



Analytical solution of multi-winding coil problem in magnetic core in spherical coordinates and comparison with FEA results

Hüseyin Yıldız^{1*}, Birkan Durak², Erol Uzal³

¹Department of Mechanical and Metal Technologies, Vocational School of Technical Sciences, Istanbul University – Cerrahpasa, 34500, Istanbul Türkiye

²Department of Motor Vehicles and Transportation Technologies, Vocational School of Technical Sciences, Istanbul University – Cerrahpasa, 34500, Istanbul Türkiye

³Department of Mechanical Engineering, Faculty of Engineering, Istanbul University – Cerrahpasa, 34320, Istanbul Türkiye

Highlights:

- Analytical calculations were made in spherical coordinates for multi-winding coils wound inside a spherical magnetic core.
- Analytical results and FEA results were compared.
- Analytical formulas were obtained for inductance coefficients.

Keywords:

- Spherical coordinates
- Magnetic fields
- Maxwell's equations
- Finite element analysis
- Mutual inductance

Article Info:

Research Article

Received: 06.01.2022

Accepted: 31.12.2022

DOI:

10.17341/gazimmfd.1054515

Correspondence:

Author: Hüseyin Yıldız

e-mail:

huseyin.yildiz@iuc.edu.tr

phone: +90 544 265 7711

Graphical/Tabular Abstract

In this study, analytical formulas were obtained for the electric field (\mathbf{E}) and magnetic field (\mathbf{B}) vectors formed by the coils inside a spherical magnetic core. Figure A shows the analytical and FEA (Finite Element Analysis) results of the vector potential (\mathbf{A}). The results are very close to each other. So, it is understood that the analytical results are usable.

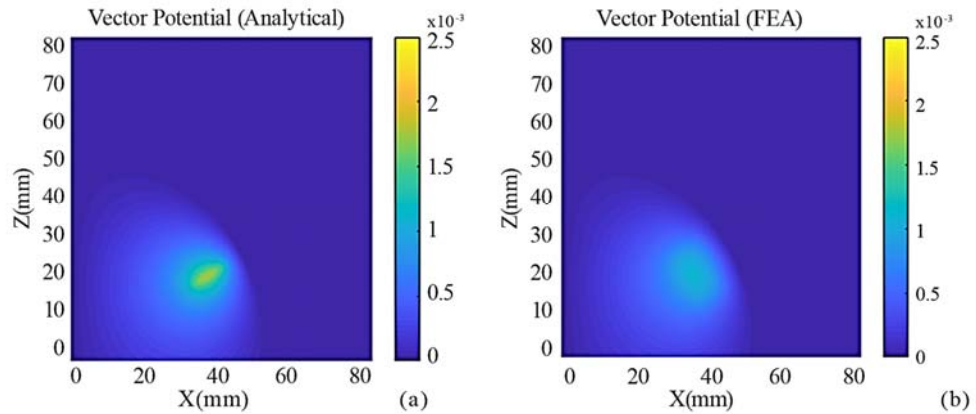


Figure A. Vector potential distribution in the x-z plane (a, b)

Purpose:

Traditional machines are slowly being replaced by more complicated and efficient mechanisms such as devices with spherical geometry that can move in more than one axis. Therefore, calculation of the parameters of spherical electromagnetic systems by analytical or semi-analytical methods has become one of the important research topics in recent years. The aim of this study is to calculate the magnetic field distribution in the magnetic core and in the air and obtain analytical formulas for the inductance coefficients.

Theory and Methods:

Maxwell's equations were solved analytically for a single turn coil placed inside a magnetic sphere. Analytical expressions for magnetic vector potential, electric and magnetic fields, \mathbf{A} , \mathbf{E} and \mathbf{B} were obtained. Analytical formulas for multi-turn coils were derived by utilizing the single-turn coil solution (Green's function) and the superposition principle. The end result is the mutual inductance coefficient between the two coils. FEA analyses were also performed and compared with the analytical solution.

Results:

It was observed that the analytical results differ from the FEA results around the coil's position. This is due to the inherent singularity of the single-turn coil solution and the fact that the FEA method cannot handle these types of singularities. The multi-turn coil solution smooths-out the singularity as is common for such superposition solutions. The results for multi-turn coil show agreement between analytical and FEA solutions (Figure A).

Conclusion:

Analytical solution takes negligible time compared to FEA solution and gives accurate results. Therefore, it is very useful for geometric optimization.



Manyetik nüve içerisinde çok sarımlı bobin probleminin küresel koordinatlarda analitik çözümü ve FEA sonuçları ile karşılaştırması

Hüseyin Yıldız^{1*}, Birkan Durak², Erol Uzal³

¹İstanbul Üniversitesi - Cerrahpaşa, Teknik Bilimler MYO, Makine ve Metal Teknolojileri Bölümü, 34500, İstanbul, Türkiye

²İstanbul Üniversitesi - Cerrahpaşa, Teknik Bilimler MYO, Motorlu Araçlar ve Ulaştırma Teknolojileri Bölümü, 34500, İstanbul, Türkiye

³İstanbul Üniversitesi - Cerrahpaşa, Mühendislik Fakültesi, Makine Mühendisliği Bölümü, 34320, İstanbul Türkiye

Ö N E Ç İ K A N L A R

- Manyetik çekirdek içerisine sarılmış çok sarımlı bobinler için küresel koordinatlarda analitik hesaplamalar yapıldı
- Analitik sonuçlar ve FEA sonuçları karşılaştırıldı
- Küresel koordinatlarda endüktans katsayılarının analitik formülleri elde edildi

Makale Bilgileri

Araştırma Makalesi

Geliş: 06.01.2022

Kabul: 31.12.2022

DOI:

10.17341/gazimmfd.1054515

Anahtar Kelimeler:

Küresel koordinatlar,
manyetik alan,
maxwell denklemleri,
sonlu elemanlar analizi
(FEA),
karşılıklı endüktans

ÖZ

Teknolojinin gelişimi ile birlikte hareket ve kontrol mekanizmaları çok eksenli hareket edebilen, daha hızlı ve hassas hareket sağlanabilecek cihazlara ihtiyaç duymaktadır. Bu nedenle; küresel koordinat sisteminde elektromanyetik sistemlerin parametrelerinin analitik veya yarı analitik yöntemlerle hesaplanması son yıllarda önemli araştırma konularından biri haline gelmiştir. Bu çalışmada manyetik bir nüve içerisine sarılmış çok sarımlı bobin yaklaşımından yararlanarak çok sarımlı bobinler için **B** (Manyetik alan), **E** (Elektrik alan) ve **A** (vektör potansiyeli) ifadeleri analitik olarak hesaplanmıştır. Aynı geometriler, sonlu elemanlar analizi (FEA) kullanılarak dairesel simetri kabulü yapılarak hesaplanmıştır. Son olarak, bir r_1 yarıçapına sahip manyetik nüve içerisinde olan, eş merkezli iki bobin geometrisi belirlenmiştir. Bu geometriler için öz endüktans (L_{ii}) ve karşılıklı endüktans (M_{ij}) katsayıları küresel koordinatlarda γ (bobin eksenleri arası açı) açısına bağlı olarak incelenmiştir. FEA programında bobin geometrilerinin 3 boyutlu modeli oluşturularak benzetim çalışmaları yapılmıştır. FEA ve analitik sonuçlar kıyaslanarak analitik formüllerin geçerliliği gösterilmiştir.

Analytical solution of multi-winding coil problem in magnetic core in spherical coordinates and comparison with FEA results

H I G H L I G H T S

- Analytical calculations were made in spherical coordinates for multi-winding coils wound inside a spherical magnetic core
- Analytical results and FEA results were compared
- Analytical formulas were obtained for inductance coefficients

Article Info

Research Article

Received: 06.01.2022

Accepted: 31.12.2022

DOI:

10.17341/gazimmfd.1054515

Keywords:

Spherical coordinates,
magnetic fields,
maxwell's equations,
finite element analysis
(FEA),
mutual inductance

ABSTRACT

With the development of technology, motion and control mechanisms need devices that can move in multiple axes and provide faster and more precise movement. So, the calculation of the parameters of electromagnetic systems, in the spherical coordinate system in particular, by analytical or semi-analytical methods has become one of the important research topics. In this study, a multi-turn coil inside a magnetic core was considered. Analytical expressions for **B** (Magnetic field), **E** (Electric field) and **A** (vector potential) were developed for a single-turn coil (basically the Green's function of the problem). Then the expressions for multi-turn case were obtained by superposition. The same problems were also solved using finite element analysis (FEA) with circular symmetry assumption. Finally, two concentric coils one of which is inside the magnetic core are considered. The analytical expressions for coefficients of self-inductance (L_{ii}) and mutual inductance (M_{ij}) were developed depending on the angle γ between coil axes. Numerical simulation studies were carried out by creating a 3D model of coil geometries in the FEA program. FEA and analytical results were compared and validated.

1. Giriş (Introduction)

Günümüzde teknolojik gelişmelere paralel olarak geleneksel makine kavramı işlevini yitirmekte, yerini özel cihazlara bırakmaktadır. Hızlandırıcı teknolojisinin ilerlemesi, beyin uyarımı sistemlerinin gelişmesi, kablosuz enerji transferi çalışmalarının artması ve küresel elektrik motorlarının gelişmesi ile birlikte farklı koordinat sistemlerinde öz endüktans (L_{ii}) ve karşılıklı endüktans katsayılarının (M_{ij}) analitik hesaplanması önemli araştırma konularından biri haline gelmiştir. Bu nedenle; endüktans katsayısının analitik veya yarı analitik yöntemlerle hesaplanması son yıllarda büyük ilgi görmektedir. Kartezyen ve silindirik koordinatlarda çözüm yöntemlerinde çok ilerleme kaydedildi [1]. Yapılan çalışmaların büyük çoğunluğu, tamamen dairesel geometriye sahiptir. Dairesel döngüler [2-4], silindirik diskler [5] ve silindirik kabuklar [6] için yapılan çalışmalar literatürde mevcuttur. Yapılan çalışmalarda koaksiyel olmayan bobinlerin endüktans hesaplamaları için de çözümler önerilmiştir [1, 7]. Koaksiyel olmayan ince ve kalın yapıda bobinler için karşılıklı endüktans katsayısının analitik formunu inceleyen çalışmalarda mevcuttur [8]. Önerilen bu çözümler genellikle eliptik integraller, Legendre fonksiyonları ya da Bessel ve Struve fonksiyonları olarak ifade edilir.

Geleneksel makinelerin tasarımında kartezyen ve silindirik koordinatlarda yapılan analizler yeterli olmakla birlikte günümüzde halen ilgi çekici konular arasındadır [9-12]. Ancak küresel elektrik motorları ve beyin uyarım sistemleri gibi küresel geometriye sahip yapıların analizinde, küresel koordinatlarda öz endüktans ve karşılıklı endüktans katsayılarının analitik formüllerine ihtiyaç duyulmaktadır. Küresel elektrik motorları ile ilgili ilk çalışmalar 1980'li yılların başında yapılmaya başlanmıştır. Bu çalışmalar, küresel yapıda bir bobinin oluşturduğu manyetik alan (**B**) ve elektrik alan (**E**) büyüklüklerini ifade eden analitik formüller türetmiştir. 1975 yılında yapılan bir çalışmada, hava nüveli ve eksenel simetri özelliğine sahip bir model ele alınmıştır. Çalışmada integral dönüşüm yöntemi kullanılarak manyetik alan büyüklüklerini veren bir formül türetilmiştir [13]. Semenov çalışmasında, manyetik geçirgenliği $4\pi 10^{-7}$ H/m olan doğrusal, homojen ve izotropik bir ortamda, r yarıçapında bir bobinin oluşturduğu manyetik alan ve indüksiyon katsayılarını analitik olarak incelemiştir [14]. Eaton bir çalışmada beyin uyarımı (brain stimulation) uygulamalarında farklı bölgelerde bulunan bobinlerin merkezde oluşturdukları toplam elektrik alanın hesaplanması için küresel koordinatlarda analitik bir metod geliştirmiştir [15]. Matute çalışmasında, küresel koordinat sisteminde eksenel simetri kabulü altında Maxwell denklemlerinin analitik çözümünü elde etmiştir. Bu çalışmada eksenel simetrik kabulü yapılabilen eğrisel koordinatlarda ele alınan bazı problemlerin çözümünde değişkenlerine ayrıştırma yönteminin kullanılabileceğini göstermiştir [16]. Küresel koordinat sisteminde yapılan son analitik çalışmalardan biri 2019 yılında homojen bir manyetik alan elde edebilmek için yapılmıştır. Bu çalışmada, çok sayıda tek sarımlı bobinin sıralı bir şekilde dizilimi analitik olarak incelenmiştir. Çalışmanın sonunda belirli aralıkta, sıralı olarak dizilmiş, küresel yapıya sahip bobinlerin eş büyüklükteki bobinlerin dizilimine göre daha homojen bir manyetik alan oluşturduğu gösterilmiştir [17].

Küresel koordinatlarda yapılan çalışmaların büyük bir kısmı, hava nüveli bir sistemde tek sarımlı bobin yaklaşımı ile **A**, **B**, **E** ve endüktans katsayılarının hesaplamalarını içermektedir. Analitik ifadelerin büyük bir kısmı Legendre Polinomlarını veya Uyarlanmış (Associated) Legendre Polinomlarının toplamı ile ifade edilmiştir. Küresel koordinatlarda yapılan çalışmalarda, manyetik bir ortamda tek sarımlı ve çok sarımlı bobin yapılarına ilişkin analitik formüller henüz mevcut değildir. Bu nedenle küresel geometriye sahip elektrik makinelerinin uygulamalarında **E**, **B** ve tork (τ) büyüklüklerinin

hesaplanmasında sonlu elemanlar analizi (FEA) kullanılmaktadır. Küresel indüksiyon motoru çalışmaları bu çalışmalara örnek olarak verilebilir—Küresel indüksiyon motoru çalışmalarında bu analize sıklıkla rastlanmaktadır. [18-22]. Literatürde yer alan çalışmalara ek olarak, daha önce yaptığımız çalışmada manyetik nüve üzerinde yer alan iki bobin için karşılıklı endüktans katsayısını analitik olarak inceledik. Çalışmada, bobinler manyetik küre dışında olduğundan manyetik malzemenin içerisinde yer alan bobinlerin etkisi incelenememiştir. Mevcut çalışmada manyetik malzeme içerisinde yer alan bobinlerin birbiri ile ve dış ortam ile olan etkileşimini açıklamayı hedefledik [23].

Bu çalışmada; öncelikle manyetik nüve içerisinde tek sarımlı bir bobin yapısının küresel koordinatlarda oluşturduğu **A** (vektör potansiyeli), **B** (Manyetik alan) ve **E** (Elektrik alan) büyüklükleri için analitik formüller elde edilmiştir. Daha sonra çok sarımlı manyetik nüveli bir bobin yapısı için **A**, **E**, **B** ve endüktans katsayılarını ifade eden formüller analitik olarak elde edilmiştir. Matlab™ programı kullanılarak farklı bobin yapılarında eksenel simetri kabulü altında, **A** ve **B** büyüklüklerinin düzlem üzerinde sayısal değerleri elde edilerek sonlu elemanlar analizi (FEA) sonuçları ile kıyaslanmıştır. Son olarak r_1 yarıçapına sahip manyetik nüveli, eş merkezli iki bobin yapısı belirlenerek FEA modeli oluşturulmuştur. Oluşturulan model ile bobinlerin farklı γ (bobin eksenleri arası açı) açılarında karşılıklı endüktans katsayısı değişimi Maxwell programı ile hesaplanmıştır. Elde edilen FEA ve analitik sonuçlar kıyaslanarak analitik formüllerin geçerliliği gösterilmiştir. Çalışmada literatürde ilk defa küresel geometriye sahip manyetik nüve içerisine sarımlı çok sarımlı bobin yapılarının oluşturduğu etkiler (**A**, **B**, **E**) analitik olarak incelenmiştir. Bu çalışmada, çeşitli küresel geometriye sahip elektromekanik sistemlerin ön tasarımında analitik formüllerin kullanılabilmesi ve üç boyutlu FEA analizlerine göre çok daha hızlı sonuç alınabileceği gösterilmiştir. Bu durum yeni gelişmekte olan küresel elektrik makinelerinin analizinde büyük önem taşımaktadır.

2. Küresel Koordinatlarda Genel Ayrıştırılmış Çözüm (General Solution in Spherical Coordinates)

Elektromanyetik sistemlerin davranışını belirleyen denklemler Maxwell denklemleridir. Maxwell denklemlerinin denklemlerin probleme özgü sınır şartları uygulanarak çözülmesi ile **B**, **E** ve bobinlere ait endüktans katsayılarını hesaplamak mümkün olmaktadır. Doğrusal, izotropik geçirgen ve iletken malzemelerden oluşan elektromanyetik sistemler için Maxwell denklemlerinin diferansiyel formu Eş. 1-Eş. 4 ile verilmiştir [24].

$$\nabla \cdot \mathbf{E} = \frac{1}{\epsilon} \rho \quad (\text{Gauss Yasası}) \quad (1)$$

$$\nabla \cdot \mathbf{B} = 0 \quad (2)$$

$$\nabla \times \mathbf{E} = -\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} \quad (\text{Faraday Yasası}) \quad (3)$$

$$\nabla \times \mathbf{B} = \mu \mathbf{J} + \mu \epsilon \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} \quad (\text{Maxwell Düzeltmeli Amper Yasası}) \quad (4)$$

Burada, μ ve ϵ , ortamın manyetik geçirgenlik sabiti ve dielektrik geçirgenlik sabitini gösterirken, ρ ve \mathbf{J} ise sırasıyla serbest elektrik yük ve akım yoğunluğudur. **E** ve **B** büyüklükleri skaler potansiyel (ϕ) ve vektör potansiyeli (**A**) türünden ifade edilebilir [25].

$$\nabla^2 \phi = 0$$

Böylece Eş. 2 ve Eş. 3 denklemleri otomatik olarak sağlanır. Elektrik alan ve manyetik alan ifadeleri \mathbf{A} vektörü türünden aşağıda verilmiştir [26].

$$\begin{aligned} \mathbf{E} &= -\nabla\phi - \frac{\partial\mathbf{A}}{\partial t} \\ \mathbf{B} &= \nabla \times \mathbf{A} \\ \nabla^2 \mathbf{A} - \mu\epsilon \frac{\partial^2 \mathbf{A}}{\partial t^2} &= -\mu\mathbf{J} \end{aligned} \quad (5)$$

Eş. 5'in küresel koordinat sisteminde çözümü vektör potansiyeli ifadesini vermektedir. Bobinin bulunduğu r_0 , θ_0 koordinatlarının dışında akım geçmediğinden, bobin dışında $\mathbf{J} = 0$ olarak alınır.

$$\nabla^2 \mathbf{A} - \mu\epsilon \frac{\partial^2 \mathbf{A}}{\partial t^2} = 0 \quad (6)$$

Eş. 6 ile verilen homojen kısmi diferansiyel denklem, elektromanyetik dalga denklemidir ve zamana bağlı salınım yapan doğrusal sistemlerde vektör potansiyeli \mathbf{A} aşağıdaki formda yazılabilir [16].

$$\mathbf{A}(r, \theta, t) = \mathbf{A}_\varphi(r, \theta)e^{-i\omega t} \quad (7)$$

Burada i ve ω sırası ile 90 derece faz açısını ve açısal frekansı (R/s) göstermektedir. Eş. 7 ile verilen vektör alan potansiyeli ifadesi Eş. 6'da yazılırsa vektör Helmholtz denklemi elde edilir. Vektör Helmholtz denklemi, problemin çözümünü sınır şartlarına göre zamandan bağımsız olarak çözmeye izin verir. Helmholtz denklemi çözümü yapılırken $k^2 \ll 1$ olduğundan dolayı $k^2 = \omega\mu\sigma$ terimi ihmal edilir. Bu durumda Eş. 6 denklemi sadeleşerek Eş. 8 denklemi elde edilir.

$$\nabla^2 \mathbf{A} = 0 \quad (8)$$

$\mathbf{A}_0 = A_0(r, \theta)\mathbf{e}_\varphi$ olmak üzere, aksenal simetri kabulü ile Eş. 8'in açık formu Eş. 9 olarak elde edilir.

$$\nabla^2 A_0 = \frac{1}{r} \frac{\partial^2 (rA_0)}{\partial r^2} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 A_0}{\partial \theta^2} + \frac{\cot\theta}{r^2} \frac{\partial A_0}{\partial \theta} - \frac{1}{r^2 \sin^2 \theta} A_0 \quad (9)$$

Eş. 9 ile verilen kısmi diferansiyel denklem değişkenlerine ayırma metodu ile çözülür ise vektör alan potansiyelinin seri çözümü elde

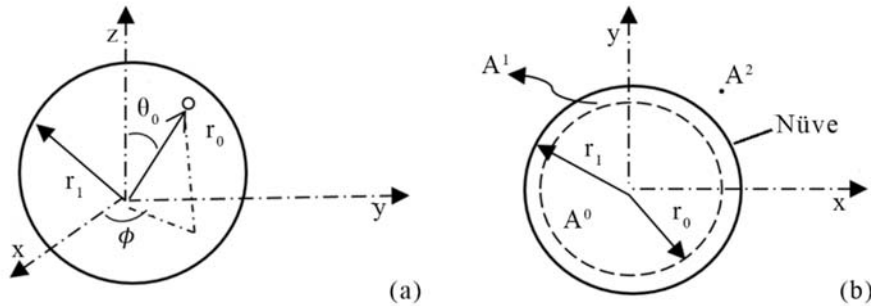
edilir (Eş. 10). Burada $P_n^1(\cos\theta)$ terimi 1. mertebe Uyarlanmış (Associated) Legendre Polinomunu ifade eder. Eş. 10 ile verilen denklem küresel koordinat sisteminde genel ayrıştırılmış çözüm olarak bilinir [27];

$$A_\varphi = \sum_1^\infty (a_n r^n + b_n r^{-n-1}) P_n^1(\cos\theta) \quad (10)$$

3. Manyetik Nüveli Tek Sarımlı Bobin İçin Manyetik Alan ve Elektrik Alan Büyüklüklerinin Hesaplanması (Calculation of Magnetic Field and Electric Field for Magnetic Core Single Winding Coil)

Küresel elektrik makinelerinde rotor ve stator sargıları yapısı gereği küresel formda manyetik bir nüve etrafına (veya içerisine) sarılmaktadır. Bu nedenle gerekli analizlerin küresel koordinat sisteminde yapılması zorunludur. En basit hali ile küresel elektrik makinesi; manyetik nüve içerisine sarılmış tek sarımlı bobin yapısı (Rotor) ve manyetik nüve dışına sarılmış tek sarımlı bir bobinden (Stator) oluşmaktadır. Rotor sargısı için gerekli olan tanımlamalar ve geometrik özellikler küresel koordinatlarda tanımlanarak Şekil 1'de gösterilmiştir. Şekil 1a manyetik küre ve içerisine sarılı olan bobini göstermektedir. Bobin sarımı küre yapısının dışına sarılmış ve z eksenine göre simetriktir. Şekil 1b'de bobin yapısı x-y düzleminde verilmiştir. Bobin, küresel koordinatlarda r_0 ve θ_0 koordinatlarına yerleştirilmiştir. Bobinin elektrik ve manyetik alan bileşenlerini elde edebilmek için \mathbf{A} vektörü A^0 , A^1 ve A^2 olmak üzere üç farklı alan için ayrı ayrı incelenmiştir. r ve θ hesaplanan noktaya ait küresel koordinatlar, r_1 küresel nüve geometrisinin yarı çapı, r_0 ve θ_0 bobin koordinatları, μ_1 (A^0 ve A^1) ve μ_0 (A^2) hesaplama alanlarına ait manyetik geçirgenlik katsayıları ve $\mu = \mu_1/\mu_0$ bağımlı manyetik geçirgenlik katsayısıdır. A^0 bölgesi $r \leq r_0$ olmak üzere Eş. 10'un ikinci terimi iraksak olduğundan çözümün sonlu kalması için hesaplamalara dahil edilmez, $A^{(1)}$ bölgesi $r_0 < r < r_1$ olmak üzere iki terim birlikte kullanılır, $A^{(2)}$ bölgesi $r_1 \leq r$ olmak üzere, Eş. 10'un ilk terimi iraksak olduğundan hesaplamalara dahil edilmez. Bu durumda vektör potansiyeli \mathbf{A} üç bölge için Eş. 11 ile verilmiştir.

$$\begin{aligned} A^{(0)}(r, \theta) &= \sum_1^\infty a_n r^n P_n^1(\cos\theta) \\ A^{(1)}(r, \theta) &= \sum_1^\infty (b_n r^n + c_n r^{-n-1}) P_n^1(\cos\theta) \\ A^{(2)}(r, \theta) &= \sum_1^\infty d_n r^{-n-1} P_n^1(\cos\theta) \end{aligned} \quad (11)$$



Şekil 1. Küre ve sarım kesit görünümü (a). Küre ve sarımın üst görünüm (b).
(Section view of sphere and winding (a). Top view of sphere and winding (b))

Maxwell denklemleri fiziksel özelliklerin sürekli olduğu tüm noktalar için geçerlidir. Bununla birlikte bazı durumlarda geometri, akım, μ ve ϵ vb. fiziksel özellikler değişiklik gösterebilir. Bu durumlarda Eş. 12 ile verilen sınır şartları geçerli olmaktadır [28].

$$\begin{aligned} \mathbf{n} \times (\mathbf{E}_2 - \mathbf{E}_1) &= 0 \\ \mathbf{n} \times (\mathbf{H}_2 - \mathbf{H}_1) &= \mathbf{J} \end{aligned} \quad (12)$$

Bobin koordinatları dışında yüzey akım yoğunluğu $\mathbf{J}=0$ olur ve eşitlikler tekrar düzenlenebilir.

$$\mathbf{n} \times (\mathbf{H}_2 - \mathbf{H}_1) = 0 \quad (13)$$

$r = r_1$ ve $r = r_0$ koordinatlarında, yüzey normali doğrultusunda elektrik alan değişimi yoktur. Küre içerisinde akım üretilmediğinden dolayı $\mathbf{J} = 0$ olacaktır. Sarımın bulunduğu yüzeyde ($\theta = \theta_0$, $r = r_0$) \mathbf{J} sıfırdan farklıdır. Eş. 12 ile verilen sınır şartları Eş. 11 ile birlikte çözülür ise dört bilinmeyenli bir denklem sistemi elde edilir (Eş. 14).

$$\begin{aligned} -b_n r_1^n + (d_n - c_n) r_1^{-(n+1)} &= 0 \\ b_n (n+1) r_1^{n-1} - n c_n r_1^{-n-2} + n \mu d_n r_1^{-n-2} &= 0 \\ c_n r_0^{-(n+1)} - a_n r_0^n + b_n r_0^n &= 0 \\ (n+1)(a_n - b_n) r_0^n + n c_n r_0^{-n-1} - \frac{2n+1}{2n(n+1)} I \mu_n P_n^1(\cos \theta_0) \sin \theta_0 &= 0 \end{aligned} \quad (14)$$

Eş. 14 ile verilen sistem ortak çözüldüğünde a_n, b_n, c_n , ve d_n katsayıları elde edilir (Eş. 15). Eş. 11 ve Eş. 15 kullanılarak manyetik nüve üzerine sarılmış tek sarımlı bir bobinin oluşturduğu \mathbf{A} analitik olarak hesaplanır.

$$\begin{aligned} a_n &= \frac{I \mu_n ((n - n \mu) r_0^{1+2n} + (1 + n + n \mu) r_1^{1+2n}) r_0^{-n} r_1^{-1-2n}}{2n(n+1)(1+n+n\mu)} \sin \theta_0 P_n^1(\cos \theta_0) \\ b_n &= \frac{I \mu_n (1 - \mu)}{2(n+1)(1+n+n\mu)} r_0^{1+n} r_1^{-1-2n} \sin \theta_0 P_n^1(\cos \theta_0) \\ c_n &= \frac{I \mu_n}{2n(n+1)} r_0^{1+n} \sin \theta_0 P_n^1(\cos \theta_0) \\ d_n &= \frac{(1+2n) I \mu_n}{2n(n+1)(1+n+n\mu)} r_0^{1+n} \sin \theta_0 P_n^1(\cos \theta_0) \end{aligned} \quad (15)$$

Elektrik alan \mathbf{E} vektörü ve Manyetik alan \mathbf{B} vektörü, \mathbf{A} ya bağlı olarak Eş. 16 yardımı ile hesaplanmaktadır.

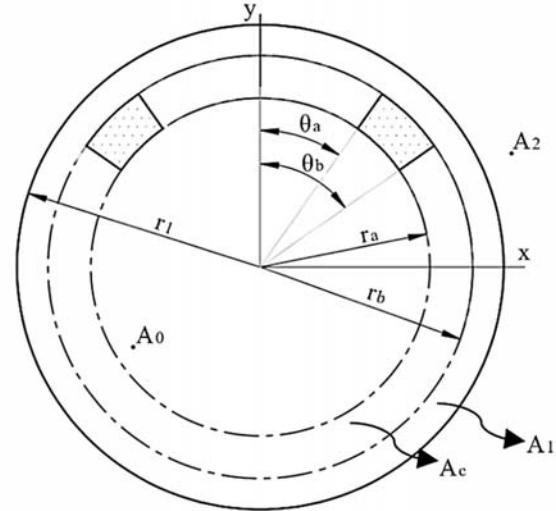
$$\begin{aligned} \mathbf{E} &= -i\omega \mathbf{A} \\ \mathbf{B} &= \nabla \times \mathbf{A} \\ \mathbf{B} &= \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} (A_\phi \sin \theta) \mathbf{e}_r - \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} (r A_\phi) \mathbf{e}_\theta \end{aligned} \quad (16)$$

$$\begin{aligned} \mathbf{B}^{(0)} &= -\sum_1^\infty a_n r^{n-1} n(n+1) P_n^1(\cos \theta) \mathbf{e}_r - \sum_1^\infty (n+1) a_n r^{n-1} P_n^1(\cos \theta) \mathbf{e}_\theta \\ \mathbf{B}^{(1)} &= -\sum_1^\infty (b_n r^{n-1} + c_n r^{-n-2}) n(n+1) P_n^1(\cos \theta) \mathbf{e}_r - \sum_1^\infty ((n+1) b_n r^{n-1} - n c_n r^{-n-2}) P_n^1(\cos \theta) \mathbf{e}_\theta \\ \mathbf{B}^{(2)} &= -\sum_1^\infty n(n+1) d_n r^{-n-2} P_n^1(\cos \theta) \mathbf{e}_r + \sum_1^\infty n d_n r^{-n-2} P_n^1(\cos \theta) \mathbf{e}_\theta \end{aligned} \quad (17)$$

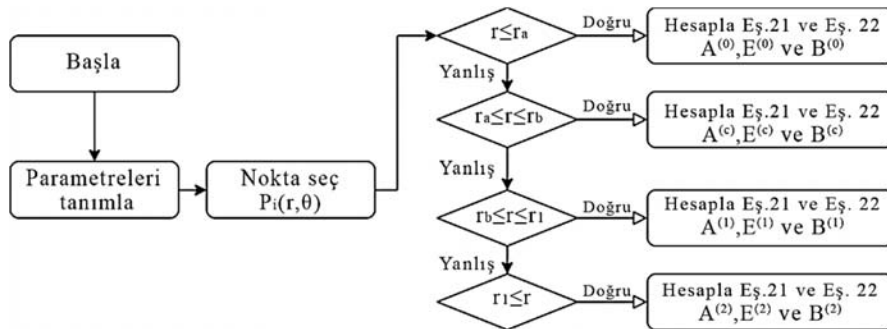
$\mathbf{B}^{(0)}$, $\mathbf{B}^{(1)}$ ve $\mathbf{B}^{(2)}$ farklı bölgelerde oluşan manyetik alan vektörleri olmak üzere; Eş. 17 farklı manyetik geçirgenliğe sahip nüve yapıları için genel çözümü vermektedir. Eş. 17’de $\mu = 1$ özel hali hava nüveli bir bobin yapısının küresel koordinatlarda incelenmesi özel durumuna karşılık gelir.

4. Manyetik Nüve İçerisinde Çok Sarımlı Bobin İçin İntegral Formun Hesaplanması (Calculation of The Integral Form for Multi-Winding Coil in The Magnetic Core)

Eş. 17 ile r_1 yarıçapına sahip, manyetik geçirgenliği μ_1 olan bir küre içerisine sarılmış tek sarımlı bobin için manyetik alan \mathbf{B} nin analitik formu verilmiştir. Ancak uygulamada bobin sarımları belirli bir bölgeyi kapsayacak şekilde çok sarımlı olarak sarılmaktadır (Şekil 2). Bu bobin yapıları için Eş. 9’un analitik çözümü mümkün değildir. Ancak tek sarımlı bobin çözümlerinden faydalanarak çözüm elde edilebilir. A_0, A_1 ve A_2 alanları için, çok sarımlı bobinin oluşturduğu vektör potansiyeli \mathbf{A} ’nın integral formu Eş. 18 ile verilmiştir. r_a, r_b, θ_a ve θ_b bobin sarımının başlangıç ve bitiş koordinatlarını, N bobin sarım sayısını, S bobin sarım yüzey alanını ifade etmektedir (Şekil 2). Burada Q_n, G_n ve R_n fonksiyonları denklemlerin anlaşılabilmesi için oluşturulmuş ara fonksiyonlardır.



Şekil 2. Çok sarımlı bobin yapısı (Multi-winding coil structure)



Şekil 3. Sayısal hesaplamalar için algoritma şeması (Algorithm scheme for numerical calculations)

$$\begin{aligned}
 A_i^{(0)}(r, \theta) &= \int_{r_a}^{r_b} \int_{\theta_a}^{\theta_b} A^{(0)}(r, \theta) r_0 dr_0 d\theta_0 \\
 A_i^{(1)}(r, \theta) &= \int_{r_a}^{r_b} \int_{\theta_a}^{\theta_b} A^{(1)}(r, \theta) r_0 dr_0 d\theta_0 \\
 A_i^{(2)}(r, \theta) &= \int_{r_a}^{r_b} \int_{\theta_a}^{\theta_b} A^{(2)}(r, \theta) r_0 dr_0 d\theta_0 \\
 S &= \frac{1}{2}(r_b^2 - r_a^2)(\theta_b - \theta_a), \\
 Q_n(\theta_a, \theta_b) &= \int_{\theta_a}^{\theta_b} \sin \theta_0 P_n^1(\cos \theta_0) d\theta_0, \\
 G_n &= \frac{1}{n+3}(r_b^{n+3} - r_a^{n+3}) \\
 R_n(r_a, r_b) &= \begin{cases} n=1, & r_b - r_a \\ n=2, & \ln\left(\frac{r_b}{r_a}\right) \\ n>2, & \frac{1}{2-n}(r_b^{2-n} - r_a^{2-n}) \end{cases}
 \end{aligned} \tag{18}$$

$A^{(0)}$, $A^{(1)}$ ve $A^{(2)}$ bölgeleri için süper pozisyon ilkesi gereği Eş. 15 ile verilen a_n , b_n , c_n , ve d_n katsayıları üzerinde r_a , r_b , θ_a ve θ_b sınırlarında integral alma işlemi uygulanır ise çok sarımlı bir bobin yapısını temsil eden katsayılara ulaşılr (Eş. 19).

$$\begin{aligned}
 a_n^i &= \frac{N}{S} \frac{\mu_1(2n+1)((n-n\mu)G_n(r_a, r_b)r_1^{-1-2n} + (1+n+n\mu)R_n(r_a, r_b))}{2n(n+1)(1+n+n\mu)} Q_n(\theta_a, \theta_b) \\
 b_n^i &= \frac{N}{S} \frac{\mu_1(1-\mu)}{2(n+1)(1+n+n\mu)} r_1^{-1-2n} G_n(r_a, r_b) Q_n(\theta_a, \theta_b) \\
 c_n^i &= \frac{N}{S} \frac{\mu_1}{2n(n+1)} G_n(r_a, r_b) Q_n(\theta_a, \theta_b) \\
 d_n^i &= \frac{N}{S} \frac{\mu_1(1+2n)}{2n(n+1)(1+n+n\mu)} G_n(r_a, r_b) Q_n(\theta_a, \theta_b)
 \end{aligned} \tag{19}$$

Burada, a_n^i , b_n^i , c_n^i ve d_n^i çok sarımlı bobin yaklaşımı için katsayılarıdır. A_c bölgesi ($r_a < r < r_b$) çok sarımlı yapıdan kaynaklı ortaya çıkan kararsız bölgedir. Bu bölgede çok sarım etkisini hesaplamak için bobin sarımı olan bölgeyi r yarıçapından ayrılmış iki bölge olarak kabul edelim. Hesaplamak istediğimiz $A_c(r, \theta)$ noktası, $r_a < r$ aralığında yer alan bobinlere göre A_0 bölgesinde bulunmaktadır. Bu durumda iki bölgenin oluşturduğu vektör alan potansiyeli toplamı bu bölge için \mathbf{A} , \mathbf{E} ve \mathbf{B} büyüklüklerini analitik olarak hesaplamamıza yardımcı olur. a_n^c , b_n^c ve c_n^c , $A_i^{(c)}$ kararsız bölgenin vektör alan potansiyelinin hesabında kullanılan katsayılar olmak üzere;

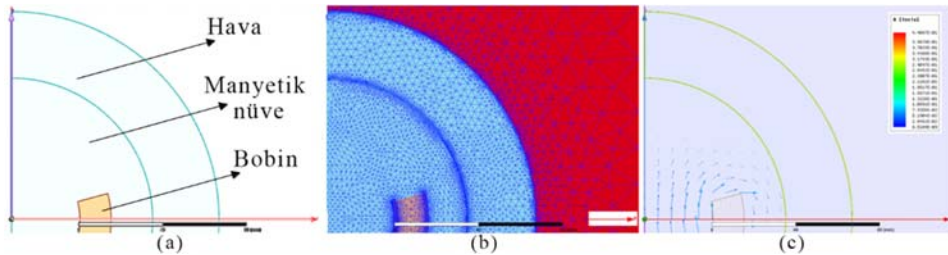
$$\begin{aligned}
 A_i^{(c)}(r, \theta) &= \int_{r_a}^{r_b} \int_{\theta_a}^{\theta_b} A^{(1)}(r, \theta) r_0 dr_0 d\theta_0 + \int_{r_a}^{r_b} \int_{\theta_a}^{\theta_b} A^{(0)}(r, \theta) r_0 dr_0 d\theta_0 \\
 a_n^c &= \frac{N}{S} \frac{N\mu_1(2n+1)((n-n\mu)G_n(r, r_b)r_1^{-1-2n} + (1+n+n\mu)R_n(r, r_b))}{2n(n+1)(1+n+n\mu)} Q_n(\theta_a, \theta_b) \\
 b_n^c &= \frac{N}{S} \frac{N\mu_1(1-\mu)}{2(n+1)(1+n+n\mu)} r_1^{-1-2n} G_n(r, r) Q_n(\theta_a, \theta_b) \\
 c_n^c &= \frac{N}{S} \frac{N\mu_1}{2n(n+1)} G_n(r, r) Q_n(\theta_a, \theta_b)
 \end{aligned} \tag{20}$$

$$\begin{aligned}
 A_i^{(0)}(r, \theta) &= I \sum_1^{\infty} a_n^i r^n P_n^1(\cos \theta) \\
 A_i^{(1)}(r, \theta) &= I \sum_1^{\infty} (b_n^i r^n + c_n^i r^{-n-1}) P_n^1(\cos \theta) \\
 A_i^{(2)}(r, \theta) &= I \sum_1^{\infty} d_n^i r^{-n-1} P_n^1(\cos \theta) \\
 A_i^{(c)}(r, \theta) &= I \sum_1^{\infty} ((a_n^c + b_n^c) r^n + c_n^c r^{-n-1}) P_n^1(\cos \theta)
 \end{aligned} \tag{21}$$

$$\begin{aligned}
 \mathbf{B}_i^{(0)} &= -I \sum_1^{\infty} a_n^i r^{n-1} n(n+1) P_n(\cos \theta) \mathbf{e}_r - I \sum_1^{\infty} (n+1) a_n^i r^{n-1} P_n(\cos \theta) \mathbf{e}_\theta \\
 \mathbf{B}_i^{(1)} &= -I \sum_1^{\infty} (b_n^i r^{n-1} + c_n^i r^{-n-2}) n(n+1) P_n(\cos \theta) \mathbf{e}_r \\
 &\quad - I \sum_1^{\infty} ((n+1) b_n^i r^{n-1} - n c_n^i r^{-n-2}) P_n(\cos \theta) \mathbf{e}_\theta \\
 \mathbf{B}_i^{(2)} &= -I \sum_1^{\infty} n(n+1) d_n^i r^{-n-2} P_n(\cos \theta) \mathbf{e}_r + I \sum_1^{\infty} n d_n^i r^{-n-2} P_n(\cos \theta) \mathbf{e}_\theta \\
 \mathbf{B}_i^{(c)} &= -I \sum_1^{\infty} ((a_n^c + b_n^c) r^{n-1} - c_n^c r^{-n-2}) n(n+1) P_n(\cos \theta) \mathbf{e}_r \\
 &\quad - I \sum_1^{\infty} ((n+1)(a_n^c + b_n^c) r^{n-1} - n c_n^c r^{-n-2} + \left(\frac{\partial a_n^c}{\partial r} + \frac{\partial b_n^c}{\partial r}\right) r^n + \frac{\partial c_n^c}{\partial r} r^{-n-1}) P_n(\cos \theta) \mathbf{e}_\theta
 \end{aligned} \tag{22}$$

Eş. 21 ve Eş. 22 ile verilen vektör alan potansiyeli \mathbf{A} ve manyetik alan \mathbf{B} büyüklüklerini hesaplamak için Eş. 19 ve Eş. 20 ile verilen katsayılar kullanılır. Hesaplamalar matlab programında Şekil 3 ile verilen algoritma yapısına uygun şekilde yapılmıştır. $Q_n(\theta_a, \theta_b)$ integrali matlab içerisinde yer alan Quad2 fonksiyonu kullanılarak sayısal olarak hesaplanmıştır. Literatürde mevcut bir çözüm olmaması nedeni ile analitik sonuçların FEA sonuçları ile karşılaştırılması yapılmıştır. Karşılaştırma için $\theta_0=60^\circ$ ve $\theta_0=90^\circ$ olmak üzere iki farklı benzetim yapılmıştır (Tablo 1). ANSYS Maxwell™ ile hazırlanan iki boyutlu FEA modeli Şekil 4 ile verilmiştir.

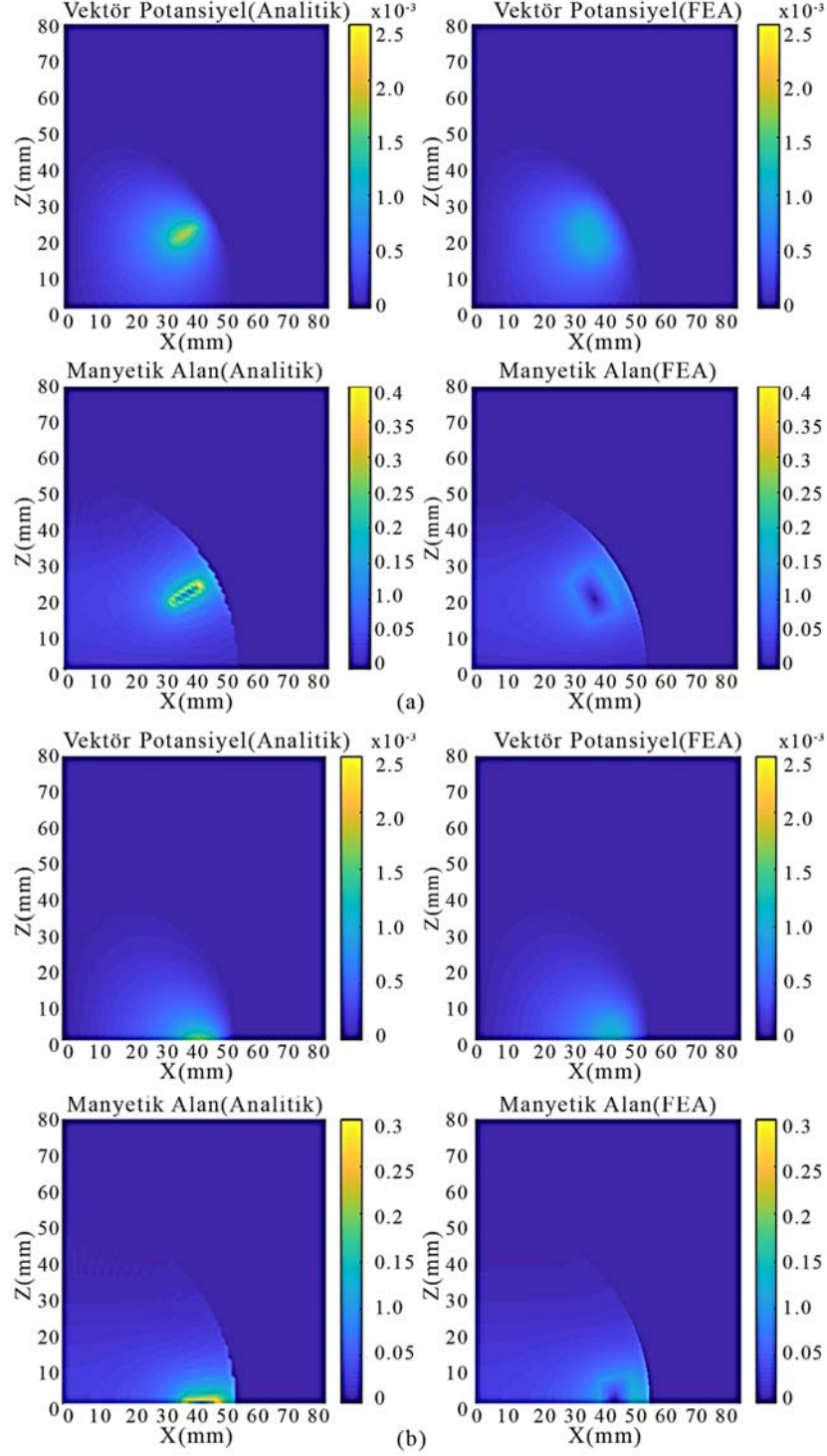
Şekil 5 \mathbf{A} ve \mathbf{B} büyüklüklerinin analitik ve FEA sonuçlarının x - z düzleminde değişimini vermektedir. Şekil 6 ise manyetik alanın değişiminin $\theta=60^\circ$, $\theta=75^\circ$ ve $\theta=90^\circ$ sabit koordinatlarında \mathbf{r} doğrultusunda ki değişimini göstermektedir. Tüm hesap alanı düşünüldüğünde analitik sonuçlar ile FEA sonuçları uyumludur (Şekil 5). Bobinin bulunduğu bölge özel olarak incelendiğinde analitik sonuçlar ile sayısal hesaplamalar arasında fark artmaktadır (Şekil 6).



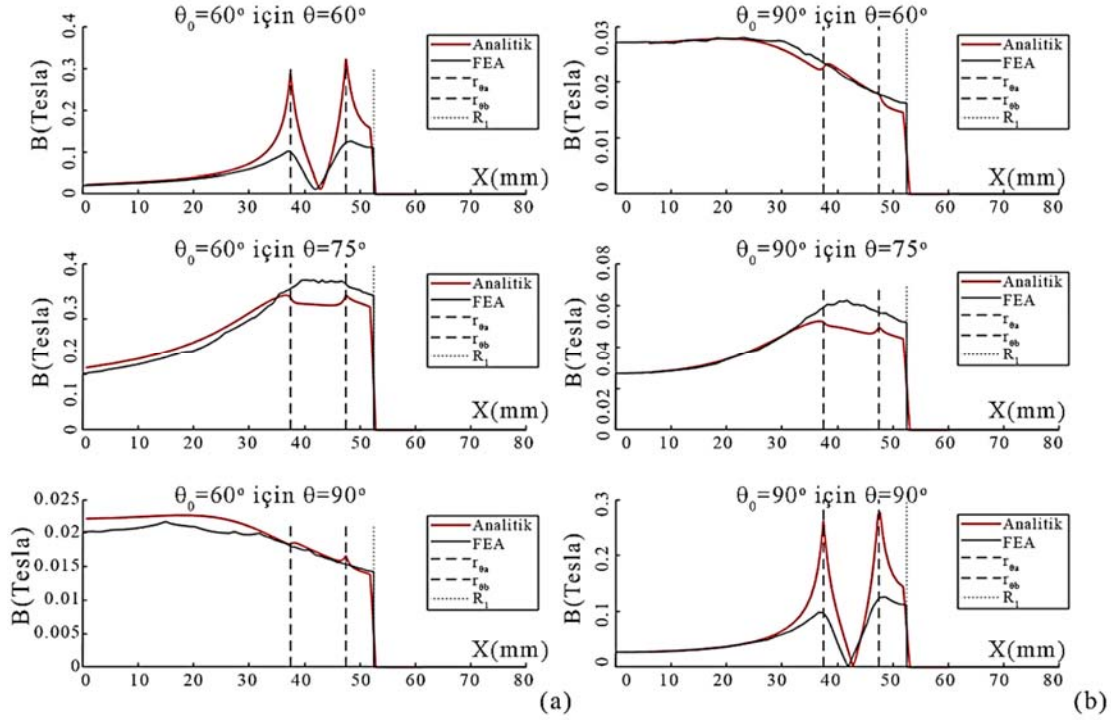
Şekil 4. 2D FEA modeli (a). Ağ yapısı (b). Manyetik alan vektörü \mathbf{B} (c). (2D FEA model (a). Mesh structure (b). Magnetic field vector \mathbf{B} (c))

Tablo 1. Benzetim parametreleri (Simulation parameters)

	r_{0a} (m)	r_{0b} (m)	r_1 (m)	θ_{0a}	θ_{0b}	I(A)	μ	N	x(m)	z(m)
SİM1	0,0375	0,0475	0,0525	50°	70°	1	4000	1	0<x<0,08	0<z<0,08
SİM2	0,0375	0,0475	0,0525	80°	100°	1	4000	1	0<x<0,08	0<z<0,08



Şekil 5. $\theta_0=60^\circ$ için analitik ve FEA sonuçlarının karşılaştırması (a). $\theta_0=90^\circ$ için analitik ve FEA sonuçlarının karşılaştırması (b).
(Comparison of analytical and FEA results for $\theta_0=60^\circ$ (a). Comparison of analytical and FEA results for $\theta_0=90^\circ$ (b))



Şekil 6. Sonuçların r doğrultusunda değişimi. $\theta_0=60^\circ$ (a), $\theta_0=90^\circ$ (b). (Variation of results in the r direction. $\theta_0=60^\circ$ (a), $\theta_0=90^\circ$ (b))

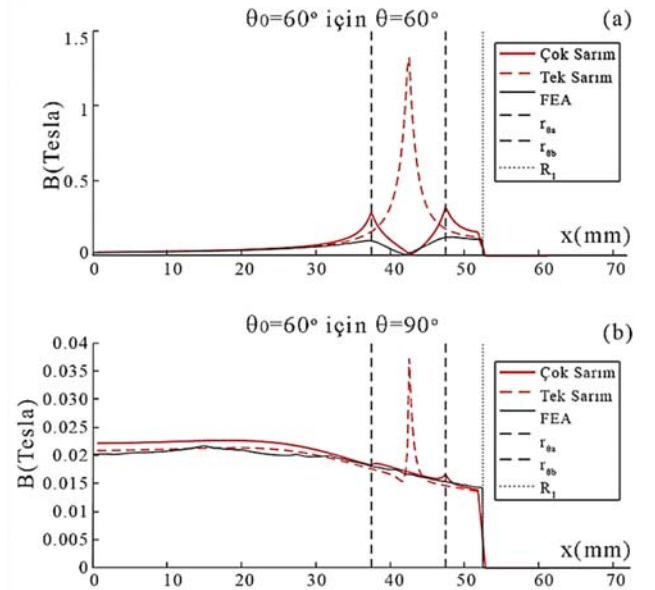
Oluşan farklılıkların bobin sarımı etrafında artmasının temel nedeni Bölüm 3'te yapılan tek sarımlı bobin kabulüdür. Bu yaklaşımda bobin sarımlarından geçen akımın etkisi tek bir nokta üzerine yığıldığından tekillik oluşmaktadır. Küresel koordinat sisteminde çözümün karmaşık olması nedeni ile çok sarımlı bobinler için hesaplamaları elde etmek oldukça zahmetlidir. Bu nedenle tek sarımlı bobin yaklaşımı ile elde edilen analitik çözümler literatürde kullanılmaktadır [16, 17, 20]. Şekil 7'de çok sarımlı bobin ve tek sarımlı bobin yaklaşımları ile elde edilen B büyüklükleri FEA sonuçları ile kıyaslanmıştır. Tek sarımlı bobin yaklaşımında oluşan tekillik problemi grafikte açıkça görülmektedir (Şekil 7). Her ne kadar çok sarımlı bobin yaklaşımı ile FEA modeli arasında bobin çevresinde farklılıklar görülsede, çok sarımlı bobin yaklaşımı tekillik problemini büyük ölçüde gidermiştir.

5. Küresel Koordinatlarda Öz Endüktans ve Karşılıklı Endüktansın Katsayılarının Hesaplanması (Calculation of Self Inductance and Mutual Inductance Coefficients in Spherical Coordinates)

Elektromanyetik sistemlerde manyetik alanın değişimi elektrik alan oluşumuna neden olur. Örneğin, değişken manyetik alana maruz kalan halka şeklinde bakır bir tel üzerinde gerilim indüklenir. Faraday yasası değişken manyetik alana maruz kalan telin içinde oluşan akım ve manyetik alan değişimi arasındaki ilişkiyi verir [24]. Uzayda elektrik alan içerisinde bulunan N sarımlı bobinde oluşan gerilim (V) vektör potansiyeli (A) kullanılarak Eş. 23 yardımı ile hesaplanır.

$$V = -\frac{N}{S} \iint_{dS'} \left\{ \int \mathbf{E} \cdot d\mathbf{r} \right\} dS' \quad (23)$$

$$V = i\omega \frac{N}{S} \iint_{dS'} \left\{ \int \mathbf{A} \cdot d\mathbf{r} \right\} dS'$$



Şekil 7. Sonuçların tek sarımlı bobin yaklaşımı ile kıyaslanması. $\theta_0=60^\circ$ (a), $\theta_0=90^\circ$ (b). (Comparison of the results with the single-winding coil approach. $\theta_0=60^\circ$ (a), $\theta_0=90^\circ$ (b))

$$Z = \frac{V}{I} = i\omega L \quad (24)$$

Burada, enine kesit üzerinde integral alma işlemi uygulanmış ve birim alan başına sarım sayısı ile çarpılmıştır. Bobin kesit alanı $dS' = r_0 dr_0 d\theta_0$ ve Z bobine ait empedans değeri olmak üzere bobinin öz endüktans katsayısı (L) Eş. 25 ile hesaplanır;

$$L = \frac{N2\pi}{S} \int_{r_0=r_a}^{r_b} \int_{\theta_0=\theta_a}^{\theta_b} ((a_n^c + b_n^c)r^{n+1} + c_n^c r^{-n}) dr d\theta \quad (25)$$

$$M_{12} = \frac{\phi}{I} \quad (30)$$

Küresel koordinatlarda eş merkezli iki bobin Şekil 8 ile verilmiştir. Burada, γ bobin eksenleri arasındaki açı, $\alpha_1, \alpha_2, \beta_1$ ve β_2 bobinlerin kendi eksen takımlarına göre açısal koordinatı, a_1, a_2, b_1 ve b_2 bobinlerin bulunduğu r koordinatı ve θ' ikinci bobinin sabit eksen takımına göre açısal koordinatıdır. Bobin 1 ve Bobin 2 eş merkezli bobinlerdir. Bobin 1 sabit ve içinden I(t) akımı geçtiği durumda Bobin 2 içerisinde manyetik alan değişimine bağlı olarak gerilim endüktlenir. Bobin 1 ve Bobin 2'nin etkileşimini karşılıklı endüktans katsayısı (M_{12}) belirler.

$$\phi^c = \int \mathbf{B}_2 \cdot n dS \quad (26)$$

$$\cos \theta = \cos \theta' \cos \gamma + \sin \theta' \sin \gamma \cos \varphi'$$

$$P_n(\cos \theta) = P_n(\cos \theta') P_n(\cos \gamma) + 2 \sum_{m=1}^n P_n^m(\cos \theta') P_n^m(\cos \gamma) \cos m\varphi'$$

$$\int_{\varphi'=0}^{2\pi} \sum_{m=1}^n P_n^m(\cos \theta') P_n^m(\cos \gamma) \cos m\varphi' d\varphi' = 0 \quad (27)$$

$$\int_{\theta'=0}^{\beta} \sin \theta' P_n(\cos \theta') d\theta' = \frac{\sin \beta}{n(n+1)} P_n^1(\cos \beta)$$

$$dS = r^2 \sin \theta' d\theta' d\varphi$$

ϕ^c Bobin 2'de $P(r, \theta)$ koordinatlarında yer alan bobinin içinden geçen akıyı vermektedir (Eş. 26). \mathbf{B}_2 ifadesi Eş. 26'da yerine yazılır ve Eş. 27 ile verilen bağıntılar yardımı ile sadeleştirilir (Eş. 28). Eş. 27 Bobin 2 üzerinde integral alma işlemi uygulanır ise tüm bobinlerin içerisinden geçen akı elde edilir (Eş. 29).

$$\phi_{12}^c = I \sum_1^{\infty} \int_{\varphi'=0}^{2\pi} \int_{\theta'=0}^{\beta} n(n+1) d_n^i r^{-n} P_n(\cos \theta) d\varphi d\theta'$$

$$\phi_{12}^c = I \sum_1^{\infty} (2\pi d_n^i r^{-n}) \sin \beta P_n^1(\cos \beta) P_n(\cos \gamma) \quad (28)$$

$$\phi = \frac{N_2}{S_2} \int_{r=b_1}^{b_2} \int_{\beta=\beta_1}^{\beta_2} I 2\pi \sum_1^{\infty} d_n^i r^{-n+1} \sin \beta P_n^1(\cos \beta) P_n(\cos \gamma) dr d\beta \quad (29)$$

M_{12} ile ϕ arasında ki ilişki Eş. 30 ile verilmiştir[24].

$$M_{12} = \frac{2\pi N_2}{S_2} \sum_1^{\infty} d_n^i \begin{cases} n=1, & b_2 - b_1 \\ n=2, & \ln\left(\frac{b_2}{b_1}\right) \\ n>2, & \frac{1}{2-n}(b_2^{2-n} - b_1^{2-n}) \end{cases} \left(\int_{\beta_1}^{\beta_2} \sin \beta P_n^1(\cos \beta) d\beta \right) P_n(\cos \gamma) \quad (31)$$

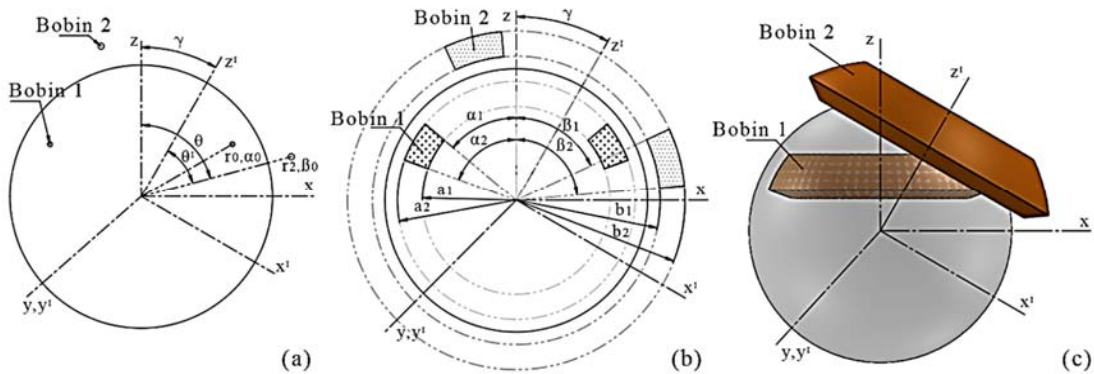
$A^{(2)}$ bölgesinde yer alan ikinci bir bobin ile manyetik gövde içerisinde yer alan bobinin karşılıklı endüktans katsayısı Eş. 31 ile verilmiştir. Eşitlikten anlaşılacağı üzere M_{12} bobinlerin geometrik özellikleri, ortam özellikleri ve γ açısına bağlıdır. Benzer işlemler yapılarak $A^{(0)}$ ve $A^{(1)}$ bölgelerinde yer alan bobin sarımları için karşılıklı endüktans katsayıları Eş. 32 ile hesaplanır.

$$M_{12} = 2\pi \frac{N_2}{S_2} \sum_1^{\infty} a_n^i G_n(b_1, b_2) Q_n(\beta_1, \beta_2) P_n(\cos \gamma) \quad (A^{(0)})$$

$$M_{12} = 2\pi \frac{N_2}{S_2} \sum_1^{\infty} (b_n^i G_n(b_1, b_2) + c_n^i R_n(b_1, b_2)) Q_n(\beta_1, \beta_2) P_n(\cos \gamma) \quad (A^{(1)}) \quad (32)$$

$$M_{12} = 2\pi \frac{N_2}{S_2} \sum_1^{\infty} d_n^i R_n(b_1, b_2) Q_n(\beta_1, \beta_2) P_n(\cos \gamma) \quad (A^{(2)})$$

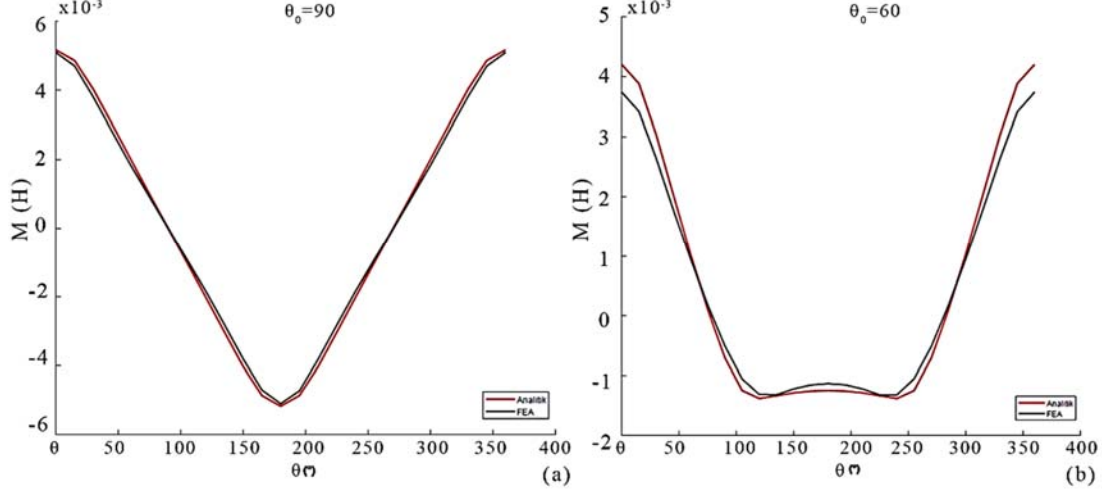
Karşılıklı endüktans katsayısı kablosuz enerji transferi ve elektrodinamik sistemlerin zamana bağlı analizlerinde büyük önem taşımaktadır. Küresel koordinat sisteminde manyetik alan büyüklükleri 2 boyutlu eksenel simetri kabulü altında FEMM, ANSYS Maxwell gibi FEA programlarında hızlı bir şekilde hesaplanabilmektedir. Ancak geometride eksenel simetriyi bozacak ikinci bir bobin yer alması durumunda modellerin 3 boyutlu olarak tasarlanması ve hesaplanması zorunlu hale gelmektedir. Bu durum; FEA programında çok sayıda eleman kullanılarak uzun zaman alan analizler yapılmasını gerektirir. Karşılıklı endüktans katsayısı bu duruma örnek olarak verilebilir. Eş. 31 ile verilen analitik denklemlerin kolay ve hızlı bir şekilde hesaplanabiliyor olması, ön tasarım aşamasında kısa sürede sonuca ulaşılması için yeni bir yaklaşım sunmaktadır. Biri manyetik nüve içerisinde eş merkezli iki bobin sarımı Şekil 8c ile verilmiştir. Her iki bobine ait geometrik büyüklükler Tablo 2'de verilmiştir. Karşılıklı endüktans katsayısının, farklı γ açılarında analitik ve FEA sonuçlarının kıyaslanması Şekil 9 ile verilmiştir.



Şekil 8 Eş merkezli iki tek sarımlı bobin (a). Eş merkezli çok sarımlı iki bobin (b). Bobin yapılarının perspektif görünümü (c).
(Two concentric single-winding coils (a). Two concentric multi-winding coils (b). Perspective view of coils(c))

Tablo 2. Karşılıklı endüktans katsayısı analizi için bobin parametreleri. (Coil parameters for mutual inductance coefficient analysis)

	a_1 (m)	a_2 (m)	b_1 (m)	b_2 (m)	r_1 (m)	α_1	α_2	β_1	β_2	I (A)	μ	N_1	N_2
SİM ₁	0,0375	0,0445	0,0545	0,0615	0,0525	80°	100°	80°	100°	1	4000	180	150
SİM ₂	0,0375	0,0445	0,0545	0,0615	0,0525	50°	70°	50°	70°	1	4000	180	150

**Şekil 9.** Karşılıklı endüktans katsayısının γ ile değişimi. $\theta_0=90^\circ$ (a), $\theta_0=60^\circ$ (b).
(Variation of mutual inductance coefficient with γ . $\theta_0=90^\circ$ (a), $\theta_0=60^\circ$ (b))

Karşılıklı endüktans katsayısı dönme ekseninde periyodik bir yapıya sahiptir. Şekil 9'da $0^\circ < \gamma < 360^\circ$ aralığında iki farklı durum için FEA sonuçları ile analitik sonuçların kıyaslaması verilmiştir. FEA modelinde karşılıklı endüktans katsayısının hesaplanabilmesi için 3 boyutlu simülasyon yapılması gerekmektedir. Bu durum $\gamma \neq k\pi$ ($k=0,1,2,3,\dots,n$) açıları dışında bobinler arası simetrisinin bozulması anlamına gelir. Bu nedenle simülasyon her bir γ açısı için yüksek sayıda ağ elemanı ile saatler süren hesaplamalar sonucunda elde edilebilmektedir. Analitik hesaplamalar için Eş. 31 kullanılarak çok kısa sürede karşılıklı endüktans katsayısı kolaylıkla hesaplanabilmektedir [29, 30]. Hata analizi, ortalama mutlak hata (Eş. 33) ve ortalama kare hata (Eş. 34) parametrelerinden yararlanılarak yapılmıştır. SİM₁ (Simülasyon 1) için $MAE_1=1.418 \times 10^{-4}$ ve $MSE_1=2.416 \times 10^{-8}$, SİM₂ (Simülasyon 2) için $MAE_2=1.941 \times 10^{-4}$ ve $MSE_2=6.11 \times 10^{-8}$ olarak bulunmuştur.

$$MAE = \frac{1}{n} \sum_{j=1}^n |e_j| \quad (\text{Mean Absolute Error}) \quad (33)$$

$$MSE = \frac{1}{n} \sum_{j=1}^n |e_j^2| \quad (\text{Mean Squared Error}) \quad (34)$$

6. Sonuç ve Tartışma (Conclusion and Discussion)

Bu çalışmada ilk olarak küresel koordinatlarda manyetik nüve içerisinde yer alan tek sarımlı bir bobin geometrisi ele alınarak manyetik alan \mathbf{B} ve elektrik alan \mathbf{E} ifadeleri analitik olarak hesaplanmıştır (Eş. 16 ve Eş. 17). Elde edilen sonuçlardan yararlanarak çok sarımlı bobin yaklaşımı için analitik formüller (Eş. 21 ve Eş. 22) türetilmiştir. Küresel koordinatlarda manyetik nüve içerisinde yer alan bobinler için hali hazırda analitik ifadeler bulunmadığından 2 boyutlu FEA sonuçları ile kıyaslanarak geçerliliği gösterilmiştir (Şekil 5 ve Şekil 6). Grafikler incelendiğinde analitik sonuçların bobin geometrisine yaklaştıkça FEA sonuçlarından uzaklaştığı görülmektedir. Bu durum Bölüm 3'te yapılan tek sarımlı bobin yaklaşımından kaynaklanmaktadır. Şekil 6'da tek sarımlı yaklaşıma ait analitik sonuçlar, çok sarımlı yaklaşıma ait analitik

sonuçlar ve FEA sonuçları birlikte gösterilmiştir. Şekil 7a ve Şekil 7b çok sarımlı bobin yaklaşımının tek sarımlı bobin yaklaşımında oluşan teklik problemini büyük ölçüde giderdiği ve FEA sonuçlarına daha yakın sonuçlar verdiği görülmektedir. Bu durum analitik formüllerin bilimsel çalışmalarda kullanılabilirliğine dair önemli bir göstergedir. Bölüm 5'te biri manyetik nüve içerisinde olmak üzere iki farklı çok sarımlı bobin için karşılıklı endüktans katsayısının analitik formülleri elde edilerek Eş. 32 ile verilmiştir. Tablo 2 ile verilen simülasyon parametreleri analitik sonuçlar ve üç boyutlu FEA modeli oluşturularak sayısal olarak hesaplanmıştır. Şekil 9'de FEA sonuçları ile analitik sonuçlar karşılaştırılabilir olarak verilmiştir. SİM₁ ve SİM₂ için elde edilen hata değerleri $MSE_1=2.416 \times 10^{-8}$ ve $MSE_2=6.11 \times 10^{-8}$ dir. Analitik formüller ile karşılıklı endüktans katsayısının γ 'ya bağlı olarak elde edilmesi 1 dakikadan kısa sürerken, 3D modeli oluşturulan FEA analizleri 3 saat gibi uzun bir süre almaktadır. Sonlu elemanlar programında karşılıklı endüktans büyüklüklerinin her γ değeri için mesh yapısını güncelleyerek tüm çözüm ağı için hesaplamaları yeniden yapması gerekmektedir.

Sonuç olarak; FEA sonuçları dikkate alındığında, analitik formüller ile elde edilen sonuçların kabul edilebilir olduğu açıktır. FEA programlarının yüksek maliyeti ve üç boyutlu modellerde uzun hesaplama süreleri düşünüldüğünde, önerilen analitik çözüm bilimsel çalışmalarda hızlı ve ücretsiz bir tasarım aracı olarak kullanılabilir önemli bir araçtır. Ayrıca, analitik formüllerin Matlab™, Mathematica™ vb. mühendislik araçlarına kolayca adapte edilebiliyor olmaları optimizasyon süreçlerinin hızlandıracaktır.

Kaynaklar (References)

- Conway J.T., Mutual inductance for an explicitly finite number of turns, Progress in Electromagnetics Research B, 28, 273–287, 2011.
- Ravaud R., Lemarquand G., Lemarquand V., Babic S., Akyel C., Mutual inductance and force exerted between thick coils, Progress in Electromagnetics Research, 102, 367–380, 2010.
- Babic S.I., Akyel C., New analytic-numerical solutions for the mutual inductance of two coaxial circular coils with rectangular cross section in air, IEEE Transactions on Magnetics, 42 (6), 1661-1669, 2006.
- Conway J.T., Noncoaxial inductance calculations without the vector potential for axisymmetric coils and planar coils, IEEE Transactions on Magnetics, 44 (4), 453-462, 2008.

5. Conway J. T., Analytical solutions for the self- and mutual inductances of concentric coplanar disk coils, *IEEE Transactions on Magnetics*, 49 (3), 1135-1142, 2013.
6. Yang T.T., Yang J.J., The effect of cylindrical ferromagnetic shells on the self and mutual inductance of parallel wires, *IEEE Transactions on Electromagnetic Compatibility*, 17 (4), 234-237, 1975.
7. Babic S.I., Akyel C., Calculating mutual inductance between circular coils with inclined axes in air, *IEEE Transactions on Magnetics.*, 44 (7), 1743-1750, 2008.
8. Conway J.T., Exact solutions for the mutual inductance of circular coils and elliptic coils, *IEEE Transactions on Magnetics*, 48 (1), 81-94, 2012.
9. Kuang, S., Yan G., Modelling on mutual inductance of wireless power transfer for capsule endoscopy, *Biomed Microdevices* 22, 54, 2020.
10. Zhou X., Chen B., Luo Y., Zhu R., Analytical calculation of mutual inductance of finite-length coaxial helical filaments and tape coils. *Energies.*, 12 (3), 566-585, 2019.
11. Weber H., Baran H., Utermöhlen F., Schuster C., Macromodeling of mutual inductance for displaced coils based on Laplace's equation, in *IEEE Transactions on Instrumentation and Measurement*, 70, 1-11, 2021.
12. Zhang X., Quan C., Li Z., Mutual inductance calculation of circular coils for an arbitrary position with electromagnetic shielding in wireless power transfer systems, *IEEE Transactions on Transportation Electrification*, 7 (3), 1196-1204, 2021.
13. Lipiriski W., Rolicz P., R. Sikora, Application of integral transforms to the analysis of the magnetic field of a spherical coil, *IEEE Transactions on Magnetics*, 11 (5), 1552-1554, 1975.
14. Semenov V.G., Synthesis of spherical methods of determining magnetic field source parameters of internal and external origin, *Measurement Techniques*, 33 (12), 1236-1240, 1990.
15. Eaton H., Electric field induced in a spherical volume conductor from arbitrary coils: application to magnetic stimulation and MEG. *Medical and Biological Engineering and Computing*, 30, 433-440, 1992.
16. Matute E.A., On the vector solutions of Maxwell equations in spherical coordinate systems, *Rev. Mex. Fis. E* 51, 31-36, 2005. arXiv:physics/0512261v1 [physics.class-ph] 29, Dec 2005, Erişim tarihi Aralık 22, 2022.
17. Liua C.Y., Andalib T., Ostapchuk D.C.M., Bidinostia C.P., Analytic models of magnetically enclosed spherical and solenoidal coils, *Nuclear Instruments and Methods in Physics Research Section A: Accelerators, Spectrometers, Detectors and Associated Equipment*, 949, Article 162837, 2020.
18. Kok-Meng L., Son H., Joni J., Concept development and design of a spherical wheel motor (SWM), *Proceedings of the 2005 IEEE International Conference on Robotics and Automation, Barcelona-Spain*, 3652-3657, 18-22 Nisan, 2005.
19. Dehez B., Galary G., Grenier D., Raucent B., Development of a spherical induction motor with two degrees of freedom, *IEEE Transactions on Magnetics*, 42 (8), 2077-2089, 2006.
20. Fernandes J.F.P., Branco P.J.C., The shell-like spherical induction motor for low-speed traction: electromagnetic design, analysis, and experimental tests, *IEEE Transactions on Industrial Electronics*, 63 (7), 4325-4335, 2016.
21. Zhang C., Yuan L., Zhang J., Chen J., Chen C., Chen S., Yang G., Analytical models of electromagnetic field and torques in a novel reaction sphere actuator, *IEEE International Conference on Applied System Invention (ICASI)*, Chiba-Japan, 271-274, 13-17 Nisan, 2018.
22. Jie Zhang J., Yuan L.; Liao Y., Zhang C., Chen C., Chen S., Guilin Yang G., Torque optimization of a novel reaction sphere actuator based on support vector machines, *IEEE International Conference on Applied System Invention (ICASI)*, Chiba-Japan, 263-266, 13-17 Nisan 2018.
23. Yıldız H., Uzal E., Çalık H., An analytical solution of a multi-winding coil problem with a magnetic core in spherical coordinates, *Acta Polytechnica Hungarica*, 18 (10), 87-112, 2021.
24. Griffiths D. J., *Introduction to Electrodynamics*, Prentice Hall, New Jersey, A.B.D., 1998.
25. Jackson, J.D., *Classical Electrodynamics*, John Wiley & Sons, New York, A.B.D, 132-165, 1962.
26. Clayton P.R., *Inductance Loop and Partial*, John Wiley & Sons, New Jersey, A.B.D., 87-117, 2010.
27. Smythe W.R., *Static and dynamic electricity*, Taylor & Francis, New York, A.B.D., 1989.
28. Theodoulidis T.P., Kriezis E.E., *Eddy current canonical problems (with applications to nondestructive evaluation)*, Tech Science Press, 2006.
29. Yarikkaya S., Cinar S.M., Designing and performance testing of programmable power supply and DC/DC converter based PV emulators. *Journal of the Faculty of Engineering and Architecture of Gazi University*, 36 (3), 1362-1372, 2021.
30. Akın M., Sağiroğlu Ş., Short term traffic speed prediction with RNN method for roads characterized by density-based clustering method, *Journal of the Faculty of Engineering and Architecture of Gazi University*, 37 (2), 581-593., 2022.

