ISSN 2757-5543 GÜFFD 3. Cilt (1): 44-53 (2022)

Gazi Üniversitesi Fen Fakültesi Dergisi

http://sci-fac-j.gazi.edu.tr/

Brenke Tipli Polinomlar Yardımıyla Tanımlanan Lineer Pozitif Operatörlerin Yeni Bir Sınıfı ve Yaklaşım Özellikler

Gürhan İÇÖZ*, Hatice ERYİĞİT

Gazi Üniversitesi, Fen Fakültesi, Matematik Bölümü, 06500, Ankara, Türkiye

Gazi Üniversitesi, Fen Bilimleri Enstitüsü, 06500, Ankara, Türkiye

Öne Çıkanlar

- Brenke tipli operatorlerin yeni bir genellemesi elde edilmiştir.
- Literatürde olan modüller yardımıyla yaklaşım hızı elde edilmiştir.

Makale Bilgileri

Geliş:25/02/2022
Kabul: 08/04/2022

Anahtar Kelimeler

Appell polinomları,
Sheffer polinomları,
Brenke polinomları,
Szász operatörü

Öz

Bu çalışmada, Szász operatörlerinin genellemelerinden biri olan Brenke tipli polinomlar kullanılarak yeni bir modifikasyon oluşturulmuştur. Yeni oluşturulan bu modifikasyon operatörünün öncelikle Korovkin teoreminin koşullarını sağladığı gösterilmiştir. Daha sonra yaklaşım hızı, klasik ve ikinci mertebeden süreklilik modülü ve de Lipschitz sınıfından fonksiyonlar yardımıyla hesaplanmıştır.

Approximation Properties and A New Class of Linear Positive Operators Defining with the Help of Brenke Type Polynomials

Highlights

- A new generalization of Brenke type operator have been acquired.
- Helping with moduls in the literature, the rate of convergence has been acquired.

Article Info

Received: 25/02/2022
Accepted: 08/04/2022

Keywords

Appell polynomials,
Sheffer polynomials,
Brenke polynomials,
Szász operators

Abstract

On this paper, a new modification have been introduced using Brenke type polynomials which is a generalization of Szász operators. Firstly, it is shown that the new type modification operator has been provided the properties of Korovkin's theorem. After that, the rate of convergence has been figured out via classical and second order modulus of continuity and Lipschitz class function.

Araştırma Makalesi

* Sorumlu Yazar/Corresponding Author: Gürhan İçöz, gurhanicoz@gazi.edu.tr

1. GİRİŞ

Yaklaşım teorisinde, Korovkin teoremi önemli bir rol oynamaktadır ve yaklaşım süreçleri fonksiyonel analiz, harmonik analiz, ölçü teorisi, kısmi diferensiyel denklemler ve olasılık teorisi ile ilgili birçok problemde doğal bir şekilde ortaya çıkmaktadır. Bu tür operatörlerin en kullanışlı örneklerinden biri Szász operatörüdür.

Szász lineer pozitif operatörü, Szász [1] tarafından

$$S_n(f;x) = e^{-nx}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(nx)^k}{k!}f\left(\frac{k}{n}\right) \tag{1}$$

tanımlanmıştır. Burada $x \geq 0$ ve $f \in C[0,\infty)$ şeklindedir. Ayrıca, bu seri yakınsaktır. Birçok yazar, Szász operatörünün başka özelliklerini de araştırmıştır [2,3].

Jakimovski ve Leviatan [2], Appell polinomları yardımıyla (1) ile verilen Szász operatörlerinin bir genellemesini elde etmiştir. |z|<R (R>1) diskinde

$$g(z) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k z^k, (a_0 \neq 0)$$

bir analitik fonksiyon ve $g(1) \neq 0$'dır. Appell polinomlarının üreteç fonksiyonu $p_k(x)$ olmak üzere, $x \geq 0$ için $p_k(x) \geq 0$ iken

$$g(u)e^{ux} = \sum_{k=0}^{\infty} p_k(x)u^k$$

şeklindedir. Jakimovski ve Leviatan [2]

$$P_n(f;x) = \frac{e^{-nx}}{g(1)}\sum_{k=0}^{\infty} p_k(nx) f\left(\frac{k}{n}\right) \tag{2}$$

lineer pozitif operatörünü tanımlamıştır ve bu operatörün yaklaşım özelliklerini vermiştir. Kolayca görülebilir ki, $g(z) = 1$ ve $p_k(x) = \frac{x^k}{k!}$ seçilerek (1) ile verilen Szász operatörü elde edilir.

Ismail [3], Sheffer polinomlarını kullanarak Szász ve Jakimovski ve Leviatan operatörlerinin farklı bir genellemesini tanımlamıştır.

$$A(z) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k z^k, (a_0 \neq 0)$$

$$H(z) = \sum_{k=0}^{\infty} h_k z^k, (h_1 \neq 0)$$

burada a_k ve h_k, $|z| < R$ $(R > 1)$ diskinde analitik fonksiyonlardır.

$$A(t)e^{xH(t)} = \sum_{k=0}^{\infty} p_k(x)t^k, \qquad |t| < R$$

ile tanımlanan eşitlik için

i) $x \in [0,\infty)$ için $p_k(x) \geq 0$,

ii) $A(1) \neq 0$ ve $H'(1) = 1$

koşulları sağlanmaktadır.

Ismail [3], T_n lineer pozitif operatörlerinin $n \in \mathbb{N}$ için

$$T_n(f;x):=\frac{e^{-nxH(1)}}{A(1)}\sum_{k=0}^{\infty}p_k(nx)f\left(\frac{k}{n}\right) \tag{3}$$

şeklinde tanımını vermiştir ve yaklaşım özelliklerini araştırmıştır.

Sonuç 1. $H(t)=t$ için, üreteç fonksiyonları $g(u)e^{ux}=\sum_{k=0}^{\infty}p_k(x)u^k$ ye döndüğünden, (3) ile tanımlı operatörün (2) ile verilen operatöre indirgendiği rahatlıkla görülebilir.

Sonuç 2. (3) ile verilen operatörde $H(t)=t$ ve $A(t)=1$ seçilirse, bu defa (1) ile tanımlanan Szász operatörü elde edilecektir.

Varma ve arkadaşları [4], Brenke tipli polinomlar yardımıyla $L_n(f;x)$ lineer pozitif operatörünü oluşturmuştur. Brenke tipli polinomlar aşağıda verilen formda üreteç fonksiyonlarına sahiptir

$$A(t)B(xt)=\sum_{k=0}^{\infty}p_k(x)t^k.$$

Burada A ve B analitik fonksiyonlardır:

$$A(t)=\sum_{r=0}^{\infty}a_r t^r, a_0\neq 0,$$
$$B(t)=\sum_{r=0}^{\infty}b_r t^r, b_0\neq 0$$

ve $p_k(x)$ aşağıdaki açık ifadeye sahiptir:
$p_k(x)=\sum_{r=0}^{k}a_{k-r}b_r x^r, (k=0,1,2,\ldots)$.
Aşağıdaki ifadelerin gerçeklendiği kabul edilmektedir:

$$i)\ A(1)\neq 0, \frac{a_{k-r}b_r}{A(1)}\geq 0, 0\leq r\leq k, k=0,1,2,\ldots,$$
$$ii)\ B:[0,\infty)\to(0,\infty).$$

Varma ve arkadaşları [4], $x\geq 0$, $f\in C[0,\infty)$ ve $n\in\mathbb{N}$ için

$$L_n(f;x):=\frac{1}{A(1)B(nx)}\sum_{k=0}^{\infty}p_k(nx)f\left(\frac{k}{n}\right) \tag{4}$$

operatörünü tanımlamıştır.
Bu şekilde başlangıç düşüncesi Szász (1) operatörleri olup, yapılan genellemeler yardımıyla daha genel operatörlerin elde edilmesi devam etmiştir. Bu genellemelerden bazıları [4-17] çalışmalarda detaylı olarak verilmiştir. Benzer düşünce başka operatör genellemeleri için de düşünülebilir.
Bu çalışmada ise, Brenke tipli polinomlar yardımıyla aşağıdaki lineer pozitif operatör tanımlanmıştır:

$$L_n^{\tau}(f;x):=\frac{1}{A(1)B\left(\frac{n}{b_n}\tau(x)\right)}\sum_{k=0}^{\infty}p_{n,k}^{\tau}\left(\frac{n}{b_n}x\right)(f\circ\tau^{-1})\left(\frac{k}{n}b_n\right), \tag{5}$$

burada $x\in[0,\infty)$, $n\in\mathbb{N}$, $\tau(x)$ fonksiyonu $x\geq 0$ için $\tau(0)=0$, $\tau(1)=1$, $\tau'(x)>0$ koşullarını sağlayan sürekli türevlenebilir bir fonksiyondur. Ayrıca

$$p_{n,k}^{\tau}(x):=\sum_{r=0}^{k}a_{k-r}b_r z(x)^r, (k=0,1,2,\ldots) \tag{6}$$

şeklindedir. Üreteç fonksiyonun tanımı ise şu şekildedir:

$$A(t)B\left(\frac{n}{b_n}\tau(x)t\right)=\sum_{k=0}^{\infty}p_{n,k}^{\tau}\left(\frac{n}{b_n}x\right)t^k. \tag{7}$$

Sonuç 3. (5) ile verilen operatörde, $B(t)$ ve $A(t)$ fonksiyonlarının özel olarak seçilmesi durumunda (5) operatörü, (1), (2), (3) ve (4) ile verilen operatörlere indirgenir.

2. YAKLAŞIM ÖZELLİKLERİ

Bu kısımda, (5) ile verilen operatör için temel teoremlerin kanıtlarında kullanılacak olan bazı özellikler verilecektir.

Lemma 1. Her $x \in [0,\infty)$ için

$$L_n^{\tau}(1;x)=1, \tag{8}$$

$$L_n^{\tau}(\tau;x)=\frac{B'\left(\frac{n}{b_n}\tau(x)\right)}{B\left(\frac{n}{b_n}\tau(x)\right)}\tau(x)+\frac{b_n}{n}\frac{A'(1)}{A(1)}, \tag{9}$$

$$\begin{aligned}L_n^{\tau}(\tau^2;x)=&\frac{B''\left(\frac{n}{b_n}\tau(x)\right)}{B\left(\frac{n}{b_n}\tau(x)\right)}\tau(x)^2+\frac{b_n}{n}\frac{(A(1)+2A'(1))B'\left(\frac{n}{b_n}\tau(x)\right)}{A(1)B\left(\frac{n}{b_n}\tau(x)\right)}\tau(x)\\&+\frac{b_n^2}{n^2}\frac{A'(1)+A''(1)}{A(1)},\end{aligned} \tag{10}$$

$$\begin{aligned}L_n^{\tau}(\tau^3;x)=&\frac{B'''\left(\frac{n}{b_n}\tau(x)\right)}{B\left(\frac{n}{b_n}\tau(x)\right)}\tau^3(x)+3\frac{b_n}{n}\frac{(A(1)+A'(1))B''\left(\frac{n}{b_n}\tau(x)\right)}{A(1)B\left(\frac{n}{b_n}\tau(x)\right)}\tau^2(x)\\&+\frac{b_n^2}{n^2}\frac{(A(1)+6A'(1)+3A''(1))B'\left(\frac{n}{b_n}\tau(x)\right)}{A(1)B\left(\frac{n}{b_n}\tau(x)\right)}\tau(x)\\&+\frac{b_n^3}{n^3}\frac{A'(1)+3A''(1)+A'''(1)}{A(1)},\end{aligned} \tag{11}$$

$$L_n^\tau(\tau^4;x)=\frac{B^{(4)}\left(\frac{n}{b_n}\tau(x)\right)}{B\left(\frac{n}{b_n}\tau(x)\right)}\tau(x)^4+2\frac{b_n}{n}\frac{\big(3A(1)+2A'(1)\big)B'''\left(\frac{n}{b_n}\tau(x)\right)}{A(1)B\left(\frac{n}{b_n}\tau(x)\right)}\tau^3(x)$$
$$+\frac{b_n^2}{n^2}\frac{(7A(1)+18A'(1)+6A''(1))B''\left(\frac{n}{b_n}\tau(x)\right)}{A(1)B\left(\frac{n}{b_n}\tau(x)\right)}\tau^2(x)$$
$$+\frac{b_n^3}{n^3}\frac{(A(1)+14A'(1)+18A''(1)+4A'''(1))B'\left(\frac{n}{b_n}\tau(x)\right)}{A(1)B\left(\frac{n}{b_n}\tau(x)\right)}\tau(x)$$
$$+\frac{b_n^4}{n^4}\frac{A'(1)+7A''(1)+6A'''(1)+A^{(4)}(1)}{A(1)} \tag{12}$$

eşitlikleri gerçeklenir.

Lemma 2. $x\in[0,\infty)$ için aşağıdaki merkezi momentler elde edilir:

$$L_n^\tau(\tau(t)-\tau(x);x)=\frac{B'\left(\frac{n}{b_n}\tau(x)\right)-B\left(\frac{n}{b_n}\tau(x)\right)}{B\left(\frac{n}{b_n}\tau(x)\right)}\tau(x)+\frac{b_n}{n}\frac{A'(1)}{A(1)}, \tag{13}$$

$$L_n^\tau((\tau(t)-\tau(x))^2;x)$$
$$=\frac{B''\left(\frac{n}{b_n}\tau(x)\right)-2B'\left(\frac{n}{b_n}\tau(x)\right)+B\left(\frac{n}{b_n}\tau(x)\right)}{B\left(\frac{n}{b_n}\tau(x)\right)}\tau(x)^2$$
$$+\frac{b_n}{n}\frac{A(1)B'\left(\frac{n}{b_n}\tau(x)\right)+2A'(1)\left(B'\left(\frac{n}{b_n}\tau(x)\right)-B\left(\frac{n}{b_n}\tau(x)\right)\right)}{A(1)B\left(\frac{n}{b_n}\tau(x)\right)}\tau(x)$$
$$+\frac{b_n^2}{n^2}\frac{A'(1)+A''(1)}{A(1)}, \tag{14}$$

$$L_n^{\tau}((\tau(t)-\tau(x))^4;x)$$
$$=\frac{B^{(4)}\left(\frac{n}{b_n}\tau(x)\right)-4B'''\left(\frac{n}{b_n}\tau(x)\right)+6B''\left(\frac{n}{b_n}\tau(x)\right)-4B'\left(\frac{n}{b_n}\tau(x)\right)+B\left(\frac{n}{b_n}\tau(x)\right)}{B\left(\frac{n}{b_n}\tau(x)\right)}\tau(x)^4$$
$$+2\frac{b_n}{n}\frac{1}{A(1)B\left(\frac{n}{b_n}\tau(x)\right)}\left(3A(1)\left(B'''\left(\frac{n}{b_n}\tau(x)\right)-2B''\left(\frac{n}{b_n}\tau(x)\right)+B'\left(\frac{n}{b_n}\tau(x)\right)\right)\right.$$
$$\left.+2A'(1)\left(B'''\left(\frac{n}{b_n}\tau(x)\right)-3B''\left(\frac{n}{b_n}\tau(x)\right)+3B'\left(\frac{n}{b_n}\tau(x)\right)-B\left(\frac{n}{b_n}\tau(x)\right)\right)\right)\tau(x)^3$$
$$+\frac{b_n^2}{n^2}\frac{1}{A(1)B\left(\frac{n}{b_n}\tau(x)\right)}\left(A(1)\left(7B''\left(\frac{n}{b_n}\tau(x)\right)-4B'\left(\frac{n}{b_n}\tau(x)\right)\right)\right.$$
$$+A'(1)\left(18B''\left(\frac{n}{b_n}\tau(x)\right)-24B'\left(\frac{n}{b_n}\tau(x)\right)+6B\left(\frac{n}{b_n}\tau(x)\right)\right)$$
$$\left.+A''(1)\left(6B''\left(\frac{n}{b_n}\tau(x)\right)-12B'\left(\frac{n}{b_n}\tau(x)\right)+6B\left(\frac{n}{b_n}\tau(x)\right)\right)\right)\tau(x)^2$$
$$+\frac{b_n^3}{n^3}\frac{1}{A(1)B\left(\frac{n}{b_n}\tau(x)\right)}\left(A(1)B\left(\frac{n}{b_n}\tau(x)\right)+A'(1)\left(14B'\left(\frac{n}{b_n}\tau(x)\right)-4B\left(\frac{n}{b_n}\tau(x)\right)\right)\right.$$
$$\left.+A''(1)\left(18B'\left(\frac{n}{b_n}\tau(x)\right)-12B\left(\frac{n}{b_n}\tau(x)\right)\right)+4A'''(1)\left(B'\left(\frac{n}{b_n}\tau(x)\right)-B\left(\frac{n}{b_n}\tau(x)\right)\right)\right)\tau(x)$$
$$+\frac{b_n^4}{n^4}\frac{A'(1)+7A''(1)+6A'''(1)+A^{(4)}(1)}{A(1)}. \tag{15}$$

Teorem 2. $f\in C[0,\infty)\cap G$ ve

$$\lim_{\theta\to\infty}\frac{B'(\theta)}{B(\theta)}=1, \qquad \lim_{\theta\to\infty}\frac{B''(\theta)}{B(\theta)}=1, \tag{16}$$

$$\lim_{n\to\infty}b_n=\infty \; ve \; \lim_{n\to\infty}\frac{b_n}{n}=0 \tag{17}$$

limitleri gerçeklensin.

L_n^{τ} operatörleri $[0,a]$ $(a>0)$ kompakt alt aralığında f fonksiyonuna $n\to\infty$ için düzgün yakınsar. Yani

$$\lim_{n\to\infty}L_n^{\tau}(\tau^i;x)=\tau^i(x),(i=0,1,2) \tag{18}$$

sağlanır. Burada

$$G:=\{f:\forall x\in[0,\infty),|f(x)|\le Ke^{Rx},K\in\mathbb{R}^+,R\in\mathbb{R}\}$$

ile tanımlanmaktadır [18].

3. YAKLAŞIM HIZI

Bu bölümde operatörün yaklaşım hızı, farklı modüller kullanılarak hesaplanmaktadır. Burada modül olarak klasik ile ikinci basamaktan süreklilik modülleri ve Lipschitz sınıfından fonksiyonlar kullanılmaktadır.

Öncelikle aşağıdaki teoremle, yaklaşım hızı klasik süreklilik modülü kullanılarak ispatlanmaktadır.

Teorem 3. $f \in C[0,\infty) \cap G$ ise herhangi bir $x \in [0,a]$ için,

$$|L_n^\tau(f;x) - (f \circ \tau^{-1})| \leq 2\omega\left(f;\sqrt{\delta_n}\right) \tag{19}$$

eşitsizliği gerçeklenir. Burada $\delta \coloneqq \delta_n$, (14) ile tanımlıdır.
$C[0,\infty)$ uzayı $[0,\infty)$ aralığında sürekli olan fonksiyonların uzayını temsil edilmektedir [19-21].

İspat. Operatörün lineer olması ve süreklilik modülünün özellikleri kullanılırsa

$$|L_n^\tau(f;x) - (f \circ \tau^{-1})(x)|$$

$$\leq \frac{1}{A(1)B\left(\frac{n}{b_n}\tau(x)\right)}\sum_{k=0}^{\infty} p_{n,k}^\tau\left(\frac{n}{b_n}x\right)\left|(f\circ\tau^{-1})\left(\frac{k}{n}b_n\right) - (f\circ\tau^{-1})(x)\right|$$

$$\leq \left\{1 + \frac{1}{\delta}\frac{1}{A(1)B\left(\frac{n}{b_n}\tau(x)\right)}\sum_{k=0}^{\infty} p_{n,k}^\tau\left(\frac{n}{b_n}x\right)\left|\frac{k}{n}b_n - x\right|\right\}\omega(f;\delta)$$

olduğu görülür. Cauchy-Schwarz eşitsizliği kullanılırsa,

$$|L_n^\tau(f;x) - (f \circ \tau^{-1})(x)| \leq \left\{1 + \frac{1}{\delta}\left(\frac{1}{A(1)B\left(\frac{n}{b_n}\tau(x)\right)}\sum_{k=0}^{\infty} p_{n,k}^\tau\left(\frac{n}{b_n}x\right)\left(\frac{k}{n}b_n - x\right)^2\right)^{\frac{1}{2}}\right\}\omega(f;\delta)$$

$$\leq \left\{1 + \frac{1}{\delta}\sqrt{L_n^\tau((\tau(t)-\tau(x))^2;x)}\right\}\omega(f;\delta)$$

olacaktır. Burada $\delta \coloneqq \delta_n$, (14) şeklinde alınırsa ispat tamamlanır.

Teorem 4. $f \in Lip_M(\alpha)$ alalım. Bu durumda

$$|L_n^\tau(f;x) - (f \circ \tau^{-1})(x)| \leq M(\delta_n)^\alpha \tag{20}$$

olur. Burada δ_n, (14) şeklinde seçilmiştir.
$Lip_M(\alpha)$ ile

$$|f(t) - f(x)| \leq M|t-x|^\alpha$$

eşitsizliğini sağlayan fonksiyon uzayı gösterilmektedir [22].

İspat. L_n^τoperatörlerinin tanımı ve Hölder eşitsizliği yardımıyla

$$|L_n^\tau(f;x) - (f \circ \tau^{-1})(x)|$$

$$\leq \frac{1}{A(1)B\left(\frac{n}{b_n}\tau(x)\right)}\sum_{k=0}^{\infty} p_{n,k}^{\tau}\left(\frac{n}{b_n}x\right)\left|(f\circ\tau^{-1})\left(\frac{k}{n}b_n\right)-(f\circ\tau^{-1})(x)\right|$$

$$\leq M\frac{1}{A(1)B\left(\frac{n}{b_n}\tau(x)\right)}\sum_{k=0}^{\infty}\left|\frac{k}{n}b_n-x\right|^{\frac{\alpha}{2}} p_{n,k}^{\tau}\left(\frac{n}{b_n}x\right)$$

$$\leq M\left(\sum_{k=0}^{\infty}\left(\frac{k}{n}b_n-x\right)^2\frac{p_{n,k}^{\tau}\left(\frac{n}{b_n}x\right)}{A(1)B\left(\frac{n}{b_n}\tau(x)\right)}\right)^{\frac{\alpha}{2}}\left(\sum_{k=0}^{\infty}\frac{p_{n,k}^{\tau}\left(\frac{n}{b_n}x\right)}{A(1)B\left(\frac{n}{b_n}\tau(x)\right)}\right)^{\frac{2-\alpha}{2}}$$

$$\leq M\left(L_n^{\tau}((\tau(t)-\tau(x))^2;x)\right)^{\frac{\alpha}{2}}$$

elde edilir. Burada $\delta_n \coloneqq L_n^{\tau}((\tau(t)-\tau(x))^2;x)$ (14) ile elde eşitlik yardımıyla alınırsa ispat tamamlanır.

Lemma 3. $f\in C_B^2[0,\infty)$ olsun. Bu durumda

$$|L_n^{\tau}(f;x)-(f\circ\tau^{-1})|\leq\gamma_n(x)\|g\|_{C_B} \tag{21}$$

gerçeklenir. Burada

$$\gamma_n(x)=\frac{B''\left(\frac{n}{b_n}\tau(x)\right)}{B\left(\frac{n}{b_n}\tau(x)\right)}V_n^{\tau}(x)^2+\frac{b_n}{n}\frac{\left(A(1)+2A'(1)\right)B'\left(\frac{n}{b_n}\tau(x)\right)}{A(1)B\left(\frac{n}{b_n}\tau(x)\right)}V_n^{\tau}(x)$$
$$+\frac{b_n^2}{n^2}\frac{A'(1)+A''(1)}{A(1)}-\tau(x)^2$$

şeklindedir.

Ayrıca $C_B^2[0,\infty)$ uzayı ile $[0,\infty)$ aralığında f, f' ve f'' fonksiyonlarının sürekli olduğu uzay temsil edilmektedir.

İspat. f fonksiyonunun Taylor açılımı ve L_n^{τ} operatörünün lineerliği kullanılırsa L_n^{*} operatörü

$$L_n^{*}(g;x)-(g\circ\tau^{-1})\big(\tau(x)\big)=(g\circ\tau^{-1})\big(\tau(x)\big)L_n(\tau(t)-\tau(x);x)$$
$$+\frac{1}{2}(g\circ\tau^{-1})\big(\tau(x)\big)L_n\left(\big(\tau(t)-\tau(x)\big)^2;x\right)$$

ile tanımlanır. Burada

$$V_n^{\tau}(x)=\frac{B'\left(\frac{n}{b_n}\tau(x)\right)}{B\left(\frac{n}{b_n}\tau(x)\right)}\left(\tau(x)-\frac{b_n}{n}\frac{A'(1)}{A(1)}\right) \tag{22}$$

şeklindedir. Buradan L_n^{*} operatörü

$$L_n^{*}(f;x)\coloneqq\frac{1}{A(1)B(\frac{b_n}{n}V_n^{\tau}(x))}\sum_{k=0}^{\infty}p_{n,k}^{\tau}\left(\frac{n}{b_n}V_n^{\tau}(x)\right)(f\circ V_n^{\tau}(x)^{-1})\left(\frac{k}{n}b_n\right)$$

şeklinde yazılmaktadır. Şimdi L_n^{*} operatörünün merkezi momentleri elde edilecektir.

$$L_n^{*}(1;x)\coloneqq 1$$

$$L_n^*(V_n^\tau;x) := \tau(x)$$

$$L_n^*((V_n^\tau)^2;x) := \frac{B''\left(\frac{n}{b_n}\tau(x)\right)}{B\left(\frac{n}{b_n}\tau(x)\right)}(V_n^\tau)^2 + \frac{b_n}{n}\frac{(A(1)+2A'(1))B'\left(\frac{n}{b_n}\tau(x)\right)}{A(1)B\left(\frac{n}{b_n}\tau(x)\right)}(V_n^\tau) + \frac{b_n^2}{n^2}\frac{A'(1)+A''(1)}{A(1)}$$

$$L_n^*((V_n^\tau-\tau)^2;x) = \frac{B''\left(\frac{n}{b_n}\tau(x)\right)}{B\left(\frac{n}{b_n}\tau(x)\right)}V_n^\tau(x)^2 + \frac{b_n}{n}\frac{\left(A(1)+2A'(1)\right)B'\left(\frac{n}{b_n}\tau(x)\right)}{A(1)B\left(\frac{n}{b_n}\tau(x)\right)}V_n^\tau(x) + \frac{b_n^2}{n^2}\frac{A'(1)+A''(1)}{A(1)} - \tau(x)^2.$$

bulunur. Yukarıdaki eşitlikler aşağıda kullanılırsa

$$\left|L_n^*(g;x) - (g\circ\tau^{-1})\big(\tau(x)\big)\right| \le \|g'\| L_n^*(V_n^\tau - \tau) + \frac{1}{2}\|g''\| L_n^*((V_n^\tau-\tau)^2;x)$$

$$\left|L_n^*(g;x) - (g\circ\tau^{-1})\big(\tau(x)\big)\right| \le \frac{1}{2}\|g''\|_{C_B}\gamma_n(x) \le \gamma_n(x)\|g\|_{C_B}$$

ispat bu şekilde çözüme ulaşır.

Teorem 5. $f \in C_B^2[0,\infty)$ olsun. O takdirde

$$|L_n^*(f;x) - f(x)| \le 2M\omega_2\left(f,\sqrt{\gamma_n}\right) \tag{23}$$

bulunur. Burada γ_n, (22) şeklindedir.

İspat. $g \in C_B^2[0,\infty)$ için

$$\begin{aligned}
&\left|L_n^*(f;x) - (f\circ\tau^{-1})\big(\tau(x)\big)\right| \\
&\le |L_n^*(f;x) - L_n^*(g;x)| + \left|L_n^*(g;x) - (g\circ\tau^{-1})\big(\tau(x)\big)\right| + \left|(g\circ\tau^{-1})\big(\tau(x)\big) - (f\circ\tau^{-1})\big(\tau(x)\big)\right| \\
&\le 2\|f-g\|_{C_B} + \gamma_n(x)\|g\|_{C_B} \\
&\le 2\left(\|f-g\|_{C_B} + \gamma_n(x)\|g\|_{C_B}\right)
\end{aligned}$$

elde edilir. Yukarıdaki eşitsizliğin her iki tarafının da infimumu alınırsa

$$|L_n^*(f;x) - (f\circ\tau^{-1})(x)| \le 2K(f;\gamma)$$

eşitsizliği bulunur. Peetre K fonksiyoneli ve ikinci süreklilik modülü arasındaki ilişki kullanıldığında

$$|L_n^*(f;x) - (f\circ\tau^{-1})(x)| \le 2M\omega_2\left(f,\sqrt{\gamma_n}\right),$$

elde edilir ki ispat tamamlanmış olur.

ÇIKAR ÇATIŞMASI/ÇAKIŞMASI BİLDİRİMİ

Yazarlar arasında çıkar çatışması/çakışması bulunmamaktadır.

KAYNAKLAR

[1] Szász, O. (1950). Generalization of S. Bernstein's polynomials to the infinite interval. *Journal of Research of the National Bureau of Standards*, 45, 239-245.
[2] Jakimovski, A. and Leviatan, D. (1969). Generalized Szász operators for the approximation in the infinite interval. *Mathematica*, 11, 97-103.
[3] Ismail, M.E.H. (1974). On a generalization of Szász operators. *Mathematica*, 39, 259-267.
[4] Varma, S., Sucu, S. and İçöz, G. (2012). Generalization of Szász operators involving Brenke type polynomials. *Computers & Mathematics with Applications*, 64, 121-127.
[5] Sucu, S., İçöz, G. and Varma, S. (2012). On some extensions of Szász operators including Boas-Buck type polynomials. *Abstract and Applied Analysis*, 680340.
[6] İçöz, G., Varma, S. and Sucu, S. (2016). Approximation by operators including generalized Appell polynomials. *Filomat*, 30, 429-440.
[7] İçöz, G. and Çekim, B. (2016). Stancu-type generalizations of the Chan-Chyan-Srivastava operators. *Filomat*, 30, 3733-3742.
[8] Sucu, S. and Varma, S. (2019). Approximation by sequence of operators involving analytic functions. *Mathematics*, 7(2), 188.
[9] Sucu, S. and Varma, S. (2015). Generalization of Jakimovski−Leviatan type Szász operators. *Applied Mathematics and Computation*, 270, 977-983.
[10] Sucu, S. (2014). Dunkl analogue of Szász operators. *Applied Mathematics and Computation,* 244, 42-48.
[11] Cai, Q.B., Yüksel, İ., Dinlemez Kantar, Ü. and Çekim, B. (2019). Approximation properties of Durrmeyer type of Bleimann-Butzer and Hahn Operators. *Journal of Function Spaces*, 7047656.
[12] Çekim. B., Dinlemez Kantar, Ü. and Yüksel, İ. (2017). Dunkl generalization of Szász-Beta type operators. *Mathematical Methods in the Applied Sciences*, 40(18), 7697-7704.
[13] Yazıcı, S. and Çekim, B. (2017). A Kantorovich type generalization of the Szász operators via two variable Hermite polynomials. *Gazi University Journal of Science*, 30(4), 432-440.
[14] Aktaş, R., Söylemez, D., and Taşdelen, F. (2019). Stancu type generalization of Szász-Durrmeyer operators involving Brenke-type polynomials. *Filomat,* 33(3), 855- 868.
[15] Aktaş, R., Çekim, B. and Taşdelen, F. (2013). A Kantorovich-Stancu type generalization of Szász operators including Brenke-type polynomials. *Journal of Function Spaces and Applications*, 2013: 1-9.
[16] Taşdelen, F., Aktaş, R. and Altın, A. (2012). A Kantorovich type of Szász Operators including Brenke type polynomial. *Abstract and Applied Analysis*, 2012, 1-13.
[17] Çekim, B., Aktaş, R. and İçöz, G. (2019). Kantorovich-Stancu type operators including Boas-Buck type polynomials. *Hacettepe Journal of Mathematics and Statistics*, 48(2), 460-471.
[18] Gavrea, I. and Rasa, I. (1993). Remarks on some quantitative Korovkin-type results. *Revue d'analyse numérique et de Théorie de l'approximation*, 22, 173-176.
[19] Rainville, E.D. (1960). *Special Functions Macmillan*, New York, NY, USA, 1960.
[20] Altomare, F. and Campiti, M. (1994). *Korovkin-type Approximation Theory and Its Applications*, de Gruyter Studies in Mathematics, 17, 1994.
[21] Devore, R.A. and Lorentz, G.G. (1993). *Constructive Approximation*, Springer, Berlin, Germany, 1993.
[22] Zhuk, V.V. (1989). Functions of the Lip1 class and S. N. Bernstein's polynomials (Russian). *Vestnik Leningradskogo Universiteta. Matematika, Mekhanika, Astronomiya*, 1, 25-30.