

Yarı Manyetik Yarı İletken Malzemeden Koni Yüzeyinde Kuantum Hall İletkenliği

Seyfettin ALAN*¹, Arif BABANLI²

¹Süleyman Demirel Üniversitesi, Fen Edebiyat Fakültesi, Matematik Bölümü, Isparta

²Süleyman Demirel Üniversitesi, Fen Edebiyat Fakültesi, Fizik Bölümü, Isparta

(Alınış / Received: 21.03.2016, Kabul / Accepted: 29.04.2016, Online Yayınlanma / Published Online: 23.05.2016)

Anahtar Kelimeler

Kuantum Hall iletkenliği,
Yarı manyetik yarı
iletkenler,
Landau seviyeleri,
Gauss eğriliği.

Özet: Bu çalışmada yarı manyetik yarı iletken malzemeden konik bir yüzey üzerindeki iki boyutlu elektron gazının Landau seviyeleri ve sıfır derecedeki kuantum Hall iletkenliği hesaplanmıştır. Kuantum Hall iletkenliğinin manyetik alana bağlı değişimi merdiven karakterlidir ve bu adımın uzunluğu manyetik alana göre değişir. Adımın yüksekliği ise $\frac{e^2}{h}$ kadardır. Çalışmada, koninin tepe noktasındaki özel durumdan dolayı kuantum Hall iletkenliği iki farklı yaklaşımla incelenmiştir. İlk yaklaşımda gerçek koni yapısı ele alınmış ve etkin skaler potansiyel, yüzeyin Gauss eğriliği ile orantılı olarak hesaplanmıştır. Diğer yaklaşımda ise matematiksel koni yapısı ele alınmış ve etkin potansiyel, hem yüzeyin Gauss eğriliği hem de tekil eğriliği ile orantılı olarak hesaplanmıştır.

Quantum Hall Conductivity on Cone Surface Made of Semi-Magnetic Semiconductor

Keywords

Quantum Hall
conductivity,
Semi-magnetic
Semiconductors,
Landau levels,
Gaussian curvature.

Abstract: In this work we obtain the Landau levels and the Hall conductivity at zero temperature of a two dimensional electron gas on a conical surface. Differences of quantum Hall conductivity by magnetic surface is ladder characteristic and step length change according to magnetic field strength. This step height is $\frac{e^2}{h}$. In this work we obtain the quantum Hall conductivity with two different approaches because of specific condition on the top of cone. First approach takes a real cone and effective scalar potential is calculated proportionally to the Gaussian curvature of the surface. The other approach takes a mathematical cone and effective potential is calculated proportionally to both the Gaussian curvature and singular curvature of the surface.

1. Giriş

Düzlemsel olmayan yapılar düzlemsel yapılara göre bazı değişiklikler içerir. Bu nedenle düzlemsel yapılardan farklı olarak incelenmesi gerekir. Düzlemsel olmayan yapılardaki iki boyutlu elektron gazlarının hareketleri çok kapsamlı bir araştırma konusudur ve [1]'de ele alınmıştır. [2]'de manyetik alana sahip iki boyutlu elektron gazları incelenmiştir ve bunun için silindirik yüzeyler kullanılmıştır. Kuantum Hall iletkenliği ve Landau seviyeleri negatif eğriliğe sahip yüzeylerde teorik olarak hesaplanmıştır [3]. Manyetik alana sahip konik yüzeylerdeki kuantum Hall iletkenliği [4]'te hesaplanmıştır. İki boyutlu elektron gazlarındaki manyetik hareketler [5]'te araştırılmıştır. Konik yüzeylerdeki kuantum mekaniği integral metotları ile [6]'da ele alınmıştır. [7]'de konik şekle sahip grafenlerin Landau seviyeleri hesaplanmıştır. Konik yüzeylerin belirli sıcaklıklardaki

etkileşimi [8]'de incelenmiştir.

Bu çalışmada yarı manyetik yarı iletken malzemeden konik bir yüzeyin Landau seviyeleri ve kuantum Hall iletkenliği hesaplanmıştır. Koninin temel problemi olan, tepe noktasındaki eğriliğin Landau seviyeleri ve kuantum Hall iletkenliğine etkisi incelenmiştir. Koninin tepe noktasında oluşan bu özel durum [9]'da ele alınmış, konik yüzeyin tepe noktasındaki kuantum hareketi teorik olarak belirlenmiştir.

2. Materyal ve Metot

Koninin tepe noktası matematiksel olarak incelendiğinde dalga fonksiyonu ile koninin tekil skaler eğriliğinin birleştiği görülür. Fakat gerçek konilerde tepe noktasında bir yumuşama meydana gelir ve tekillik tepe noktasında bulunmaz. Bu yüzden bu çalışmada iki farklı durum ayrı ayrı incelenmiştir.

Birinci durumda konik yüzeyin tekil eğriliğinin olmadığı durum, ikinci durumda ise tekil eğriliğinin olduğu durum araştırılmıştır. Araştırmada koni yüzeyinin yapıldığı malzeme yarı manyetik yarı iletken olarak belirlenmiştir.

Bu çalışma 4 kısımdan oluşmaktadır. 2. kısımda gerçek ve matematiksel koni yapıları için Landau seviyeleri bulunacak ve koninin tepe noktasının Landau seviyelerine etkisi incelenecektir. 3. kısımda her iki durum için Hall iletkenliği hesaplanacaktır. 4. kısımda ise çalışmada elde edilen sonuçlar tartışılacaktır.

3. Bulgular

3.1. Yarı manyetik yarı iletken malzemeden koni yüzeyinde Landau seviyeleri

Klasik bir konideki Schrodinger denklemi [10]'da hesaplanmıştır. Koni yarı manyetik yarı iletken malzemeden olduğu için $3A\sigma_z$ ifadesi denkleme eklenirse Schrodinger denklemi aşağıdaki gibi elde edilir.

$$\left[\hat{H} + V_S + \frac{1}{2} g\mu_B H\sigma_z + 3A\sigma_z \right] \Psi(l, \varphi) = \varepsilon \Psi(l, \varphi) \quad (1)$$

Denklem düzenlenirse aşağıdaki hali alır:

$$\left\{ \begin{array}{l} -\frac{\hbar^2}{2m} \left[\frac{1}{l} \frac{\partial}{\partial l} \left(l \frac{\partial}{\partial l} \right) - \frac{1}{4l^2} \right] \Psi(l, \varphi) \\ - \left(\frac{-i}{l \sin \alpha} \frac{\partial}{\partial \varphi} - \frac{e \sin \alpha B_z l}{2\hbar} \right)^2 \Psi(l, \varphi) \\ + \left(V_S + \frac{1}{2} g\mu_B H\sigma_z + 3A\sigma_z \right) \Psi(l, \varphi) \end{array} \right\} = \varepsilon \Psi(l, \varphi) \quad (2)$$

Koni yüzeyinin ortalama eğriliği ve Gauss eğriliği [11]'de verilen formüller ile hesaplanırsa:

$$M = \frac{1}{2} \frac{eG - 2fE + gE}{EG - F^2} \quad (3)$$

$$K = \frac{1}{2} \frac{eg - f^2}{EG - F^2} \quad (4)$$

Ortalama eğrilik $M = \frac{\cos \alpha}{2 \sin \alpha l}$ ve Gauss eğriliği $K = 0$ olarak bulunur. Koninin tepe noktasındaki özel durumdan dolayı dalga fonksiyonu iki farklı şekilde hesaplanacaktır. İlk durum gerçek koni yapısıdır. Gerçek konide koninin tepe noktasında bir yumuşama meydana gelir. Bundan dolayı gerçek konilerin tepe noktasında tekillik olmaz. Sadece Gauss eğriliği vardır. Tekillik olmadığı için tekil eğriliğin etkisi ihmal edilir [10].

Genel dalga fonksiyonu $\Psi(l, \varphi) = \Psi(l) e^{ij\varphi}$, $j = 0, \pm 1, \pm 2$ olarak alınırsa aşağıdaki dalga fonksiyonu elde edilir.

$$-\frac{\hbar^2}{2m} \left[\frac{1}{l} \frac{d}{dl} \left(l \frac{d}{dl} \right) - \frac{1}{4} \frac{\mu^2}{\sin^2 \alpha} \right] \Psi(l) + \frac{m\omega^2 l^2}{2} \Psi(l) = \Sigma \Psi(l) \quad (5)$$

$$\mu^2 = j^2 - \frac{1 - \sin^2 \alpha}{4} \quad (6)$$

$$\omega = (\omega_c/2) \sin \alpha \quad (7)$$

$$\omega_c = \frac{eB_z}{m} \quad (8)$$

ve

$$\Sigma = \varepsilon + j\hbar\omega - \frac{1}{2} g\mu_B H\sigma_z - 3A\sigma_z \quad (9)$$

Buradaki (5) diferansiyel denklemi konik yüzeydeki iki boyutlu kuantum salıncaktır. Bu problem [12] de çift koni için incelenmiştir. Çift konide $-\infty \leq l \leq \infty$ olan uzunluk tekil konide $0 \leq l \leq \infty$ şeklindedir. Bu nedenle gerçek koni için kuantum salıncak c normalleştirme sabiti olmak üzere aşağıdaki gibidir.

$$\Psi(l) = C ||^B \exp \left(-\frac{m\omega^2 l^2}{2} \right) U \left(\frac{s}{2} + \frac{1}{4} - \frac{E}{2\omega}, s \right) \quad (10)$$

$$s = \frac{1}{2} \left(1 \pm \sqrt{1 + \frac{4\mu^2}{\sin^2 \alpha}} \right) \quad (11)$$

Burada $U(a,b,c)$ fonksiyonu Kummer fonksiyonudur. Dalga fonksiyonunu normalleştirmek için

$$\lim_{l \rightarrow \infty} \Psi(l) \rightarrow 0 \quad (12)$$

İfadesinin sağlanması gerekir. Bu şartın sağlanması için ise (10)'daki $U \left(\frac{s}{2} + \frac{1}{4} - \frac{E}{2\omega}, s + \frac{1}{2}, m\omega l^2 \right)$ ifadesi n. dereceden polinom olmalıdır [13]. Bunun için de

$$\frac{s}{2} + \frac{1}{4} - \frac{E}{2\omega} = -n \quad (13)$$

Olmalıdır. Diğer taraftan olasılık yoğunluğunun $l \rightarrow 0$ için araştırılması gerekir.

$$\lim_{l \rightarrow 0} |\Psi(l)|^2 l dl \rightarrow 0 \quad (14)$$

Buradan C sabit olmak üzere aşağıdaki ifadeler elde edilir [13].

$$\lim_{x \rightarrow 0} U(a, b, x) \rightarrow \frac{\pi}{\sin(b\pi)} \left[\frac{1}{\Gamma(1+\alpha-b)\Gamma(b)} - \frac{x^{1-b}}{\Gamma(\alpha)\Gamma(2-b)} \right] \quad (15)$$

$$\lim_{l \rightarrow 0} |\Psi(l)|^2 l dl = C |^{2s+1} \quad (16)$$

(12) denkleme göre tekil koni için "s" ifadesinin pozitif işaretli olması gerekir. Çünkü "s" ifadesi pozitif olduğunda $l \rightarrow 0$ için $|\Psi(l)|^2 l dl$ ifadesi sıfır olur. Tekillik olmadığı için de dalga fonksiyonu koninin tepe noktasında düzenlidir.

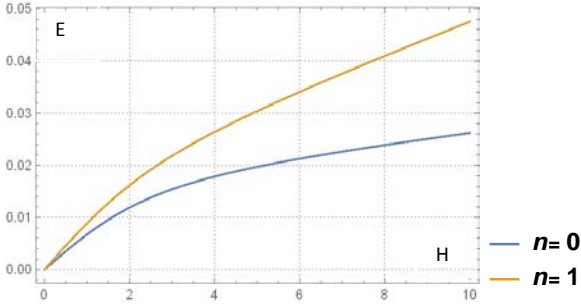
Böylece yarı manyetik yarı iletken bir konide tekil eğriliğin etkisi ihmal edilip Gauss eğriliğinin etkisi

dahil edildiğinde (gerçek koni) elde edilen öz değerler aşağıdaki gibidir.

$$\Sigma_{j,n} = \left[\begin{array}{c} 2\hbar\omega \left(n + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} \sqrt{1 + \frac{4\mu^2}{\sin^2\alpha}} \right) \\ + \frac{1}{2} g\mu_B H \sigma_z + 3A\sigma_z \end{array} \right] \quad (17)$$

(5) denklemi ile birleştirildiğinde Landau seviyeleri ise aşağıdaki gibi bulunur. Elde edilen Landau seviyeleri (Şekil 1)'de gösterilmiştir.

$$E_{j,n} = \left[\begin{array}{c} \hbar\omega_c \sin \alpha \left(n + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} \sqrt{1 + \frac{4\mu^2}{\sin^2\alpha} - \frac{j}{2}} \right) I \\ + \frac{1}{2} g\mu_B H \sigma_z + 3A\sigma_z \end{array} \right] \quad (18)$$



Şekil.1 İki boyutlu elektron gazının yarı manyetik yarı iletken malzemeden gerçek konideki Landau seviyeleri. $\alpha = \frac{\pi}{3}$ $n=0,1$

İkinci durumda ise koni matematiksel bir yapı olarak ele alınacaktır. Bu durumda koninin tepe noktasında yumuşama olmadığı kabul edilir. Yumuşama olmadığı için koninin tepe noktasında, tekil Gauss eğriliği ile dalga fonksiyonu birleşir. Tekillik durumundaki kuantum harmonik salıncak [14]'de incelenmiştir. Bu durumda diğer özdeğerler ve diğer şartlar aynı kalır fakat sadece "s" ifadesi pozitif veya negatif olabilir. Negatif olduğu durumda dalga fonksiyonu tepe noktasında düzenli olmaz. Yani:

$\int |\Psi(l)|^2 dl = Cl^{2s+2} \rightarrow 0, l \rightarrow 0$ olmalıdır. Bunun için aşağıdaki şartın sağlanması gerekir:

$$-1 < s < 1 \quad (19)$$

Bu şart fonksiyonun integrallenebilir olmasını da garanti eder. Bu şartın sağlanabilmesi için ise $j = 0$ olmalıdır.

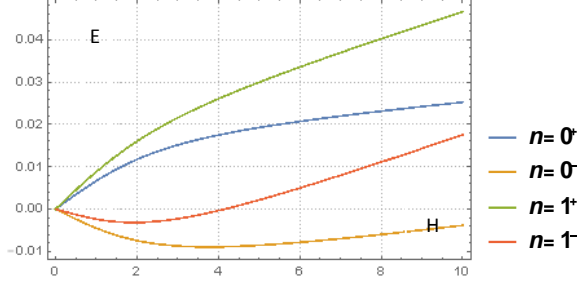
Bu durumda tekil Gauss eğriliğinin etkisi dahil edildiğinde Landau seviyeleri aşağıdaki gibi olur.

$$E_{0,n}^+ = \left[\begin{array}{c} \hbar\omega_c \sin \alpha \left(n + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} \sqrt{2 - \frac{1}{\sin^2\alpha}} \right) \\ + \frac{1}{2} g\mu_B H + 3A \end{array} \right] \quad (20)$$

ve

$$E_{0,n}^- = \left[\begin{array}{c} \hbar\omega_c \sin \alpha \left(n + \frac{1}{2} - \frac{1}{4} \sqrt{2 - \frac{1}{\sin^2\alpha}} \right) \\ - \frac{1}{2} g\mu_B H - 3A \end{array} \right] \quad (21)$$

$\alpha = \frac{\pi}{3}$ olduğundaki Landau seviyeleri (Şekil.2)'de gösterilmiştir.



Şekil.2 İki boyutlu elektron gazının yarı manyetik yarı iletken malzemeden matematiksel konideki Landau seviyeleri. $\alpha = \frac{\pi}{3}$ $n=0,1$

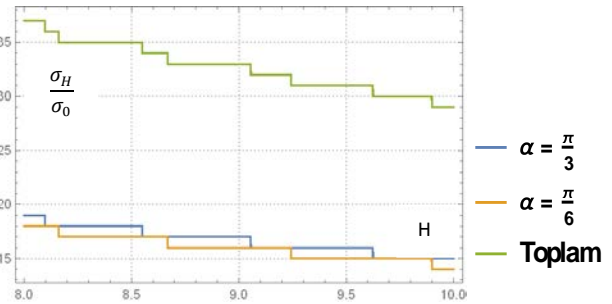
3.2. Kuantum Hall iletkenliği

Her bir Landau seviyesi için tam değer kuantum Hall iletkenliği [15]'de verilmiştir. Gerekli işlemler yapılırsa yarı manyetik yarı iletken malzemeden yapılmış gerçek ve matematiksel konideki iki boyutlu elektron gazının kuantum Hall iletkenlikleri (Şekil-3) ve (Şekil-4)'de gösterilmiştir.

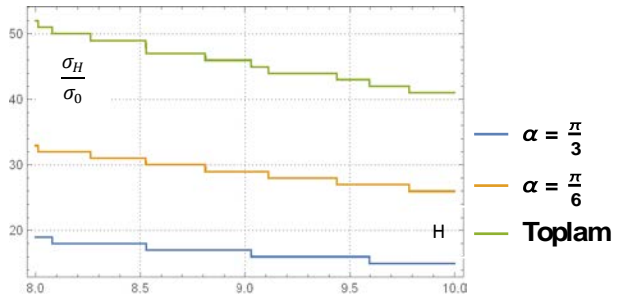
$\sigma_0 \equiv e^2/h$ olmak üzere;

$$\sigma_H = -n_0 \sigma_0 \quad (22)$$

$$\sigma_0 = e^2/h \quad (23)$$



Şekil.3 Matematiksel koni yüzeyindeki kuantum Hall iletkenliği. $\alpha = \frac{\pi}{3}, \frac{\pi}{6}$



Şekil.4 Gerçek koni yüzeyindeki kuantum Hall iletkenliği. $\alpha = \frac{\pi}{3}, \frac{\pi}{6}$

4. Tartışma ve Sonuç

Bu çalışmada yarı manyetik yarı iletken malzemeden yapılmış bir koninin tam değer kuantum Hall iletkenliği hesaplanmıştır. Kuantum Hall iletkenliğinin koninin açılış açısına göre nasıl değiştiği grafikler ile gösterilmiştir. Dalga fonksiyonu ve tekil skaler eğriliğin birleştiği ve birleşmediği durumlar için Gauss eğriliğini koninin tepe noktası için ihmal edildiği ve ihmal edilmediği durumlar ayrı ayrı ele alınmıştır. Matematiksel koni için Gauss eğriliğini dalga fonksiyonuna dahil edilmiş gerçek koni için ise dalga fonksiyonuna Gauss eğriliği dahil edilmemiştir. Sonuç olarak her iki durumda da koni yüzeyindeki Hall iletkenliğinin merdiven karakterli olduğu görülmüştür.

Kaynakça

- [1] Magarill, L. I., Chaplik, A. V., Entin, M.V. 2005. Spectrum and kinetics of electrons in curved nano structures. *Physics Usp*, 48(2005), 953–958.
- [2] Chaplik, A. V., Magarill, L. I., Romanov, D. A. 1998. Effect of curvature of a 2D electron sheet on the ballistic conductance and spin-orbit interaction. *Physica B: Condensed Matter*, 249(1998), 377-382.
- [3] Bulaev D. V., Geyler, V. A., Margulis, V. A. 2003. Quantum Hall effect on the Lobachevsky plane. *Physica B: Condensed Matter*, 337(2003), 180-185.
- [4] Foden C. L., Leadbeater, M. L., Pepper, M. 1995. Quantum magnetic confinement and transport in spherical two-dimensional electron gases, *Physical Review B* 52(1995), R8646.
- [5] Bulaev, D. V., Margulis, V. A. 2003. Magnetic moment of an electron gas on the surface of constant negative curvature. *The European Physical Journal*, B36(2003), 183-186.
- [6] Inomata, A., Junker, G. 2012. Path integration in conical space. *Physical Letters A*, 376(2012), 305-308.
- [7] Bueno, M., Furtado, C., M. Carvalho, A. 2012. Landau levels in graphene layers with topological defects. *The European Physical Journal B*, 85(2012), 53.
- [8] Moreira, E. S., Oliveira, E. S. 2006. Specific heat of a particle on the cone. *Physical Review A*, 73(2006), 052105.
- [9] Filgueiras, C., Moraes, F. 2008. On the quantum dynamics of a point particle in conical space. *Annals of Physics*. 323(2008), 3150-3157.
- [10] Poux, A., Araujo, L. R. S., Filgueiras, C., Moraes, F. 2014. Landau levels, self-adjoint extensions and Hall conductivity on a cone. *The European Physical Journal Plus*, 129(2014),100.
- [11] Do Carmo, M. P. 1976. *Differential Geometry of Curves and Surfaces*. Prentice Hall. Englewood Cliffs, New Jersey, 511s.
- [12] Kowalski, K., Rembielinski, J. 2013. On the dynamics of a particle on a cone. *Annals of Physics*. 329(2013), 146-157.
- [13] Slater, L. J. 1972. *Confluent Hypergeometric Functions*. ss 503-537. Abramowitz, M., Stegun, I. A., ed. 1972. *Handbook of Mathematical Functions with Formulas, Graphs and Mathematical Tables*. Dover Publications. New York, 1058s.
- [14] Goerbig M. O. 2009. *Quantum Hall Effects*. <http://arxiv.org/pdf/0909.1998v2.pdf> (Erişim Tarihi: 09.01.2016).