*Van YYÜ Eğitim Fakültesi Dergisi (YYU Journal of Education Faculty),2022:Şubat Özel Sayı 240-270,*http://efdergi.yyu.edu.tr,
doi:10.33711/ yyuefd.1068107 **Derleme Makalesi** **ISSN: 1305-2020**

Tüm İlişkiler Doğrusal ya da Orantısal mıdır? Doğrusal Akıl Yürütmenin Aşırı Genellemesi: Doğrusallık Yanılgısı ile İlgili Bir Derleme Çalışması

Betül BARUT[*]

Öz: Bu derleme çalışmasının amacı doğrusallık yanılgısı ile ilgili çalışmaları incelemek ve bu olgunun tanımı, ortaya çıkış süreci, örnekleri, sebepleri ile ilgili bilgiler ve nasıl üstesinden gelinebileceğine yönelik öneriler sunarak ulusal alanyazına katkı sağlamaktır. Bu olgu ile ilgili yapılan araştırmalar, bu olgunun başta geometri olmak üzere çok farklı konuda ve farklı yaş grubundaki öğrencilerde yaygın olarak gözlendiğini göstermiştir. Çalışma sonuçları, pek çok araştırmacının öğrencilerin bu eğiliminin köklerinin çok sağlam olduğunu ve bu eğilimin üstesinden gelmenin çok güç olduğunu vurguladığını ortaya koymuştur. Aynı zamanda, araştırmacıların doğrusallık yanılgısının en temel sebeplerinden birisi olarak öğrencilerin orantısal akıl yürütme becerisini geliştirirken sıklıkla kullanılan ve sürekli pekiştirilen bilinmeyen değer problem yapısını işaret ettikleri görülmüştür. Derleme araştırmasının sonuçları temel alınarak, doğrusallık yanılgısı olgusunun farkında olunması ve bu olgu ile ilgili bilimsel araştırmalar yürütülmesi için ülkemizdeki matematik öğretmenlerine ve matematik eğitimi alanında araştırma yapan bilim insanlarına önerilerde bulunulmuştur.

Anahtar Kelimeler: Doğrusallık yanılgısı, Kavram yanılgısı, Doğrusallık, Orantısallık, Doğrusal akıl yürütme, Orantısal akıl yürütme, Bilinmeyen değer problem yapısı.

Are All Relationships Linear or Proportional? Overgeneralization of Linear Reasoning: A Review Study of Illusion of Linearity

Abstract: The aim of this review study is to investigate the studies related to the illusion of linearity and to contribute to national literature by providing knowledge related to the definition, emerging process, examples, reasons of this phenomenon, and suggestions to overcome this phenomenon. Researches focused on this phenomenon have shown that it is prevalently observed in many different subjects, especially geometry, and in students of different age groups. This review study revealed that many researchers have emphasized that this tendency of students has very strong roots and it is very hard to overcome this tendency. At the same

[*]Dr. Öğretim Üyesi, Anadolu Üniversitesi, Eğitim Fakültesi, Matematik ve Fen Bilimleri Eğitimi Bölümü, Email:byayan@anadolu.edu.tr Orcid No: 0000-0002-6196-9654.

***Gönderim:**01.09.2021* ***Kabul:**23.11.2021* ***Yayın**15.02.2022*

doi:10.33711/ yyuefd.1068107 Derleme Makalesi ISSN: 1305-2020

time, it was seen that researchers pointed out the missing value problem structure, which is frequently used and constantly reinforced while improving students' proportional reasoning skills, as one of the most fundamental reason for the illusion of linearity. Based on the results of the review, suggestions were made to mathematics teachers and scholars who conduct research in the field of mathematics education in our country to be aware of illusion of linearity and to conduct scientific research on this phenomenon.

Keywords: Illusion of linearity, Misconception, Linearity, Proportionality, Linear reasoning, Proportional reasoning, Missing value problem structure.

Giriş

Matematiğin en önemli ve en çok vurgulanan konuları olan doğrusallık ve orantısallık öğrencilerin hem eğitim hayatlarında hem de günlük yaşamlarında sıklıkla deneyimlediği kavramlardır. En basit anlamda öğrencilerin karşılaştıkları tüm nicelikler arasındaki ilişkilerin doğrusal ya da orantısal olduğunu düşünme eğilimleri olarak tanımlanan *doğrusallık yanılgısı* olgusu (Van Dooren, De Bock, Hessels, Janssens ve Verschaffel, 2004) uluslararası matematik eğitimi alanyazınında farklı yaş grubu öğrencilerle sıklıkla çalışılan ve kökleri çok eskilere dayanan konulardan biridir. Bu çalışmanın amacı bu olgu ile ilgili araştırmaları inceleyerek doğrusallık yanılgısını etraflıca ele almaktır. Bu amaç doğrultusunda "Doğrusallığın önemi nedir?", "Doğrusallık yanılgısı ne demektir?" "Doğrusallığın matematiksel yorumu nedir?", "Doğrusallık yanılgısı örnekleri nelerdir?", "Doğrusallık yanılgısının sebepleri nelerdir?" ve "Doğrusallık yanılgısı ile ilgili hangi deneysel çalışmalar yapılmıştır?" gibi sorulara cevap aranacaktır. Ülkemizde matematik eğitimi alanyazınında şimdiye kadar ele alınmayan bu çok yaygın ve dirençli yanılgının derinlemesine incelenmesinin matematik öğretmenlerinin mesleki gelişimlerine katkıda bulunacağı düşünülmektedir. Aynı zamanda, ülkemizdeki matematik eğitimi araştırmacılarının bu derleme çalışmanın içeriğini hem öğretmen eğitimi sürecinde öğrencilerin önemli yanılgıları konusunda öğretmen adayları ile paylaşacakları bir kaynak olarak kullanabilecekleri hem de bu çalışmanın öncülüğünde konuyu araştırma ajandalarına dahil ederek ulusal ve uluslararası alanyazında bu olgu ile ilgili yürütülen çalışmalara katkıda bulunabilecekleri öngörülmektedir.

Yöntem

Araştırma Deseni

Bu çalışmada geleneksel derleme (traditional literature review) yöntemi kullanılmıştır (Rozas ve Klein, 2010). Sistematik derleme yönteminden (Kitchenham, 2004) farklı olarak, bu

doi:10.33711/ yyuefd.1068107 Derleme Makalesi ISSN: 1305-2020

yöntemin temel amacı bir konu, bir olgu ya da bir araştırma alanı ile ilk defa karşılaşan ya da konu ile ilgili geçmiş bilgisi olmayan bir hedef kitlenin hızlıca konu ile ilgili kapsamlı bilgiye sahip olmasını sağlamaktır (Rozas ve Klein, 2010). Bu nedenle doğrusallık yanılgısı olgusunu ulusal alanyazına kazandırmak amacı taşıyan bu derleme çalışmasında bu yanılgıyı odağına alan araştırmalar incelenerek olgunun tanımı, ortaya çıkışı, sebepleri ve örnekleri gibi başlıklar altında bahsedilecek hususlar titizlikle not alınmıştır. Bunun yanında bu olgu ile ilişkili süreçleri daha kapsamlı ve detaylı açıklayabilmek için orantısal akıl yürütme, olasılıksal akıl yürütme gibi terimler ile ilgili gerekli açıklamalara da yer verilmiştir.

Doğrusallığın Önemi ve Yaygın Kullanımı

Doğrusal ve orantısal ilişkiler hem ilköğretim hem de ortaöğretim matematiğinde ele alınan en önemli konulardan biridir (De Bock, Verschaffel ve Janssens, 1998, 2002). Bunun sebebi doğrusal ve orantısal ilişkilerin hem günlük hayatta hem matematikte hem de diğer bilim dallarında pek çok problemi açıklayan temel bir model olmasının altında yatmaktadır (De Bock ve diğerleri, 1998; Van Dooren, De Bock, Depaepe, Janssens ve Verschaffel, 2003; Van Dooren, De Bock, Hessels ve diğerleri, 2004). Örneğin, günlük hayatta dört kişilik bir yemek tarifini 6 kişi için hazırlamak istiyorsak gereken malzemelerin miktarını hesaplarken kullandığımız akıl yürütme, matematikte bir çemberin çapı ve çevresi arasındaki ilişki, fizikte yol, hız ve zaman arasındaki ilişki, kimyada basınç, sıcaklık ve hacim arasındaki ilişki ve bunlar gibi pek çok problem doğrusal ve orantısal modeller ile açıklanır.

Bu ilişkilerin her sınıf seviyesinde sıklıkla vurgulanması öğrencilerin bu tür ilişki içeren problem durumlarıyla sürekli karşı karşıya gelmesini sağlar. Aslında, öğrencilerin doğrusal ve orantısal ilişkiler içeren durumlarla karşılaşması onların okul öncesi çağlarına dayanır; örneğin bir kova dört avuç kumla doluyorsa, üç kovayı doldurmak için 12 avuç kuma ihtiyaç vardır; bir oyuncak arabanın dört tekeri varsa, iki oyuncak arabanın sekiz tekeri vardır (Van Den Brink ve Streefland, 1979). Daha sonra çocuklar ilkokula başlarlar ve burada çarpma işleminin öğrenilmesi ile beraber “Bir paket çikolata 2 TL ise 3 paket çikolata kaç TL’dir?” şeklinde basit sözel problemlerde bu işlemleri yapmayı öğrenirler. İşte bu durumda doğrusal akıl yürütme matematik eğitiminde gittikçe önem kazanmaya başlar. Öğrenciler bu şekildeki problemleri her zaman çarpma işlemi kullanmadan, örneğin tekrarlı toplama veya üzerine koyma kullanarak yapsalar da aslında doğrusal matematiksel yapıya uygun olarak modellenmiş problem durumu ile uğraşırlar ve akıl yürütmeleri de bu doğrusal yapıyı yansıtır (Van Dooren, De Bock, Janssens ve Verschaffel, 2008). Daha sonraki sınıflarda öğrencilere oran ve orantı kavramları formal olarak öğretilmeye başlar ve bundan sonra öğrenciler sık sık orantısal problemler ile karşı

doi:10.33711/ yyuefd.1068107 Derleme Makalesi ISSN: 1305-2020

karşıya gelmeye başlarlar. Öğrencilerin karşılaştığı bu orantısal problemlerin çoğu da bilinmeyen değer problemleri olarak isimlendirilen yapıdadır (Kaput ve West, 1994). Alanyazında "10 kalem 7 TL ise 30 kalem kaç TL'dir?" şeklinde orantıyı oluşturan dört değerden üçünün verildiği ve bilinmeyen dördüncü değerin istendiği problemler *bilinmeyen değer* (Cramer, Post ve Currier, 1993) veya *üç kuralı problemleri* (Vergnaud, 1983) olarak adlandırılırlar. İlköğretimin son sınıflarında orantısal düşünme ile formal olarak tanışan öğrenciler, ortaöğretim yıllarında da hem matematikte hem de fizik, kimya gibi diğer derslerde çeşitli orantısal ilişkiler içeren durumlarla karşılaşmaya devam ederler.

Doğrusallık Yanılgısı Nedir?

Çocukların çok erken yaşlardan itibaren doğrusal ve orantısal modellerin geniş kullanım alanlarını görmesi ve bu modellerin pek çok problemi başarıyla çözdüğünü deneyimlemesi (Van Dooren, De Bock, Hessels ve diğerleri, 2004) onlar için dezavantajlı bir durum yaratmakta ve uzun vadede onların karşılarına ciddi bir güçlük ve engel olarak çıkmaktadır (De Bock, Verschaffel ve diğerleri, 2002; Freudenthal, 1983; National Council of Teachers of Mathematics [NCTM], 1989). Öğrencilerin ilkokuldan üniversiteye kadar doğrusal ve orantısal modellerle uğraşmaları, bu modellerin evrensel bir uygulanabilirliği olduğunu düşünme ve gördükleri her sayısal ilişkiyi doğrusal ve orantısal ilişki gibi görme eğilimine sebep olmaktadır (De Bock ve diğerleri, 1998; De Bock, Verschaffel ve diğerleri, 2002; Freudenthal, 1983; Van Dooren, De Bock, Hessels ve diğerleri, 2004). Matematik eğitimi alanyazınında doğrusallığın aşırı genellemesi olarak tanımlanan bu eğilim genellikle *doğrusallık yanılgısı* (*illusion of linearity*) olarak tanımlanmaktadır (De Bock ve diğerleri., 1998; De Bock, Verschaffel ve diğerleri, 2002; Van Dooren, De Bock, Hessels ve diğerleri., 2004). Bunun yanında öğrencilerin bu eğiliminin alanyazında *doğrusallık kavram yanılgısı*, *doğrusal engel*, *doğrusal tuzak*, *doğrusal yanılgı* veya *sözde-orantısallık hatası* olarak da isimlendirildiği görülmektedir (De Bock ve diğerleri, 1998; Freudenthal, 1983; Modestou ve Gagatsis, 2007). De Bock ve diğerleri (1998) bu terimler arasında bazı küçük farklar olmasına rağmen bu terimlerin sıklıkla birbirlerinin yerine kullanıldığını belirtmiştir. Bu eğilimin isimlendirilmesinde kullanılan terimlerden de anlaşılabileceği üzere bu konu ile ilgili çalışma yapan araştırmacıların öğrencilerin bu eğilimini *hata* (De Bock ve diğerleri, 1998; De Bock, Verschaffel ve diğerleri, 2002), *kavram yanılgısı* (Van Dooren, De Bock, Hessels ve diğerleri, 2004) ve *olgu* (De Bock, Verschaffel ve diğerleri, 2002; Freudenthal, 1983; Van Dooren ve diğerleri, 2003) gibi terimleri kullanarak isimlendirdiği ve aynı şekilde bu terimleri de birbirlerinin yerine kullandığı görülmüştür.

*Van YYÜ Eğitim Fakültesi Dergisi (YYU Journal of Education Faculty),2022:Şubat Özel Sayı 240-270,*http://efdergi.yyu.edu.tr,
doi:10.33711/ yyuefd.1068107 **Derleme Makalesi** **ISSN: 1305-2020**

Doğrusallık ve Orantısallık: Matematiksel Yorum

Doğrusallık yanılgısı ile ilgili araştırma raporlarında *doğrusallık* ve *doğru orantısallık* ya da sadece *orantısallık* terimlerinin sıklıkla birbirlerinin yerine kullanıldığı görülmektedir (De Bock, Verschaffel ve diğerleri, 2002; Van Dooren ve diğerleri, 2003). Hatta De Bock, Verschaffel ve diğerleri (2002) bu terimlerinin aynı anlamda kullanılmasının bazı karışıklıklara yol açtığını belirtmiştir. Doğrusal dendiğinde bir çoğumuzun aklına gelen ve yine birçok ülkede ders kitaplarında $f(x)=ax+b$ $(a \neq 0)$ kuralı ile verilen fonksiyonlar doğrusal fonksiyon olarak tanımlanmasına rağmen vektör uzayı açısından bakıldığında $f(x)=ax+b$ $(b \neq 0)$ bir afin fonksiyondur (De Bock, Verschaffel ve diğerleri, 2002; Esteley, Villarreal ve Alagia, 2010; Van Dooren ve diğerleri, 2003). Bu çalışmalarda doğrusallık yanılgısı bağlamındaki *doğrusallık* (*linearity*) yani İngilizce'de *doğru* anlamına gelen *linea* anlamında değil, vektör uzayı bağlamında kullanmıştır (De Bock, Verschaffel ve diğerleri, 2002). *Doğrusal* terimi ve bu terimden türeyen *doğrusallık* $f(x)=ax$ $(a \neq 0)$ formundaki ilişkileri gösterir (De Bock, Verschaffel ve diğerleri, 2002). Van Dooren ve diğerleri (2008) üniversite seviyesinde lineer cebir derslerinde $f(x)=ax$ $(a \neq 0)$ formundaki fonksiyonların iki özelliğine değinildiğini belirtir; bu özelliklerin ilki $f(kx) = kf(x)$ ve ikincisi de $f(x+y) = f(x) + f(y)$ özelliğidir. Bu ilişkiler grafik olarak temsil edildiğinde ise bilindiği gibi eğimleri farklı olmakla beraber orijinden geçen doğrular şeklindedir.

Burada aynı zamanda *doğrusallık* ve orantısal olma durumu olarak tanımlayabileceğimiz *orantısallık* fikirlerinin çok yakından ilişkili olduğu söylenmelidir. Oran bildiğimiz üzere iki niceliğin arasındaki kesirsel ilişkiyi belirtir ve a/b biçiminde gösterilir. Örneğin "bir limonata tarifinde 4 limon için 2 bardak şeker kullanılmaktadır" durumunu ele alalım, burada limon sayısının şeker miktarına oranı 4/2 şeklinde gösterilir. Orantı kavramı ise, a/b = c/d şeklinde iki oranın eşitliğini gösterir. Doğrusallık kavramı ya da başka bir deyişle nicelikler arasındaki doğrusal ilişki $a/b = c/d = e/f$ ….. şeklinde sonsuz sayıdaki eşit oranlar arasındaki eşitliği gösterir. Fonksiyonel bağlamda, doğrusallık bağımlı ve bağımsız değişken arasındaki sabit oranı gösterir (Van Dooren ve diğerleri, 2008). Burada yukarı verdiğimiz örneği genişletirsek, "bir limonata tarifinde 4 limon için 2 bardak şeker için kullanılmaktadır, öyleyse 8 limon için 4 bardak şeker, 6 limon için 3 bardak şeker, 5 limon 2,5 bardak şeker … kullanılır" şeklinde yazabiliriz. Bu durumu matematiksel olarak $8/4 = 6/3 = 5/2{,}5 =$ ….. şeklinde gösteririz. Buna göre verilen örnekte, limon sayısı ile şeker miktarı arasında doğrusal bir ilişki olduğunu söyleyebiliriz. Bu ilişki fonksiyonel olarak ifade edildiğinde, limon sayısı

Van YYÜ Eğitim Fakültesi Dergisi (YYU Journal of Education Faculty),2022:Şubat Özel Sayı 240-270,http://efdergi.yyu.edu.tr,

doi:10.33711/ yyuefd.1068107 Derleme Makalesi ISSN: 1305-2020

bağımsız değişken, şeker miktarı ise bağımlı değişken olmak üzere $f(x) = x/2$ şeklinde gösterilir.

Doğrusallık Yanılgısı Örnekleri

Geometri ve Ölçme

Öğrencilerin doğrusallık yanılgısının en bilinen örneklerinin görüldüğü ve aynı zamanda bu olgunun en çok araştırıldığı alan geometri ve ölçmedir (De Bock, Van Dooren ve diğerleri, 2002; De Bock ve diğerleri, 1998; De Bock, Verschaffel ve diğerleri, 2002; De Bock ve diğerleri, 2003; Van Dooren ve diğerleri, 2007; Vlahović-Štetića, Pavlin-Bernardića ve Rajtera, 2010). Bu örnekler genellikle geometrik şekillerin kenarları ve alanları veya geometrik cisimlerin ayrıtları ve hacimleri arasındaki ilişkileri ele alan benzer şekillerin/cisimlerin genişletilmesi/küçültülmesi ile ilgili problemlerdir. Bir şeklin kenar uzunluğunu r kadar genişletmek/küçültmek alanı r^2 kadar, bir cismin ayrıt uzunluğunu r kadar genişletmek/küçültmek ise hacmi r^3 kadar genişlettiği/küçülttüğü herkes tarafından bilinen bir ilkedir. Kenar/ayrıt uzunluğunun değişimi ile alan/hacim değişimi arasındaki bu ilişkinin anlaşılmasındaki en önemli nokta, şeklin/cismin özelliğinden (kare, dikdörtgen, prizma, düzgün olmayan şekil veya cisim) bağımsız olarak sadece genişletme/küçültme katsayısına bağlı olduğunun bilinmesidir. Nitekim, benzer şekillerin/cisimlerin uzunluk, alan ve hacim arasındaki ilişkilerinin ele alındığı problemlerde öğrenci performanslarını inceleyen araştırmalar ilkokul ve ortaokul öğrencilerinin çoğunun bir şeklin/cismin kenar/ayrıt uzunlukları ikiye katlanırsa alanın/hacmin da ikiye katlanacağına inandığı belirtilmiştir (De Bock ve diğerleri, 1998; De Bock, Verschaffel ve diğerleri, 2002; NCTM, 1989; Van Dooren, De Bock, Hessels ve diğerleri, 2004; Van Dooren, De Bock, Weyers, ve Verschaffel, 2004). Özel olarak, Van Dooren ve diğerleri (2003) farklı eğitim geçmişleri olan pek çok öğrencinin eğer bir dairenin yarıçapı iki katına çıkarılırsa alanının da iki katına çıkacağına inandığını dile getirmiştir. De Bock ve diğerleri (1998) 12-13 ve 15-16 yaş grubu öğrencilere "Çiftçi Carl bir kenarı 200 metre olan kare şeklindeki bir tarlayı yaklaşık 8 saatte gübrelemektedir. Buna göre, bir kenarı 600 metre olan kare şeklindeki bir tarlayı ne kadar sürede gübreler?" (s. 68) problemini sormuştur. Bu problemde verilen kenar uzunluğu ve alanın büyüklüğü arasında orantısal bir ilişki olmamasına rağmen, 12-13 yaş grubundaki öğrencilerin %90'ından ve 15-16 yaş grubu öğrencilerin %80'inden fazlası tarlanın alanının dokuz katına çıktığını göz ardı ederek, bir kenar uzunluğu üç katına çıkıyorsa bu tarlayı gübrelemek için geçen süre de üç katına çıkmalıdır şeklinde bir orantı kurarak cevabı *24 saat* olarak vermişlerdir.

Van YYÜ Eğitim Fakültesi Dergisi (YYU Journal of Education Faculty),2022:Şubat Özel Sayı 240-270,http://efdergi.yyu.edu.tr,
doi:10.33711/ yyuefd.1068107 Derleme Makalesi ISSN: 1305-2020

Bu olgu üzerine çalışma yapan araştırmacılar aslında bu olgunun sadece günümüz öğrencileri için bir problem oluşturmadığını ve bu olguya yönelik kanıtların milattan önceye dayandığını vurgulamışlardır (Van Dooren, De Bock, Hessels ve diğerleri, 2004; Van Dooren ve diğerleri, 2003). Van Dooren, De Bock, Weyers ve diğerleri (2004) bunlardan en eski olanlardan ve en çok atıfta bulunulanlardan birisinin de Platon'un Menon diyaloğundaki köle olduğunu belirtmiştir. Bu diyalogda Sokrat köleden verilen bir karenin alanının iki katı alanına sahip bir kare çizmesini istediğinde, köle de bu doğrusallık tuzağına düşerek, verilen karenin kenarlarını iki katına çıkarmıştır.

Geometride uzunluk ve alan/hacim arasındaki ilişkiler matematiksel olarak çok temel bir ilke olmasına ve bu konuların matematik öğretim programlarında yer almasına rağmen geçmişi çok eskiye dayanan bu eğilimin bugün hala pek çok öğrencide var olduğu görülmektedir (De Bock, Verschaffel ve diğerleri, 2002; Van Dooren, De Bock, Hessels ve diğerleri, 2004). Van Dooren, De Bock, Hessels ve diğerleri (2004), matematik öğretim programlarında öğrencilerin farklı geometrik şekillerin/cisimlerin alanlarını/hacimlerini hesaplama yöntemleri ve hatta bazı durumlarda öğrencilere şekillerin ve cisimlerin genişletilmesinin veya küçültülmesinin çevreye, alana ve hacme etkisi açıkça öğretildiğini özellikle vurgulamıştır. Buna karşın, De Bock, Verschaffel ve diğerleri (2002) öğrencilerin genişletme ve küçültme etkinlikleri ile ilgili daha önceki deneyimlerinin onların uzunluk, alan ve hacimlerin genişleme veya küçültme oranlarının farkında olmalarını gerektirmediğini dile getirmiştir. Öğrencilerin geometri alanındaki doğrusallık yanılgılarını inceleyen araştırmalarda, benzer şekillerin/cisimlerin uzunlukları, alanları ve hacimleri arasındaki ilişkilerin ve bu ilişkiler ile ilgili temel ilkelerin anlaşılmasının uzun soluklu, güç ve karmaşık bir süreç olduğu özellikle vurgulanmaktadır (De Bock ve diğerleri, 1998; Vlahović-Štetića ve diğerleri, 2010).

Olasılık

Bir olayın meydana gelme olasılığını belirleme yeteneği olarak tanımlanan olasılıksal akıl yürütme (Fast, 1999) alanı pek çok kavram yanılgısı veya hata barındırmaktadır (Van Dooren ve diğerleri, 2008). Hawkins ve Kapadia (1984) olasılık tarihinde hata yapan matematikçilerin örneklerinin azımsanamayacak derecede olduğunu belirtmiştir. Van Dooren ve diğerleri (2003) bu hatalardan bazılarının doğrusal akıl yürütmenin aşırı genellemesinden kaynaklandığını dile getirmişlerdir. Van Dooren ve diğerleri (2008) olasılık alanındaki doğrusallık yanılgısı için öğrencilerin bir şans oyununda en az bir kez başarılı olma olasılığının deneme sayısı ile doğru orantılı olduğunu düşünmelerinin tipik bir örnek olduğunu belirtmiştir. Buna göre öğrencilerin doğrusal akıl yürütme ile bir zarla en az bir kez altı atma olasılığı *1/6*, bu zarı iki kere atmada bu olasılığın *2x(1/6)*, üç kere atmada olasılığın *3x(1/6)* olduğunu

Van YYÜ Eğitim Fakültesi Dergisi (YYU Journal of Education Faculty),2022:Şubat Özel Sayı 240-270,http://efdergi.yyu.edu.tr,
doi:10.33711/ yyuefd.1068107 Derleme Makalesi ISSN: 1305-2020

düşündüğü ve doğrusallık yanılgısı ile bu öğrencilerin deneme sayısının altıdan fazla olduğunda olasılığın 1'den fazla çıkacağını göz ardı ettiği vurgulanmıştır. Aslında bu problemdeki doğrusallık yanılgısının tarihinin aynı geometri alanında olduğu gibi çok eskiye dayandığına dikkat çekilmektedir (Van Dooren ve diğerleri, 2008). Bu problem olasılık kuramının doğmasını sağlayan *zar problemi*dir (Korkmaz, 2005). Tarihte ünlü bir kumarbaz olarak bilinen *Chevalier de Méré* tek bir zarı dört kere üst üste attığında en az bir kere altı atma olayının, çift zarı üst üste 24 kez attığında en bir kez düşeş (6-6) atma olayının eşit şekilde avantajlı olması gerektiğini düşünüyordu. Chevalier de Méré'nin bu düşüncesinin temelinde *4/6* oranının *24/36* oranına eşit olması mantığı vardı (Korkmaz, 2005). Buna göre Chevalier de Méré orantısal bir akıl yürütme ile atış sayısını altı katına çıkardığında başarılı olma şansının da altı katına çıkacağını, fakat zar sayısı arttığı için başarılı olma olasılığı altı kat daha azalacağını ve bunların birbirini götürdüğü için bu iki olayda başarı şansının eşit olduğunu düşünüyordu (Van Dooren ve diğerleri, 2008). Chevalier de Méré zamanla tek zarla oynadığında çift zarla oynadığından daha fazla kazandığını fark etti ve bu sorunun çözümünü yakın arkadaşı Pascal'a sordu. Pascal ise arkadaşına bir zarı dört kere üst üste attığında en az bir kere altı atma olasılığının $1-(5/6)^4=0.53$ olduğunu ve çift zarı üst üste 24 kez attığında en bir kez düşeş (6-6) atma olasılığının ise $1-(35/36)^{24} = 0.49$ olduğunu söyledi (Van Dooren ve diğerleri, 2003).

Diğer tipik bir örnek doğum günü problemi olarak bilinen *doğum günü paradoksu*dur. Otuz kişinin bulunduğu bir grupta en az iki kişinin aynı gün doğmuş olma olasılığının *0.71* gibi yüksek bir rakam olması pek çok insan için çok şaşırtıcıdır (Hawkins ve Kapadia, 1984; Van Dooren ve diğerleri, 2008). Bu problemde çoğu öğrenci gruptaki kişi sayısı ve iki kişinin aynı doğum gününe sahip olma olasılığı arasında doğrusal bir ilişki olduğunu düşünüyorlar ve bu olasılığı bulmak için gruptaki kişi sayısı ile (30) bir yıldaki tüm günler (365) arasındaki oranı dikkate alarak *30/365= .08* şeklinde bir çıkarım yapıyorlar (Van Dooren ve diğerleri, 2008). Bu akıl yürütmeye benzer olarak Shaughnessy (1992) çoğu insanın bir grupta iki kişinin aynı gün doğmuş olma olasılığının 0,5 olması için grupta en az 180 kişinin olması gerektiğine inandıklarını dile getirmiştir. Öğrencilerin olasılıksal akıl yürütme alanındaki kavram yanılgılarını inceleyen araştırmacıların kullandığı diğer bir örnek *bozuk para* problemidir (Fischbein, 1999; Fischbein ve Schnarch, 1997). Fischbein ve Schnarch (1997) çalışmalarında 5, 7, 9 ve 11. sınıf öğrencilerine ve matematik öğretmen adaylarına "üç bozuk parayı havaya attığınızda en az ikisinin tura gelme olasılığı, 300 atışta en az 200 kere tura gelme olasılığından (olasılığına) küçüktür/eşittir/büyüktür" (s. 99) sorusunu yöneltmiştir. Probleme *eşittir* yanlış cevabını veren öğrenci yüzdeleri 5, 7, 9 ve 11. sınıf öğrencileri için sırasıyla %30, %45, %60, %75, matematik öğretmen adayları için ise %44 olarak bulunmuştur. Burada öğrencilerin

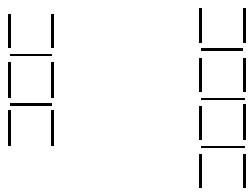
Van YYÜ Eğitim Fakültesi Dergisi (YYU Journal of Education Faculty),2022:Şubat Özel Sayı 240-270,http://efdergi.yyu.edu.tr,
doi:10.33711/ yyuefd.1068107 Derleme Makalesi ISSN: 1305-2020

2/3=200/300 şeklinde oranların eşitliğine dayalı bir akıl yürütme uygulayarak, üç bozuk paranın havaya atıldığında 2 veya 3 tura gelmesinin çok muhtemel olacağını ama 300 kez atıldığında 200 veya daha fazla tura gelme olasılığının çok fazla olmadığını göz ardı ettiği görülmüştür. Fischbein'e (1999) göre orantısallık şeması öğrencilerin akıl yürütmeleri üzerinde çok etkilidir ve öğrenciler genel olarak bu şemayı kullanırlar. Olasılık öğrenme alanındaki kavram yanılgılarını inceleyen araştırmacılar, öğrencilerin bu alanda orantısal akıl yürütmeyi sıklıkla ve uygun olmayan şekilde kullanmalarının sebeplerinden birinin olasılık ve orantı kavramlarının bilişsel ve sezgisel olarak çok ilişkili olmasına bağlamışlardır (Fischbein ve Gazit, 1984; Van Dooren ve diğerleri, 2003; Van Dooren ve diğerleri, 2008).

Örüntü, Kalkülüs, Grafik Çizimi

Öğrencilerin doğrusallık yanılgısının gözlemlendiği diğer bir konu da örüntüler konusudur. Stacey (1989) yaşları 9 ile 13 arasında değişen öğrencilerin $f(n)=an+b$ $(b \neq 0)$ formundaki örüntüleri genellemeleri ile ilgili yaptığı çalışmada merdiven problemini kullanmıştır (Şekil 1).

8 kibrit çöpü ile 2 basamaklı bir merdiven,
11 kibrit çöpü ile 3 basamaklı bir merdiven yapabilirim.



….
20 basamaklı bir merdiven yapmak için kaç tane kibrit çöpüne ihtiyaç vardır?
1000 basamaklı bir merdiven yapmak için kaç tane kibrit çöpüne ihtiyaç vardır?

Şekil 1. Stacey'nin (1989, s. 148) kullandığı merdiven problemi

Bu araştırmada öğrencilerin istenilen basamak sayısı için gereken kibrit çöpü sayısını bulmaya çalışırken en sık yaptığı hataların sebebi öğrencilerin doğrusal yöntemleri yanlış olarak kullanmalarıdır. Burada öğrencilerin bir kısmı merdiven basamakları ve kibrit sayıları arasındaki *kibrit çöpü sayısı = 3 x basamak sayısı + 2* şeklindeki afin ilişkiyi belirlemek yerine kibrit çöpü sayısı ve basamak sayısı arasında doğrusal bir ilişki kurarak *20 basamak için 60 kibrit çöpü, 1000 basamak için 3000 kibrit çöpü* cevabı verdikleri görülmüştür (Stacey, 1989). Stacey (1989) öğrencilerin bu cevaplarına gerekçe olarak her bir basamak için üç kibrit çöpüne gereksinim olduğunu söylediklerini belirtmiştir. Bunun yanında bir grup öğrencinin ise doğrusal fonksiyonların $f(ka)=kf(a)$ ve $f(a+b)=f(a)+f(b)$ özelliklerini kullanarak cevap verdikleri görülmüştür. Örneğin, 20 basamaklı merdiven için gereken kibrit çöpü sayısını

Van YYÜ Eğitim Fakültesi Dergisi (YYU Journal of Education Faculty),2022:Şubat Özel Sayı 240-270,http://efdergi.yyu.edu.tr,
doi:10.33711/ yyuefd.1068107 Derleme Makalesi ISSN: 1305-2020

bulmak için 5 basamaklı merdiven için gereken kibrit çöpünü çizip sayarak bulmuşlar ve daha sonra bu sayısı 4 ile çarpmışlardır (*f (20) = 4 f(5)*). Benzer olarak, bazı öğrencilerin de 12 ve 8 basamaklı merdiven için gerekli olan kibrit çöpü sayısını bulup topladıkları gözlenmiştir (*f(20)=f(12)+f(8)*) (Stacey, 1989). Stacey (1989) bu hatalarının sebepleri ile ilgili olarak öğrencilerin çok küçük yaşlardan itibaren doğru orantılı ilişkilere sezgisel olarak çok aşina oldukları için bu ilişkileri aşırı genellediklerini vurgulamıştır. Aynı zamanda Stacey (1989), öğrencilerin bu konular ile ilgili formal bir eğitim almadan önce de doğru orantı, doğrusal ve afin fonksiyonların arasındaki ilişkiler ile ilgili belli başlı özellikleri aşırı genelleme yaparak kendilerince bir anlayış geliştirdiklerinin altını çizmiştir.

Doğrusallık yanılgısının gözlemlendiği diğer bir konu da kalkülüstür. Esteley ve diğerleri (2010) yaşları 18 ile 20 arasında değişen üniversite öğrencilerinin doğrusal modelleri aşırı genellemelerini araştırdıkları uzun soluklu çalışmalarında kullandıkları sorulardan biri olan ağaç problemi Şekil 2'de verilmiştir.

Ağaç problemi: Bir ağacın dikildikten bir ay sonraki uzunluğunu veren denklem yükseklik cm ve zaman ay olmak üzere $h(t) = 8.log_2 t + 70$ denklemi ile verilmektedir.

a) Ağacın 6 ay sonraki uzunluğunu hesaplayın.
b) Ağacın 1 m uzunluğa ulaşması için geçmesi gereken süreyi bulun.

Şekil 2. Esteley ve diğerlerinin (2010, s. 91) kullandığı ağaç problemi

Öğrencilerin %10'u ağaç problemini doğrusal yöntemler kullanarak çözmüşlerdir. Bu problemde uzunluk ve zaman arasındaki logaritmik ilişki açıkça sunulmuştur. Öğrenciler sorunun ilk maddesini denklemi kullanarak bulmuşlar fakat ikinci maddesi için ilk maddede bulduğu cevabı kullanarak problemi bilinmeyen değer problemiymiş gibi düşünmüş ve doğru orantı kurarak çözmüşlerdir (Esteley ve diğerleri, 2010). Aynı çalışmada öğrencilere yöneltilen ve nicelikler arasındaki ilişkilerin açıkça verilmediği bitki problemi Şekil 3'te verilmiştir.

Bitki problemi: Eğer bir bitki deneyin başında 30 cm uzunluğunda ise ve uzunluğu her ay %50 artıyorsa, bu bitkinin boyu 3 ay sonra kaç cm olur?

Şekil 3. Esteley ve diğerlerinin (2010, s. 91) kullandığı bitki problemi

Öğrencilerin %47'si bitki problemini doğrusal yöntem kullanarak çözmüşlerdir. Burada öğrenciler bitkinin büyüme sürecinin üstel olduğunu göz ardı etmişler ve *her ay %50 artıyorsa* ifadesini kullanarak *15 cm* uzunluğunu bulmuş, her ay *15 cm* uzarsa *3 ayda 45 cm* uzar, ilk uzunluk da *30 cm* olduğu için *3 ay* sonunda *75 cm olur* cevabını vermişlerdir. Esteley ve

doi:10.33711/ yyuefd.1068107 Derleme Makalesi ISSN: 1305-2020

diğerleri (2010) ortaokul ve lise öğrencilerinde görülen doğrulsallık yanılgısının üniversite öğrencilerinde de görüldüğünü ve bu öğrencilerin verilen problemlerdeki koşulları doğrulamadan ilköğretimde öğrendikleri üç kuralını uyguladıklarını belirtmiştir.

Leinhardt ve diğerleri (1990) öğrencilerin grafik çizme konusundaki kavram yanılgılarını sınıflandırmışlardır ve bu sınıflandırmalardan birini de *doğrusallık* olarak nitelendirmişlerdir. Leinhart ve diğerleri (1990) inceledikleri çalışmalarda öğrencilerin grafik çizerken doğrusallığa eğilimlerinin olduğuna dikkat çekmişlerdir. Örneğin Markovits, Eylon ve Bruckheimer (1986) yaşları 14-15 arasında olan 9. sınıf öğrencilerinden verilen iki noktadan geçen fonksiyon grafiklerinin çizilmesi istendiğinde öğrencilerin çoğunlukla düz doğrular çizdiğini belirtmiştir. Aynı zamanda Hadjidemetriou ve Williams (2002) matematik öğretmenlerinin de öğrenciler gibi *bir kişinin doğumundan 30'lu yaşlarına kadar olan boy uzunluğunun grafiğini çizme* görevinde ağırlıklı olarak orijinden geçen ve doğrulardan oluşan grafikleri çizdiklerini vurgulamıştır. Van Dooren ve diğerleri (2008) öğrencilerin doğrusal olmayan durumları temsil etmede doğrusal ve orijinden geçen doğrular ile ilgili kavram yanılgılarına yönelik olarak, öğrencilerin nicelikler arasındaki herhangi bir ilişkinin tipik bir temsili olarak doğrular çizmesini, bilinmeyen değer problemlerinde doğru orantı kurarak çözmelerinin çok benzer olduğunu belirtmiştir.

Bilinmeyen Değer Yapısındaki Problem Türleri

Doğrusallık yanılgısı ile ilgili olarak yapılan alanyazın taraması, öğrencilerin bu eğilimlerinin görüldüğü örneklerin sadece geometri ve olasılık gibi matematiğin alt öğrenme alanlarında ya da kalkülüs gibi üniversite düzeyinde verilen derslerde olmadığını göstermiştir. Aynı zamanda öğrencilerin öğrenim hayatları boyunca karşılaştıkları belli başlı bazı problem türlerinde de doğrusal model kullanma eğilimlerinin olduğu kanıtlanmıştır. Öğrencilerin orantısal yöntemleri kullanmak için kuvvetli bir eğilim duydukları problem türleri bilinmeyen değer yapısında sunulan ama çözümü orantısal değil toplamsal akıl yürütme gerektiren problemlerdir. Örneğin, Cramer ve diğerleri (1993) çalışmalarında matematik öğretmen adaylarına "Sue ve Julie bir koşu parkurunda eşit hızla koşmaktadırlar. Sue koşuya önce başlamıştır. Sue 9 tur koştuğunda, Julie 3 tur koşmuştur. Julie 15 tur tamamladığında, Sue kaç tur koşmuş olur?" (s. 132) problemini yöneltmiştir. Çalışmaya katılan 33 öğretmen adayından 32 tanesi verilen problemdeki niceliklerin arasındaki farkın sabit olmasına rağmen doğru orantı kurarak problemi $9/3 = x/15$ öyleyse $x = 45$ şeklinde cevaplamışlardır.

Yukarıdaki örneklere benzer olarak diğer bir sınıflama da öğrencilerin gerçek yaşam durumlarını dikkate almadan doğrusal model kullanarak çözdükleri problemlerdir. Örneğin Verschaffel ve diğerleri (1994) yaşları 10 ve 12 arasında olan öğrencilere "John'un en iyi 100

*Van YYÜ Eğitim Fakültesi Dergisi (YYU Journal of Education Faculty),2022:Şubat Özel Sayı 240-270,*http://efdergi.yyu.edu.tr,

doi:10.33711/ yyuefd.1068107 **Derleme Makalesi** **ISSN: 1305-2020**

metre rekoru 12 saniyedir. John bir kilometreyi ne kadar sürede koşar?" (s. 276) problemini sormuştur. Çalışmanın sonuçlarına göre bu öğrencilerin %90'ından fazlası koşucunun 1000 metreyi de aynı hızla koşabileceğinin mümkün olacağı varsayımı ile bu problemi 170 saniye olarak cevaplamıştır. Verschaffel ve diğerleri (1994) burada öğrencilerin kendilerine verilen matematik problemlerini gerçek yaşamları dikkate almadan ve anlamlandırmadan sadece problem cümlesinin altında yatan gizli matematiksel işlemleri bulmaya çalıştıklarını vurgulamış ve çoğu öğrencinin de bunu yaparak *okul problemleri oyunu* oynadıklarını belirtmiştir. Öğrencilerin gerçek yaşamı ihmal ettikleri bir diğer örnek Van Dooren ve diğerleri (2005) çalışmasında yer almaktadır. Van Dooren ve diğerleri (2005, s. 65) çalışmalarında "5 müzisyenden oluşan bir grup bir şarkıyı 10 dakikada çalmaktadır. 35 kişiden oluşan diğer bir grup aynı şarkıyı kaç dakikada çalar?" problemini sınıf seviyeleri 3 ve 8 arasında değişen öğrencilere yöneltmiştir. Çalışmada öğrencilerin genel olarak yarısından fazlası bu problemi orantı kurarak *10x7 = 70 dakika* şeklinde cevaplamıştır.

Doğrusallık Yanılgısının Sebepleri

Doğrusallık yanılgısı ile ilgili çalışma yapan pek çok araştırmacı bu olgunun en önemli sebeplerinden birinin bilinmeyen değer problem yapısı olduğunu belirtmektedir (Esteley ve diğerleri, 2010; Van Dooren ve diğerleri, 2008). Bunun yanında öğrencilerin düşünme süreçlerinde etkili olan bazı sezgilerin de doğrusallık yanılgısı ile ilişkili olduğunu ileri süren araştırmacılar da bulunmaktadır (De Bock, Van Dooren ve diğerleri, 2002; Van Dooren ve diğerleri, 2008). Daha önce de benzer şekilde tanımlandığımız gibi yapısal olarak *a*, *b*, *c* ve *d* şeklinde dört niceliği içeren ve problem durumunda genellikle üç niceliğin verildiği ve dördüncü niceliğin istendiği orantısal problemler bilinmeyen değer problemleri olarak tanımlanır. Bu tür problemlerde öğrencilerden beklenen, *a* ile *b* arasındaki çarpımsal ilişkinin, *c* ile *d* arasındaki ilişki için de geçerli olduğunu bilmeleri ve bunun uygulamasını yapmalarıdır (Behr, Harel, Post ve Lesh, 1992). Esteley ve diğerleri (2010) okullarda orantısal durumları içeren bilinmeyen değer problemlerinde genellikle Şekil 4'teki *üç kuralı şeması* kullanıldığını belirtmiştir. Bu şema genellikle şu şekilde yorumlanır; eğer *a* ile *b* eşleşiyorsa, *c* ile eşleşen değer $z = \frac{b.c}{a}$ şeklinde hesaplanır. Bu durumun altında yatan matematiksel model doğrusal modeldir ve *y* = *m.x* şeklinde gösterilir. Burada *a* ve *c*, *x*'in belirli değerleridir. Verilen duruma göre *b* = *y(a)* ve *z* de *y(c)* için bilinmeyen değerdir (Esteley ve diğerleri, 2010). Bunu bir örnek üzerinden şu şekilde açıklayabiliriz. Örneğin "2 gömlek 40 TL ise, 6 gömlek kaç TL'dir?" problemini düşünelim. Burada *b* değeri yani gömlek ücreti *a* değerine yani gömlek sayısına

doi:10.33711/ yyuefd.1068107 Derleme Makalesi ISSN: 1305-2020

bağlı bir fonksiyon olarak *b=y(a)* formunda belirtilebilir, verilen problem durumuna göre de *b=20.a* yazılır. Benzer olarak *z=y(c)* olur ve buradan *a* ile *b* arasındaki ilişkinin *c* ve *z* arasındaki ilişkiye genişletilmesi ile *z=20.c* fonksiyonu elde edilir.

$$a \longrightarrow b$$

$$c \longrightarrow z = \frac{b.c}{a}$$

Şekil 4. Üç kuralı şeması (Esteley ve diğerleri, 2010, s. 92)

Bilinmeyen değer problemi yapısında olan fakat nicelikler arasındaki ilişkinin doğrusal model ile temsil edilemeyen problemleri *sözde orantısal* olarak nitelendiren Verschaffel, Greer ve De Corte (2000) bu tür problemlerin çözümünde öğrencilerin doğrusal modeli uygulamaları için büyük bir baskı yarattığını ve böylece öğrencilerde doğru orantısallığı uyandıran kuvvetli bir eğilim meydana geldiğini belirtmiştir. Üniversite öğrencileri ile kalkülüs dersinde doğrusallık yanılgısı ile ilgili yaptıkları çalışmada bilinmeyen değer problem yapısını kullanan Esteley ve diğerleri (2010), bu problem yapısının doğrusal orantının temsilinin kullanılmasını cesaretlendirdiğini ve bu problemleri orantısal bilinmeyen değer problemleri olarak algılayan öğrencilerin problem durumlarındaki değişkenler arasında farkında olmayarak orantısal bir ilişki olduğunu varsaydıklarını gözlemlemiştir. Esteley ve diğerleri (2010) bazı öğrencilerin kendilerine verilen problemleri doğrusal olmayan ve matematiksel olarak doğru olan çözümlerinin bile üstünü çizerek yine üç kuralı şemasını uyguladıklarını özellikle vurgulamıştır.

Öğrencilerin doğrusallık yanılgısı ve bilinmeyen değer problem yapısı arasında kurulan ilişki, öğrencilerin matematik problemlerini çözerken problemlerin sunuş biçiminden önemli ölçüde etkilendiklerini ve sahip oldukları matematiksel kavramları problem çözme süreçlerine yansıtamadıklarını göstermektedir. Öğrencilerin sözel problemlerin sunuş biçiminden etkilenmelerinin en önemli sebepleri arasında problemi yüzeysel okuma (Greer, 1997), ipuçlarına dayalı problem çözme yaklaşımı sergileme (Van Dooren ve diğerleri, 2005) ve okul matematiği problemlerine bakış açıları (Van Dooren, De Bock, Evers ve Verschaffel, 2009; Verschaffel ve diğerleri, 2000) sayılabilir. Örneğin, Greer (1997) öğrencilerin orantısal olmayan bilinmeyen değer problemlerini yüzeysel okumalarının orantısallık algısı yaratabileceğine ve bunun da öğrencilerin sadece problem yapısını dikkate alarak orantısal

Van YYÜ Eğitim Fakültesi Dergisi (YYU Journal of Education Faculty),2022:Şubat Özel Sayı 240-270,http://efdergi.yyu.edu.tr,
doi:10.33711/ yyuefd.1068107 Derleme Makalesi ISSN: 1305-2020

çözüm yöntemlere başvurmasına sebep olabileceğine dikkat çekmiş ve tipik bir okul matematiği probleminin öğrencilerin sahip oldukları tüm matematiksel bilgi ve becerilerini kullanmaya teşvik etmeyeceğinin altını çizmiştir. Verschaffel ve diğerleri (2000) öğrencilerin problem durumlarında gerçek hayatı dikkate almadan problemi çözme girişimlerini onların *okul matematiği oyunu* oynamalarını sebep olarak göstermiştir. Burada öğrencilerin tek amacı problemleri gerçekçi matematiksel modeller kurarak çözmeye çalışmak yerine problem ifadesinin altında yatan gizli matematiksel işlemleri bulmaya çalışmaktır.

Bilinmeyen değer problem yapılarının ilkokuldan üniversiteye kadar olan düzeydeki öğrencilerde doğrusal model kullanma eğilimi yaratmasının bir diğer sebebi de öğrencilerin eğitim geçmişleri ve onların karşı karşıya bırakıldıkları öğretim etkinlikleri altında yatmaktadır. Bilinmeyen değer problemleri orantısal akıl yürütme ile ilgili en sık kullanılan problem türüdür (Cramer ve Post, 1993; Van Dooren ve diğerleri, 2008). Benzer olarak ders kitapları da öğrencilerin orantısal akıl yürütme ile ilgili becerilerini arttırmak ve değerlendirmek için çoğunlukla bilinmeyen değer yapısını kullanmaktadır (Cramer ve Post, 1993). Van Dooren ve diğerleri (2008) öğrencilere sunulan orantısal akıl yürütme problemlerinin çoğunun bilinmeyen değer yapısında olması ve aynı zamanda orantısal olmayan problemlerin de nadiren bilinmeyen değer yapısında olması öğrencilerin orantısallık ile ilgili derin bilgiye sahip olmasını engellediğini belirtmiştir. Van Dooren ve diğerleri (2008) bu öğretim yaklaşımının öğrencilere problem yapısı ve çözüm yöntemi arasında yüzeysel ilişki kurmasını öğrettiğini ve böylece öğrencilerin problem durumlarındaki nicelikler arası ilişkileri değerlendirmeden, problem ile ilgili bir anlam yaratmadan ve mantıklı düşünmelerini askıya alarak problemleri çözdüklerini vurgulamıştır. Bu bağlamda, orantısal akıl yürütme becerilerinin ve orantısallık kavramının kazandırılması amacı ile yürütülen bu öğretim etkinliklerinin öğrencilerin orantısallık kavramını öğrenmelerine yardımcı olmadığı gibi, doğrusallık yanılgılarının oluşmasına da hizmet ettiğini söylemek çok da yanlış olmayacaktır. Nitekim, orantısallık kavramının öğrenilmesine yönelik alanyazında, orantısal akıl yürütmenin sadece iki eşit oranı kurmak ve bilinmeyen değeri bulmaktan çok daha fazla beceriyi (orantısal olarak birbiri ile ilişkili nicelikleri tanıma, bu nicelikler arasındaki ilişkileri sayı, tablo, grafik ve denklem gibi farklı temsillerle gösterme gibi) içerdiği belirtilmektedir (NCTM, 2000).

Öğrencilerin doğrusallık yanılgıları ve bilinmeyen değer problem yapıları arasındaki ilişkiyi inceleyen Van Dooren ve diğerleri (2005) yürüttükleri çalışmada sınıf düzeyleri 2 ile 8 arasında değişen öğrencilere orantısal ve orantısal olmayan bilinmeyen değer problemleri vermişlerdir. Buna göre araştırmanın en beklenen sonucu öğrencilerin orantısal bilinmeyen değer problemlerindeki performanslarının 8. sınıfa kadar önemli ölçüde artmasıdır.

Van YYÜ Eğitim Fakültesi Dergisi (YYU Journal of Education Faculty),2022:Şubat Özel Sayı 240-270,http://efdergi.yyu.edu.tr,
doi:10.33711/ yyuefd.1068107 Derleme Makalesi ISSN: 1305-2020

Araştırmanın diğer önemli sonuçları da, öğrencilerin orantısal olmayan bilinmeyen değer problemlerinde orantısal yöntemlerin aşırı kullanımının 5. sınıflarda ciddi oranda artması (%51) fakat daha sonra 8. sınıflarda azalması (% 22) ve aynı zamanda 2. ve 3. sınıf öğrencilerinin de bu orantısal yöntemleri kullanmalarıdır (Van Dooren ve diğerleri, 2005). Bu bağlamda sonuçlar doğrusallık yanılgısı ve orantısallık kavramının öğretilmesinde sıklıkla kullanılan bilinmeyen değer problem yapısı arasındaki ilişki ile ilgili yorumlanması gereken iki önemli unsuru ortaya çıkarmaktadır. Bunlardan birinci unsur, öğrencilerin formal olarak orantısallık kavramı ile tanıştıkları 5. sınıf seviyesinde doğrusallık yanılgılarının artması bu olgunun orantısallık kavramının öğretilmesinde sıklıkla kullanılan bilinmeyen değer problemlerinden kaynaklandığına dair bir kanıt ortaya koymaktadır. Van Dooren ve diğerleri (2005) bu sonuç ile ilgili olarak bu tip problemlerin sınıf ortamında uygulandıkça aşırı kullanımının ön plana çıktığını ve daha sonra azaldığını fakat hiçbir zaman kaybolmadığını belirtmiştir. Diğer unsur da ikinci ve üçüncü sınıf öğrencilerinde yani henüz orantısallık ile formal olarak tanışmayan öğrencilerde de bu olgu ile karşılaşılması bu olgunun sadece kullanılan bilinmeyen değer problem yapısından kaynaklanmadığına ve bundan başka unsurların da bu olguya sebep olabileceğinin düşünülmesi gerektiğini kanıtlamıştır. Buna göre öğrencilerin doğrusallık yanılgısı ile ilgili çalışmalar yürüten araştırmacılar bu olguya sebep olan diğer nedenler arasında sezgilerin ve sezgisel kuralların olabileceğini belirtmişlerdir (De Bock, Van Dooren ve diğerleri, 2002; Van Dooren ve diğerleri, 2008).

Stavy ve Tirosh (1996) sezgilerin öğrencilerin matematik ve fen alanlarındaki düşünme süreçlerinde ve bu alanlardaki sorulara verdikleri cevaplarda önemli ölçüde etkileri olduğunun yaygın olarak kabul edildiğini belirtmiştir. Tirosh ve Stavy (1999a, 1999b) tarafından geliştirilen *sezgisel kurallar teorisi* öğrencilerin doğrusallığı aşırı genelleme ile ilgili uygulamalarının açıklamasında kullanılabilir. Bu teoriye göre öğrencilerin tepkilerini yönlendiren bazı yaygın içgüdüsel kurallar vardır ve bu kurallardan ikisi; *daha fazla A–daha fazla B* ve *aynı A–aynı B* kurallarıdır. Burada *daha fazla A–daha fazla B* kuralı için verilebilecek bir örnek *çevresi büyük olan karenin alanı da büyüktür* olabilir, benzer olarak *aynı A–aynı B* kuralı için ise *aynı çevre uzunluğuna sahip dikdörtgenlerin alanı da aynıdır* örneği verilebilir. Van Dooren ve diğerleri (2008), *aynı A–aynı B* kuralı için verilen bazı örneklerin doğrusallık yanılgısı için verilen örneklerin aynısı olduğunu belirtmiştir. Örneğin bu örneklerden birisi öğrencilerin bir bozuk para 3 kez atıldığında 2 veya daha fazla tura gelme ihtimali 300 atışta en az 200 kez tura elde etme olasılığı ile aynı olduğuna inanmasıdır. Benzer olarak De Bock, Van Dooren ve diğerleri (2002) öğrencilerin doğrusallık yanılgıları ve sezgisel kural teorileri arasında ilişkinin varlığına dikkat çekmişlerdir. Bunun için bazı öğrencilerin büyük şeklin daha

doi:10.33711/ yyuefd.1068107 Derleme Makalesi ISSN: 1305-2020

fazla alanının olduğuna yönelik düşüncelerinin *daha fazla A–daha fazla B* kuralını çağrıştırdığını ve yine benzer olarak öğrencilerin genişletme etkinliğinde şeklin biçiminin değişmediği ve her şeyin aynı sayı ile çarpıldığına yönelik düşüncelerinin ise *aynı A–aynı B* kuralını çağrıştırdığını vurgulamışlardır. Öğrencilerin *aynı A–aynı B* kuralını çağrıştıran her şeyin aynı sayı ile çarpıldığına yönelik düşünceleri *k kere A–k kere B* akıl yürütmesine yol açmıştır. Vlahović-Štetića ve diğerleri (2010) öğrencilerin doğrusallık yanılgısı sergiledikleri problem durumlarında sezgisel kurallardan etkilendiğini belirtmiş ve bu süreçte öğrencilerin problem sonucu ile ilgili olarak son derece emin olduklarının ve doğrulamaya gereksinim duymadıklarının altını çizmiştir.

Doğrusallık Yanılgısı ile İlgili Deneysel Araştırmalar

Bu derleme çalışması doğrusallık yanılgısı ile ilgili farklı ülkelerde ve farklı yaş grubundan öğrenciler ile yürütülen pek çok araştırma yapıldığını göstermiştir. Bu bölümde özellikle öğrencilerin doğrusallık yanılgılarını etkileyen etmenleri ortaya çıkarmayı ve bu yanılgıları önlemeyi amaçlayan deneysel çalışmalara odaklanılmıştır. Örneğin, De Bock ve diğerleri (1998) çalışmalarında Belçika'da öğrenim gören 12-13 ve 15-16 yaş grubundaki öğrencilerin doğrusal model kullanma eğilimlerini ve öğrencilerin bu eğilimlerinin engellenmesinde çizimlerin etkisini incelemişlerdir. Öğrencileri üç gruba ayıran De Bock ve diğ. (1998), ilk grupta yer alan öğrencilere problemlerle ilgili hiçbir yönerge vermemiş, ikinci gruptaki öğrencilere hesaplama yapmadan önce özellikle problem durumu ile ilgili bir çizim yapmaları ile ilgili yönerge vermiş ve son olarak da üçüncü gruptaki öğrencilere ise her bir problem ile birlikte hazır çizilmiş bir şekil vermişlerdir. Araştırmacıların öğrencileri çizim yaptırmaya yönlendirmesi ve öğrencilere hazır çizilmiş şekil vermelerinin amacı öğrencilerin verilen problem durumlarındaki bilinen ve bilinmeyen nicelikler arasındaki ilişkinin özellikle doğrusal olmadığını keşfetmelerine yardımcı olmaya çalışarak onların sıklıkla kullandıkları doğrusal akıl yürütmenin uygun olmadığını görmelerini sağlamaktır. Araştırmanın sonuçları 12-13 ve 15-16 yaş grubu öğrencilerin orantısal problemlerde sırasıyla %92 ve %93 doğru cevap yüzdesi ile iyi performans sergilemelerine karşın, bu öğrencilerin orantısal olmayan problemlerdeki doğru cevapların yüzdeleri sırasıyla %2 ve %17 olduğunu göstermiştir. Buna göre, De Bock ve diğerleri (1998) 12-13 yaş grubu öğrencilerde daha baskın olmakla beraber 15-16 yaş grubu öğrencilerde de düzlemsel şekillerin uzunlukları ve alanlarını içeren problemlerde doğrusal akıl yürütme eğilimlerinin çok yaygın ve bu eğilimin çok kuvvetli olduğuna dair kanıt bulduklarını ifade etmişlerdir. Bunun yanında diğer önemli bir sonuç da ne öğrencilerin kendilerinin çizdiği ne de verilen hazır çizilmiş şekillerin öğrencilerin doğrusallık

*Van YYÜ Eğitim Fakültesi Dergisi (YYU Journal of Education Faculty),2022:Şubat Özel Sayı 240-270,*http://efdergi.yyu.edu.tr,
doi:10.33711/ yyuefd.1068107 **Derleme Makalesi** **ISSN: 1305-2020**

yanılgılarını önlemeye yardımcı olmadığı sonucudur. Bu çalışmanın devamı niteliğinde olan başka bir çalışmada da aynı yaş gruplarındaki öğrencilerin doğrusallık yanılgılarını etkileyen etmenler incelenmiştir (De Bock, Verschaffel ve diğerleri, 2002). Araştırmacılar öğrencilerin üstbilişlerini etkin hale getirmek, farkındalıklarını arttırmak ve onların problemlerin çözümünde doğrusal modelin uygun olup olmadığını sorgulamasını sağlamak amacıyla problemleri üstbilişsel desteklerle birlikte sunmuştur. Bunlardan birincisi problemin iki farklı çözümünün de problem ile birlikte verildiği üstbilişsel destektir (Şekil 5). Araştırmacıların öğrencilere bu tür bir üstbilişsel destek sunmalarındaki amaç öğrencilerin iki farklı alternatif çözümü ve bu çözümler altında yatan akıl yürütme ile yüzleşmeleri sağlanarak onların bilişsel çatışma yaşamalarına yol açmaktır. De Bock, Verschaffel ve diğerlerinin (2002) kullandıkları ikinci üstbilişsel destek ise öğrencilere problem durumunda yer alan geometrik şekillerin kareli kağıda çizilmiş görselleridir. Araştırmacılar, sonuçların her iki üstbilişsel desteğin de bekledikleri şekilde öğrencilerin orantısal olmayan maddelerdeki performanslarını az da olsa anlamlı olarak etkilediğini belirtmiştir. Nitekim De Bock, Verschaffel ve diğerleri (2002), üstbilişsel desteklere rağmen bazı maddelere verilen doğru cevap yüzdelerinin %10 olmasının öğrencilerin doğrusal modeli kullanma eğilimlerinin gerçekten çok kuvvetli, köklü ve değişime dirençli olmasının bir göstergesi olduğunu vurgulamıştır. Bunun yanında araştırmacılar, üstbilişsel desteklerin öğrencilerin bazen doğrusal modelin uygun olduğu durumları içeren problemleri de sorgulamalarına yol açtığını ve bu şekilde orantısal maddelerdeki performanslarının düştüğünün de altını çizmişlerdir (De Bock, Verschaffel ve diğerleri, 2002).

Bir kenarı 2 cm olan ahşap bir küp 6 gram gelmektedir. Peki bir kenarı 4 cm olan benzer bir küp kaç gram ağırlığındadır?

İki öğrenci Wim ve Steve bu probleme iki farklı çözüm önermiştir.

Wim: 4 cm 2 cm'nin iki katıdır, ondan dolayı ağırlığı 2 ile çarpmalıyım. Öyleyse, 6 gram x 2 = 12 gram olur.

Steve: Bir kenarı 4 cm olan bir küp kenarı 2 cm olan 8 küp içerir. Bundan dolayı ağırlığı 8 ile çarpmalıyım. Böylece, 6 gram x 8 = 48 gram olur.

Şekil 5. Üstbilişsel destek (De Bock, Verschaffel ve diğerleri, 2002, s. 71)

Maddelerin deneysel olarak manipüle edildiği diğer bir araştırmada Modestou ve Gagatsis (2007) ortaokul öğrencilerinin uygun olmayan doğrusal model kullanma eğilimlerinin rastgele olmadığını ve bu eğilimin üstesinden gelmenin çok zor olduğuna yönelik kanıtlar bulmuşlardır. Ortaokul öğrencilerine (370 öğrenci) verilen farklı testlerde geometrik

doi:10.33711/ yyuefd.1068107 Derleme Makalesi ISSN: 1305-2020

şekillerin/cisimlerin kenar/ayrıt uzunlukları ve alan/hacimleri arasındaki ilişkileri konu alan maddeler yer almaktadır. Örneğin bir maddedeki problem bağlamında (havuz) dikdörtgenler prizmasının ayrıt uzunlukları verilmeden hacmi verilip ayrıtları iki katına çıktığında hacmin nasıl değiştiğine yönelik bilgi istenmektedir. Diğer bir testte ise yine benzer problem dikdörtgenler prizmasının ayrı ayrı ayrıtları ve hacmi verilip ayrıt uzunlukları iki katına çıktığındaki hacminin nasıl değiştiğine yönelik bilgi istenmektedir. Üçüncü tip testte ise De Bock, Verschaffel ve diğerlerinin (2002) çalışmasına benzer şekilde maddeler iki kurgusal iki akranın farklı çözümleri ile birlikte verilip öğrencilerden doğru düşündükleri çözüm stratejisini seçmeleri ve gerekçelendirmeleri beklenmektedir. Modestou ve Gagatsis (2007) araştırmanın sonuçlarının öğrencilerin orantısal olmayan durumlarda orantısal akıl yürütmeyi hatalı olarak kullanmalarının rastgele bir olgu olmadığını ve hatta bu olgunun dirençli, devam eden ve öğrencilerin sınıf seviyesinden ve kullanılan maddelerden bağımsız olduğunu gösterdiğine dikkat çekmiştir.

Geleneksel sözel problemler yerine anlamlı ve özgün performans görevlerinin öğrencilerin doğrusal model kullanma eğilimlerini önlemede etkili olup olmadığını inceleyen Van Dooren ve diğerleri (2007) ise 93 altıncı sınıf öğrencisi ile bir çalışma yürütmüşlerdir. Çalışmada bireysel görüşme ile yönlendirilen özgün performans görevi gerçek materyallerle beraber bir bebek evinin kare olan farklı oda tabanlarının kenar uzunluklarının ölçümünü, taban alanlarının karolarla döşenmesini ve karşılaştırılmasını içermektedir. Araştırmacılar, özgünlük içeren gerçek yaşam problemlerinin somut materyallerle desteklenmesinin öğrencilerin doğrusal akıl yürütme eğilimlerini önlemede etkili olduğunu belirtmiştir. Bunun yanında bu etkinin kısa süreli olduğunu tek bir deneyimin performans görevinden sadece birkaç gün sonra uygulanan son-testte neredeyse tüm öğrencilerin sözel problemlerde yine doğrusallık yanılgısına düştüklerine dikkat çekilmiştir. Çalışmalarında kullandıkları problemleri deneysel olarak manipüle eden Van Dooren ve diğerleri (2009) 508 dördüncü, beşinci ve altıncı sınıf öğrencisi ile yürüttükleri çalışmada bilinmeyen değer problemlerinde kullanılan sayıların öğrencilerin doğrusallık yanılgılarını etkileyip etkilemediğini araştırmışlardır. Van Dooren ve diğerleri (2009) orantısal olan ve orantısal olmayan problemlerde kullanılan sayıları sistematik olarak manipüle ederek oranların tam sayı olduğu ve olmadığı problem setleri oluşturmuşlardır. Çalışmanın sonuçları öğrencilerin orantısal olmayan bilinmeyen değer problemlerinde verilen sayılar tam sayı oranlar oluşturmadığında orantısal yöntemleri aşırı kullanma eğilimlerinin daha az olduğunu göstermiştir. Van Dooren ve diğerleri (2009) bilinmeyen değer problemlerindeki sayıların türünün doğrusallık yanılgısını etkilemede önemli bir role sahip olduğunu ve özellikle alt sınıftaki öğrencilerin eğer sayılar onlara ona izin veriyorsa doğrusallık yanılgısı eğiliminde

doi:10.33711/ yyuefd.1068107 Derleme Makalesi ISSN: 1305-2020

bulunduklarını belirtmiştir. Vlahovic-Stetic ve diğerleri (2010) ise çoktan seçmeli test türünün öğrencilerin doğrusallık yanılgısı eğilimlerine etkisi olup olmadığını incelemiştir. Çalışmada 112 lise öğrencisine hem orantısal hem de orantısal olmayan problemler ve her bir problem için de beş alternatif sonuç verilmiştir. Katılımcılardan bir gruba orantısal olmayan problemlerin alternatif cevap seçeneklerinin biri doğrusallık yanılgısını yansıtan cevap olarak verilmiştir. Diğer gruba verilen problemlerin alternatif cevaplarında bu alternatif seçenek bulunmamaktadır. Çalışmanın sonuçları, doğrusallık yanılgısını yansıtan cevabın sunulmadığı öğrencilerin diğer öğrencilerden daha başarılı olduklarını göstermiştir. Buna göre, Vlahovic-Stetic ve diğerleri (2010) öğrencilere doğrusal olan cevabı sunmamanın onları problemi yüzeysel ipuçlarına dayalı bir akıl yürütme kullanarak çözmelerini engellediğini ve doğrusal olmayan modeli uygulamak için cesaret verdiğini belirtmiştir.

Van Dooren, De Bock, Hessels ve diğerleri (2004) araştırmalarında sekizinci sınıf öğrencilerinin geometrik şekillerin ve cisimlerin genişletilmesi ve küçültülmesi ile ilgili problem durumlarında doğrusallık eğilimlerini önlemeye yönelik öğretim planlamışlardır. Çalışmalarında bir kontrol (17 öğrenci) ve bir deney grubuna (18 öğrenci) ön-test ve son-test uygulayan araştırmacılar, deney grubu için kavramsal değişim yaklaşımını temel alarak birer saatlik on ders tasarlamışlardır. Bu derslere öğrencilerin şekiller genişletildiğinde veya küçültüldüğünde şekillerin uzunlukları ve alanları arasındaki ilişkileri keşfetmeleri için örneğin bir karenin kenarının uzunluğunun 3/2, 2 ve 3 katına çıkarıldığında alana olan etkisinin bir tablo yapılarak gözlenmesi, kenar uzunluğu ve alan arasındaki ilişkiyi temsil eden bir grafiğin kullanımı, bu ilişkinin doğrusal olmayan özelliğinin gösterilmesi, çizimlerle büyük karenin küçük karelerle kaplanması gibi farklı ve anlamlı öğrenme deneyimleri dahil edilmiştir. Öğrencilerin bu etkinliklere aktif olarak katılımının sağlandığı küçük grup çalışmaları ve sınıf tartışmaları gibi yöntemlerin yer aldığı derslerde aynı zamanda farklı temsillerin kullanılmasına da özen gösterilmiştir (Van Dooren, De Bock, Hessels ve diğerleri, 2004). Çalışmanın sonuçları deney grubunda yer alan öğrencilerin orantısal olmayan maddelerdeki performanslarının arttığını ve bu artışın birkaç ay devam ettiğini göstermiştir. Bu araştırmanın diğer bir önemli sonucu da diğer deneysel çalışmaların (De Bock, Verschaffel ve diğerleri, 2002) sonuçlarına benzer olarak deney grubundaki öğrencilerin derslerde öğrendikleri şekilde orantısal çözüm yöntemlerini sorgulayarak, orantısal problemlerde de orantısal olmayan modelleri uygulamaya başlamalarıdır. Sonuç olarak Van Dooren, De Bock, Hessels ve diğerleri (2004) çalışmadaki çoğu öğrencinin doğrusallık yanılgısını kısmen de olsa önleyebildiklerini, fakat bunun orantısal ve orantısal olmayan durumlarla ilgili derin bir kavramsal öğrenme ile sonuçlanmadığının da özellikle altını çizmiştir. Benzer olarak Paić-Antunović ve Vlahović-Štetić (2011) ise lise

doi:10.33711/ yyuefd.1068107 Derleme Makalesi ISSN: 1305-2020

öğrencileri ile yürüttükleri çalışmada öğrencilere verilen geri bildirimin onların doğrusal model kullanma eğilimlerine etkisini incelemeyi amaçlamıştır. Deney grubundaki öğrencilere testteki performansları ile ilgili geri bildirim verilen ve bazı problemleri tekrar çözmeleri istenen çalışmanın sonuçları deney grubundaki öğrencilerin orantısal olmayan problemlerde daha başarılı olduğunu, fakat bu sefer de yukarıda bahsedilen (De Bock, Verschaffel ve diğerleri, 2002; Van Dooren, De Bock, Hessels ve diğerleri, 2004) çalışmalarda olduğu gibi orantısal problemlerdeki performanslarının da düştüğünü göstermiştir.

Sonuçlar, Tartışma ve Öneriler

Öğrencilerin karşılaştıkları problemdeki nicelikler arasındaki ilişkileri doğrusal ve orantısal olarak algılama ve çözümlerinde doğrusal ve orantısal akıl yürütme kullanma eğilimi olarak tanımlanan doğrusallık yanılgısı, geometri, olasılık, bilinmeyen değer problemleri, örüntü, grafik çizimi ve kalkülüs gibi çok farklı konularda ve ortaokul, lise ve üniversite gibi farklı seviyelerde yaygın olarak gözlenmektedir. Doğrusallık yanılgısı ile ilgili alanyazın taraması matematik öğretmenlerinin ve onları yetiştiren matematik eğitimcilerinin bu olgunun köklerinin çok sağlam ve değişime dirençli olduğunun farkında olmasının önemli olduğunu göstermiştir. Matematik öğretmenlerinin bu farkındalığı ile beraber öğrencilerde doğrusallık yanılgısının ortaya çıkmadan önce engellenmesinin öğrencilerin gelecekteki eğitim deneyimlerini daha olumlu etkileyeceği düşünülebilir. Öğrencilerin doğrusallık yanılgısını üstbilişsel desteklerle ya da çeşitli uygulamalarla önlemeye yönelik çalışmaların (De Bock, Verschaffel ve diğerleri, 2002; Paić-Antunović ve Vlahović-Štetić, 2011; Van Dooren, De Bock, Hessels ve diğerleri, 2004) sonuçları da doğrusallık yanılgısının öğrencilerin eğitim hayatlarında fazla yol almadan önüne geçilmesinin önemli olduğunu doğrulamaktadır. Çünkü bu çalışmaların sonuçlarına göre yapılan uygulamalar hem öğrencilerin doğrusal model kullanma eğilimlerini önlemede beklenenden daha az etkili olmuş hem de öğrencilerin bu sefer de doğrusal problemlerde yanlış akıl yürütmeler yapmaya başlamaları ile doğrusal problemlerdeki performanslarının düşmesine sebep olmuştur. Görünen odur ki, doğrusallık yanılgısının önlenmesine yönelik bu tür tek seferlik veya kısa süreli uygulamalar öğrencilerin orantısal olan ve olmayan ilişkileri kavramsal olarak derin bir şekilde anlamalarına yardımcı olamamıştır.

Daha önce belirtildiği gibi matematik eğitimcileri doğrusallık yanılgısının en bilinen temel sebeplerinden biri olarak oran ve orantı kavramlarının öğretilmesinde kullanılan bilinmeyen değer problem yapısı olduğunu ifade etmişlerdir. Bu bağlamda matematik öğretmenlerinin bu kavramları öğretirken sadece bu problem yapısında olan geleneksel sözel

doi:10.33711/ yyuefd.1068107 Derleme Makalesi ISSN: 1305-2020

problemlere bağlı kalması ve bu problemlerin üç kuralı denen standart algoritma ile çözülmesi onların bu problem yapısında karşılarına çıkan her problemde doğrusal model kullanma eğilimini tetikleyecektir. Oysaki, matematik öğretmenlerinin orantıyı oluşturan nicelikler arasındaki ilişkinin analiz edilerek keşfini sağlayan ve bu kuralın uygulanabilirliğinin tartışıldığı hem tam sayı olan hem de tam sayı olmayan oranların yer aldığı öğretim etkinliklerini kullanması öğrencilerin bilinmeyen değer problem yapısında olan problemlere karşı sadece üç kuralı uygulama eğiliminden farklı bir yaklaşım sergilemelerine hizmet edebilir. Bu konu ile ilgili olarak çok fazla sayıda üniversite öğrencisinin üç kuralını uygulama koşullarını kontrol etmediğini ve bunun farkında olmayarak bu kuralı uyguladıklarını belirten Esteley ve diğerleri (2010) öğrencilerin bu kuralın altında yatan orantısal ilişkinin farkında olmalarının, orantısal olan ve olmayan durumların analizini içeren öğretim etkinliklerinin önemine vurgu yapmıştır. Matematik eğitimi alanyazınında öğrencilerin bilinmeyen değer problemi çözebilmelerinin onların orantısal akıl yürütme becerisine sahip oldukları anlamına gelmediği (Cramer ve diğerleri, 1993; NCTM, 2000), orantısal akıl yürütmenin nicelikler arasındaki orantısal ilişkiyi tanımayı ve bu ilişkileri tablo, grafik ve denklem gibi farklı temsillerle gösterebilmeyi kapsadığı belirtilmiştir. Bu nedenle orantısal akıl yürütme becerisinin kazandırılmasında problemlerin farklı şekillerde ifade edilmesinin ve bilinmeyen değer problemlerine aşırı vurgudan kaçınmanın öneminin altı çizilmiştir (NCTM, 2000).

Öğrencilerin doğrusallık yanılgısı sergileme sürecinde bilinmeyen değer problem yapısının etkisi ile ilişkili olarak öğrencilerin problem çözme süreci ile ilgili yaklaşımları, inançları ve tutumları doğrusallık yanılgısı olgusunu açıklayan etmenler arasında sayılmaktadır (De Bock, Van Dooren ve diğerleri, 2002; Van Dooren ve diğerleri, 2008). Vlahovic-Stetic ve diğerleri (2010) öğrencilerin doğrusal olmayan problemleri anlamakta güçlük yaşamadıklarını fakat uygun olmayan bir problem şeması (doğrusal model) uyguladıklarını belirtmiştir. Öğrenciler bu modele uygun matematiksel işlemleri seçerler, işlemleri yaparlar ve kontrol aşamasında da, tabi eğer yaparlarsa, sadece matematiksel işlemlerin doğruluğunu kontrol ederler. Bu süreçte öğrenciler seçilen şemanın problemi temsil edip etmediğini, hem şemanın hem de bulunan cevabın mantıklı olup olmadığı kontrol etmezler (Vlahović-Štetića ve diğerleri, 2010). Yine benzer şekilde öğrencilerin doğrusal olmayan problemleri çözme sürecinde problemleri üstünkörü okuyarak yüzeysel ipuçlarına dayalı olarak çözdükleri ve geleneksel sözel problemlere *problemin altında yatan matematiksel işlemi bulma* oyunu olarak gördükleri vurgulanmıştır (De Bock, Van Dooren ve diğerleri, 2002; Van Dooren, ve diğerleri, 2009). Görünen odur ki, doğrusallık yanılgısının önlenebilmesinde öğrencilerin problem çözme yaklaşımları ve problem çözme sürecinde uyguladığı adımlar özellikle üzerinde durulması

Van YYÜ Eğitim Fakültesi Dergisi (YYU Journal of Education Faculty),2022:Şubat Özel Sayı 240-270,http://efdergi.yyu.edu.tr,

doi:10.33711/ yyuefd.1068107 Derleme Makalesi ISSN: 1305-2020

gereken konulardandır. Bu bağlamda matematik öğretmenlerinin problem çözme etkinliklerinde öğrencilerin problemde yer alan nicelikler arasındaki ilişki, seçilen model, modelin neden seçildiği ve problemin sonucunun mantıklı olup olmadığı gibi unsurları açıklamalarına ve tartışmalarına fırsat veren öğrenme ortamları yaratmaları öğrencilerin sahip olduğu bazı yanlış problem çözme alışkanlıklarını değiştirebileceği düşünülebilir. Aynı zamanda öğretmenlerin bu öğretim etkinliklerinde ele alacakları problemleri sadece geleneksel sözel problemlere odaklanmadan, özgün ve gerçekçi problemlerle de zenginleştirmesi öğrencileri yüzeysel ipuçlarına dayalı problem çözme rutininden kurtarabilir. Bunlara ek olarak öğrencilerin bizzat problemdeki nicelikler için anlam yarattığı ve mantıksal düşünmeyi işe koştuğu bu problem çözme sürecinin onların düşünme süreçlerini yönlendiren bazı sezgisel kurallardan da etkilenmesine engel olabileceği de düşünülmektedir.

Bu derleme çalışmasında özellikle uluslararası alanyazında farklı ülkelerden farklı örneklemler ve konular bağlamında sıkça ele alınan doğrusallık yanılgısı ile ilgili temel konular derinlemesine ve detaylı olarak ortaya koyulmaya çalışılmıştır. Matematik öğretmenlerine verilen önerilerden farklı olarak matematik eğitimi alanında araştırma yapan bilim insanlarına da bu olgunun ülkemizdeki öğrencilerden oluşan farklı örneklemlerdeki uygulamalarını incelemeleri önerilmektedir. Bu bağlamda farklı yaş gruplarındaki öğrencilerimizin bu araştırmada ele alınan doğrusallık yanılgısı örneklerindeki performanslarının ne olduğu, uluslararası alanyazında bahsi geçen sonuçlar ile karşılaştırıldığında öğrencilerimizin performanslarının aynı olup olmadığı, öğrencilerimizin ne ölçüde doğrusal model kullanma eğilimleri olduğu, bu öğrencilerin doğrusal olmayan problemlere nasıl yaklaştığı, doğrusallık yanılgısının bizim öğrencilerimizde de dirençli olup olmadığı gibi konularda hem ulusal hem de uluslararası alana katkı sağlayacağı düşünülen araştırmaların yapılması önerilebilir. Tüm bunlara ek olarak, problem çözme becerilerine sahip olan ve olmayan öğrenciler arasında doğrusallık yanılgısı bağlamında fark olup olmadığı ve öğrencilere verilen problemlerin çözümünün adım adım istenmesinin doğrusallık yanılgısını engellemeye katkısı olup olmadığının araştırılması doğrusalllık yanılgısı olgusu ile ilgili ulaşılan bilgilere yenilerini eklemede katkı sağlayabileceği düşünülmektedir.

Makalenin Bilimdeki Konumu

Matematik ve Fen Bilimleri Eğitimi Bölümü/Matematik Eğitimi

Makalenin Bilimdeki Özgünlüğü

Bu derleme çalışmasında uluslararası alanyazında uzun süreden beri sıkça araştırılan fakat ülkemizde hiç araştırma yapılmamış bir olgu olan doğrusallık yanılgısı ile ilgili kapsamlı

doi:10.33711/ yyuefd.1068107 Derleme Makalesi ISSN: 1305-2020

ve detaylı bir tarama yapılmış ve bu yanılgının ne olduğu, matematiksel yorumu, örnekleri, sebepleri, bu yanılgıyı etkileyen etmenler ve yanılgının giderilmesine yönelik yapılan çalışmalar ile ilgili bilgiler derlenerek ulusal alanyazına kazandırılmıştır. Alanyazın taraması sonucu elde edilen doğrusallık yanılgısı makaleleri dikkatli bir şekilde okunarak, elde edilen bilgiler ham bir özet şeklinde değil anlamlı başlıklar altında bütünsel bir açıdan sunulduğu için bu çalışmanın hem ülkemizdeki matematik öğretmenlerinin hem de matematik eğitimcilerinin doğrusallık yanılgısı ile ilgili kapsamlı bilgiye sahip olmalarını ve aynı zamanda konu ile ilgili yürütülen bilimsel araştırmalara ve konu ile ilgili terminolojiye hâkim olmalarını sağlayacağı düşünülmektedir. Bununla beraber ilgili makalelerin sonuçları bağlamında bu olgunun giderilmesine yönelik özgün önerilerde bulunulmuştur. Makalede sunulan bilgiler ve özgün öneriler ışığında matematik öğretmenlerinin bu olgu ile ilgili farkındalık kazanması, haberdar olması, sunulan farklı konularda çeşitlendirilmiş doğrusallık yanılgısı örneklerini kendi sınıflarında uygulayarak öğrencilerinin bu olgu ile ilgili durumlarını tespit etmeleri ve öğretimlerini bu yanılgıya yol açmayacak şekilde tasarlamaları hem onların mesleki gelişimlerine katkıda bulunabilecek hem de öğretimlerinin niteliğini arttırabilecektir. Makalede doğrusallık yanılgısı ile ilgili sunulan kapsamlı bilgilerin ve sunulan özgün önerilerin matematik eğitimcilerin bu olgu ile ilgili araştırmalarına yol göstererek öncülük edebileceği düşünülmektedir. Bu bağlamda bu derleme çalışmasının matematik eğitimi alanında araştırma yapan bilim insanlarının ülkemizdeki öğrencilerin doğrusallık yanılgısı ile ilgili yürütecekleri bilimsel araştırmalara yön vererek hem ulusal hem de uluslararası alanyazına dolaylı katkıda bulunabileceği öngörülmektedir. Bunlara ek olarak bu çalışmanın matematik öğretmen eğitimi programlarında öğrenim gören öğretmen adaylarının, öğrencilerin kavram yanılgılarını inceleyen derslerde kullanabileceği bir kaynak niteliği taşıdığı da söylenebilir.

Kaynaklar

Behr, M., Hare, G., Post, T., & Lesh, R. (1992). Rational number, ratio and proportion. D. A. Grouws. (Ed.), *Handbook of Research on Mathematics Teaching and Learning* (pp. 17-43). New York: Simon & Schuster Macmillan.

Cramer, K., & Post, T. (1993). Connecting research to teaching: Proportional reasoning. *The Mathematics Teacher, 86,* 404–407. doi:10.5951/MT.86.5.0404

Cramer, K., Post, T., & Currier, S. (1993). Learning and teaching ratio and proportion: Research implications. D. T. Owens (Ed.), *Research ideas for the classroom: Middle grades mathematics* (pp. 159–178). New York: Macmillan.

De Bock, D., Van Dooren, W., Janssens, D., & Verschaffel, L. (2002). Improper use of linear

doi:10.33711/ yyuefd.1068107 **Derleme Makalesi** **ISSN: 1305-2020**

reasoning: An in-depth study of the nature and the irresistibility of secondary school students' errors. *Educational Studies in Mathematics, 50,* 311–314. doi:10.1023/A:1021205413749

De Bock, D., Verschaffel, L., & Janssens, D. (1998). The predominance of the linear model in secondary school students' solutions of word problems involving length and area of similar plane figures. *Educational Studies in Mathematics, 35,* 65–83. doi:10.1023/A:1003151011999

De Bock, D., Verschaffel, L., & Janssens, D. (2002). The effects of different problem presentations and formulations on the illusion of linearity in secondary school students. *Mathematical Thinking and Learning 4*(1)**,** 65–89. doi:10.1207/S15327833MTL0401_3

De Bock, D., Verschaffel, L., Janssens, D., Van Dooren, W., & Claes, K. (2003). Do realistic contexts and graphical representations always have a beneficial impact on students' performance? Negative evidence from a study on modelling non-linear geometry problems. *Learning and Instruction, 13,* 441–463. doi:10.1016/S0959-4752(02)00040-3

Esteley, C. B., Villarreal, M. E., & Alagia, H. R. (2010). The overgeneralization of linear models among university students' mathematical productions: A long-term study. *Mathematical Thinking and Learning, 12*(1), 86-108. doi:10.1080/10986060903465988

Fast, G. R. (1999). Analogies and reconstruction of probability knowledge. *School Sciences and Mathematics, 99(5),* 230-240. doi:10.1111/j.1949-8594.1999.tb17481.x

Fischbein, E. (1999). Intuitions and schemata in mathematical reasoning. *Educational Studies in Mathematics*, 38, 11–50. doi:10.1023/A:1003488222875

Fischbein, E., & Gazit, A. (1984). Does the teaching of probability improve probabilistic intuitions? *Educational Studies in Mathematics, 15*, 1-24. https://www.jstor.org/stable/3482454 adresinden alınmıştır.

Fischbein, E., & Schnarch, D. (1997). The evolution with age of probabilistic, intuitively based misconceptions. *Journal for Research in Mathematics Education, 28*, 96–105. doi:10.2307/749665

Freudenthal, H. (1983). *Didactical phenomenology of mathematical structures*. Dordrecht: D. Reidel Publishing Company.

Greer, B. (1997). Modeling reality in the mathematics classroom: The case of word problems. *Learning and Instruction, 7,* 293–307. doi:10.1016/S0959-4752(97)00006-6

Hadjidemetriou, C., & Williams, J. S. (2002). Teachers' pedagogical content knowledge: Graphs, from a cognitivist to a situated perspective. A. D. Cockburn and E. Nardi (Eds.),

doi:10.33711/ yyuefd.1068107 **Derleme Makalesi** **ISSN: 1305-2020**

Proceedings of the 26th Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education (Vol. 3, pp. 57-64). Norwich, United Kingdom.

Hawkins, A. S., & Kapadia, R. (1984). Children's conceptions of probability: A psychological and pedagogical review. *Educational Studies in Mathematics, 15*(4), 349-377. doi:10.1007/BF00311112

Kaput, J. J., & West, M. M. (1994). Missing-value proportional reasoning problems: Factors affecting informal reasoning patterns. G. Harel & J. Confrey (Eds.), *The development of multiplicative reasoning in the learning of mathematics* (pp. 235-287). New York: State University of New York Press.

Kitchenham, B. (2004). *Procedures for performing systematic reviews*. (Joint Technical Report, Computer Science Department, Keele University, Report No. TR/SE-0401). http://www.elizabete.com.br/rs/Tutorial_IHC_2012_files/Conceitos_RevisaoSistematica_kitchenham_2004.pdf adresinden alınmıştır.

Korkmaz, A. (2005). Olasılık kuramının doğuşu. *Ankara Üniversitesi SF Dergisi, 60*(2), 171-193. https://dergipark.org.tr/tr/pub/ausbf/issue/3218/44806 adresinden alınmıştır.

Leinhardt, G., Zaslavsky, O., & Stein, M. K. (1990). Functions, graphs, and graphing: Tasks, learning, and teaching. *Review of Educational Research, 60*(1), 1–64. doi:10.3102/00346543060001001

Markovits, Z., Eylon, B., & Bruckheimer, M. (1986). Functions today and yesterday. *For the Learning of Mathematics, 6*(2), 18-28. http://www.jstor.org/stable/40247808 adresinden alınmıştır.

Modestou, M., & Gagatsis, A. (2007) Students' improper proportional reasoning: A result of the epistemological obstacle of "linearity". *Educational Psychology, 27*(1), 75-92. doi: 10.1080/01443410601061462

NCTM (1989). *Curriculum and evaluation standards for school mathematics*. Reston, VA: Author.

NCTM (2000). *Principles and standards for school mathematics.* Reston, VA: Author.

Paić-Antunović, J., & Vlahović-Štetić, V. (2011). The effect of feedback on the intensity of the illusion of linearity in high-school students' solving of geometry problems. *Review of psychology, 18*(1), 23-32. Preuzeto s https://hrcak.srce.hr/78214 adresinden alınmıştır.

Rozas, L. W., & Klein, W. C. (2010) The value and purpose of the traditional qualitative literature review. *Journal of Evidence-Based Social Work, 7*(5), 387-399. doi:10.1080/15433710903344116

*Van YYÜ Eğitim Fakültesi Dergisi (YYU Journal of Education Faculty),2022:Şubat Özel Sayı 240-270,*http://efdergi.yyu.edu.tr,
doi:10.33711/ yyuefd.1068107 **Derleme Makalesi** **ISSN: 1305-2020**

Shaughnessy, J. M. (1992). Research in probability and statistics: Reflections and directions. D.A. Grouws (Ed.), *Handbook of Research on Mathematics Thinking and Learning*, (pp. 465–494). New York: Simon & Schuster Macmillan.

Stacey, K. (1989). Finding and using patterns in linear generalising problems. *Educational Studies in Mathematics, 20*, 147–164. doi:10.1007/BF00579460

Stavy, R., & Tirosh, D. (1996). Intuitive rules in science and mathematics: The case of "more of *A* –more of *B*." *International Journal of Science Education, 18,* 653–667. doi:10.1080/0950069960180602

Tirosh, D., & Stavy, R. (1999a). Intuitive rules: A way to explain and predict students' reasoning. *Educational Studies in Mathematics, 38*, 51-66. doi:10.1023/A:1003436313032

Tirosh, D., & Stavy, R. (1999b). Intuitive rules and comparison tasks. *Mathematical Thinking and Learning, 1*, 179-194. doi:10.1207/s15327833mtl0103_1

Van Den Brink, J., & Streefland, L. (1979). Young children (6-8) – Ratio and proportion. Educational Studies in Mathematics, 10(4), 403-420. http://www.jstor.org/stable/3481826 adresinden alınmıştır.

Van Dooren, W., De Bock, D., Depaepe, F., Janssens, D., & Verschaffel, L. (2003). The illusion of linearity: Expanding the evidence towards probabilistic reasoning. *Educational Studies in Mathematics*, *53*, 113-138. doi:10.1023/A:1025516816886

Van Dooren, W., De Bock, D., Evers, M., & Verschaffel, L. (2009). Students' overuse of proportionality on missing-value problems: How numbers may change solutions. *Journal for Research in Mathematics Education*, *40*(2), 187-211. doi:10.2307/40539331

Van Dooren, W., De Bock, D., Hessels, A., Janssens, D., & Verschaffel, L. (2004). Remedying secondary school students' illusion of linearity: A teaching experiment aiming at conceptual change. *Learning and Instruction, 14,* 485-501. doi:10.1016/j.learninstruc.2004.06.019

Van Dooren, W., De Bock, D., Hessels, A., Janssens, D., and Verschaffel, L. (2005). Not everything is proportional: Effects of age and problem type on propensities for overgeneralization. *Cognition and Instruction, 23,* 57–86. doi:10.1207/s1532690xci2301_3

Van Dooren, W., De Bock, D., Janssens, D., & Verschaffel, L. (2007). Pupils' over-reliance on linearity: A scholastic effect? *British Journal of Educational Psychological Society, 77*, 307-321. doi: 10.1348/000709906X115967

doi:10.33711/ yyuefd.1068107 **Derleme Makalesi** **ISSN: 1305-2020**

Van Dooren, W., De Bock, D., Janssens, D., & Verschaffel, L. (2008). The linear imperative: An inventory and conceptual analysis of students' overuse of linearity. *Journal for Research in Mathematics Education, 39*(3), 311-342. doi:10.2307/30034972

Van Dooren, W., De Bock, D., Weyers, D., & Verschaffel, L. (2004). The predictive power of intuitive rules: A critical analysis of the impact of "More A – more B" and "Same A – same B". *Educational Studies in Mathematics, 56,* 179–207. doi:10.1023/B:EDUC.0000040379.26033.0d

Vergnaud, G. (1983). Multiplicative structures. R. Lesh & M. Landau (Eds.), *Acquisition of mathematics concepts and processes* (pp. 127-174). New York: Academic Press.

Verschaffel, L., De Corte, E., & Lasure, S. (1994). Realistic considerations in mathematical modeling of school arithmetic problems. *Learning and Instruction, 4,* 273–294. doi:10.1016/0959-4752(94)90002-7

Verschaffel, L., Greer, B., & De Corte, E. (2000). *Making sense of word problems.* Lisse, Netherlands: Swets & Zeitlinger.

Vlahović-Štetića, V., Pavlin-Bernardića, N., & Rajtera, M. (2010). Illusion of linearity in geometry: Effect in multiple-choice problems. *Mathematical Thinking and Learning, 12*(2010), pp. 54-67. doi:10.1080/10986060903465871

Summary

Introduction

Linearity and proportionality, which are the most important and emphasized subjects in mathematics, are concepts that students frequently experience both in their education and daily lives. In the simplest sense, the phenomenon illusion of linearity, which is defined as the tendency of students to think that the relationships between all the quantities they encounter are linear or proportional, (Van Dooren, De Bock, Hessels, Janssens and Verschaffel, 2004) is one of the issues that is frequently studied with students of different age groups in the international mathematics education literature. The aim of this review study is to examine the studies related to this phenomenon and to discuss in detail what illusion of linearity is, how it emerges, in which sub-fields and subjects of mathematics it occurs, relevant examples and reasons of it and how it can be remedied. It is thought that an in-depth examination of this very common and resistant illusion, which has not been addressed in the literature on mathematics education in our country, will contribute to the professional development of mathematics teachers. At the same time, it is foreseen that mathematics education researchers in our country will be able to use the content of this review study as a resource to share with preservice mathematics teachers with regard to the important misconceptions of students in the teacher education programs.

Van YYÜ Eğitim Fakültesi Dergisi (YYU Journal of Education Faculty),2022:Şubat Özel Sayı 240-270,http://efdergi.yyu.edu.tr,
doi:10.33711/ yyuefd.1068107 Derleme Makalesi ISSN: 1305-2020

Method

In this study, the traditional literature review (narrative review) method was used. The purpose of this method is to bring together the researches carried out on a subject and present the results by analyzing them (Rozas and Klein, 2010). Accordingly, firstly in the study, a search was made with the keyword *illusion of linearity* in the international literature. The articles obtained were carefully read and the issues to be mentioned under the headings such as the definition, emergence and examples of the phenomenon were meticulously noted, taking into account the purpose and target audience of this review study.

The Importance and Widespread Use of Linearity

Linear and proportional relations are the most important topics in both primary and secondary school mathematics (De Bock, Verschaffel and Janssens, 1998, 2002). The reason for this lies in the fact that linear and proportional relations are a basic model that explains many problems in daily life, mathematics and other branches of science (De Bock et al., 1998; Van Dooren, De Bock, Depaepe, Janssens and Verschaffel, 2003; Van Dooren, De Bock, Hessels, Janssens and Verschaffel, 2004). For this reason, such relationships are given too much emphasis at both primary and secondary education levels (Van Dooren, De Bock, Hessels et al., 2004) and these relationships are frequently emphasized at each grade level. Therefore, the students are constantly faced with problem situations involving such relationships. In middle school, students begin to be formally taught the concepts of ratio and proportion, and after that, students often start to face off proportional problems. Most of these proportional problems faced by students are in the structure called missing value problems (Kaput and West, 1994).

What is Illusion of Linearity?

The fact that children see the wide range of uses of linear and proportional models from a very early age and experience that these models successfully solve many problems (Van Dooren, De Bock, Hessels et al., 2004) creates a disadvantageous situation for them and this creates a serious difficulty and emerges as an obstacle for them in the long run (De Bock, Verschaffel et al., 2002; Freudenthal, 1983; National Council of Teachers of Mathematics [NCTM], 1989). The fact that students deal with linear and proportional models from primary school to university causes them to think that these models have a universal applicability and to suppose every numerical relationship they see as a linear and proportional relationship (De Bock et al., 1998; De Bock, Verschaffel et al., 2002; Freudenthal, 1983; Van Dooren, De Bock, Hessels et al., 2004). This tendency, which is defined as the overgeneralization of linearity in the mathematics education literature, is generally defined as the *illusion of linearity* (De Bock et al., 1998; De Bock, Verschaffel et al., 2002; Van Dooren, De Bock, Hessels et al., 2004).

*Van YYÜ Eğitim Fakültesi Dergisi (YYU Journal of Education Faculty),2022:Şubat Özel Sayı 240-270,*http://efdergi.yyu.edu.tr,
doi:10.33711/ yyuefd.1068107 **Derleme Makalesi** **ISSN: 1305-2020**

Linearity and Proportionality: Mathematical Interpretation

It is seen that the terms linearity and direct proportionality or just proportionality are often used interchangeably in research reports related to illusion of linearity (De Bock, Verschaffel et al., 2002; Van Dooren et al., 2003). When we say *linear*, most of us think of the function $f(x)=ax+b\ (a \neq 0)$ and this function is defined as a linear function in textbooks in many countries, however, in the vector space sense $f(x)=ax+b\ (b \neq 0)$ is an affine function (De Bock, Verschaffel et al., 2002; Esteley, Villarreal and Alagia, 2010; Van Dooren et al., 2003). In these studies, *linearity* used in the illusion of linearity is not used in the sense of *linea*, but in the context of vector space (De Bock, Verschaffel et al., 2002). The term *linear* and the *linearity* derived from this term show relationships in the form of $f(x)=ax\ (a\neq0)$ (De Bock, Verschaffel et al., 2002). In here, we should also say that the ideas of proportionality, which we can define as state of being proportional, are very closely related. In a functional context, linearity indicates the fixed ratio between the dependent and independent variable (Van Dooren et al., 2008).

Examples of Illusion of Linearity

When the literature on mathematics education is examined, students' tendency to illusion of linearity have been proven in different learning areas of mathematics such as geometry and probability (De Bock, Van Dooren, Janssens and Verschaffel, 2002; De Bock, et al., 1998; De Bock, Verschaffel et al., 2002; De Bock, Verschaffel, Janssens, Van Dooren and Claes, 2003; Van Dooren et al., 2007; Van Dooren et al., 2003; Van Dooren et al., 2008; Fischbein, 1999; Fischbein and Schnarch, 1997) in missing value problem types (Cramer et al., 1993; Van Dooren, De Bock, Hessels, Janssens and Verschaffel, 2005; Verschaffel, De Corte and Lasure, 1994), different mathematics subjects such as patterns (Esteley et al., 2010; Stacey, 1989) and graph drawing (Leinhardt, Zaslavsky and Stein, 1990; Hadjidemetriou and Williams, 2002) and in university-level courses such as calculus (Esteley et al., 2010). Geometry and measurement are the areas where the best-known examples of students' illusion of linearity are seen and at the same time this phenomenon is mostly investigated (De Bock, Van Dooren et al., 2002; De Bock et al., 1998; De Bock, Verschaffel et al., 2002; De Bock et al., 2003; Van Dooren et al., 2007; Vlahović-Štetića, Pavlin-Bernardića and Rajtera, 2010). These examples are usually problems with enlarging/reducing similar figures/objects handling the relationships between the lengths of sides and areas of geometric figures or lengths of edges and volumes of geometric objects.

Reasons of Illusion of Linearity

Many researchers working on the illusion of linearity state that one of the most important reasons of this phenomenon is the missing value problem structure (Esteley et al., 2010; Van

Van YYÜ Eğitim Fakültesi Dergisi (YYU Journal of Education Faculty),2022:Şubat Özel Sayı 240-270,http://efdergi.yyu.edu.tr,
doi:10.33711/ yyuefd.1068107 Derleme Makalesi ISSN: 1305-2020

Dooren et al., 2008). In addition, there are researchers who claim that some intuitions that are effective in students' thinking processes are related to the illusion of linearity (De Bock, Van Dooren et al., 2002; Van Dooren et al., 2008). Examining the examples in which students exhibit examples of illusion of linearity in areas such as geometry, probability and calculus, it is seen that such problems are generally in the form of missing value problems. Similarly, in the examples where the students fall into the linearity trap regardless of the topic, it is observed that the problems are in the form of missing value problems, but the relationship between the quantities in these problems is constant or additive, or the students directly apply linear solution methods in such problems without considering the real-life situations.

Experimental Researches on Illusion of Linearity

The literature review on the illusion of linearity has shown that there are many researches on this phenomenon conducted in different countries and with different age groups of students. In this review study, experimental studies aiming to reveal the factors affecting students' tendency of illusion of linearity and to remedy this tendency are focused on. A cluster of these studies include manipulation of the experimental items used in the study (De Bock et al., 1998; De Bock, Verschaffel et al., 2002; Modestou and Gagatsis, 2007; Van Dooren et al., 2009; Van Dooren et al., 2007; Vlahovic-Stetic et al., 2010), while another group include interventions such as designing instruction to prevent students' tendency of illusion of linearity and giving feedback to students with regard to their tendency on this phenomenon (Paić-Antunović and Vlahović-Štetić, 2011; Van Dooren, De Bock, Hessels et al., 2004).

Conclusions, Discussion and Suggestions

There is an important common result of the studies that determine the factors and practices affecting students' tendency of illusion of linearity positively. Manipulations those increase students' performance by preventing linear reasoning tendencies in nonlinear problems also decrease their performance in linear problems after a while. The literature review on the illusion of linearity has shown that it is important for mathematics teachers and the mathematics educators who train them to be aware of the fact that the roots of this phenomenon are very strong and resistant to change. With this awareness of mathematics teachers, it can be thought that preventing students' illusion of linearity before it emerges will affect students' future educational experiences more positively. Mathematics educators stated that the missing value problem structure used in teaching the concepts of ratio and proportion is one of the most well-known reasons for the illusion of linearity. The use of teaching activities involving both integer and non-integer ratios, which enable the discovery of the relationship between the quantities that make up the ratio by analyzing and discussing the applicability of this rule, can serve to

*Van YYÜ Eğitim Fakültesi Dergisi (YYU Journal of Education Faculty),2022:Şubat Özel Sayı 240-270,*http://efdergi.yyu.edu.tr,
doi:10.33711/ yyuefd.1068107 **Derleme Makalesi** **ISSN: 1305-2020**

show a different approach from the tendency of students to apply only rule of three to problems with missing value problem structure.