



Genel Hizalama İndeksi Yöntemiyle 2 Boyutlu Saf Fermiyonik Modelde Kaosun İncelenmesi

Beyrul Canbaz^{1*}

^{1*} İstanbul Yeni Yüzyıl Üniversitesi, Sağlık Bilimleri Fakültesi, İş Sağlığı ve Güvenliği Bölümü, İstanbul, Türkiye, (ORCID: 0000-0002-5633-2296), beyrul.canbaz@yeniyuzuyil.edu.tr

(İlk Geliş Tarihi 24 Aralık 2021 ve Kabul Tarihi 25 Ocak 2022)

(DOI: 10.31590/ejosat.1043746)

ATIF/REFERENCE: Canbaz, B., (2022). Genel Hizalama İndeksi Yöntemiyle 2 Boyutlu Saf Fermiyonik Modelde Kaosun İncelenmesi. *Avrupa Bilim ve Teknoloji Dergisi*, (33), 161-166.

Öz

Thirring model 2 boyutlu konformal invariant saf fermiyonik bir modeldir. Bu modelde Heisenberg yaklaşımı kullanılarak spinör tipi instantonlara karşılık gelen çözümler elde edilmiştir. Instantonlar standart modelde kuantum alan teorisi bağlamında var olan klasik topolojik çözümlerdir. Instantonlar farklı vakumlar arasındaki tünellemeye karşılık geldikleri için kuarkların parçacıklar içinde hapsolmesini açıklamada önemli bir rol oynar. Bu çalışmada Thirring modelden yararlanarak elde edilen spinör tipi instanton çözümlerinin dinamiği hakkında daha fazla bilgi elde etmek amaçlanmaktadır. Spinör tipi instanton çözümleri lineer olmayan çözümlerdir. Düzenli ve kaotik hareketi hızlı bir şekilde ayırt edebilmesi ve yarı periyodik hareketin meydana geldiği torusun boyutsallığını belirlemesi Genelleştirilmiş Hizalama İndeksi (Generalized Alignment Index) yöntemini diğer yöntemlere göre öne çıkarmaktadır. Bu çalışmada GALI yöntemi kullanılarak spinör tipi instanton çözümlerinin kaotik davranışı karakterize edilmektedir.

Anahtar Kelimeler: Instanton, Spinör, Kaos, Lineer Olmayan Sistemler, Genelleştirilmiş Hizalama İndeksi.

Investigation Chaos by General Alignment Index Method in 2D Pure Fermionic Model

Abstract

The Thirring model is a 2D conformal invariant pure fermionic model. In this model, solutions corresponding to spinor type instantons are obtained by using Heisenberg ansatz. Instantons are classical topological solutions that exist in the context of quantum field theory in the standard model. Since instantons correspond to tunneling between different vacuums, they play an important role in explaining the entrapment of quarks within particles. In this study, it is aimed to get more information about the dynamics of spinor type instanton solutions obtained by using the Thirring model. Spinor-type instanton solutions are non-linear solutions. The ability to quickly distinguish between regular and chaotic motion and determine the dimensionality of the torus in which quasi-periodic motion occurs makes the Generalized Alignment Index method stand out compared to other methods. In this study, the chaotic behavior of spinor-type instanton solutions is characterized using the GALI method.

Keywords: Instanton, Spinor, Chaos, Nonlinear Dynamics, Generalized Alignment Index.

* Sorumlu Yazar: beyrul.canbaz@yeniyuzuyil.edu.tr

1. Giriş

Solitonlar instantonlara yakından ilgili olan, sonlu enerjili ve kuantum durumları önemli topolojili klasik konfigürasyonlardır. İntantonlar ve solitonlar, topolojik yükler olarak bilinen bir dizi topolojik değişmez tarafından sınıflandırılır (Fradkin, 2021). Bu topolojik değişmezler genellikle kuantum sapmalarının bir sonucu olarak teorinin eylemine dahil edildiklerinde, teorinin davranışını derinden değiştirirler.

İntantonların klasik olarak topolojik solitonlar olduğu bilinmektedir (Fradkin, 2021). İntantonlar hem küresel simetri teorilerinde hem de ayar teorilerinde ve faz geçişleri teorisinde yol integralinin pertürbatif olmayan tanımında kilit rol oynayan topolojik uyarıları tanımlar (Dunajski, 2010). İntantonlar, sıfır enerji ile sonlu bir etkiye sahip olduklarından, uzay-zamanda farklı topolojilere sahip boşluklar arasında tünel etkisi sağlayan kuantum alanlarının konfigürasyonları olarak da kabul edilmiştir (Belavin ve ark., 1975). Özellikle, instantonların bu özelliği, kuarkların hapsolme problemini yorumlar.

Fiziğin çeşitli alanlarında dinamik sistemler birçok değişik uygulama ile oldukça önemli ve geniş bir araştırma alanı oluşturmaktadır. Birçok dinamik sistemde hareketin düzenli veya kaotik doğasının hızlı ve verimli tespiti yıllar boyunca çok aktif bir araştırma konusu olmuştur. Zaman içinde genişleyen ve gelişen dinamik sistemlerin bir alt alanı olarak kaos algılama yöntemleri ele alınmıştır. Bu çalışmada, kaos tespiti için kullanılan Genelleştirilmiş Hizalama İndeksi (Generalized Alignment Index) (GALI) ile çalışılmıştır. Bu yöntem hızlı ve verimli sonuçlar vermesinden dolayı tercih edilmiştir. GALI, kaotik ve düzenli hareketler arasındaki fark, zayıf kaotik davranışı erken tespit edebilmesi, meydana gelen torusun boyutsallığını belirleyebilmesi gibi özellikler sunar.

GALI, belirli bir yörüngeden birkaç sapma vektörünün evrimini gerektirir. Kullanılan vektörlerin k sayısı, indeksin sırasını, yani $GALI_k$ 'ı tanımlar. Düzenli hareket durumunda $GALI_k$, k için hareketin gerçekleştiği torusun teğet uzayının N boyutundan büyük olmayan, sonunda pozitif bir değer etrafında salınım yaparken, kaotik yörüngeler için katlanarak hızlı bir şekilde sifra yönelir (Skokos ve ark., 2007). Kararlı periyodik yörüngeleri durumunda, $GALI_k$ belirli güç yasalarını izleyerek sıfır olma eğilimindeyken, kararsız periyodik yörüngeler için katlanarak hızlı bir şekilde sıfır olur (Skokos ve Bountis, 2008).

2. Materyal ve Metot

2.1 Thirring Model

Thirring model, iki boyutlu fermiyon-fermiyon etkileşimleri, konformal invaryant Lagrange

$$L = i\bar{\psi}\sigma_{\mu}\partial_{\mu}\psi + \frac{g}{2}(\bar{\psi}\psi)^2 \quad (1)$$

denklemleri ile tanımlanır (Thirring, 1958). Burada g pozitif kuplaj sabitidir ve fermiyon alanı $\psi(x)$ 1/2 ölçek boyutuna sahiptir (Akdeniz ve Smailagic, 1979). Hareket denklemi ise,

$$i\sigma_{\mu}\partial_{\mu}\psi + g(\bar{\psi}\psi)\psi = 0 \quad (2)$$

ile verilir. Heisenberg yaklaşımının (Canbaz ve ark., 2012) Öklid konfigürasyonunun kompleks biçimi,

$$\psi = [ix_{\mu}\gamma_{\mu}\chi(s) + \varphi(s)]C \quad (3)$$

denklemleri ile verilir. Burada C keyfi seçilmiş bir spinör sabiti, $\chi(s)$ ve $\varphi(s)$ ise $s = x^2 + t^2$ ($x_1 \equiv x, x_2 \equiv t$)'nin gerçek fonksiyonlarıdır. (3) denklemini (2) denkleminde yerine koyarsak,

$$\chi(s) + s\frac{d\chi(s)}{ds} + \alpha[s\chi(s)^2 + \varphi(s)^2]\varphi(s) = 0 \quad (4a)$$

$$\frac{d\varphi(s)}{ds} - \alpha[s\chi(s)^2 + \varphi(s)^2]\chi(s) = 0 \quad (4b)$$

elde ederiz. Burada $\alpha = g(\bar{C}C)$ yazarsak,

$$i\partial\psi = i\sigma_{\mu}\partial_{\mu}\psi = [-2\chi(s) - 2s\frac{d\chi(s)}{ds} + 2ix_{\mu}\sigma_{\mu}\frac{d\varphi(s)}{ds}]\bar{C}C \quad (5)$$

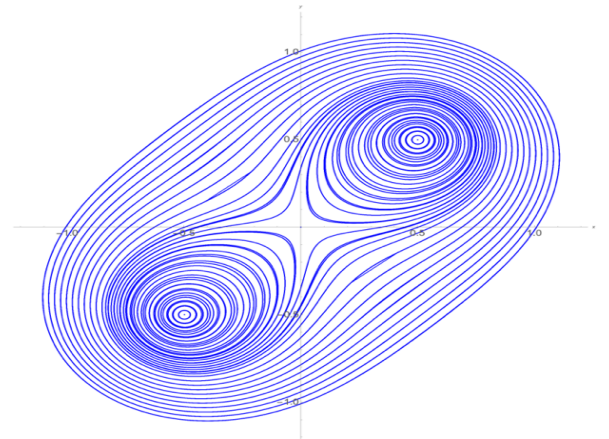
$$(\bar{\psi}\psi) = (s\chi(s)^2 + \varphi(s)^2)(\bar{C}C)$$

buluruz. $\chi = As^{-\sigma}p(t)$ ve $\varphi = Bs^{-\tau}q(t)$ ile $t \equiv \ln s$ ve $\sigma = \tau + 1/2$, $\tau = 1/4$ (Canbaz ve ark., 2012) yazarak, doğrusal olmayan basit diferansiyel denklem sistem çifti (4a) ve (4b) boyutsuz formunu,

$$2\frac{dp(t)}{dt} + \frac{1}{2}p(t) - \alpha AB(p(t)^2 + q(t)^2)q(t) = 0, \quad (6a)$$

$$2\frac{dq(t)}{dt} - \frac{1}{2}q(t) - \alpha AB(p(t)^2 + q(t)^2)p(t) = 0 \quad (6b)$$

elde ettik. Burada p ve q, t'nin boyutsuz fonksiyonlarıdır ve A, B sabitlerdir (Canbaz ve ark., 2012). (6a) ve (6b)'deki denklem sistemine, Thirring doğrusal olmayan diferansiyel denklem sistemi diyoruz. $\beta = \alpha(AB) = 1$ için bu denklem sisteminin çözümü, (Canbaz ve ark., 2012) de verilen Thirring instantonlarıdır. Son zamanlarda, faz uzayında Thirring instantonlarının evriminde kuplaj sabitinin rolü araştırılmıştır (Canbaz ve ark., 2012).



Şekil 1. Thirring instantonlarının çözümlerine karşılık gelen faz diyagramı (Canbaz ve ark., 2012) (Figure 1. Phase diagram corresponding to the solutions of Thirring instantons (Canbaz et al., 2012).)

2.2 Genelleştirilmiş Hizalama İndeksi (Generalized Alignment Index) (GALI)

GALI yönteminde vektör uzayının $2N$ boyutlu uzayında S bir yörüngenin değişimi fark denklemi tarafından yönetilir.

$$\vec{x}(n+1) \equiv \vec{x}_{n+1} = F(\vec{x}_n) \quad (9)$$

Bu durumda, bir \vec{x}_n referans yörüngesine göre bir sapma vektörü $\vec{\omega}(n) \equiv \vec{\omega}_n$ 'nin değişimi, karşılık gelen teğet vektör uzayı tarafından verilir.

$$\vec{\omega}(n+1) \equiv \vec{\omega}_{n+1} = \frac{\partial F}{\partial \vec{x}}(\vec{x}_n) \cdot \vec{\omega}_n, \quad (10)$$

N serbestlik derecesi Hamiltonian akışları ve $2N$ boyutlu vektör uzayı için k ($GALI_k$) düzeyindeki Genelleştirilmiş Hizalama İndeksi, $2 \leq k \leq 2N$, başlangıçta doğrusal olarak bağımsız k sapma vektörlerinin $\vec{\omega}_k(0)$ değişimi yoluyla belirlenir. Taşma problemlerinden kaçınmak için, ortaya çıkan sapma vektörleri $\vec{\omega}_k(t)$ sürekli olarak normalize edilir, ancak yönleri bozulmadan tutulur. Daha sonra, (Skokos ve ark., 2007) 'a göre $GALI_k$, kenarları k birim sapma vektörleri $\hat{\omega}_i(t) = \vec{\omega}_i(t) / \|\vec{\omega}_i(t)\|$, $i = 1, 2, \dots, k$ olan k -paralelkenarının hacmi olarak tanımlanır ve bu vektörlerin vektörel çarpımı ile şu şekilde belirlenir:

$$GALI_k(t) = \|\hat{\omega}_1(t) \wedge \hat{\omega}_2(t) \wedge \dots \wedge \hat{\omega}_k(t)\| \quad (11)$$

ve $\|\cdot\|$ olağan klasik normu gösterir. Bu tanımdan, sapma vektörlerinden en az ikisinin lineer bağımlı hale gelmesi durumunda, denklem (11)'deki vektörel çarpımının sıfır olduğu ve $GALI_k$ 'in ortadan kalktığı açıktır.

Bir N serbestlik derecesi Hamiltonian akışının veya bir $2N$ boyutlu vektör uzayı $2N$ boyutlu faz uzayında S , düzenli yörüngeler, Hamilton akışları için $2 \leq s \leq N$ üzerinde bulunur. Bu tür yörüngeler için, tüm sapma vektörleri, hareketin üzerinde bulunduğu torusun s boyutlu teğet uzayına düşme eğilimindedir. Böylece, $k \leq s$ genel sapma vektörleri ile başlarsak, lineer bağımlı hale gelmeleri için özel bir neden olmadıktan bunlar torusun s -boyutlu teğet uzayında lineer olarak bağımsız kalacaktır. Sonuç olarak $GALI_k$ pratik olarak sabit kalır ve $k \leq s$ için sıfırdan farklıdır. Öte yandan, bazı sapma vektörlerinin eninde sonunda lineer bağımlı hale gelmesi gerekeceğinden, $GALI_k$ $k > s$ için sıfır olma eğilimindedir. Özellikle, s -boyutlu teğet uzayı üzerinde uzanan yarı düzenli yörüngeler için $GALI_k$ 'in genel davranışı (Skokos ve Manos, 2016), (Christodoulidi ve Bountis, 2006) ile verilmektedir.

$$GALI_k(t) \propto \begin{cases} \text{sabit} & 2 \leq k \leq s \\ \frac{1}{t^{k-s}} & s < k \leq 2N - s \\ \frac{1}{t^{2(k-N)}} & 2N - s < k \leq 2N \end{cases} \quad (12)$$

Bu tahminlerin yalnızca yukarıda belirtilen koşullar tam olarak karşılandığında geçerli olduğunu unutulmamalıdır. Örneğin, mümkün olan tek torusun bir $s = 1$ boyutlu invaryant eğri olduğu 2 boyutlu vektör uzayı durumunda, teğet uzayı 1 boyutludur. Bu nedenle, $GALI_2$ 'nin davranışı bu durumda tek olası indekstir, denklem (12)'nin üçüncü dalı, yani $GALI_2 \propto 1/t^2$ tarafından verilir, çünkü denklem (12)'nin ilk iki durumu uygulanabilir değildir. Denklem (12)'den, N -boyutlu bir torus üzerinde uzanan normal yörüngelerin düzenli durumu için, $GALI_k$ 'in davranışının şu şekilde verildiğini çıkarıyoruz: (Moges, 2020)

$$GALI_k(t) \propto \begin{cases} \text{sabit} & 2 \leq k \leq N \\ \frac{1}{t^{2(k-N)}} & N < k \leq 2N \end{cases} \quad (13)$$

$GALI_k$ 'in düşük boyutlu tori, yani $k < N$ ile k boyut torus üzerindeki düzenli yörüngeler için davranışının (Manos ve ark., 2012) tarafından verildiğini göz önünde bulundurulmaktadır.

$$GALI_k(t) \propto \begin{cases} \frac{1}{t^{(k-1)}} & 2 \leq k \leq 2N - 1 \\ \frac{1}{t^{2N}} & k = 2N \end{cases} \quad (14)$$

Öte yandan, kaotik bir yörünge için tüm sapma vektörleri, kendilerini maksimum Lyapunov karakteristik üssü tarafından tanımlanan yönde hizalayarak lineer olarak bağımlı hale gelme eğilimindedir ve bu nedenle, bu durumda, $GALI_k$ yasayı izleyerek üssel olarak sıfır olma eğilimindedir (Manos ve ark., 2012)).

$$GALI_k(t) \propto e^{-[(\sigma_1 - \sigma_2) + (\sigma_1 - \sigma_3) + \dots + (\sigma_1 - \sigma_k)]t} \quad (15)$$

Burada $\sigma_1, \dots, \sigma_k$ yörüngenin ilk en büyük k Lyapunov karakteristik üsleridir. Özellikle $k = 2$ olduğunda, $GALI_2$ aşağıdaki gibi katlanarak hızlı bir şekilde sıfırlanma eğilimindedir:

$$GALI_2(t) \propto e^{-(\sigma_1 - \sigma_2)t} \quad (16)$$

$GALI_2$ 'nin 2 boyutlu eşleştirmelerde düzenli yörüngeler için davranışı özel dikkat gerektirir. Bu durumda hareket 1 boyutlu torus üzerinde mevcut olduğundan, iki sapma vektörü yine 1 boyutlu olan bu torusun teğet uzayına düşme eğilimindedir. Böylece iki vektör sonunda kaotik yörüngelerde olduğu gibi lineer olarak bağımlı hale gelecektir, ancak bu (Skokos ve Manos, 2016) tarafından verilen farklı bir zaman oranı ile olur.

$$GALI_2(n) \propto \frac{1}{n^2} \quad (17)$$

Burada n yineleme sayısıdır. $GALI_k$ değerini hesaplamının etkili bir yolu, sütunlar olarak k birim vektör

$$\hat{\omega}_i(t) = \frac{\omega_i(t)}{\|\omega_i(t)\|} = (\hat{\omega}_{i,1}, \hat{\omega}_{i,2}, \dots, \hat{\omega}_{i,2N})$$

koordinatlarını içeren matrisin Tekil Değer Ayrışımı (TDA) yolu ile gerçekleşir (Christodoulidi ve Bountis, 2006)

$$A = (\hat{\omega}_1 \hat{\omega}_2 \dots \hat{\omega}_k) = \begin{pmatrix} \hat{\omega}_{1,1} & \hat{\omega}_{2,1} & \dots & \hat{\omega}_{k,1} \\ \hat{\omega}_{1,2} & \hat{\omega}_{2,2} & \dots & \hat{\omega}_{k,2} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \hat{\omega}_{1,2N} & \hat{\omega}_{2,2N} & \dots & \hat{\omega}_{k,2N} \end{pmatrix} \quad (18)$$

Bunun sonucunda, $GALI_k$ değerinin şu şekilde verilebileceği görülmektedir:

$$GALI_k(t) = \sqrt{\det[A(t).A^T(t)]} \quad (19)$$

Burada ' $\det(A)$ ' bir A matrisinin determinantını gösterir. Denklem 19'daki matris çarpımı bir $k \times k$ simetrik pozitif tanımlı matristir.

$$AA^T = \begin{bmatrix} \langle \hat{\omega}_1, \hat{\omega}_1 \rangle & \langle \hat{\omega}_1, \hat{\omega}_2 \rangle & \langle \hat{\omega}_1, \hat{\omega}_3 \rangle & \dots & \langle \hat{\omega}_1, \hat{\omega}_k \rangle \\ \langle \hat{\omega}_1, \hat{\omega}_2 \rangle & \langle \hat{\omega}_2, \hat{\omega}_2 \rangle & \langle \hat{\omega}_2, \hat{\omega}_3 \rangle & \dots & \langle \hat{\omega}_2, \hat{\omega}_k \rangle \\ \vdots & \vdots & \vdots & \dots & \vdots \\ \langle \hat{\omega}_1, \hat{\omega}_k \rangle & \langle \hat{\omega}_2, \hat{\omega}_k \rangle & \langle \hat{\omega}_3, \hat{\omega}_k \rangle & \dots & \langle \hat{\omega}_k, \hat{\omega}_k \rangle \end{bmatrix} \quad (20)$$

i. satır ve j. sütunun her bir elemanı, $\hat{\omega}_i$ ve $\hat{\omega}_j$ birim sapma vektörlerinin iç çarpımıdır, böylece

$$\langle \hat{\omega}_i, \hat{\omega}_j \rangle = \cos\theta_{ij} \quad , \quad i, j = 1, 2, \dots, k, \quad (21)$$

ile verilir. Burada θ_{ij} , $\hat{\omega}_i$ ve $\hat{\omega}_j$ vektörleri arasındaki açıdır. Böylece denklem (20)'nin matrisi şu şekilde yazılabilir:

$$AA^T = \begin{bmatrix} 1 & \cos\theta_{12} & \cos\theta_{13} & \dots & \cos\theta_{1k} \\ \cos\theta_{12} & 1 & \cos\theta_{23} & \dots & \cos\theta_{2k} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \dots & \vdots \\ \cos\theta_{1k} & \cos\theta_{2k} & \cos\theta_{3k} & \dots & 1 \end{bmatrix} \quad (22)$$

$GALI_k$ değeri, Denklem (11)'de tanımlanan k sapma vektörlerinin vektörel çarpımının normu ile hesaplanabilir.

$$GALI_k = \left\{ \sum_{1 \leq i_1 < i_2 < \dots < i_k \leq 2N} \left(\det \begin{bmatrix} \omega_{1i_1} & \omega_{1i_2} & \dots & \omega_{1i_k} \\ \omega_{2i_1} & \omega_{2i_2} & \dots & \omega_{2i_k} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \omega_{ki_1} & \omega_{ki_2} & \dots & \omega_{ki_k} \end{bmatrix} \right)^2 \right\}^{1/2} \quad (23)$$

Burada toplam, $2N$ dışındaki tüm olası k indeks kombinasyonları üzerinden yapılır. Bu, hesaplamamızda A'nın tüm olası $k \times k$ determinantlarını göz önünde bulundurmamız gerektiği anlamına gelir. Pratik bir bakış açısından bu teknik, denklem (23)'teki çok sayıda determinanttan dolayı birçok serbestlik dereceli sistemler için sayısal olarak verimli değildir. Yine de Denklem (23), (Skokos ve ark., 2007)'da gösterildiği gibi, GALI'nin kaotik ve düzenli yörüngeler için asimptotik davranışının teorik yaklaşımı için idealdir.

Tekil Değer Ayrışımı (TDA) yöntemine (Skokos, ve ark. 2007) göre $2N \times k$ matrisi A^T , $2N \times k$ sütun-ortogonal matris U, $k \times k$ diyagonal matris Z'nin negatif olmayan gerçek sayılarla z_i , $i = 1, 2, \dots, k$ çarpımı olarak köşegeni üzerinde yazılabilir ve $k \times k$ ortogonal matris V'nin transpozisi:

$$A^T = UZV^T \quad (24)$$

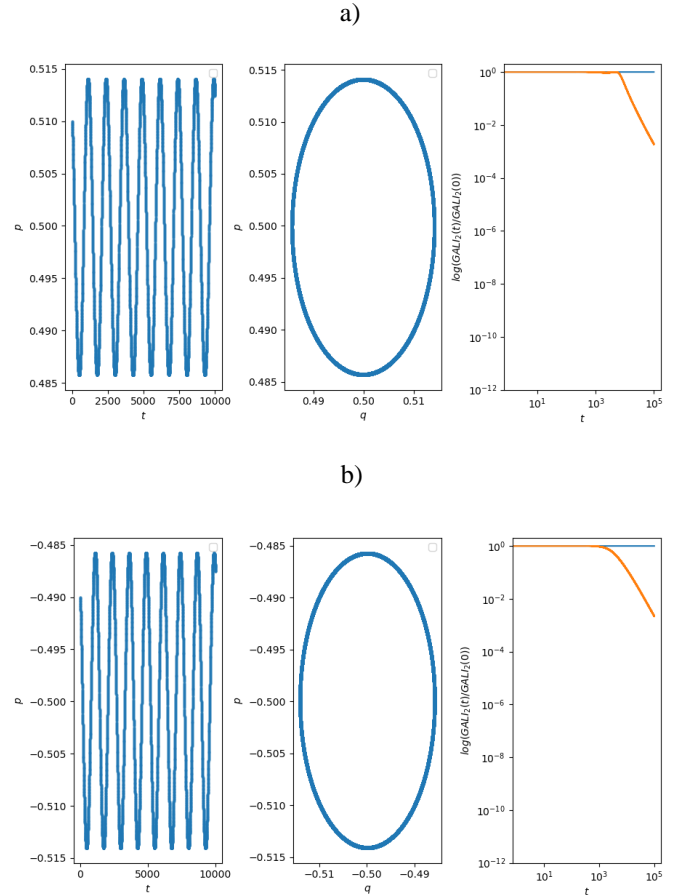
Daha sonra $GALI_k$, denklem (19) ve (24) kullanılarak U ve V ortogonal olduğundan, $U^T \cdot U = V^T \cdot V = I_k$, I_k 'nin $k \times k$ birim matrisi olduğu akıld tutularak hesaplanır. Böylece,

$$\begin{aligned} GALI_k &= \sqrt{\det(AA^T)}, \\ &= \sqrt{\det[(VZ^T U^T) \cdot (UZV^T)]}, \\ &= \sqrt{\det[V \text{diag}(z_i^2) V^T]}, \\ &= \sqrt{\det[\text{diag}(z_i^2)]}, \\ &= \prod_{i=1}^k z_i \end{aligned} \quad (25)$$

Burada z_i , $i = 1, \dots, k$, TDA prosedürü ile elde edilen A'nın sözde tekil değerleridir.

3. Araştırma Sonuçları ve Tartışma

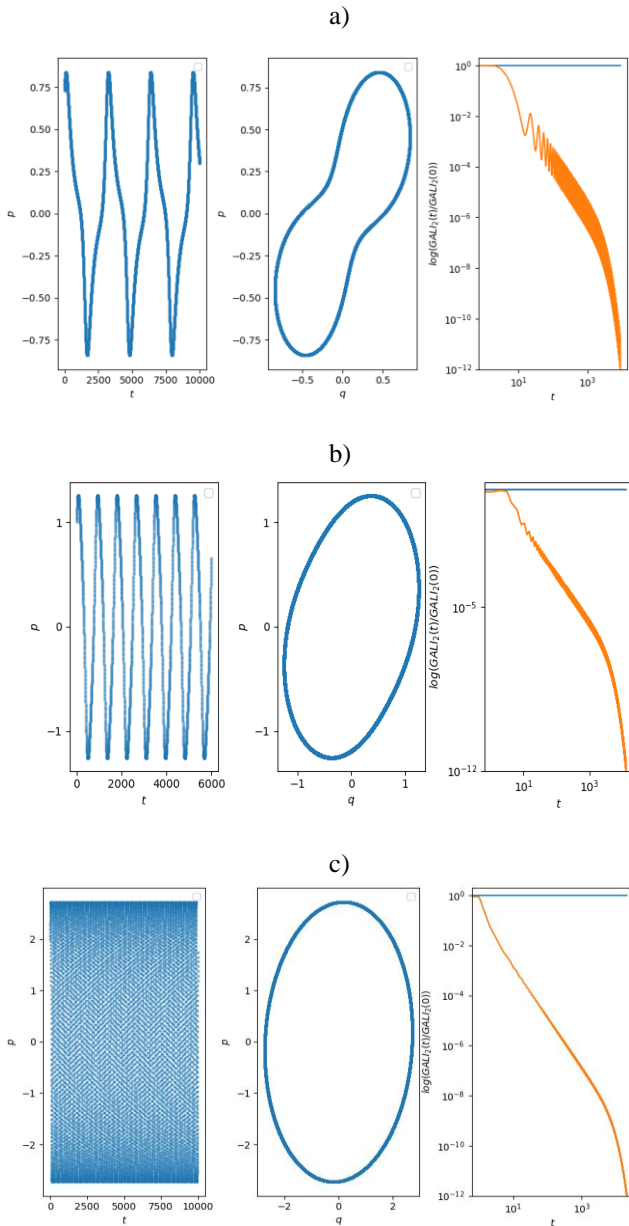
Thirring modele Heisenberg yaklaşımı uygulayarak bulunan spinör tipi instanton çözümleri baz alınarak GALI yöntemi ile yörüngelerin durumu araştırıldı. Şekil 1'deki faz diyagramında görüldüğü gibi denge noktaları (0.5,0.5), (-0.5,-0.5) tir. Kararlı noktalara çok yakın ve biraz daha uzaktaki yörüngelerin durumlarına bakıldı.



Şekil 2. $\beta=1$ sabit değeri; a) başlangıç koşulları (0.51, 0.49); sırasıyla Zaman Serisi, Faz Diyagramı, 10^5 iterasyon sayısına göre $GALI_2$ nin evrimi, b) başlangıç koşulları (-0.49, -0.51); sırasıyla Zaman Serisi, Faz Diyagramı, 10^5 iterasyon sayısına göre $GALI_2$ nin evrimi

(Figure 2. The constant value of $\beta=1$; a) initial conditions (0.51, 0.49); respectively, Time Series, Phase Diagram, evolution of $GALI_2$ according to the number of 10^5 iterations, b) initial conditions (-0.49, -0.51); respectively, Time Series, Phase Diagram, evolution of $GALI_2$ according to the number of 10^5 iterations.)

Şekil 2 de görüldüğü gibi a ve b denge durumları (0.5, 0.5), (-0.5,-0.5) (Canbaz ve ark., 2012) civarında periyodik yörüngelere sahip olduğu gözlenmektedir. Her iki kararlı noktalara yakın durumlarda zaman serisi ve faz diyagramında periyodik olarak hareket ettiği görülmektedir. GALI indisi uzun süre sabit kalmaktadır, sonrasında azalma eylemi göstermektedir. Bu durum denge noktaları etrafında periyodik bir yörüngeye sahip olduğunu sonucunu ortaya çıkarmaktadır.



şurasıyla Zaman Serisi, Faz Diyagramı, 10^5 iterasyon sayısına göre $GALI_2$ nin evrimi. (Figure 3. The constant value of $\beta=1$; a) initial conditions (0.73, 0.73); respectively, Time Series, Phase Diagram, evolution of $GALI_2$ according to 10^5 iteration number, b) initial conditions (1.0, 1.0); Time Series, Phase Diagram, evolution of $GALI_2$ according to 10^5 iteration number, respectively, c) initial conditions (1.99, 1.99); respectively, Time Series, Phase Diagram, evolution of $GALI_2$ according to the number of 10^5 iterations.)

Şekil 3'te görüldüğü gibi a, b ve c denge durumlarından (0.5, 0.5), (-0.5,-0.5) (Canbaz ve ark., 2012) uzaklaştıkça yörüngeler kaotiktir. Zaman serisi ve faz diyagramları net olarak periyodiklik veya kaotiklik hakkında bahsetmek mümkün değildir. a) grafiğindeki GALI indisi bir süre sonra düşmeye başlamıştır. b) grafiğindeki GALI indisi de aynı şekilde bir süre sonra düşmeye başlamıştır. c) grafiğindeki GALI de daha kısa bir süre sonra düşme eylemi başlamıştır. Bu durumlar kaotikliğin göstergesidir (Skokos ve Bountis, 2008). Şekil 3'te denge durumundan farklı 3 başlangıç değerine göre incelendiğinde; denge noktalarından uzaklaştıkça yörüngelerin kaotikleştiği görülmektedir.

4. Sonuç

İnstantonlar uzay-zamanda farklı topolojik vakumlar arasındaki tünellemeyi sağlayan kuantum alan teorisinde parçacık benzeri çözümlerdir. Kuantum ayar teorisinde vakumlar arası tünelleme önemlidir (Shifman, 1994). Bu çalışmada Thirring modele Heisenberg yaklaşımı uygulayarak bulunan spinör tipi instanton çözümlerinin dinamiğini daha iyi anlamak amaçlanmıştır. Bu dinamiği daha iyi anlamak için Genelleştirilmiş hizalama indeksi yöntemi kullanılmıştır. Genelleştirilmiş hizalama indeksi yöntemi yüksek boyutlu sistemlerde olduğu gibi düşük boyutlu sistemlerde de düzenli ve kaotik hareketi araştırmada uygun bir yöntem olarak seçilmiştir.

Daha önceki yapılan çalışmada faz uzayına bakıldı (Canbaz ve ark., 2012). Faz uzayı çekicileri gösterebilmektedir ancak yörüngeler hakkında detaylı bilgi vermemektedir. Zaman serisi ve faz diyagramı yörüngelerin düzenli veya kaotikliği hakkında kesin bir bilgi vermediğinden GALI yönteminden yararlanıldı. GALI yöntemi sayesinde yörüngelerin dinamiği hakkında daha detaylı bilgi verdiğinden bu çalışmada spinör tipi instanton çözümleri yörüngeleri hakkında daha fazla bilgiye sahip olduk. Denge durumu (0.5,0.5), (-0.5,-0.5) civarında düzenli olmasına karşın denge durumundan uzaklaştıkça yörüngeler kaotik olmaktadır.

İki boyutlu konformal invaryant saf fermiyonik spinör tipi instantonların başlangıç koşullarına hassas bağlılığı görülmektedir. Hem düzenli hem de kaotik olması dinamiğinin evriminin kaotik olduğu sonucunu göstermektedir. Bu çalışma kuantum alan teorilerinde vakum durumundaki çözümlerin kaotik özelliklere sahip olduklarına dair bir göstergedir.

5. Teşekkür

Bu taslağı hazırlarken verdiği destek için K. Gediz Akdeniz'e teşekkür ederim.

Şekil 3. $\beta=1$ sabit değeri; a) başlangıç koşulları (0.73, 0.73); sırasıyla Zaman Serisi, Faz Diyagramı, 10^5 iterasyon sayısına göre $GALI_2$ nin evrimi, b) başlangıç koşulları (1.0, 1.0); sırasıyla Zaman Serisi, Faz Diyagramı, 10^5 iterasyon sayısına göre $GALI_2$ nin evrimi, c) başlangıç koşulları (1.99, 1.99); e-ISSN: 2148-2683

Kaynakça

- Akdeniz, K. G., Smailagic, A., (1979). Classical solutions for fermionic models. *Il Nuovo Cimento A*, 51(3), 345–357
- Belavin, A.A., Polyakof, A.M., Schwartz, Schwartz, A.S., Tyupkin Yu.S., (1975). Pseudoparticle solutions of Yang-Mills equations. *Phys. Lett., B*, 59(1), 85-87
- Canbaz, B., Onem, C., Aydogmus, F., Akdeniz, K. G., (2012). From Heisenberg ansatz to attractor of Thirring Instanton. *Chaos, Solitons & Fractals*, 45(2), 188–191
- Christodoulidi, H., Bountis, T., (2006). Low-dimensional quasiperiodic motion in Hamiltonian systems. *ROMAI Journal* 2(2), 37-44.
- Dunajski, M., (2010). *Solitons, Instantons, and Twistors*. Oxford University Press, New York
- Fradkin, E., (2021). *Quantum Field Theory: An Integrated Approach*. Princeton University Press
- Manos, T., Skokos, C., Antonopoulos, C., (2012). Probing the local dynamics of periodic orbits by the generalized alignment index (GALI) method. *International Journal of Bifurcation and Chaos*, 22(9), 1250218
- Moges, H.T., (2020). *Investigating Chaos by the Generalized Alignment Index (GALI) Method*
- Shifman, M., (1994). *Instantons in Gauge Theories*. World Scientific Publishing Company
- Skokos, C., Bountis, T., Antonopoulos, C., (2007). Geometrical properties of local dynamics in Hamiltonian systems: The Generalized Alignment Index (GALI) method. *Physica D*, 231(1), 30-54
- Skokos, C., Bountis, T., Antonopoulos, C., (2008). Detecting chaos, determining the dimensions of tori and predicting slow diffusion in Fermi-Pasta-Ulam lattices by the Generalized Alignment Index method. *The European Physical Journal Special Topics*, 165(1), 5
- Skokos, C., Manos, T., (2016). The Smaller (SALI) and the Generalized (GALI) alignment indices: Efficient methods of chaos detection. *Lect. Notes Phys.* 915, 129
- Thirring W. E., (1958). A Soluble. Relativistic Field Theory *Anal. Phys.*, 3, 91.