2}{dx_i^2} + q_i(x_i)$ ele alalım. Burada q_i ($i = 1, 2, \dots, n$) potansiyelleri kompleks değerli fonksiyonlar olup $(0, \infty)$ aralığında Lebesgue ölçülebilir ve sonlu birinci momente sahip olsunlar. Merkez köşede (11) eşitliğiyle verilen Neumann köşe koşulları ele alınsın. Bu özellikleri sağlayan kuantum grafi (Γ_n, H) ile gösterelim. Bu bölümde (Γ_n, H) kuantum grafının spektral analizi ile ilgili elde edilen sonuçlar verilecektir.

Teorem 3.1. Γ_n grafi üzerine etki eden H Schrödinger operatörünün özdeğerleri kümesi $\sigma_d(H)$ ile gösterilsin. Bu durumda $J(k) := AF(0, k) + BF'(0, k)$ olmak üzere

$$\sigma_d(H) = \{k^2 : k \in \mathbb{C}_+, \det J(k) = 0\}.$$

İspat. Açıkça görülmektedir ki (11) köşe koşullarıyla verilen (Γ_n, H) kuantum grafi ile (13) eşitliği ile verilen ve (14) sınır koşuluna sahip matris Schrödinger operatörünün özdeğerleri aynıdır. Dolayısıyla (13)-(14) sınır değer probleminin özdeğerlerini bulmamız yeterlidir. $y(x, k)$ vektör fonksiyonu (13)-(14) sınır değer probleminin k^2 özdeğerine karşılık gelen bir özfonksiyonu olsun.

$$y(x, k) = F(x, k)\alpha + U(x, k)\beta$$

olacak şekilde $\alpha, \beta \in \mathbb{C}^n$ sabit vektörleri vardır (bkz 2. Bölüm).

$$y \in L_2(\Gamma_n) = \bigoplus_{i=1}^n L_2(\mathbb{R}_+)$$

olduğundan $\beta = 0$ olmalıdır. $y(x, k) = F(x, k)\alpha$ fonksiyonu (14) sınır koşulunu sağladığından

$$(A F(0, k) + B F'(0, k))\alpha = 0$$

olur. $\alpha \neq 0$ olduğundan

$$J(k) = A F(0, k) + B F'(0, k) \quad (21)$$

matrisi tersinir değildir. Tersine, $J(k)$ matrisi tersinir değil olsun. Bu durumda $J(k)\alpha = 0$ ve $\alpha \neq 0$ olacak biçimde en az bir $\alpha \in \mathbb{C}^n$ sabit bir vektörü vardır. $y(x, k) = F(x, k)\alpha$ vektör fonksiyonunu ele alalım. $y \in L_2(\Gamma_n)$ olduğu bilinmektedir [5]. Ayrıca (14) sınır koşulu

$$A y(0) + B y'(0) = (A F(0, k) + B F'(0, k))\alpha = J(k)\alpha = 0$$

sağlanır. Dolayısıyla $y(x, k)$ bir özfonksiyondur.

Teorem 3.2. Γ_n grafi üzerine etki eden H Schrödinger operatörünün rezolvent kümesi $\rho(H)$ ile gösterilsin. Bu durumda

$$\rho(H) = \{k^2: k \in \mathbb{C}_+, \det J(k) \neq 0\} \quad (22)$$

şeklindedir. Ayrıca $R_k(H) = (H - k^2 I)$ rezolvent operatörü $g \in \bigoplus_{i=1}^n L_2(\mathbb{R}_+)$ olmak üzere

$$R_k(H)g(x) = \int_0^\infty K(x, t; k)g(t)dt$$

biçimindedir. Burada çekirdek fonksiyonu

$$K(x, t; k) = \begin{cases} -F(x, k)(J(k)^T)^{-1}U(t, k), & 0 \leq t \leq x, \\ -U(x, k)(J(k)^T)^{-1}F(t, k), & x < t < \infty \end{cases}$$

şeklindedir.

İspat. (22) eşitliği Teorem 1 in bir sonucudur. Açıkça görülmektedir ki (11) köşe koşullarıyla verilen (Γ_n, H) kuantum grafi ile (13) eşitliği ile verilen ve (14) sınır koşuluna sahip matris Schrödinger operatörünün rezolvent operatörü aynıdır. $R_k(H) = (H - k^2 I)$ rezolvent operatörünü oluşturmak için

$$-y'' + Q(x)y - k^2 y = g(x), \quad x \in (0, \infty) \quad (23)$$

denkleminin genel çözümünü bulmalıyız. Burada $k^2 \in \rho(H)$ yani $k \in \mathbb{C}_+$, $\det J(k) \neq 0$ olup $y, g \in \bigoplus_{i=1}^n L_2(\mathbb{R}_+)$ ve $y(x, k)$ vektör değerli fonksiyonu (14) sınır koşulunu sağlar. $y(x, k)$ vektör değerli fonksiyonu $\alpha, \beta \in \mathbb{C}^n$ sabit vektörler olmak üzere

$$y(x, k) = F(x, k)\alpha + U(x, k)\beta$$

şeklinde yazılabilir (bkz 2. Bölüm). Parametrelerin değişimi yöntemini kullanarak (23) denkleminin genel çözümünü

$$y(x, k) = F(x, k)a(x) + U(x, k)b(x) \quad (24)$$

biçiminde arayalım. Burada $a(x)$ ve $b(x)$ fonksiyonları vektör değerli fonksiyonlardır. (24) eşitliğinin x e göre türevi alınırsa

$$y'(x, k) = F'(x, k)a(x) + F(x, k)a'(x) + U'(x, k)b(x) + U(x, k)b'(x). \quad (25)$$

(25) eşitliğinde

$$F(x, k)a'(x) + U(x, k)b'(x) = 0 \quad (26)$$

olduğunu kabul edelim. (25) eşitliğinin x e göre türevi alınırsa

$$y''(x, k) = F''(x, k)a(x) + F'(x, k)a'(x) + U''(x, k)b(x) + U'(x, k)b'(x). \quad (27)$$

(24) ve (27) eşitliklerini (23) de yerine koyarsak

$$F'(x, k)a'(x) + U'(x, k)b'(x) = -g(x). \quad (28)$$

(26) eşitliğini soldan $F'(x, k)$ ile (28) eşitliğini soldan $-F(x, k)$ ile çarpıp taraf tarafa toplarsak

$$[F, U]b'(x) = -F(x, k)g(x) \quad (29)$$

bulunur. $[F, U]$ Wronskiyani x den bağımsız olduğundan (bkz 2. Bölüm) (20) eşitliğinden

$$[F, U] = [F, U](0) = F(0, k)U'(0, k) - F'(0, k)U(0, k) = -F(0, k)A^T - F'(0, k)B^T = -J(k)^T. \quad (30)$$

$\det J(k) \neq 0$ olduğundan $J(k)^T$ tersinirdir ve (29) eşitliğinden

$$b(x) = \varphi - \int_x^\infty (J(k)^T)^{-1} F(t, k)g(t)dt. \quad (31)$$

Benzer şekilde

$$a(x) = \omega - \int_0^x (J(k)^T)^{-1} U(t, k)g(t)dt \quad (32)$$

elde edilir. (31) ve (32) eşitlikleri (24) de yerine koyulursa

$$y(x, k) = F(x, k)\omega - F(x, k) \int_0^x (J(k)^T)^{-1} U(t, k)g(t)dt + U(x, k)\varphi - U(x, k) \int_x^\infty (J(k)^T)^{-1} F(t, k)g(t)dt \quad (33)$$

elde edilir. (33) eşitliğinde $x = 0$ alınırsa

$$y(0, k) = F(0, k)\omega - B^T \int_0^\infty (J(k)^T)^{-1} F(t, k)g(t)dt. \quad (34)$$

$y \in \oplus_{i=1}^n L_2(\mathbb{R}_+)$ olması için $\varphi = 0$ olmalıdır. (31) ve (32) eşitlikleri (25) de yerine koyulursa

$$y'(x, k) = F'(x, k)\omega - F'(x, k) \int_0^x (J(k)^T)^{-1} U(t, k)g(t)dt - U'(x, k) \int_x^\infty (J(k)^T)^{-1} F(t, k)g(t)dt$$

bulunur. Son eşitlikte $x = 0$ alınırsa

$$y'(0, k) = F'(0, k)\omega + A^T \int_0^\infty (J(k)^T)^{-1} F(t, k)g(t)dt. \quad (35)$$

(34) ve (35) eşitlikleri (14) sınır koşulunda yerine koyulursa

$$AF(0, k)\omega + BF'(0, k)\omega + (BA^T - AB^T) \int_0^\infty (J(k)^T)^{-1} F(t, k)g(t)dt = 0$$

bulunur. Son eşitlikte $BA^T - AB^T = 0$ olduğu dikkate alınırsa

$$(AF(0, k) + BF'(0, k))\omega = J(k)\omega = 0.$$

Bu ise $\det J(k) \neq 0$ olduğundan $\omega = 0$ sonucunu verir. Dolayısıyla

$$y(x, k) = -F(x, k) \int_0^x (J(k)^T)^{-1} U(t, k) g(t) dt - U(x, k) \int_x^\infty (J(k)^T)^{-1} F(t, k) g(t) dt$$

olup ispat tamamlanır.

Sonuç 3.3. Γ_n grafi üzerine etki eden H Schrödinger operatörünün spektral tekilliklerinin kümesi $\sigma_{ss}(H)$ ile gösterilsin. Bu durumda

$$\sigma_{ss}(H) = \{k: k \in \mathbb{R} \setminus \{0\}, \det J(k) = 0\}.$$

İspat. Spektral tekilliklerin tanımından ve Teorem 3.2 den ispat açıktır.

4. TARTIŞMA

Bu çalışmada merkez köşesinde Neumann köşe koşulları bulunan, kenarlarının her biri sonsuz uzunluğa sahip n kenarlı ($n < \infty$) yıldız grafi Γ_n üzerinde etki eden kompleks değerli potansiyele sahip Schrödinger operatörünün $H = -\frac{d^2}{dx_i^2} + q_i(x_i)$ spektral özellikleri incelenmiştir. Ele alınan problem yarım eksen de ya da tam eksen de kompleks potansiyele sahip Schrödinger operatörünü genellemektedir. Bunun için aşağıdaki örnekleri inceleyelim.

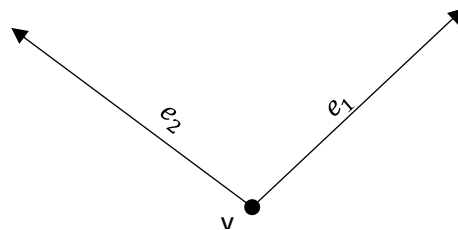
Örnek 4.1. $n = 1$ olması durumunda ele alınan problem

$$-y'' + q(x)y = k^2y, \quad 0 < x < \infty,$$

$$y'(0) = 0$$

sınır değer problemine yani yarım eksen de Neumann sınır koşuluna $y'(0) = 0$ sahip kompleks değerli potansiyele sahip selfadjoint olmayan Schrödinger operatörüne dönüşmektedir. Bu operatörün spektral analizi için [2] incelenebilir.

Örnek 4.2. $n = 2$ olması durumunda merkez köşenin derecesi 2 olmaktadır (bkz Şekil 2). Derecesi 2 olan ve Neumann köşe koşullarına sahip köşelerin silinmesi spektral analiz anlamında bir değişikliğe yol açmamaktadır yani köşenin silinmesiyle elde edilen graf ile orijinal graf izospektraldir [19]. Dolayısıyla merkezdeki v köşenin silinmesiyle elde edilen grafi ele alabiliriz. Bu ise reel ekseni $(-\infty, \infty)$ vermektedir. Dolayısıyla elde edilen problem reel eksen de kompleks potansiyele sahip selfadjoint olmayan Schrödinger operatörünü vermektedir. Bu operatörün spektral analizi için [26, 27] incelenebilir.



Şekil 2. 2 kenarlı kompakt olmayan yıldız graf

Literatürde kompakt kuantum grafların spektrumu ile ilgili oldukça fazla çalışma bulunmaktadır. Bu grafların üzerinde etki eden reel potansiyele sahip Schrödinger operatörlerinin her bir köşede (16) genel köşe koşullarına sahip olması durumunda spektrumun sadece izole özdeğerlerden oluştuğu bilinmektedir [19]. Ancak bu makalede ele alınan kompakt olmayan kuantum grafların spektrumlarıyla ilgili yeterli çalışma bulunmamaktadır. Ayrıca literatürde kuantum graflar üzerinde ele alınan Hamiltonyanlar genellikle Laplace operatörü ya da reel potansiyele sahip Schrödinger operatörleridir [17-20, 23-25]. Dolayısıyla ele alınan operatörler selfadjointtir. Bizim çalışmamızda ise kompleks potansiyele sahip Schrödinger operatörü göz önüne alınmıştır. Dolayısıyla elde edilen operatör selfadjoint değildir ve literatürdeki diğer çalışmalardan ayrışmaktadır.

ÇIKAR ÇATIŞMASI/ÇAKIŞMASI BİLDİRİMİ

Yazar tarafından çıkar çatışması bildirilmemiştir.

KAYNAKLAR

- [1] Levitan, B. M. and Sargsyan, I. S. (1975). *Introduction to Spectral Theory: Selfadjoint Ordinary Differential Operators*, American Mathematical Society.
- [2] Naimark, M. A. (1968). *Linear Differential Operators, II*, New York: Ungar.
- [3] Guseinov, G. S. (2009). On the concept of spectral singularities. *Pramana – Journal of Physics*, 73(3), 587-603.
- [4] Mostafazadeh, A. (2015). Physics of Spectral Singularities. *Geometric Methods in Physics*. Trends in Mathematics. Cham: Birkhäuser.
- [5] Agranovic, Z. S. and Marchenko, V. A. (1965). *The Inverse Problem of Scattering Theory*, Gordon and Breach.
- [6] Aktosun, T. and Weder, R. (2020). *Direct and Inverse Scattering for the Matrix Schrödinger Equation*, *Applied Mathematical Sciences*, 203, Cham: Springer.
- [7] Aktosun, T., Klaus, M., and Weder, R. (2011). Small-energy analysis for the self-adjoint matrix Schrödinger equation on the half line. *Journal of Mathematical Physics*, 52(10), 1-24.
- [8] Olgun, M. and Coskun, C. (2010). Non-selfadjoint matrix Sturm-Liouville operators with spectral singularities. *Applied Mathematics and Computation*, 216, 2271-2275.
- [9] Arpat, E. K. and Mutlu, G. (2015). Spectral properties of Sturm-Liouville system with eigenvalue-dependent boundary conditions, *International Journal of Mathematics*, 26(10), 1550080-1550088.
- [10] Yokus, N. and Coskun, N. (2019) A note on the matrix Sturm-Liouville operators with principal functions. *Mathematical Methods in the Applied Sciences*, 42(16), 5362-5370.
- [11] Gasymov, M. G., Zikov, V. V., and Levitan, B. M. (1967). Conditions for the negative spectrum of the Schrödinger equation operator to be discrete and finite. *Mathematical Notes of the Academy of Sciences of the USSR*, 2, 813-817.
- [12] Bairamov, E., Arpat, E. K., and Mutlu, G. (2017). Spectral properties of non-selfadjoint Sturm-Liouville operator with operator coefficient. *Journal of Mathematical Analysis and Applications*, 456(1), 293-306.
- [13] Mutlu, G. (2020). Associated functions of non-selfadjoint Sturm-Liouville operator with operator coefficient. *TWMS Journal of Applied and Engineering Mathematics*, 11(1), 113-121.
- [14] Mutlu, G. and Kır Arpat, E. (2020). Spectral properties of non-selfadjoint Sturm-Liouville operator equation on the real axis. *Hacettepe Journal of Mathematics and Statistics*, 49(5), 1686-1694.
- [15] Mutlu, G. (2020). Spectral properties of the second order difference equation with selfadjoint operator coefficients. *Communications Faculty of Sciences University of Ankara Series A1 Mathematics and Statistics*, 69(1), 88-96.
- [16] Mutlu, G. and Kır Arpat, E. (2020). Spectral analysis of non-selfadjoint second order difference equation with operator coefficient. *Sakarya University Journal of Science*, 24(3), 494-500.
- [17] Gerasimenko, N. I. and Pavlov, B. S. (1988). Scattering problems on noncompact graphs. *Theoretical and Mathematical Physics*, 74, 345-359.
- [18] Gerasimenko, N. I. (1988). Inverse scattering problem on a noncompact graph, *Theoretical and Mathematical Physics*, 75, 187-200.
- [19] Berkolaiko, G. and Kuchment, P. (2013). *Introduction to Quantum Graphs (Mathematical Surveys and Monographs vol 186)*, Rhode Island: American Mathematical Society.
- [20] Kuchment, P. (2004). Quantum graphs: I. Some basic structures, *Waves in Random Media*, 14(1), 107-128.
- [21] Möller, M. and Pivovarchik, V. (2015). *Spectral Theory of Operator Pencils, Hermite-Biehler Functions, and their Applications*, Operator Theory: Advances and Applications vol 246, New York: Birkhauser, Cham.

- [22] Bairamov, E. and Kir, E. (2004). Spectral properties of a finite system of Sturm-Liouville differential operators. *Indian Journal of Pure and Applied Mathematics*, 35(2), 249-256.
- [23] Kurasov, P. (2008) Schrödinger operators on graphs and geometry I: Essentially bounded potentials. *Journal of Functional Analysis*, 254(4), 934-953.
- [24] Boman, J., Kurasov, P., and Suhr, R. (2018). Schrödinger operators on graphs and geometry II. Spectral estimates for L_1 -potentials and an Ambartsumian Theorem. *Integral Equations and Operator Theory*, 90(3), 1-24.
- [25] Kurasov, P. and Suhr, R. (2018). Schrödinger operators on graphs and geometry. III. General vertex conditions and counterexamples. *Journal of Mathematical Physics*, 59(10), 102104, 21 pp.
- [26] Blashak, B. B. (1966). On the second-order differential operator on the whole axis with spectral singularities. *Doklady Akademii Nauk Ukrainskoj SSR Serija A*, 1, 38-41. (In Russian)
- [27] Bairamov, E. and Tunca, G. B. (1999). Discrete spectrum and principal functions of nonselfadjoint differential operator. *Czechoslovak Mathematical Journal*, 49(124), 689-700.