ISSN 2757-5543 GÜFFD 2. Cilt (2): 14-18 (2021) DOI: 10.5281/zenodo.5769840

Gazi Üniversitesi Fen Fakültesi Dergisi
http://sci-fac-j.gazi.edu.tr/

GÜFFD
GAZİ ÜNİVERSİTESİ
FEN FAKÜLTESİ DERGİSİ

Bir Grafın GCD Spektral Yarıçapı ve GCD Enerjisi İçin Alt ve Üst Sınırlar

Gül Özkan Kızılırmak, Emre Sevgi*, Şerife Büyükköse
Gazi Üniversitesi, Fen Fakültesi, Matematik Bölümü, 06500, Ankara, Türkiye

Öne Çıkanlar

- Bir grafın GCD matrisinin en büyük özdeğeri (spectral yarıçapı) için alt ve üst sınır verilmiştir.
- GCD matrisinin özellikleri göz önüne alınarak bu matrisin enerjisi için bir üst sınır elde edilmiştir.
- Bazı özel grafların GCD matrisleri için sonuçlar elde edilmiştir.

Makale Bilgileri

Geliş: 08.10.2021
Kabul: 27.10.2021

Anahtar Kelimeler
Grafın GCD matrisi,
Spektral Yarıçap,
Enerji

Özet

Bu çalışmada, basit bağlantılı bir G grafının derecelerinin GCD'lerinden yararlanarak tanımlanmış olan GCD matrisinin özelliklerinden yararlanarak GCD enerjisi için bazı sınırlar elde edilmiştir. Ayrıca, bazı özel grafların GCD matrislerinin özdeğerleri ve enerjileri için bazı sınırlar verilmiştir.

The Lower and Upper Bounds for GCD Spectral Radius and GCD Energy of a Graph

Highlights

- Lower and upper bounds are given for the largest eigenvalue (spectral radius) of the GCD matrix of a graph.
- Considering the properties of the GCD matrix, an upper bound for the energy of this matrix is obtained.
- Results have been obtained for GCD matrices of some special graphs.

Article Info

Received: 08.10.2021
Accepted: 27.10.2021

Keywords
The GCD matrix of the graph,
Spectral Radius,
Energy

Abstract

In this study, some bounds for the GCD energy of a graph were obtained by using the properties of GCD matrix, which is defined by using the GCDs of the degrees of a simply connected G graph. Also, some bounds are given for the eigenvalues and energies of the GCD matrices of some special graphs.

Araştırma Makalesi

* Sorumlu Yazar/Corresponding Author: Emre Sevgi, emresevgi@gazi.edu.tr

1. GİRİŞ

Graf, elemanları nokta olarak adlandırılan sonlu, boş olmayan $V = \{1,2,\dots,n\}$ noktalar kümesi ve elemanları kenar olarak adlandırılan sonlu E kenarlar kümesinden oluşan (V,E) ikili yapısına denir ve $G = (V,E)$ ile gösterilir [1]. G grafının herhangi bir i noktasına bağlı kenar sayısına i 'nin derecesi denir ve $d(i)$ ile gösterilir. $i,j \in G$ için i ve j komşu noktalar ise $i \sim j$ şeklinde gösterilir.

Basit bir grafın herhangi iki noktası arasında bir kenar bulunuyorsa yani her bir nokta çifti bağlantılı ise bu grafa tam graf denir ve n noktalı bir tam graf K_n ile gösterilir.

Her bir kenarın ve noktanın en fazla bir kez kullanıldığı yürümeye yol denir ve n noktalı yol P_n ile gösterilir.

Başlangıç ve bitiş noktası aynı olan yola devir denir ve n noktalı devir C_n ile gösterilir.

$|U| = p$ ve $|W| = q$ olmak üzere $G = (U,W,E)$ iki parçalı grafı için her $i \in U$ noktasının derecesi $d(i) = q$ ve her $j \in W$ noktasının derecesi $d(j) = p$ ve oluyorsa bu grafa iki parçalı tam graf denir ve $K_{p,q}$ ile gösterilir. Özel olarak $K_{n-1,1}$ iki parçalı tam grafı yıldız graf olarak tanımlanır ve S_n ile gösterilir.

Yardımcı Teorem 1.1. A bir $n \times n$ kare matris $R_{min} = min_{1\le i\le n} R_i(A)$, $R_{maks} = maks_{1\le i\le n} R_i(A)$, $R_i(A) = \sum_{j=1}^{n} a_{ij}$ ve λ_1, A matrisinin spektral yarıçapı olmak üzere

$$R_{min} \le \lambda_1 \le R_{maks}$$

dir [2].

Grafların uygulamasına yönelik matematik, kimya ve yapay zeka gibi birçok alanda çalışmalar yapılmaktadır. Bunlardan birisi de graf enerjisidir. Graf enerjisi ilk olarak Ivan Gutman tarafından $\lambda_1, \lambda_2, \dots \lambda_n$, G grafının özdeğerleri olmak üzere

$$E(G) = \sum_{i=1}^{n} |\lambda_i|$$

şeklinde tanımlanmıştır [3].

Bu tanımdan esinlenilerek bazı graf enerjileri ve bu enerjilerin özellikleri üzerine bazı çalışmalar yapılmıştır [4-7].

Bu çalışmada ilk olarak basit bağlantılı bir grafın GCD matrisinin spektral yarıçapı için sınırlar bulunmuş ve bu sınırlardan yararlanarak GCD enerjileri için üst sınırlar elde edilmiştir. Daha sonra, bazı özel grafların GCD matrislerinin spektral yarıçapları için sınırlar bulunmuştur.

2. GCD MATRİSİNİN SPEKTRAL YARIÇAPI VE ENERJİSİ İÇİN SINIRLAR

Bu bölümde G, n noktalı m kenarlı basit bağlantılı bir graf ve bu grafın noktalarının dereceleri $\Delta = d(1) \ge d(2) \dots \ge d(n) = \delta$ koşulunu sağlayacak şekilde kabul edilecektir.

Tanım 2.1. G grafının GCD matrisi,

$$GCD(G)_{ij} = \begin{cases} ((d(i), d(j)), & i \sim j \ ise \\ 0, & diğer\ durumlarda \end{cases}$$

şeklinde tanımlanır [8].

G grafının GCD enerjisi GCD matrisinin özdeğerlerinin mutlak değerlerinin toplamıdır [8]. Ramkumar ve Nagarajan, bir grafın GCD enerjisi için bazı sınırlar elde etmişlerdir [9].

Teorem 2.1. G grafının GCD matrisinin spektral yarıçapı λ_1 için sınır

$$\delta \leq \lambda_1 \leq \sum_{1\sim k} d(k)$$

şeklindedir.

İspat. GCD matrsinin satırları incelendiğinde $minR_i$, δ 'ya bağlı satırdan gelmektedir. Bu satırda $d(n) = \delta$ olduğundan δ tane eleman vardır. $n \in V$ noktası ile komşu olan j ler için $(\big(d(i), d(j)\big)$ 'lerin herbiri en az 1 olabileceğinden

$$minR_i = \delta.1 = \delta \tag{1}$$

olur.

Benzer şekilde, matrisin maksimum satırı Δ'ya bağlı satırdan gelecek ve bu satırda Δ tane eleman olacaktır. Ayrıca, bu satırdaki her bir eleman en fazla 1'e komşu noktaların dereceleri olduğundan

$$maksR_i = \sum_{1\sim k} d(k) \tag{2}$$

olur.

Böylece eşitlik (1) ve (2)'den istenilen elde edilir.

Teorem 2.2. Bir G grafının GCD enerjisi

$$E(GCD(G)) \leq n \sum_{1\sim k} d(k)$$

eşitsizliğini sağlar.

İspat. Yardımcı Teorem 1.1'den GCD matrisinin spektral yarıçapının alabileceği en büyük değer $\sum_{1\sim k} d(k)$ olduğundan üst sınır olarak

$$n \sum_{1\sim k} d(k)$$

elde edilir.

Sonuç 2.1. K_n, n noktalı tam grafı için

$$\lambda_1\big(GCD(K_n)\big) = (n-1)^2$$

ve

$$E\big(GCD(K_n)\big) = n(n-1)^2$$

dir.

İspat. K_n tam grafında herbir noktanın derecesi $n-1$ olduğundan her $i, j \epsilon V$ için $\big(d(i), d(j)\big) = n-1$ olup $\lambda_1\big(GCD(K_n)\big) = (n-1)^2$ dir. Ayrıca; $E\big(GCD(K_n)\big) = n(n-1)^2$ olur.

Sonuç 2.2. $P_{n,}$ n noktalı yol grafı için

$$1 \leq \lambda_1\big(GCD(P_n)\big) \leq 4$$

ve

$$E\big(GCD(P_n)\big) \leq 4n$$

dir.

İspat. P_n grafında $n-2$ tane iç noktanın derecesi 2, iki tane uç noktanın derecesi 1 dir. $maksR_i$ değeri iç noktadan $2+2=4$ ve $minR_i$ değeri uç noktadan 1 olarak geleceğinden $1 \leq \lambda_1\big(GCD(P_n)\big) \leq 4$ olup $E\big(GCD(P_n)\big) \leq 4n$ elde edilir.

Sonuç 2.3. C_n, n noktalı devir grafı için

$$\lambda_1\big(GCD(C_n)\big) = 4$$

ve

$$E\big(GCD(C_n)\big) \leq 4n$$

dir.

İspat. C_n grafında her bir noktanın derecesi 2 olup $minR_i\big(GCD(C_n)\big) = maksR_i\big(GCD(C_n)\big) = 4$'tür. Enerji ise n tane özdeğer olduğundan $E\big(GCD(C_n)\big) \leq 4n$ dir.

Sonuç 2.4. $K_{p,q}$ ($p \leq q$ olmak üzere) iki parçalı tam grafı için

$$p(p,q) \leq \lambda_1\left(GCD\big(K_{p,q}\big)\right) \leq q(p,q)$$

ve

$$E\left(GCD\big(K_{p,q}\big)\right) \leq q(p+q)(p,q)$$

dir.

Özel olarak S_n yıldız grafı için

$$1 \leq \lambda_1\big(GCD(S_n)\big) \leq n-1$$

ve

$$E\big(GCD(S_n)\big) \leq n(n-1)$$

dir.

İspat. $K_{p,q}$ iki parçalı tam grafında $minR_i = p(p,q)$ ve $maksR_i = q(p,q)$ olacağından eşitsizlik geçerlidir.
S_n yıldız graf $S_n = K_{1,n-1}$ iki parçalı tam graf olup sonuç aşikârdır.

ÇIKAR ÇATIŞMASI/ÇAKIŞMASI BİLDİRİMİ

Yazarlar arasında çıkar çatışması/çakışması bulunmamaktadır.

KAYNAKLAR

[1] Buyukkose, S., Kaya Gok, G., Ozkan Kizilirmak, G. ve Eren, S. (2021). *Graf Teori*. Nobel Akademik Yayıncılık, Ankara, Türkiye.
[2] Horn, R.A., Johnson, C.R. (2012). *Matrix Analysis*. Cambridge University Press.
[3] Gutman, I. (1978). The energy of a graph. *Ber. Math-Statist. Sekt. Forschungszentrum Graz*, 103, 1–22.
[4] Balakrishnan, R. Ed. (2004). The energy of a graph. *Linear Algebra and its Applications*, 387, 287-295.
[5] Hosamani, S. M., Ramane, H. S. (2016).On degree sum energy of a graph. *European Journal of Pure and Applied Mathematics*, 9(3), 340-345.
[6] Basavanagoud, B., Chitra, E. (2018). Degree square sum energy of graphs. *International Journal of Mathematics and Its Applications*, 6(2B), 193-205.
[7] Rad, N. J., Jahanbani, A., Gutman, I. (2018). Zagreb energy and Zagreb estrada index of graphs, *MATCH Communications in Mathematical and in Computer Chemistry*, 79, 371-386.
[8] Ramkumar, R.S., Nagarajan, K. (2017). Greatest common divisor degree energy of graphs, *International Journal of Mathematical Sciences and Engineering Applications*, 11(2), 163-171.
[9] Ramkumar, R.S., Nagarajan, K. (2018). Bounds on greatest common divisor degree spectral radius and greatest common divisor degree energy of graphs, *Journal of Applied Science and Computations*, 5(11), 1348.