Buca Eğitim Fakültesi Dergisi, 2022, sayı 53, s. 467-494

Araştırma Makalesi

The Journal of Buca Faculty of Education, 2022, issue 53, p. 467-494

Research Article

Öğrencilerin Matematiksel Anlamalarını Geliştirmek için Ön Bilgilerin Kullanımı: Bir Fonksiyon Olarak Öteleme

Using Prior Knowledge to Advance Students' Mathematical Understanding: Geometric Translation as a Function

Hilal GÜLKILIK[1]

[1] *Dr., Matematik ve Fen Bilimleri Eğitimi Bölümü, Gazi Eğitim Fakültesi, Gazi Üniversitesi, Türkiye, ghilal@gazi.edu.tr, (https://orcid.org/0000-0002-2664-3288)*

Geliş Tarihi: *27.02.2022* ***Kabul Tarihi:*** *20.06.2022*

ÖZ

Matematik eğitimi araştırmacıları ve öğretim programı geliştiricileri, matematik öğretiminin, öğrencilerin ön bilgileri dikkate alınarak tasarlanması gerektiği konusunda hemfikirdir. Bu araştırmada, öğrencilerin herhangi bir matematiksel konuyla ilgili matematiksel anlamalarını geliştirmek için, ön bilgilerin öğretimde nasıl kullanılabileceğine dair bir yaklaşım sunulmaktadır. Konu olarak, okul matematiği ve matematik öğretmen adaylarının eğitimi için önemli konulardan birisi olan öteleme seçilmiş ve Pirie-Kieren teorisinde yer alan geriye katlamalar ile öğretim müdahaleleri temel alınarak bir eylem araştırması tasarlanmıştır. Katılımcılar, bir devlet üniversitesinin matematik öğretmenliği programının dördüncü yılında öğrenim gören 28 matematik öğretmen adayıdır. Araştırmanın verilerini, öteleme ile ilgili dersler başlamadan önce uygulanan ön teste katılımcıların verdiği yazılı cevaplar, dersler boyunca gerçekleşen matematiksel tartışmalara yönelik kayıtlar, ders gözlem notları ile dersi yürüten öğretim elemanlarının ders öncesi veya sonrası görüşmelerinde alınan notlar oluşturmaktadır. Dersler boyunca, öğretmen adaylarının ön bilmeleri üzerinde çalışmalarını sağlayan geriye katlamaları teşvik eden öğretim müdahalelerinin, adayların ötelemede vektörün rolünü, ötelemenin $\mathbb{R}^2$ den $\mathbb{R}^2$ ye birebir ve örten bir fonksiyon olduğunu anlamlandırmalarına yardımcı olduğu belirlenmiştir.

Anahtar Kelimeler: Matematik eğitimi, matematiksel anlama, ön bilgi, dönüşümler.

ABSTRACT

Mathematics education researchers and curriculum developers agree that instruction should be designed by considering students' prior knowledge. This research presents an approach to how prior knowledge can be used in instructional design to advance students' mathematical understanding of any mathematical subject. Geometric translation was chosen as one of the crucial subjects for school mathematics and the education of pre-service mathematics teachers. An action research was designed drawing on the folding backs and interventions in the Pirie-Kieren theory. The participants were 28 pre-service secondary mathematics teachers studying in the fourth year of the mathematics teaching program at a state university. The data consists of the written answers given by the participants to the pre-test applied before the translation lessons, the recordings of the mathematical discussions that took place during the lessons, the lesson observation notes, and the notes taken during the pre-or post-lesson interviews of the instructors. Interventions that encouraged pre-service teachers to work on their prior knowings through folding backs helped them understand the role of the vector in geometric translation and that the translation is a one-to-one and onto function from $\mathbb{R}^2$ to $\mathbb{R}^2$.

Keywords: Mathematics education, mathematical understanding, prior knowledge, transformations.

GİRİŞ

Öteleme, gerek okul gerekse üniversite seviyesindeki matematik eğitimi için önemli düzlem dönüşümlerinden birisidir. Martin (1982), düzlemdeki bir dönüşümü “düzlemdeki noktalar kümesinden düzlemin kendisine birebir eşleme” olarak tanımlamaktadır (s. 2). Ne var ki araştırmalarda, sınıf seviyesi ne olursa olsun, öğrencilerin dönüşümlere yönelik geliştirdikleri anlamaların, matematikçilerden oldukça farklı olduğu ortaya konulmuştur (örn. Edwards, 2003; Hollebrands, 2003, 2007; Yanık, 2014). Özel olarak öğretmen adaylarına odaklanan araştırmacılar da, dönüşümleri formal seviyede anlamlandırmanın, öğretmen adayları için kolay olmadığını belirlemiştir (örn. Ada ve Kurtuluş, 2010; Akarsu, 2022; Akarsu ve Öçal, 2022; Avcu, 2019; Harper, 2003; Portnoy, Grundmeier ve Graham, 2006; Thaqi, Gimenez ve Rosich, 2011; Yanık, 2011, 2013).

Öğretmen olduklarında geometrik dönüşümlere yönelik etkili öğrenme ortamları oluşturmaları beklenilen matematik öğretmen adaylarının, dönüşümlerle ilgili anlamalarının nasıl geliştirilebileceğine yönelik araştırmalar artan bir ilgiyle devam etmektedir. Bu araştırmalarda, ötelemeyi anlamlandırmada dinamik geometri ortamının rolü (Yanık, 2013), özel olarak yansıma dönüşümünü formal olarak anlamlandırma süreci (Akarsu, 2022; Akarsu ve Öçal, 2022), dinamik geometri ortamında adayların geometrik dönüşümlerin matris gösterimini anlamlandırmaları (Turgut, 2019), dinamik geometri yazılımı (DGY) kullanılarak farklı geometrik dönüşümlere yönelik sorgulamaya dayalı öğretimde geliştirilen matematiksel pratikler (Uygun, 2020) veya farklı geometrik dönüşümleri fonksiyon olarak anlamaya yardımcı olması için geliştirilen öğretim dizisinde adayların anlamalarındaki değişim (Avcu ve Çetinkaya, 2021) incelenmiştir. Bu araştırma ise, ötelemeye odaklanarak, matematik öğretmen adaylarının konuyla ilgili matematiksel anlamalarının nasıl geliştirilebileceğine yönelik ön bilgiler perspektifinden bir yaklaşım sunmaktadır.

Matematik eğitiminin en önemli hedeflerinden biri, öğrencilerin ön bilgilerini dikkate alarak bir öğretim tasarlamaktır (Krainer, 2004). Bu yüzden, derslerinde öğrencilerin anlamasına ve anlam oluşturmasına odaklanan matematik öğretmenleri, dersin içeriğini öğrencilerin ön bilgileri ile ilişkilendirecek şekilde düzenlemelidir (Kilpatrick, Swafford ve Findell, 2001). Bu öneri, matematik öğretimine yön vermesi beklenilen ulusal veya uluslararası dokümanlarda farklı biçimlerde dile getirilmektedir. Örneğin, ülkemizdeki hem ilköğretim hem de ortaöğretim matematik dersi öğretim programlarının “sağlam ve önceki öğrenmelerle ilişkilendirilmiş” programlar oldukları özellikle belirtilmektedir (Milli Eğitim Bakanlığı [MEB], 2018a, 2018b, s. 4). Benzer şekilde, Amerikan Ulusal Matematik Öğretmenleri Konseyi (National Council of Teachers of Mathematics) [NCTM] (2000), öğrencilerin yeni bilgiyi inşa ederken ön bilgi ve deneyimlerini temel almaları gerektiğini ifade etmektedir. Öğrencilerin bunu başarabilmeleri ise, kendilerine yön gösterecek rehberliğe bağlıdır (Mack, 2001; Pirie ve Kieren, 1994). Bu durum, farklı birçok durumda olduğu gibi, matematik öğretmenlerinin öğretim sürecindeki rolüne işaret etmektedir.

Öğretmenlerin, matematik derslerini planlarken ve yürütürken öğrencilerin ön bilgilerini öğrenme ortamının diğer bileşenleriyle nasıl harmanlayacakları konusunda donanımlı olmaları beklenmektedir (bkz. MEB, 2015a, 2015b). Ne var ki, ön bilgilerin öğretimi zenginleştirecek şekilde kullanılmasına yönelik alan yazındaki belirgin vurguya rağmen, öğretmenlerin öğretim ortamında bu görevi nasıl yerine getireceklerine dair araştırmalar yeterli değildir (Martin ve Towers, 2016). Komatsu ve Jones (2021) da, birçok ülkenin matematik öğretim programlarında matematiksel içerik ve uygulamaya dair fikirlere yer verilse de, bu iki bileşeni harmanlayan öğretim sürecinin nasıl olabileceğine dair betimlemelerin yeterince açık olmadığına işaret etmektedir. Bu durum, matematiğin anlamlı bir şekilde öğrenilmesini sağlamakla yükümlü olan öğretmenlerin, öğrencilerin ön bilgilerini referans alarak nasıl bir ders yürüteceklerine yönelik örnek uygulamalara ihtiyaç duyabileceklerini göstermektedir.

Bu araştırmada, öğrencilerin matematiksel anlamalarının gelişimini desteklemek için ön bilgilerine odaklanan bir öğretimin nasıl olabileceğine yönelik bir yaklaşım sunulmaktadır. Bir eylem araştırması kapsamında, matematik eğitimi alan yazınında vurgulanan teorik bir olgunun pratikte nasıl hayata geçirebileceği sorusuna odaklanılmıştır. Gerek anlamlı öğrenme ortamında öğrencilerin ön bilgilerinin nasıl referans alınabileceğine yönelik araştırmaların azlığı, gerekse öğretmen adaylarının dönüşümlere (özel olarak ötelemeye) yönelik formal bir anlama geliştirebilmeleri için desteklenmeleri gerektiği tespitleri temel alınarak bir eylem planı hazırlanmıştır. Eylem planı tasarlanırken ve uygulanırken, matematiksel anlama, Pirie ve Kieren (1994) teorisi kapsamında, dinamik, seviyelendirilmiş ancak doğrusal olmayan yinelemeli bir süreç olarak ele alınmıştır. Özel olarak, öğrencilerin belirli bir matematiksel konu veya kavramla ilgili ön bilmelerine (primitive knowing)* ve bu anlama seviyesinde çalışmak üzere kasıtlı bir şekilde geriye katlama (folding back) yapmaları için gerçekleştirilen öğretim müdahalelerine (interventions) odaklanılmıştır. Araştırmanın amacı, bu eylem planının uygulanmasıyla matematik öğretmen adaylarının ötelemeyle ilgili matematiksel anlamalarının nasıl geliştirilebileceğini belirlemektir. Araştırmada, "Ön bilgiler temel alınarak geriye katlamaların teşvik edildiği öğretim müdahaleleri, matematik öğretmen adaylarının ötelemeye yönelik matematiksel anlamalarını nasıl geliştirebilir?" sorusuna cevap aranmıştır.

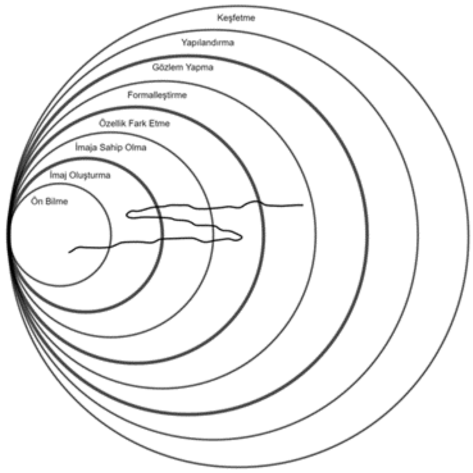
1.1. Dinamik Bir Süreç Olarak Matematiksel Anlamanın Gelişimi

Araştırmacılar, matematiksel anlamanın ne olduğuna ve nasıl geliştiğine yönelik farklı fikirler ortaya koysa da (bkz. Meel, 2003), matematiksel anlamayı bir süreç olarak ele alan Pirie-Kieren teorisi, araştırmacılar tarafından giderek artan bir ilgiyle kullanılmaktadır (bkz. Düzenli-Gökalp ve Bulut, 2018; Gülkılık, 2016; Gülkılık, Moyer-Packenham, Ugurlu ve Yürük, 2020; Gülkılık, Uğurlu ve Yürük, 2015; Güner ve Uygun, 2020; Kaba ve Sengul, 2018; Mabotja, Chuene, Maoto ve Kibirige, 2018; Martin ve Towers 2016; Şengül ve Göktepe-Yıldız, 2016; Wright, 2014; Yao, 2020a, 2020b; Yao ve Manouchehri, 2019, 2020a, 2020b). Pirie ve Kieren (1994), teorilerini modellemek için iki boyutlu bir görsel kullanmış ve teorinin önemli özelliklerini bu görsel yardımıyla açıklamıştır (bkz. Şekil 1). Söz konusu görselde, bir kişinin belirli bir matematiksel kavramı veya konuyu anlamadaki gelişimi, iç içe geçmiş sekiz potansiyel bilişsel eylem seviyesi ile betimlenmektedir. Matematiksel anlama, ön bilme seviyesinden başlayarak keşfetme seviyesine kadar ilerleyen hareketli bir süreçtir. Her bir seviye kendinden daha önceki tüm seviyeleri kapsar ve kendinden daha dışarıdaki tüm seviyelere dâhil edilir. Her ne kadar modeldeki çemberler anlamanın informal, somut seviyelerden formal, soyut seviyelere doğru geliştiğini gösterse de, bu gelişim doğrusal bir şekilde ilerlemez. Aksine, matematiksel anlama, seviyeler arasında yapılan ileri ve geri hareketler yoluyla gelişir.

Pirie ve Kieren (1994), herhangi bir kavramla ilgili matematiksel anlamanın, söz konusu kavramı anlamak için öğrencinin öğrenme ortamına getirdiği her türlü bilginin yer aldığı ön bilme ile başladığını belirtir. Bu seviyede, kavramın kendisi ile ilgili herhangi bir bilginin dışında, kavramı anlamak için sahip olunması beklenilen bilgiler yer almaktadır. Ön bilme, iyi gelişmiş formal veya soyut yapıdaki bilgileri içerebileceği gibi, eksik veya yanlış bilgileri de içerebilir. Örneğin, ikinci dereceden denklemlerin grafiklerinin nasıl çizileceğini anlamaya çalışan bir öğrencinin "polinom ifadelerini değerlendirme (en azından ikinci derece), değer tabloları yapma ve bu tablolardaki noktalardan grafiği çizme" ile ilgili anlamaları onun ön bilmesi kapsamında değerlendirilir (Pirie ve Kieren, 1994, s. 175). Öğrenci bir sonraki seviyede, söz konusu kavramla ilgili belirli eylemler gerçekleştirerek kavrama yönelik zihinsel bir imaj oluşturmaya çalışır. Bu imajlar, görsel olmak zorunda olmadığı gibi, matematiksel anlamda tamamen doğru olmak zorunda da değildir. Öğrenci, İmaja Sahip Olma seviyesinde, yaptığı bu eylemlerden bağımsız bir şekilde değerlendirip kullanabileceği zihinsel bir yapıya

* Primitive terimi ilkel, zayıf, yapılanmamış anlamlarına gelmektedir. İlgili seviye, söz konusu kavramın kendisinin dışında, kavramı anlamak için yapılması veya bilinmesi gereken her şeyi kapsadığından (Martin, 2008; Pirie ve Kieren, 1994), araştırmada "primitive knowing" için, "ön bilme" kullanılacaktır.

sahip olur. Özellik Fark Etme seviyesinde ise, öğrenci sahip olduğu imajların özelliklerini, benzerliklerini veya farklılıklarını inceleyerek bunları fark eder veya dile getirir. Özellikleri genelleyebilen öğrenci, Formalleştirme seviyesinde özel olarak herhangi bir eyleme ya da imaja bağlı kalmadan söz konusu kavramla soyut bir nesne gibi çalışabilir. Gözlem Yapma seviyesinde, formalleştirdiği anlamlar üzerinde derinlemesine düşünebilen öğrenci, bu anlamalarını gözden geçirip organize ederek, düşünme süreci sonunda oluşturduğu fikirleri teoremler gibi ifade edebilir. Bir sonraki seviye olan Yapılandırma seviyesinde, bu formal gözlemleri üzerinde düşünerek birbirleri arasında ilişkiler kurabilir, mantıksal veya meta-matematiksel argümanlar yoluyla bu gözlemlerini gerekçelendirme veya doğrulama arayışında olabilir. Son seviye olan Keşfetme seviyesinde ise, öğrenci söz konusu kavramla ilgili tam olarak yapılandırılmış bir anlama sayesinde, tamamen yeni sayılabilecek bir kavramın matematiksel anlamasının başlangıcı olabilecek sorular sorabilir. Teori, anlama seviyelerine ek olarak, matematiksel anlamanın gelişimini etkilemesi bakımından iki önemli özelliği, geriye katlama ve müdahaleleri öne çıkarmaktadır.



Şekil 1. Pirie-Kieren Teorisine Ait Model

1.1.1. Geriye katlama ve müdahaleler

Bir öğrencinin matematiksel anlamasını geliştirmek için geriye katlama hareketleri yapmasının çok önemli olduğunu belirten Pirie ve Kieren (1994), bu özelliği nitelendirmek için niçin geriye katlama metaforunu kullandıklarını şu ifadelerle açıklar (bkz. Şekil 1):

> *"Herhangi bir seviyede, hemen çözülemeyen bir problemle veya soruyla karşılaştığında, kişinin mevcut, yetersiz anlayışını genişletmek için daha içteki bir seviyeye geri dönmesi gerekir. Ancak, daha iç seviyeye geri dönen bu etkinlik, iç seviyedeki orijinal eylemlerle aynı değildir; artık dış seviyedeki ilgiler ve anlamalar tarafından bilgilendirilmiş ve şekillendirilmiştir. Katlama metaforumuzla devam edersek, artık geri dönülen seviyede kişinin 'daha kalın' bir anlamaya sahip olduğunu söyleyebiliriz… Farklı öğrenciler, seviyeler arasında farklı şekillerde ve farklı hızlarda hareket edecekler, daha kapsamlı ama aynı zamanda daha sofistike veya daha derin bir anlama geliştirmelerini sağlayacak tekrar eden geriye katlamalar yapacaklardır"* (s. 173).

Örneğin, kesirlerde toplama işleminde, paydaları aynı olan kesirleri toplamayla ilgili formal bir anlama geliştirebilen bir ilköğretim öğrencisi, paydaları farklı olan kesirlerle karşılaştığında, geriye katlama yaparak bu kesirleri toplarken kullanacağı bir yöntem geliştirebilmek için imaj oluşturma seviyesinde çalışmaya ihtiyaç duyabilir (Pirie ve Kieren, 1994). Martin (2008); geriye katlamanın kaynaklarına, geriye katlamaya neden olan müdahalenin kasıtlı olup olmamasına, geriye katlamanın yapısına ve sonucuna odaklanarak, bu özelliğin matematiksel anlamadaki rolünü daha detaylı bir şekilde incelemiştir. Araştırmacıya göre, geriye katlamanın dört temel kaynağı; öğretmen, müfredata ait herhangi bir materyal, akran ve öğrencinin kendisi olarak sınıflandırılabilir. Ayrıca, öğrencinin kendisinin dışındaki kaynaklardan ortaya çıkabilecek geriye katlama kasıtlı olabileceği gibi, kasıtsız da olabilir.

Martin (2008) geriye katlamanın dört farklı yapıda olabileceğini belirtmektedir. İlki mevcut anlamayı kullanarak daha içteki bir seviyede çalışmaktır ve öğrencinin konuyla ilgili dıştaki seviyede mevcut anlamasının sınırlarının farkına vardığında ve daha içteki bir seviyede çalışmaya karar verdiğinde ortaya çıkar. Araştırmacı, ikinci yapıyı ise toplamak (collect) için geriye katlama olarak isimlendirmektedir. Belirli bir amaç için önceki bilgileri geri getirmeyi ve mevcut matematiksel eylemlerin ihtiyaçları ışığında gözden geçirmeyi içerir. Üçüncü yapıyı ise konunun dışına çıkmak ve orada çalışmak olarak isimlendiren Martin (2008), bu yapıdaki bir geriye katlamada, öğrencilerin farklı matematiksel kavramlarla ilgili matematiksel anlamalarının gelişmesine ve "kalınlaşmasına" izin vermek için mevcut anlayışlarından çıkmaları gerektiğini belirtir (s. 77). Araştırmacıya göre, dördüncü geriye katlama yapısı ise süreksizliğe işaret eder. Bu durumda, daha içteki bir seviyeye dönerken dâhil olduğu yeni matematiksel faaliyetler ile mevcut anlaması arasında bir kırılma söz konusu olduğundan, öğrencinin var olan matematiksel anlamasının kalınlaştığından bahsedilemez (Martin, 2008). Araştırmacı, söz konusu yapılarda gerçekleşebilecek geriye katlamaların sonuçlarını, etkili olup olmamalarına göre sınıflandırmıştır. Buna göre, öğrencinin bir dış istemle veya bir dış istem olmadan kendiliğinden daha dıştaki seviyeye dönmesi ve gelişmiş anlamasını kullanması etkili bir geriye katlamaya işaret eder. Öğrenci geriye katlama yaptığı halde, bunu daha dıştaki seviyede karşılaştığı söz konusu problemi çözmek için kullanamıyorsa, bu katlama etkili olmayan bir geriye katlamadır.

Teorinin matematiksel anlamanın gelişimi için vurguladığı bir diğer özellik, öğretim ortamında gerçekleşen müdahalelerdir. Pirie ve Kieren (1994), öğretmenin sınıf ortamında yapabileceği müdahaleleri, öğrencinin anlamasını daha dıştaki seviyeye taşımaya yardımcı olacak provokatif müdahaleler, öğrencinin geriye katlama ile daha içteki seviyeye dönerek var olan anlamasını düzenlemesine ve geliştirmesine yardımcı olacak yardımcı müdahaleler ve mevcut anlamalarını doğrulamalarına yardımcı olacak geçerli kılıcı/onaylayıcı müdahaleler olarak sınıflandırmaktadır. Matematiksel anlamalarını geliştirirken yapacakları geriye katlamaları konusunda öğrencileri yönlendirecek müdahalelere karar vermek, öğretmenler için önemli bir sorumluluktur (Martin, 2008). Wright (2014), geriye katlamanın etkili olabilmesinin, öğretmenin öğrencilerin anlama seviyelerinin farkında olmasına ve öğretim ortamındaki materyalleri, problemleri ve görevleri dikkatli bir şekilde seçmesine bağlı olduğunu ifade etmektedir. Güncel bir araştırmada, Yao ve Manouchehri (2020a), sınıf içinde kimi zaman teknolojinin kimi zaman ise öğretmen müdahalelerin öğrencilerin geriye katlama eylemlerini desteklediğini ve geometrik dönüşümlerle ilgili genelleme yapma sürecinde öğrencilere yardımcı olduğunu tespit etmiştir. Söz konusu bu tespitler ışığında, bu araştırmada, matematik öğretmen adayları, kasıtlı bir şekilde dersi yürüten öğretim elemanı tarafından konunun dışına çıkıp ön bilmeleri üzerinde çalışmaları ve bu bilgiyi ileri seviyedeki anlamalarında kullanmaları için teşvik edilmişlerdir.

1.2. Dönüşümler ve Öteleme

Matematiğin farklı konularında çalışırken dönüşüm terimiyle karşılaşmak mümkündür. Bu araştırmada dönüşüm, düzlemden kendisine tanımlanan fonksiyonlar olarak ele alınacaktır. Dönüşümler, farklı ülkelerdeki eğitim ve öğretim kaynaklarında, önemi açık bir şekilde ortaya konulan matematik kavramları arasında yer almaktadır. Örneğin, ülkemizdeki ilköğretim ve ortaöğretim programında dönüşümlerle ilgili çeşitli öğrenme kazanımları yer almaktadır (bkz. MEB, 2018a, 2018b). Benzer şekilde dönüşümler, NCTM'nin İlköğretim ve Ortaöğretim Matematik Öğretmenlerini Hazırlama Standartları'nda (2020a, 2020b), öğretmen adaylarının anlayarak bilmeleri ve uygulamalar yapmaları gereken temel geometri kavramlarından birisi olarak ön plana çıkmaktadır.

Hollebrands (2003), dönüşümlerin; fonksiyonlar, simetri gibi önemli matematiksel kavramları anlamak, matematiğin kendi içinde birbirine bağlı fikirlerden oluşan bir disiplin olduğunu görmek ve çeşitli temsilleri kullanarak üst seviyede muhakeme yapmak için öğrencilere önemli fırsatlar sunduğunu belirtmektedir. Ne var ki, dönüşümlere yönelik sağlam ve tutarlı bir matematiksel anlama geliştirmek, öğrenciler ve öğretmen adayları için kolay bir iş değildir. Edwards (2003), ilköğretim, lise ve yetişkin öğrencilerle yaptığı farklı araştırmalarda, tüm seviyelerdeki bireylerin düzlem dönüşümleriyle geliştirdikleri matematiksel anlamalarının birbirine çok benzediğini belirlemiştir. Araştırmacıya göre, matematikçilerin dönüşümleri fonksiyon olarak anlamlandırmalarının aksine, bu öğrenciler dönüşümleri hareket olarak anlamlandırmaktadır. Edwards'ın (2003) öğrenciler ve matematikçilerin dönüşümleri anlamlandırmalarına dair yaptığı karşılaştırmalar dikkate alınarak, hareket ve fonksiyon anlamaları şöyle açıklanabilir. Dönüşümleri hareket olarak anlamlandıran bireyler için düzlem boş, görünmez bir arka plandır ve geometrik şekiller düzlemin "üzerinde" yer alır (s. 8). Uygulanan dönüşümler şekillerin düzlem üzerindeki fiziksel hareketlerinden ibaret iken, geometrinin nesneleri noktalar, doğrular, çemberler, üçgenler, vb. dir. Diğer yandan, dönüşümleri bir fonksiyon olarak anlamlandıran bireyler için düzlem noktalar kümesidir ve geometrik şekiller düzlemin alt kümeleridir. Dönüşüm, düzlemin "bütün noktalarının" bir eşlemesi iken, geometrinin nesneleri dönüşüm gruplarıdır (s. 8).

1.2.1. Dönüşümü Düzlemden Kendisine Tanımlanan Birebir ve Örten Bir Fonksiyon Olarak Anlamak

Hollebrands (2003), öğrencilerin dönüşümleri fonksiyon olarak anlamlandırabilmeleri için; bir dönüşümün tanım ve görüntü kümesinin ne olduğunu ve bir dönüşümün birebir ve örten olmasının ne anlama geldiğini iyi anlamaları gerektiğini ifade etmektedir. Araştırmacı, dönüşümlerin, tanım ve görüntü kümeleri açısından öğrencilerin daha önceki karşılaştıkları fonksiyonlardan farklı olduğunu belirtir. Bu yüzden, öğrencilerin dönüşümlerle çalışırken herhangi bir geometrik şekle dönüşüm uyguladıklarında, dönüşümün sadece bu şekli etkilediğini düşünebileceklerini, aslında dönüşümün düzlemdeki tüm noktalara uygulandığını anlayamamayabileceklerine işaret eder. Dönüşümleri fonksiyon olarak anlamlandırması beklenilen öğrenciler, ayrıca, dönüşümlerin girdi ve çıktılarını, parametrelerini ve bunların birbirleriyle ilişkilerini, dönüşümlerin değişmez bıraktığı girdileri ve koruduğu geometrik özellikleri kavrayabilmelidir (Hollebrands, 2003).

Araştırmalar (örn. Ada ve Kurtuluş, 2010; Avcu, 2019; Thaqi vd., 2011), öğretmen adaylarının dönüşümlere yönelik formal seviyede bir matematiksel anlama geliştirebilmeleri için desteklenmeleri gerektiğini belirlemiştir. Ne var ki, dönüşümleri hareket olarak anlama eğiliminde olan öğrencilerin, fonksiyon anlaması geliştirebilmeleri için sınıf ortamında nasıl bir öğretim izlenmesi gerektiği hala tam olarak belirlenmiş değildir (Avcu ve Çetinkaya, 2021). Konuyla ilgili alan yazında, DGY ile desteklenen öğretim ortamlarında öğretmen adaylarıyla yapılan bazı araştırmalar öne çıkmaktadır. Örneğin Yanık (2013), GeoGebra'nın pedagojik bir araç olarak kullanıldığı bir ortamda, dört matematik öğretmen adayının ötelemeyle ilgili anlamalarındaki gelişimi incelemiştir. GeoGebra'nın dinamik yapısının adayların hareket anlamasını desteklediğini gözlemleyen araştırmacı, adayların dikkatini koordinat sistemine ve noktaların düzlemde fiziksel varlıklar değil de konumlar olduğu fikrine yoğunlaştırmanın, fonksiyon anlamasını geliştirmede adaylara yardımcı olduğunu belirlemiştir. Farklı bir araştırmada ise, Akarsu ve Öçal (2022), GeoGebra'yı kullanarak öğretmen adaylarının yansımayla ilgili hangi tür bir anlamaya sahip olduklarını ve GeoGebra'nın adayların hareket veya fonksiyon anlamalarını nasıl etkilediğini incelemiştir. Araştırma sonuçları, öğretmen adaylarının yansımayı bir hareket olarak anlama eğiliminde olduklarını ve GeoGebra'nın söz konusu bu anlamayı desteklediğini göstermektedir. Araştırmacılar, programdaki bazı araçların (örn. doğruya göre yansıt, doğru parçası, çokgen) ve sürüklemenin kullanımı ile düzlemdeki belirli nesnelerin seçilerek yansıtılmasının, adayların fonksiyon anlaması geliştirmelerini engellediğini belirtmektedir. Sınıf içerisindeki matematiksel uygulamaların gelişim sürecine odaklanan Uygun (2020) ise, The Geometer's Sketchpad tarafından desteklenen sorgulamaya dayalı bir öğrenme ortamının, adayların geometrik dönüşümleri anlamalarında nasıl bir etkisinin olduğunu incelemiştir. Bunun için, geometrik dönüşümlerin özelliklerinin sorgulandığı dört aşamalı bir tahmini öğrenme yol haritası hazırlayan araştırmacı, araştırma sonunda; (1) geometrik dönüşümlerin derinlemesine anlaşılması, (2) geometrik dönüşümlerin işlevsel tanımları ve aralarındaki ilişkinin tanımlanması ve (3) geometrik dönüşümlerin özellikleri ve nitelikleri olmak üzere üç farklı matematiksel uygulamanın geliştiğini tespit etmiştir. Avcu ve Çetinkaya (2021) ise, sınıf ortamında öğretmen adaylarının hareket anlamasından fonksiyon anlamasına nasıl geçiş yapabileceklerini incelemiştir. Araştırmacılar, bu geçişi sağlamak için beş ana amaç çerçevesinde şekillenen bir öğrenme yol haritasının hayata geçirildiği öğretim ortamının, öğretmen adaylarının dönüşümlere yönelik fonksiyon anlaması geliştirmelerine yardımcı olduğunu tespit etmiştir. Araştırmacıların GeoGebra'yı kullanarak tasarladıkları öğretim ortamında, öğretmen adaylarının dönüşümleri parametreleriyle tanımlamalarına, dönüşümleri ve bileşkelerini uygulamalarına, düzlemdeki noktaların işlevsel bağımlılığını keşfetmelerine, dönüşümleri düzlemden düzleme tanımlanan fonksiyonlar olarak keşfetmelerine ve dönüşümlerin fonksiyonlar olarak sahip oldukları özellikleri keşfetmelerine yardımcı olacak etkinlikler kullanılmıştır.

Yanık (2013), her ne kadar DGY'nin (GeoGebra) ötelemeyle ilgili özellikleri anlamada öğretmen adaylarına yardımcı olsa da, adayların hareket anlamasından fonksiyon anlamasına geçişlerini sağlamanın zaman alacağını ve bunun için dikkatli bir şekilde tasarlanmış görevler kullanmak gerektiğini belirtmektedir. Ada ve Kurtuluş (2010) ise, matematik öğretmen adaylarıyla yaptıkları çalışmada, adayların öteleme ve dönme ile ilgili anlamalarının yeterli olmadığını tespit etmiş ve dönüşümlerle ilgili kavramların "öğrencilerin daha önceki geometrik konulardaki kavram yanılgıları ve hataları düzeltildikten sonra" tartışılması gerektiğini ifade etmiştir (s. 909). Bu bağlamda bu araştırma, dönüşümlerle ilgili matematiksel anlamalarını geliştirmek amacıyla matematik öğretmen adaylarının ön bilgilerinin derslerde nasıl kullanılabileceği sorusu etrafında şekillenmiş ve adayların önceki bilgilerini temel alarak tasarlanan bir öğretim ortamında gerçekleştirilmiştir. Söz konusu derslerin, matematiksel anlamalarına katkıda bulunmak amacıyla öğrencilerin ön bilgilerini dikkate alacak şekilde tasarlanan bir öğretimin nasıl olabileceğine dair bir yaklaşım sunması umulmaktadır.

YÖNTEM

Araştırma, amacı gereği bir eylem araştırması olarak tasarlanmıştır. Mills (2014) eylem araştırmasını, öğretmenlerin veya eğitim-öğretim sürecinde görev alan diğer bireylerin belirli öğretim ortamlarındaki işleyiş, öğretim ve öğrenci öğrenmeleri hakkında bilgi sahibi olmak ve bunları iyileştirmek amacıyla yapabilecekleri sistematik bir araştırma olarak tanımlamaktadır. Bu bağlamda eylem araştırması, eğitimle ilgili çözülmesi gereken özel bir problemi fark eden öğretmenlere (veya eğitimcilere), araştırma sürecine dâhil olarak, öğretim ortamındaki uygulamalarını geliştirmeleri için olanak sağlar (Creswell, 2012).

2.1. Katılımcılar ve Bağlam

Bu eylem araştırması, bir devlet üniversitesinin matematik öğretmenliği programının dördüncü sınıfında öğrenim gören 28 matematik öğretmen adayı ile düzlem dönüşümlerinin tartışıldığı bir geometri dersinde gerçekleştirilmiştir. Söz konusu dersler, öğretmen adaylarının geometrik dönüşümleri anlamalarını geliştirmek için tasarlanan bir araştırmanın ilk aşaması olarak planlanmıştır. Derslerin teorik kısmı, ilgili programda görev yapan bir öğretim üyesi tarafından, uygulama kısmı ise araştırmacı (yazar) tarafından yürütülmüştür. Dersi yürüten bu iki öğretim elemanının farklı geometri derslerinde karşılaştıkları bazı durumlar, öğretmen adaylarının ötelemeyle ilgili anlamalarının geliştirilmesi için eyleme geçilmesi gerektiği fikrini oluşturmuştur. Bu durumlar genel olarak katılımcıların program kapsamında aldıkları farklı matematik derslerinde dönüşümlerle ilgili bilgilerini kullanmalarının gerektiği sınıf içi görevlerde ve yine program kapsamında aldıkları matematik eğitimi derslerinde dönüşümlerle ilgili yaptıkları öğretim uygulamalarında ortaya çıkmıştır. Katılımcıların ötelemeye yönelik fonksiyon anlaması geliştirebilmeleri için alan yazındaki öneriler ele alınmış ve katılımcıların ön bilgilerini temel alan bir öğretimin bu süreci kolaylaştıracağı düşünülerek bir eylem planı hazırlanmıştır. Bu bağlamda, hafta hafta ötelemenin tartışılacağı derslerin içeriği düzenlenmiş ve dersler boyunca kullanılacak etkinlikler oluşturulmuştur. Daha sonra hazırlanan bu plan eyleme dönüştürülmüş, katılımcıların ön bilgileri referans alınarak yürütülen öğretimin, onların ötelemeye yönelik anlamalarının gelişimine nasıl etki ettiği belirlenmeye çalışılmıştır. Mills (2014) ve Creswell'in (2012) önerileriyle şekillen bu sürecin detayları ilerleyen bölümlerde sunulacaktır.

Eylem araştırması planı hazırlanırken, dersi yürüten öğretim elemanları düzenli aralıklarla bir araya gelmiş ve öğrencilerin dönüşümlerle ilgili formal bir anlama geliştirebilmeleri için Hollebrands (2003) ve Yanık (2013) tarafından ortaya konulan tespitleri ele almıştır. Öğretim elemanları bu toplantılarda, derslerdeki hedeflerinin "öğrencilerin ötelemeyle ilgili fonksiyon anlamasını geliştirmek" olduğunu açıkça ifade etmiştir. Bu amaç doğrultusunda "öğrencilerin özellikle vektör kavramını formal seviyede anlamlandırmaları gerektiğini" ve "tanım ve değer kümesi reel düzlem olan birebir ve örten fonksiyonlarla ilgili kavrayışlarının geliştirilmesi gerektiğini" belirlemişlerdir. Eş zamanlı olarak, herhangi bir konu ya da kavramla ilgili matematiksel anlamanın gelişiminde ön bilmenin anahtar rolü ve yeri geldiğinde öğrencilerin ön bilgilerini kullanmalarının süregelen anlamayı nasıl geliştireceğine odaklanılmıştır. Bu bağlamda, öğretmen adaylarının ötelemeyle ilgili matematiksel anlamalarının başlangıç noktası, yani ön bilme seviyesinde anlamlandırmış olmaları beklenen önceki matematiksel kavramlar belirlenmiştir. Söz konusu kavramlar, reel düzlem, fonksiyon, birebir fonksiyon, örten fonksiyon, tanım veya değer kümesi $\mathbb{R}$ veya $\mathbb{R}^2$ olan fonksiyonlar, parametre ve vektör ile sınırlandırılmıştır.

2.2. Verilerin Toplanması

Araştırmanın başlangıcında, dönüşümlerle ilgili nasıl bir anlamaya sahip olduklarını belirlemek için öğretmen adaylarına bir ön test uygulanmıştır. Ön testte adaylardan, düzlem, fonksiyon (birebir ve örten fonksiyon), vektör, öteleme, dönme, yansıma ve homoteti kavramlarını tanımlamaları, bu kavramlarla ilgili bildiklerini örneklerle detaylı bir şekilde yazmaları istenmiştir. Ön test, adayların dönüşümlerle ilgili sahip oldukları bilgilerin, alan yazında dönüşümlerle çalışan öğretmen adaylarına yönelik elde edilen sonuçlara ne kadar benzediğini ya da farklılaştığını belirlemek amacıyla uygulanmıştır. Önceki araştırmalarla benzer sonuçlar sunan ön testin uygulanmasından sonra, hazırlanan eylem planı uygulanmaya başlanmıştır. Planın uygulandığı dersler kamera ile kayıt altına alınmıştır. Derslerin teorik bölümlerinde araştırmacı dersleri gözlemlemiş ve dersin yürütücüsü ile öğretmen adayları arasında gerçekleşen matematiksel tartışmalara yönelik alan notları tutmuştur. Dersin uygulama bölümlerinde ise, araştırmacı dersin yürütülmesinden de sorumlu olduğu için, kayıt altına alınan derslerle ilgili gözlem notlarını derslerden sonra tutmuştur.

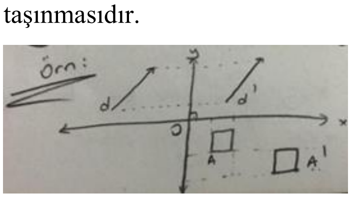
Araştırma, öteleme, dönme, yansıma, ötelemeli yansıma, homoteti ve bu dönüşümlerin bileşkelerinin ele alındığı bir dersin ilk beş haftasını kapsamaktadır. İlk hafta, araştırma hakkında bilgilendirme yapılmış ve yazılı olarak uygulanan ön testten sonra, adayların ön testte yazdıkları üzerine bir konuşma ortamı oluşturulmuştur. Ardından dersin içeriği hakkında genel bir bilgilendirme yapılmıştır. İkinci ve üçüncü haftadaki dersler, dönüşümleri anlamak için gerekli ön kavramların tartışılmasına ayrılmıştır. Bu derslerde, ötelemenin formal tanımı paylaşılırken adayların ön bilmelerine geriye katlama yapmaları beklenmiştir. Dördüncü hafta, öteleme uygulamalarına yer verilmiş ve uygulamaların bir kısmında, öğrencilerin önceki haftalarda tartışılan kavramlarla ilgili anlamalarını kullanmalarının beklendiği sorulara odaklanılmıştır. Beşinci hafta, dördüncü haftada yapılan derslerdeki gözlemler de dikkate alınarak, öğrencilerin geriye katlama yapmalarını teşvik etmek amacıyla hazırlanan etkinliklere devam edilmiştir. Bu iki hafta boyunca, dersler başlamadan önce dersi yürüten öğretim elemanları tarafından hazırlanan eylem planındaki örnekler kullanılmıştır. Dersler sırasında, öğretmen adaylarına, kendilerinin özellikle sınıf içi tartışmalara katılmalarının beklendiği belirtilmiş ve bunun için uygun sınıf atmosferi oluşturulmaya gayret edilmiştir. Yapılan uygulamalarda, genellikle öğretmen adaylarının önce küçük gruplar halinde tartışmaları daha sonra sınıf içi tartışmaya katılmaları istenmiştir.

Dersi yürüten öğretim elemanları, derslerden sonra bir araya gelerek dersler hakkında görüşmüş ve eylem planının içeriği hakkında gerektiği zaman bazı düzenlemeler yapmıştır. Örneğin, herhangi bir ötelemede düzlemdeki tüm noktaların ötelendiği ile ilgili etkinlikler sırasında, adayların koordinat eksenlerinin ötelenmesi ile ilgili ön bilgilerinin de ele alınması gerektiği fark edilmiştir. Bunun için, bir sonraki derste düzlem, koordinatlama, koordinat eksenleri ve bu eksenlerin ötelenmesi ile ilgili hatırlatmalar yapılmıştır. Başka bir durumda, adayların ötelenen şekillerin özelliklerini tartışırken görüntü ve görünüş terimlerini birbirlerinin yerine kullanabildikleri gözlemlenmiştir. Bunun için, sonraki derslerde adayların matematiksel dil kullanımlarına müdahale edilmiştir. Bu bağlamda, araştırmanın verilerini, dersler başlamadan önce uygulanan ön teste verilen yazılı cevaplar, dersler boyunca gerçekleşen matematiksel tartışmalara yönelik kayıtlar, ders gözlem notları ile dersi yürüten öğretim elemanlarının ders öncesi veya sonrası görüşmelerinde alınan notlar oluşturmaktadır. Bu görüşmelerde alınan notlar, derslerde gerçekleşen tartışmalardan elde edilen veriyi desteklemek amacıyla kullanılmıştır.

2.3. Verilerin Analizi

İlk olarak, öğretmen adaylarının, araştırmanın başlangıcında uygulanan ön teste yazılı olarak vermiş olduğu cevaplar analiz edilmiştir. Bunun için öğretmen adaylarının öteleme ve ötelemeyle ilgili kavramlara ait açıklamaları kodlanmış ve her bir kavrama yönelik sahip oldukları bilgiler kategorileştirilmiştir. Bu aşamada, ilk hafta ön teste verilen cevapların paylaşıldığı sınıf içi konuşma ortamındaki veriler, yazılı verileri desteklemek için kullanılmıştır. Adayların, ötelemeyle ilgili açıklamaları kodlanırken ötelemeyi bir hareket mi yoksa bir fonksiyon olarak mı anladıkları ve ötelemeyle ilgili hangi anlama seviyesinde çalışmaya yoğunlaştıklarına odaklanılmıştır. Hareket ve fonksiyon anlamaları incelenirken alan yazındaki temel araştırmalardan (örn. Edwards, 2003; Hollebrands, 2003), anlama seviyeleri ele alınırken ise Pirie-Kieren teorisinden yararlanılmıştır. Söz konusu analizi örneklendirmesi açısından, bir matematik öğretmen adayının ötelemeye yönelik açıklamaları ve karşılık gelen kodlar için Tablo 1 incelenebilir.

Tablo 1. Bir Adayın Açıklamalarına Yönelik Analizden Elde Edilen Kodlar

Adayın açıklamaları	Hareket ya da fonksiyon anlamasına yönelik kodlar	Matematiksel anlama seviyelerine yönelik kodlar
Öteleme, bir geometrik şeklin (doğru, açı, üçgen, kare, vs…) bir koordinat sistemi üzerinde herhangi bir açı değişikliği yapmadan sadece taşınmasıdır. 	Ötelemenin düzlem üzerindeki geometrik şekillere uygulandığını düşünme (Hareket) Ötelemeyi fiziksel hareket olarak anlama (Hareket)	Sahip olduğu imajı söyleme Ötelemeye ait özellikleri kaydetme

Daha sonra, öteleme derslerinin yürütülmesi sırasında elde edilen video kayıtlarının analiz edilmesine geçilmiştir. Bu aşamada, araştırmacının ders gözlemleri sırasında ön bilmelere odaklanıldığı durumlara yönelik tutmuş olduğu alan notları, hangi video kayıtlarının analiz edileceği konusunda yol gösterici olmuştur. Belirlenen ders videolarının analizi için Powell, Francisco ve Maher'in (2003) önerdiği aşamalar kullanılmıştır. Bu bağlamda, veri hakkında detaylı bilgiye sahip olmak amacıyla ilk olarak videolar dikkatli bir şekilde izlenmiştir. Daha sonra, Powell vd.'nin (2003) ifadesiyle, kayıtlardaki kritik olaylara odaklanılmıştır. Bu araştırmada kritik olaylar, adayların ön bilmeleri üzerinde çalışmaları için teşvik edildikleri geriye katlama hareketlerini ve bu hareketlerin ötelemeyle ilgili matematiksel anlamalarının gelişimine yansımalarını gösteren bölümlerden oluşmaktadır. Örneğin, herhangi bir ötelemede düzlemde değişmez kalan noktaların olup olmayacağının sorgulandığı uygulama, araştırmada bir kritik olay olarak ele alınmıştır. Bu kritik olay, ötelemeyle ilgili formal bir anlama geliştirmeye çalışan öğretmen adaylarının ön bilmelerini geliştirmek için yapılan öğretimi ve bu öğretimin söz konusu uygulamada adayların anlamasını nasıl etkilediğini gösteren ders kesitini içermektedir. Bu ders kesitinde, ilk olarak, bir öteleme örneği (öteleme vektörü $\vec{v} = (1,1)$ olarak alınmıştır) grafiksel temsiller kullanılarak gösterilmiştir. Daha sonra, böyle bir dönüşümün matematiksel notasyon kullanılarak nasıl temsil edilebileceği açıklanmıştır. İlerleyen kısımda, adaylara böyle bir dönüşümde değişmez kalan noktalar olup olmadığı sorulmuştur. Adaylar soruya doğrudan "olamaz" diye cevap vermiş, neden olamayacağı sorulduğunda ise "dönüşümde düzlemdeki tüm noktaların dönüşüme tabi tutulduğunu", bu dönüşümün de "düzlemdeki tüm noktaları ötelediğini", dolayısıyla "noktaların değiştiğini" ifade etmişlerdir. Bu kesit, özdeşlik dönüşümünün dışındaki tüm ötelemelerde, düzlemdeki noktaların öteleneceğinin tartışılması ile son bulmuştur.

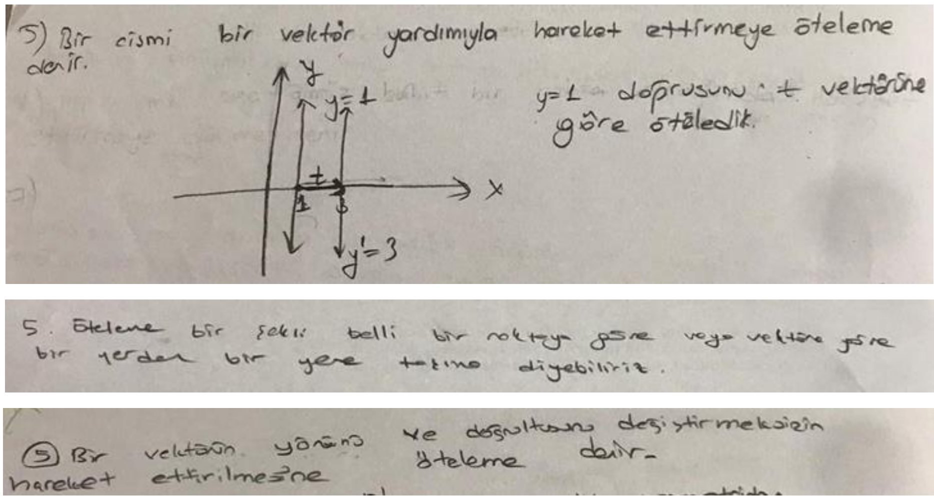
Belirlenen kritik olayların olduğu video bölümleri transkript edilmiş ve kodlanmıştır. Kodlama sırasında alan yazındaki dönüşümlerle ilgili araştırmalardan ve Pirie-Kieren modelinden yararlanılarak kategoriler oluşturulmuştur. Ön bilgilerin temel alındığı bir öğretim ortamında matematiksel anlamanın gelişimine yönelik tespit edilen kritik olaylar ve kodlar bir bütün halinde sentezlenmiştir. Dersi yürüten öğretim elemanları, yapılan kodlamalar ve temalar üzerinde fikir birliği oluşana kadar veriler üzerinde çalışmıştır. Bu aşamada, verilerden elde edilen kodlar aynı ise bir sonraki aşamaya geçilmiş, değilse kodlardaki farklılıklar giderilene kadar tartışılmıştır. Araştırmada, geçerliği sağlamak adına farklı veri toplama yöntemleri kullanılmıştır. Yazılı dokümanlar, derslere ait video kayıtlarına ait transkriptler ve gözlem notları ile öğretim elemanlarının süreç boyunca yaptığı görüşmelerde alınan notlar ile verilerin geçerli olması sağlanmaya çalışılmıştır.

BULGULAR

Öğretmen adaylarının ötelemeyle ilgili anlamalarını geliştirirken önceki anlamalarına başvurmaları konusunda nasıl teşvik edildiklerine ve bu durumun adayların anlamalarının gelişimini nasıl etkilediğine yönelik bulgular iki farklı öğretim kesitiyle paylaşılacaktır. Bu iki örnek kesit, bulguları en iyi şekilde temsil ettiği düşünüldüğü için özellikle seçilmiştir. Söz konusu kesitlerin detaylarına geçmeden önce, öğretmen adaylarının ön testte öteleme ve ilgili kavramlara yönelik sahip oldukları bilgileri gösteren bulgular sunulacaktır. Bu bulguların, okuyucuya, öğretmen adaylarının öteleme derslerine başlamadan önce nasıl bir anlama ile sınıf ortamına geldiklerini ve ön bilmelerine geri dönerek farklı kavramlarla çalışmaya teşvik edildiklerinde nasıl bir deneyim geçirdiklerini izlemede yardımcı olacağı düşünülmektedir.

3.1. Öğretmen Adaylarının Derslerden Önce Ötelemeye ve İlgili Kavramlara Yönelik Bilgileri

Ön testte yer alan kavramlarla ilgili yazdıkları açıklamalar analiz edildiğinde, öğretmen adaylarının ötelemeyle ilgili hareket anlamasına işaret eden imajlara sahip oldukları ve ötelemenin bazı özelliklerini ifade etmekle yetindikleri tespit edilmiştir. Önceki araştırmalara benzer şekilde, adayların, ötelemeyi, düzlem *üzerindeki* geometrik şekillere uygulanan fiziksel bir hareket olarak anlamlandırdıkları söylenebilir (bkz. Şekil 2). Ön testte verdikleri yanıtların konuşulduğu ders sırasında da, "ötelemeyle günlük hayatta sıklıkla karşılaştıklarını", "ötelenen cisimlerin özelliklerinin hareket sırasında bozulmadığını" ve "daha önceki fizik ya da matematik derslerinde cisimleri bir vektörle hareket ettirdiklerini" ifade etmişlerdir.

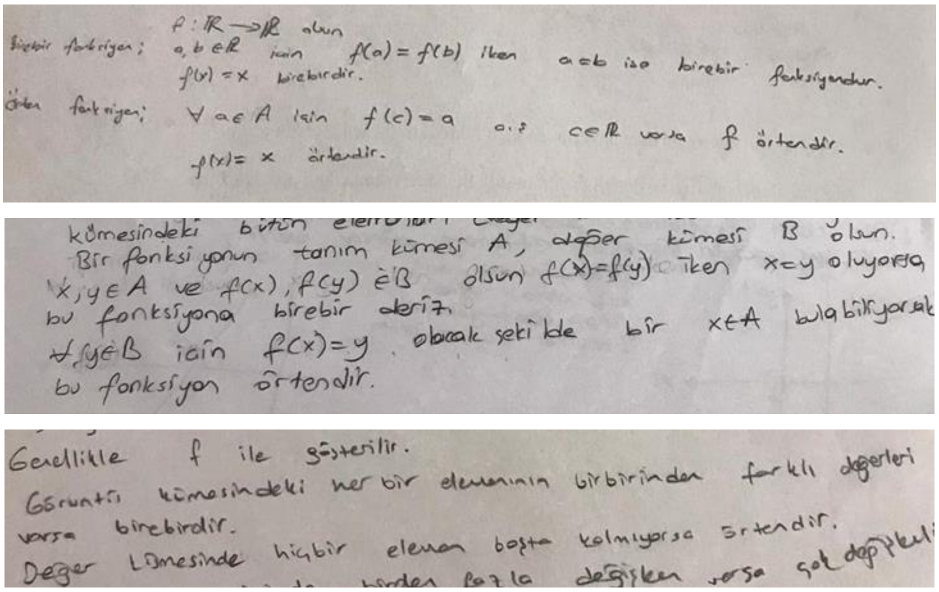


Şekil 2. Öğretmen Adaylarının Ötelemeyle İlgili Bilgilerini Gösteren Örnekler

Öğrencilerin herhangi bir konuyla ilgili ön bilmelerini tamamen belirleyebilmek mümkün olmasa da, onların sergiledikleri fiziksel, sözel ve yazılı eylemlerine bakarak ön bilmeleri hakkında bilgi sahibi olunabilir (Thom ve Pirie, 2006). Ön testte, öğretmen adaylarının ötelemeyle ilgili bazı kavramlarla ilgili bildiklerini de detaylı bir şekilde açıklamaları istenmiştir. Düzlem, fonksiyon ve vektör ile sınırlandırılan bu kavramlara yönelik bulgular, adayların birbirlerinden farklı ön bilmelerle öğretim ortamına geldiğini göstermiştir. Örneğin, öğretmen adayları düzlem kavramı ile ilgili bildiklerini açıklarken kavramla ilgili bazı genel matematiksel ifadelerden (örn. "Düzlem en az bir doğru ve doğrunun üzerinde olmayan bir noktadan oluşur.", "Düzlem iki boyutlu bir geometrik kavramdır, aynı doğru üzerinde olmayan üç nokta bir düzlem belirtir, $\mathbb{R}^2$ bir düzlem örneğidir.", "Düzlem 2 tek boyutlu uzayın birleştirilmesiyle oluşur. Doğrular tek boyutlu olduğundan iki doğrunun kesişmesi, paralel gelmesi düzlem belirtir.") veya düzlemin kartezyen koordinat sistemindeki genel denkleminden (örn. "Düzlem iki boyutlu noktalar cümlesidir. Genel denklemi $ax + by + cz + d = 0$, $a, b, c, d \in \mathbb{R}$", "$Ax + By + Cz + D = 0$ şeklindeki denklemlerle ifade edebildiğimiz kavrama düzlem deriz.") yararlanmışlardır. Adayların yarısı[†] bu açıklamalarını yazıya dökerken düzlemi temsil eden bir paralelkenar çizmiştir.

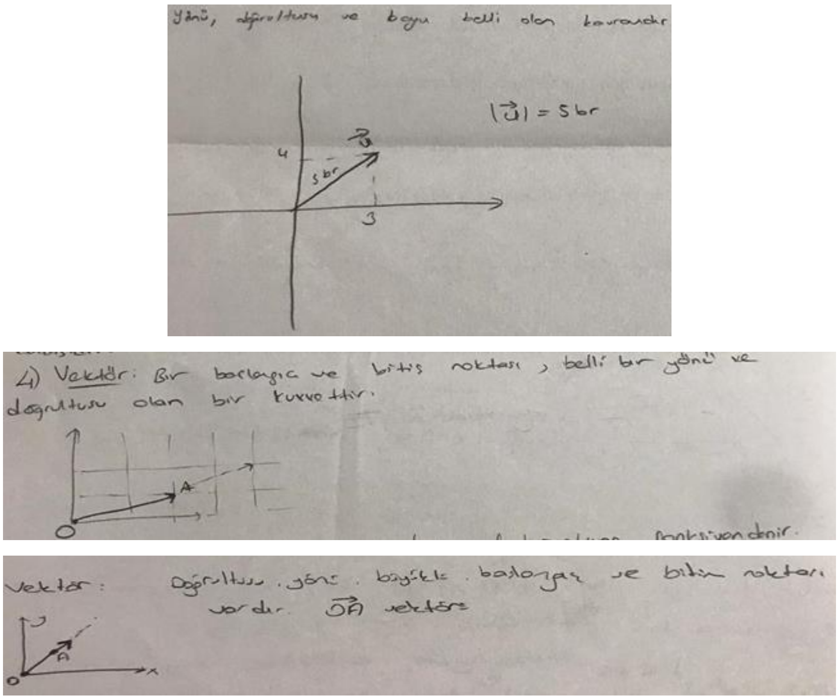
Öğretmen adaylarının fonksiyon ile ilgili açıklamalarına bakıldığında ise, fonksiyonun "tanım kümesinden değer kümesine giden bir işlem/işlev" olduğu, "özel bir bağıntı" olduğu, "iyi tanımlı olması" gerektiği ve "tanım kümesinde açıkta eleman kalmaması" gerektiği şeklindeki yazılı ifadeler öne çıkmıştır. Öğretmen adaylarının birebir ve örten fonksiyonu tanımlarken genellikle tanım kümesini A, değer kümesini B olarak isimlendirdikleri bir f fonksiyonu ele aldıkları ve bu fonksiyonun birebir ve örten olması için gereken şartları açıklamaya çalıştıkları görülmüştür (bkz. Şekil 3).

[†] Ön test 26 matematik öğretmen adayına uygulanmıştır.



Şekil 3. Öğretmen Adaylarının Birebir ve Örten Fonksiyonu Açıklamak İçin Yazdıkları İfadelere Örnekler

Ön testte öğretmen adaylarından tanımlamaları veya hakkında bildiklerini açıklamaları istenen bir diğer kavram ise vektördür. Vektörü tanımlamaya çalışırken, adayların sadece 11 tanesinin "yönlü doğru parçası" kategorisi altında sınıflandırılabilecek imajlara yer verdikleri tespit edilmiştir. Dört öğretmen adayı vektörü "yer veya yön belirten ışın" olarak açıklarken, bazı öğretmen adayları vektörün başlangıç/bitiş noktası, yönü veya doğrultusu gibi özelliklerini yazmakla yetinmiş veya vektörü doğru parçasından farklı kavramlarla ilişkilendirmişlerdir. Ayrıca, öğretmen adaylarının açıklamalarını, başlangıç noktası orijin olan vektöre ait geometrik bir temsil ile destekledikleri görülmüştür. Şekil 4'te yer alan farklı öğretmen adaylarının açıklamaları ve çizimleri bu durumlara örnektir.



Şekil 4. Öğretmen Adaylarının Vektörle İlgili Bilgilerini Gösteren Örnekler

3.2. Öğretmen Adaylarının Teşvik Edildikleri Geriye Katlama Hareketleri ve Bu Hareketlerin Ötelemeyle İlgili Anlamanın Gelişimine Yansımaları

Dersin öğretim elemanları, öğretmen adaylarının ön bilmelerine geriye katlama yapmalarını sağlamak için öğretime yönelik kasıtlı pek çok eylemde bulunmuştur. Bu eylemlerin neler olabileceğine ve nasıl yapılması gerektiğine ise ders öncesi yapılan haftalık görüşmelerdeki tartışmalar şekil vermiştir. Bu bölümde, öteleme derslerinde söz konusu bu kavramlarla ilgili anlamalarını geliştirmek için adayların kasıtlı bir şekilde ön bilmelerine nasıl yönlendirildiklerini ve bu yönlendirmenin ötelemeyle ilgili anlamayı nasıl etkilediğini gösteren bulgular sunulacaktır. Bu bağlamda, iki farklı sınıf içi öğretim kesitinin detayları paylaşılacaktır. İlk kesitte vektör kavramına, ikinci kesitte ise fonksiyon ve reel düzlem kavramlarına odaklanılacaktır. Ayrıca, adaylar ötelemeyle ilgili formal bir anlama geliştirirken, bu müdahalelerin söz konusu anlamayı nasıl etkilediğini gösteren bulgulara yer verilecektir.

3.2.1. Kesit 1: Vektör Kavramına Yönelik Anlamanın Geliştirilmesinin Ötelemeyle İlgili Gelişen Formal Anlamaya Yansımaları

Dersi yürüten öğretim elemanları, öğretmen adaylarının ötelemeyle ilgili hareket anlamasına sahip olduklarını ve vektörle ilgili imajlarını belirledikten sonra, onları doğrudan vektör kavramıyla çalışmaya yönlendirmeyi tercih etmiştir. Bu kesitte, dersi yürüten öğretim elemanının öğretmen adaylarıyla vektör ve ilgili kavramlara yönelik nasıl bir tartışma ortamı sunduğu betimlenecektir[‡]:

Eğitmen: Düzlem dönüşümlerini anlayabilmemiz için öncelikle bazı kavramları çok iyi anlamış olmamız gerekiyor. Örneğin ötelemeyi ele aldığımızı düşünelim, ötelemeyi anlamak için bir kere vektörün ne olduğunu kavramalıyız. Ötelemeden önce, bazı kavramlarla ilgili sorular sorup cevaplarını bulmaya çalışacağız. İlk olarak, kartezyen çarpım nedir dersem bana neler söyleyebilirsiniz?

Aday 1: A ve B boş olmayan iki küme olsun. A dan birinci bileşeni, B den ikinci bileşeni alarak elde ettiğimiz sıralı ikililerden oluşan kümeye denir.

Eğitmen: Peki sözel olarak ifade ettiğimiz bu ifadeleri sembolik olarak yazarsak (tahtaya $A \times B = \{(a, b): a \in A, b \in B\}$ yazıyor). Böylece hepinizin söylediği şeyleri matematiğin dili ile ifade etmiş olduk. Burada A ve B kümelerinin ikisinin de re ($\mathbb{R}$) olduğunu düşünelim ($\mathbb{R} \times \mathbb{R} = \{(a, b): a, b \in \mathbb{R}\}$ yazıyor). Yani, elemanları reel sayılar olan kümelerle çalıştığımızı söylüyoruz. Biz bu kümeyi ne ile gösteriyoruz? Re iki ($\mathbb{R}^2$ yazıyor) değil mi? Peki, kartezyen çarpımdan sonra ne var, bağıntı…

Aday 2: Bir kartezyen çarpımın alt kümesi.

Eğitmen: Evet, her bir alt kümesi. Bağıntılarla çalışırken hatırlarsanız belirli özelliklere sahip olan bazı bağıntılarla çalışıyordunuz. Denklik bağıntısı, sıralama bağıntısı gibi. Denklik bağıntısının ne olduğunu bana hatırlatabilir misiniz?

Aday 3: Yansıma, geçişme ve simetri özelliklerine sahip bağıntı.

Eğitmen: Evet, peki denklik bağıntısını ilişkilendirebildiğiniz başka bir kavram hatırlıyor musunuz?

Aday 3: Denklik sınıfı?

Eğitmen: Neydi denklik sınıfı?

[Sessizlik]

[‡] Bulgularda sunulacak diyaloglarda, dersi yürüten öğretim elemanları "Eğitmen", derste tartışmaya katılan öğretmen adayları "Aday" şeklinde gösterilecektir.

Burada dersi yürüten öğretim elemanı, ötelemeyle ilgili derse başlarken, öğretmen adaylarının ön bilmelerinde anlamlandırmış olmalarını beklediği temel kavramlara odaklanarak adayları geriye katlama yapmaya teşvik etmiştir. Bunun için adayların kartezyen çarpım, bağıntı ve denklik bağıntısı kavramlarıyla ilgili anlamalarını hatırlamalarını beklemiş ve adayları denklik sınıfı kavramına yönlendirmiştir. Adayların denklik sınıfı ile ilgili herhangi bir şekilde düşüncelerini dile getirmediğini gözlemlediğinde ise tartışmaya şu şekilde devam etmiştir:

Eğitmen: Hatırlayalım, her denklik bağıntısı, üzerinde tanımlı olduğu kümeyi denklik sınıflarına ayırır. Örnek vermek gerekirse, mesela eş üçgenler. Üçgenler üzerindeki eşlik bağıntısını düşünelim. Bu bağıntının yansıma, geçişme ve simetri özelliklerini sağladığını hemen söyleyebiliriz. Her üçgen kendine eştir. Bir üçgen başka bir üçgene eş ise, o da ilkine eştir. Bir üçgen başka bir üçgene eş, o da başka bir üçgene eş ise ilk üçgen üçüncü üçgene eştir.

[Öğretmen adayları onaylayarak cebir derslerinde yaptıkları bazı uygulamalardan bahsediyorlar.]

Eğitmen: Peki, şimdi buradan başka bir kavrama geçmek istiyorum, vektör. Vektör hakkında neler söyleyebilirsiniz?

Adaylar: Yönlü doğru parçası.

Aday 4: Başlangıç ve bitiş noktası belli olan yönlü doğru parçası.

Eğitmen: Yönlü doğru parçaları ("ları" kısmını vurguluyor). Biz vektörü nerede tanımlarız? Vektör nerede tanımlıdır?

Aday 5: Düzlemde.

Aday 6: Uzayda.

Aday 7: Koordinat düzleminde.

Eğitmen: Vektör uzayı kavramını hatırlıyorsunuz değil mi, lineer cebir derslerinde görmüştünüz. Vektör dediğimiz kavram vektör uzayının elemanıdır, yani vektör uzayında tanımlıdır. Peki kaç boyutlu uzay? Az önce vektör düzlemde, uzayda tanımlıdır dediniz. Arkadaşlar, uzay kaç boyutlu olursa olsun, vektörü, vektör uzayının elemanı olarak tanımlarız. (Tahtaya $\mathbb{R}$, $\mathbb{R}^2$, $\mathbb{R}^3$yazıyor ve $\mathbb{R}$ yi işaret ediyor). Bu küme ne kümesi?

Aday 7: Reel sayılar.

Aday 6 : Vektör uzayı.

Aday 8: Tek boyutlu uzay.

Öğretmen adaylarının söz konusu kümeyi ilişkilendirdiği matematiksel nesneleri dinleyen öğretim elemanı, tartışmayı bu nesneler üzerinden şekillendirmeye ve böylece dersi adayların cevaplarını temel alacak şekilde sürdürmeye karar vermiştir. Bunun için tahtaya bir reel sayı doğrusu çizmiş ve öğretmen adaylarını bu şekil üzerinde düşünmeye sevk ederek vektör kavramıyla ilgili anlamalarını geliştirmeye çalışmıştır:

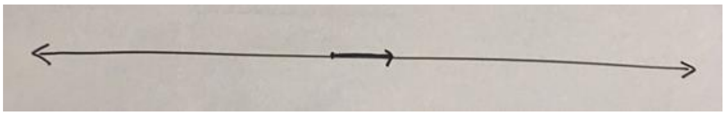
Eğitmen: Bir arkadaşınız vektör uzayıdır dedi. Bir vektör uzayı dediğimizde üzerinde bir cebirsel yapı var, vektör uzayı yapısı, bu uzayın elemanlarına da vektör diyorduk. Şimdi reel sayı doğrusunu çizdiğimizi düşünelim. Bunun üzerinde bana bir vektör gösterebilir misiniz?

(Bir öğretmen adayı Şekil 5a'daki çizimi yapıyor.)

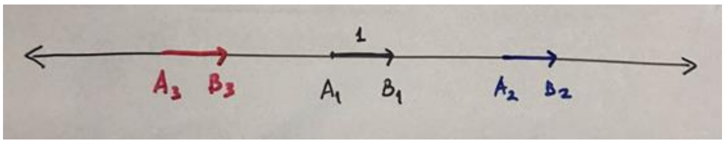
Eğitmen: Bunu A_1B_1 diye isimlendireyim, boyu örneğin 1 birim olsun. A_1B_1 ile boyu ve yönü aynı olan doğru parçalarının hepsinin sınıfını düşünelim. Şöyle, bir tane şuraya *çizeyim A_2B_2 , bir tane de şöyle A_3B_3, (bkz. Şekil 5b) dikkat edin boyları ve yönleri hep aynı. Kaç tane çizebilirim böyle?*

Adaylar: Sonsuz.

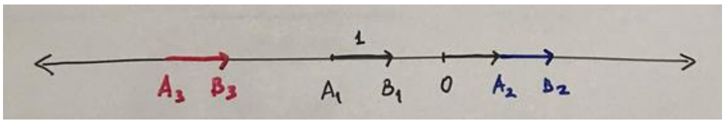
Eğitmen: Ama burada önemli olan tekrar ediyorum boylarının ve yönlerinin aynı olması. Şimdi vektör derken, matematiksel anlamda, bu şekildeki doğru parçalarının hepsini düşünüyorum (daha önce çizdiği yönlü doğru parçalarının her birini gösteriyor). Başlangıç ve bitiş noktaları belli, boyu ile yönü aynı olan doğru parçalarının bir denklik sınıfı. Yani bir vektör dediğimde, bu özelliği sağlayan sonsuz çoklukta yönlü doğru parçalarının olduğu bir kümeyi düşünüyorum. Peki nasıl gösteriyoruz vektörü? Bu küme içerisindeki elemanlardan birisini (A_1B_1 yönlü doğru parçasını gösteriyor) temsilci olarak seçiyorum. Kolaylık olsun diye, orjinde çalıştığımızı düşünürsek, 1 birim uzunluğundaki şu yönlü doğru parçasını temsilci olarak alabiliriz (OA_2 yönlü doğru parçasını gösteriyor, bkz. Şekil 5c). Bütün bu yönlü doğru parçalarını, aldığımız bu yönlü doğru parçası temsil eder, u olarak isimlendirdiğimizi düşünelim. u vektörü dediğimiz anda ($\vec{u}$ yazıyor) aslında yönü bu şekilde ve boyu 1 birim olan tüm doğru parçalarının kümesini düşünürüz.



Şekil 5a. Öğretmen Adayının Reel Sayı Doğrusunda Çizdiği Vektör



Şekil 5b. Öğretim Elemanının Reel Sayı Doğrusunda Çizdiği Yönlü Doğru Parçaları



Şekil 5c. Öğretim Elemanının Reel Sayı Doğrusunda Temsilci Olarak Çizdiği Yönlü Doğru Parçası ($[OA_2]$)

Adayların reel sayılar, reel sayı doğrusu ve vektörle ilgili imajlarını kullanan öğretim elemanı, dersin başından itibaren kasıtlı bir şekilde sorguladığı matematiksel kavramları temel alarak ilerlemiştir. Vektör kavramı ile ilgili formal bir anlama geliştirme arayışına giren öğretmen adayları, farklı örnekler üzerinden sunulan tanımı anlamlandırmaya çalışmış, öğretim elemanı da onları bu süreçte desteklemeye devam etmiştir:

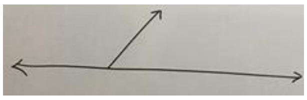
Aday 4: Peki doğrultusu farklı olsaydı?

Eğitmen: Bakalım, tahtaya gelip doğrultusu farklı bir vektör çizer misin?

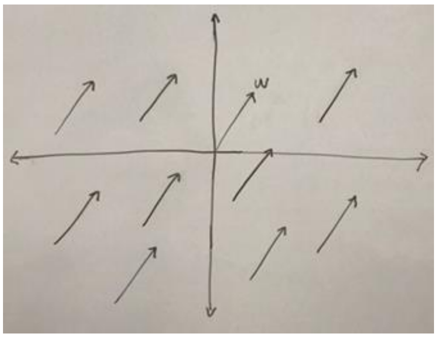
(Öğrenci Şekil 6'daki yönlü doğru parçasını çiziyor)

Aday 10: O zaman tek boyuttan çıkarız ama iki boyutlu olur.

Eğitmen: Evet güzel söylediniz. Burada re bir'de ($\mathbb{R}^1$ yazıyor), bir boyuttayız, iki yön var sadece, bu şekilde bir vektörle çalışmak istediğimizde re iki'ye ($\mathbb{R}^2$ yazıyor) geçiş yapmamız gerekecek. Reel sayı doğrusunda A_2B_2, OA_2 ile aynı denklik sınıfında demiştik. Aslında A_2B_2 ile işlem yapmak demek OA_2 ile işlem yapmak demek. Bunlardan hangisi ile işlem yaparsanız yapın aynı işlemi yapmış olursunuz. Aynı mantık re birden ($\mathbb{R}^1$) re ikiye ($\mathbb{R}^2$) geçtiğimizde de geçerli. Artık yön konusunda daha rahatız. Diyelim ki *şunu aldım (tahtaya başlangıç noktası orjinde olan w yönlü doğru parçasını çiziyor, bkz. Şekil 7). Düzlemde buna paralel olan ve aynı yönde ve büyüklükteki istediğim yönlü doğru parçasını çizebilirim. Düzlemin neresinde isterseniz. Sonsuz sayıdaki bu geometrik şekillerin hepsini biri temsil eder. Denklik sınıfı aslında köşeli parantez ya da üst çizgi ile gösterilir ama biz vektörde bunu kullanmayız, cebirde kullanırız gösterim olarak. Peki, düzlemden sonra uzayda nasıl düşüneceğiz? Uzayda da aynı, bir vektör aldığımızda, o, yönü ve uzunluğu aynı olan tüm doğru parçalarının kümesini temsil eder.*



Şekil 6. Öğretmen Adayının Doğrultusu Farklı Olan Vektör İçin Yaptığı Çizim



Şekil 7. Öğretim Elemanının Düzlemde İlgili Denklik Sınıfındaki Yönlü Doğru Parçalarını Göstermek İçin Yaptığı Çizim

Kesitin devamında, vektör, $\mathbb{R}^n$ deki bütün yönlü doğru parçalarının kümesi üzerinde tanımlanan eş olma denklik bağıntısı ile oluşan denklik sınıflarının her biri olarak tanımlanmıştır. Vektörlerle uygulama yaparken söz konusu denklik sınıfından herhangi bir yönlü doğru parçası ile çalışılabileceği ve denklik sınıfından seçilen bir elemanın bu sınıfın temsilcisi olabileceği tekrar edilmiştir. Analitik geometri uygulamaları hatırlatılarak, kartezyen düzlemde herhangi bir noktanın tek bir vektör, herhangi bir vektörün de tek bir nokta ile eşleşeceği ifade edilmiştir. Buraya kadar olan bölümde yer alan sınıf içi tartışmalar, öğretim elemanının ön bilmelerine dönmeleri ve burada vektörle ilgili kavramlara yönelik anlamalarını geliştirmeleri için öğretmen adaylarını yönlendirdiği müdahaleleri örneklendirmektedir. İlerleyen bölümde, bu müdahalelerin adayların ötelemeyle ilgili anlamalarını nasıl etkilediği, başka bir deyişle geriye katlama ile *kalınlaştırılan* anlamanın, adayların daha dış seviyedeki anlamalarını nasıl şekillendirdiği sunulacaktır.

Dersin ilerleyen kısmında ötelemenin ne olduğu görsel ve cebirsel temsiller kullanılarak tanımlanmış, farklı geometrik şekillerin farklı ötelemeler altındaki görüntülerinin bulunduğu örnekler üzerinde çalışılmıştır. Nokta, doğru parçası, üçgen, çember gibi temel bazı geometrik şekillerin bir öteleme altındaki görüntüleri bulunmuştur. Sonraki haftalarda gerçekleştirilen bir derste, öteleme ile ilgili farklı özellikler ve ilişkiler üzerinde çalışmaya devam eden adaylardan, daha önce üzerinde çalıştıkları bir öteleme hakkında düşünmeleri istenmiş ve vektörün parametre olarak ötelemedeki rolü hakkındaki anlamaları geliştirilmeye çalışılmıştır. Öğretmen adaylarının üzerinde çalıştıkları örnekte, $y = 2x^2+1$ parabolü $\vec{u} = (2, -1)$ ile ötelenmektedir (Diyalogda geçen özellikler için Şekil 8 incelenebilir):

Eğitmen: Burada verilen parabolün öteleme altındaki görüntüsünü bulduk ve çizdik. Diyelim ki burada u'nun yönünü değiştirdim. O zaman şeklin [parabolün] görüntüsü hakkında ne söylersiniz?

Aday 7: Değişir.

Aday 13: Yani şeklin görünüşü değişmez de görüntüsü değişir.

Eğitmen: Peki u'nun boyunu değiştirsem?

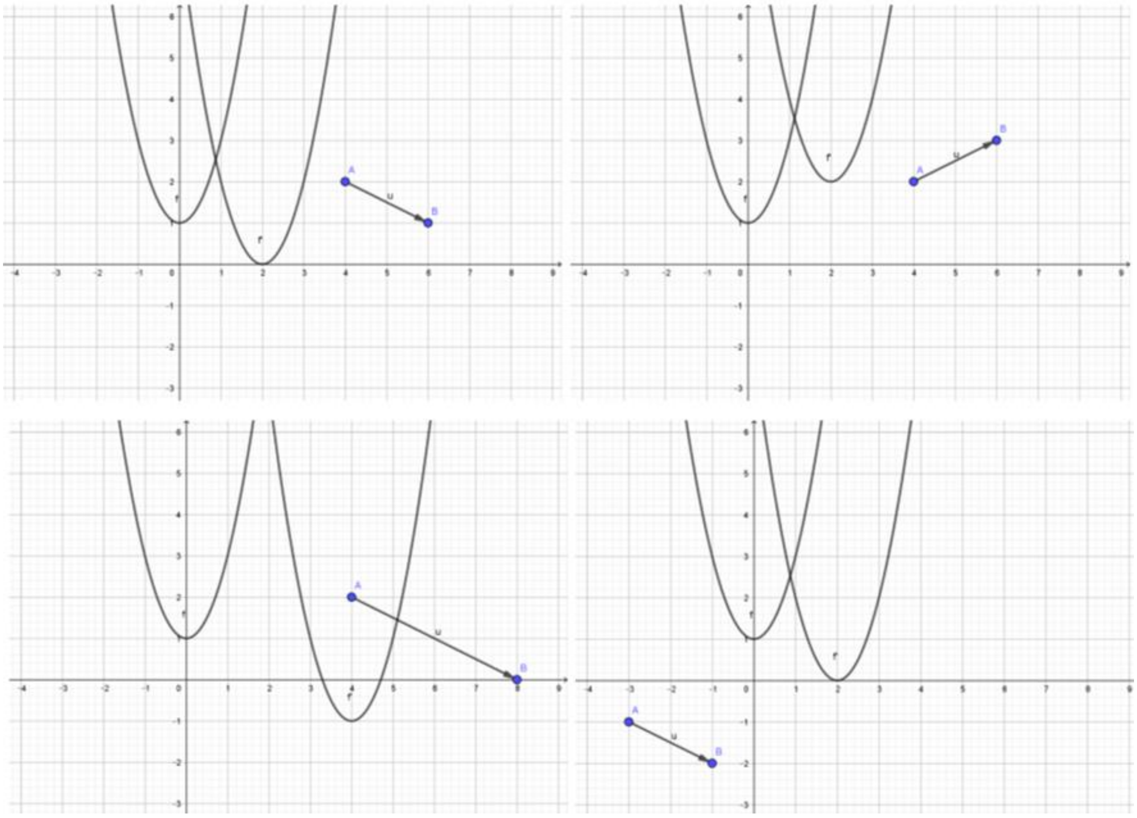
Aday 14: Yine değişir, aynı şekilde.

Eğitmen: Anladım. Peki, u'nun düzlemdeki yerini, yani konumunu değiştirsem? Şeklin bu öteleme altındaki görüntüsü değişir mi?

Aday 4: Değişmez.

Eğitmen: Neden değişmez?

Aday 4: Yani burada birinci bölgede değil de üçüncü bölgede çizeceğim değil mi? Değişmez çünkü vektör bir denklik sınıfıdır.



Şekil 8. Vektörün Ötelemedeki Rolünü Tartışırken Kullanılan Örnekler

Burada öğretim elemanının, parametre olarak vektörün ötelemede nasıl bir rol oynadığını, dönüşümü nasıl etkilediğini anlamlandırmaları için adaylara bazı sorular sorduğu görülmektedir. Özellikle son soruda, adayların sadece görsel bir muhakeme ile çizilen yönlü doğru parçalarının eş olduğunu ve sonucun bu durumdan etkilenmeyeceğini söylemeleri beklenebilir. Hâlbuki adaylar, ortaya koydukları matematiksel iddialarını (görüntünün değişmemesi) artık daha formal-matematiksel bir gerekçe ile (vektörün bir denklik sınıfı olması) destekleyerek ifade etmektedir. Dolayısıyla bu kesitte, daha önce kasıtlı bir biçimde teşvik edildikleri geriye katlamanın etkili olduğu ve bu katlamanın adayların doğrudan matematiksel tanımları kullanarak ötelemeyle ilgili formal bir anlama geliştirmelerine yardımcı olduğu söylenebilir. Söz konusu kesit, adaylardan birinin, "vektör bu dönüşümün olmazsa olmazı, her şeyi vektörle yapıyoruz" şeklindeki cümlesi ile son bulmuştur.

Öğretmen adaylarının üzerinde çalışmalarının beklendiği başka bir örnekte, ötelemenin invaryant bıraktığı şekiller ve özellikler incelenmiştir. Bir ötelemede, öteleme vektörüne paralel olan bir doğrunun görüntüsü hakkında neler söyleyebilecekleri tartışılırken, adayların önceden teşvik edildikleri geriye katlamanın yansımaları gözlemlenmiştir. Dersi yürüten öğretim elemanı, birbirinden farklı ötelemeler üzerinde çalışan öğretmen adaylarıyla, yeni bir öteleme tanımlamış ve öteleme vektörüne paralel bir doğrunun görüntüsünü cebirsel denklemleri kullanarak bulmuştur. Elde edilen doğrunun denkleminin aynı olmasının ne anlama geldiğini sorarak söz konusu öteleme ile ilgili bir sınıf tartışması başlatmıştır. Bu sırada farklı örneklerde, bir üçgenin farklı vektörlerle ötelenmesi, bir doğrunun bu doğru ile çakışık ya da doğruya paralel vektörlerle ötelenmesi üzerinde çalışılmıştır. Öğretmen adayları, çalıştıkları örneklere dayanarak, "öteleme vektörünü içeren bir doğrunun, söz konusu öteleme sonucunda görüntüsünün değişmeyeceğini" söylemişlerdir. Daha sonra ele aldıkları vektörler ile doğrunun eğimine bakarak bu çıkarımlarını genellemiş, kendisine paralel olan bir vektörle ötelenen doğrunun, öteleme altındaki görüntüsünün değişmeyeceğini ifade etmişlerdir. Yapılan uygulamaları pekiştirebilmek için GeoGebra'yı kullanmak isteyen öğretim elemanı ile adaylar arasında şöyle bir diyalog gerçekleşmiştir:

Eğitmen: GeoGebra'da bakalım. Bir doğru alalım ve bu doğruyu kendisine paralel olan bir vektörle öteleyelim (bkz. Şekil 9). Ne oldu?

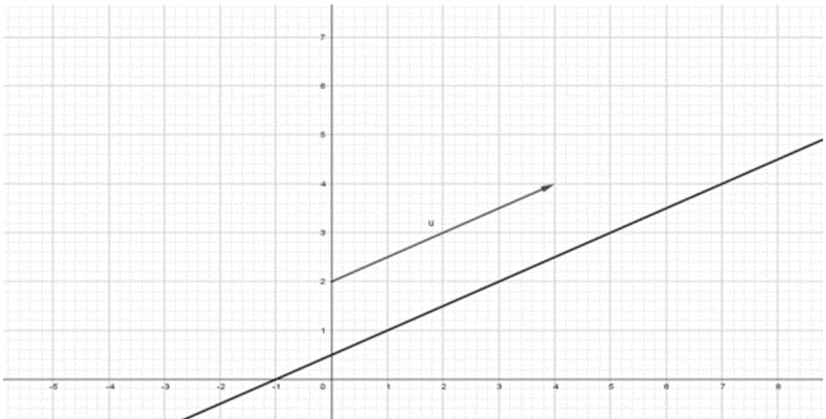
Aday 5: Çakışık oldu.

Eğitmen: Evet bir f doğrusu vardı bir de f' doğrusu gösteriyor burada ekranda, büyütelim, cebir penceresinde de denklemi var gördüğünüz gibi. Aynı doğru denklemi oldu.

[...]

Eğitmen: Peki, öteleme vektörü, öteleyeceğimiz doğru üzerinde ise o zaman doğrunun görüntüsü değişmez dediniz. Sonra hatta daha da genel düşünelim diyerek vektörün doğru üzerinde olmasına gerek yok, bir ötelemede, öteleme vektörü ile paralel olan doğruların görüntüleri değişmez dediniz. Neden değişmez?

Aday 5: Evet, vektör bir denklik sınıfı olduğu için söyleyebiliriz bunu.



Şekil 9. GeoGebra'da İlgili Doğrunun Ötelenmesi Sonucu Oluşan Görüntü

Çıkarımlarının doğru olduğunu pekiştirmek amacıyla kullanılan GeoGebra uygulamasında, adayların gerekçesinin yapılan genellemeyi geçerli kılmaya yardımcı olduğu görülmektedir. Vektörü bir denklik sınıfı olarak anlamlandırmalarının, adayların herhangi bir ötelemede invaryant kalan geometrik şekilleri anlamalarını kolaylaştırdığı söylenebilir. Öğretmen adaylarının, ön testte vektöre yönelik açıklamaları düşünüldüğünde, söz konusu çıkarımlarını gerekçelendirirken vektör kavramını geliştirmek için teşvik edildikleri geriye katlamanın, anlamalarına yaptığı katkı daha iyi görülmektedir.

3.2.2. Kesit 2: Tanım Ve Değer Kümesi Reel Düzlem Olan Birebir ve Örten Fonksiyonlara Yönelik Anlamanın Geliştirilmesinin Ötelemeyle İlgili Gelişen Formal Anlamaya Yansımaları

Öğrencilerin dönüşümleri formal olarak anlamlandırabilmeleri için tanım ve görüntü kümesi $\mathbb{R}^2$ olan fonksiyonlarla ilgili anlamalarının gelişmiş olması gerekmektedir (Hollebrands, 2003). Matematik öğretmen adaylarının daha önceden almış oldukları cebir, analiz ve geometri dersleri düşünülürse, adayların daha çok tanım ya da değer kümesinden en fazla birisinin $\mathbb{R}^2$ olduğu fonksiyonlarla çalıştıkları söylenebilir. Bu kesitteki geriye katlamalar için, ilk olarak, öğretmen adaylarına $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ ve $\mathbb{R} \to \mathbb{R}^2$ ye tanımlanan fonksiyonlar hatırlatılmış ve bu fonksiyonların tanım ve değer kümesi ile girdileri ve çıktıları üzerinde tartışmalar gerçekleştirilmiştir. Böylelikle, adayların dönüşümlere geçmeden önce, ele alacakları fonksiyonun tanım ve değer kümesine odaklanmaları ve ikisinin birden $\mathbb{R}^2$ olması durumuna yönelik farkındalıkları artırılmaya çalışılmıştır. Öğrencilerin dönüşümlerle çalışırken anlamaları gereken bir diğer önemli fikir, bir fonksiyonun ne zaman birebir ve örten olacağı ile ilgilidir. Bu yüzden dersi yürüten öğretim elemanları, adayları tanım ve değer kümesi $\mathbb{R}^2$ olan birebir ve örten fonksiyonlarla çalışmaya hazırlamaya karar vermiştir:

Eğitmen: Dönüşümü, düzlemden düzleme tanımlanan birebir ve örten fonksiyon olarak tanımlayabiliriz dedik. Peki, bu söylediğimiz tanımı biraz daha açıklamaya ve anlamaya çalışalım. Ben herhangi bir fonksiyonu reel sayılar düzleminden reel sayılar düzlemine tanımlamak istersem şu şekilde yazabilirim değil mi? (Tahtaya alt alta $f: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$, $(x, y) \mapsto f(x, y)$ *ifadelerini yazıyor). Bu semboller üzerinde biraz düşünelim, geometrik veya görsel olarak neler canlanıyor zihninizde?*

Aday 3: Küme olarak düzlem, tanım ve değer kümesi.

[…]

Eğitmen: Evet, bir tane örnek verelim. $f: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$, $f(x, y) = (2x^2, y + 1)$. *Bu fonksiyon hakkında neler söylersiniz? Tanım, değer ve görüntü kümesi re iki* $(\mathbb{R}^2)$ *olarak verilmiş. Bu fonksiyon birebir veya örten midir? Geometrik olarak nasıl düşünebilirsiniz? Önce biraz kendi aranızda tartışın.*

Aday 7: Örten değildir. Değer kümesi ile görüntü kümesi aynı değil. Görüntü re ikinin $(\mathbb{R}^2)$ *tamamı olmuyor (Tahtaya Şekil 10a'daki görselleri çiziyor).*

Aday 6: Birebir de değildir, $(-1,0)$ *ve* $(1,0)$ *için aynı değeri alır,* $(2,1)$.

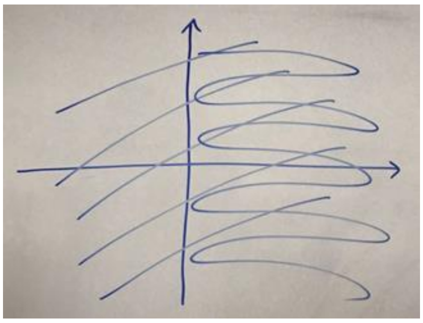
Eğitmen: Peki, o zaman tanım ve değer kümesi re iki $(\mathbb{R}^2)$ *olan başka bir fonksiyon alalım.* $f: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$, $f(x, y) = (x + 2, y - 5)$. *Bu fonksiyonla ilgili neler söylersiniz?*

Aday 2: Düzlemde sıralı ikilileri alıyoruz ve yine aynı düzlemde sıralı ikililer elde ediyoruz.

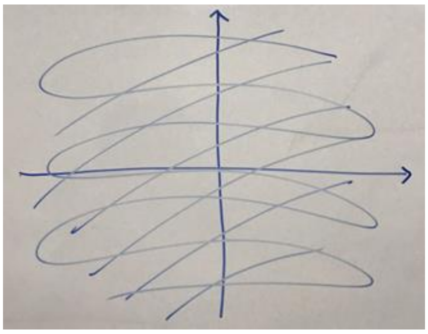
Aday 15: Değer kümesinden alacağımız her sıralı ikili için düzlemde bir sıralı ikili buluruz. O zaman örtendir.

Aday 7: Aynen, ayrıca $f(x_1, y_1) = f(x_2, y_2)$ *olsun, sıralı ikililerin eşitliğinden* $x_1 = x_2$ *ve* $y_1 = y_2$ *olur (Tahtaya Şekil 10b'deki görselleri çiziyor).*

Eğitmen: Evet aslında hala biraz sezgisel konuşuyoruz, bunları matematiksel notasyonu kullanarak gösterebiliriz. Burada informal anlamda bir sürü fikir olduğunu gördük zihnimizde, dönüşümle, fonksiyonla, kümelerle ilgili. Bu zamana kadar genelde tanım ve değer kümesinden herhangi biri re $(\mathbb{R})$ *ya da re iki* $(\mathbb{R}^2)$ *olan fonksiyonlarla çalıştınız, dönüşümlerle ilgili derslerimizde ikisi de re iki* $(\mathbb{R}^2)$ *olan fonksiyonlarla çalışacağız. Tanım ve değer kümesi düzlem olan, özel olarak re iki* $(\mathbb{R}^2)$*, reel düzlem olan birebir ve örten fonksiyonlarla çalışacağız.*



Şekil 10a. İlk Fonksiyonun Tanım ve Değer Kümesine Yönelik Yapılan Çizim



Şekil 10b. İkinci Fonksiyonun Tanım ve Değer Kümesine Yönelik Yapılan Çizim

Bu kesitte, özellikle birebir ve örten fonksiyonun tanım ve değer kümesi ile beraber düşünüldüğünde hangi matematiksel özelliklere sahip olduğu adaylara kasıtlı bir şekilde hatırlatılmıştır. Adayların ön bilmelerinde bu kavramlarla ilgili anlamalarını zenginleştirerek geliştiği beklenilen matematiksel anlamanın, onlara ötelemeyle ilgili daha dıştaki bir seviyede anlama geliştirirken yardımcı olacağı düşünülmüştür. Söz konusu bu hatırlatmaları yaptıktan sonra, öğretmen adayları ötelemeyle ilgili GeoGebra'yı kullandıkları bir örnek üzerinde çalışırken şunları söylemiştir:

Eğitmen: Burada köşe noktaları verilen ABC üçgenini öteledik (bkz. Şekil 11). Şimdi (0,4) noktasına bakın. Düzlemde bu üçgeni ötelerken, yani bu öteleme gerçekleşirken, (0,4) noktası bu dönüşümden etkilenir mi?

Aday 15: Etkilenmez.

Aday 5: Etkilenir, düzlemin (x, y) koordinatlarını öteliyoruz çünkü.

Eğitmen: Peki bana buradaki dönüşümü nasıl ifade edersiniz?

Aday 6: Üçgenin üzerindeki noktaları belirli bir vektöre göre öteliyoruz.

Eğitmen: Peki bunu nasıl yapıyorsunuz, neyin sayesinde yapabiliyorsunuz?

Aday 4: Ötelemenin kuralı.

Eğitmen: Nedir o kural bana yazdırabilir misiniz?

Adaylar: $T_{\vec{u}}: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$, $(x, y) \mapsto (x + 2, y - 1)$ (Sırasıyla bu ifadeleri yazdırıyorlar).

Aday 3: Burada ben bütün düzlemi öteliyorum. Yani girdi olarak üçgen değil de bir yerde çember alsaydım onun da ötelenmişini görebilirdim.

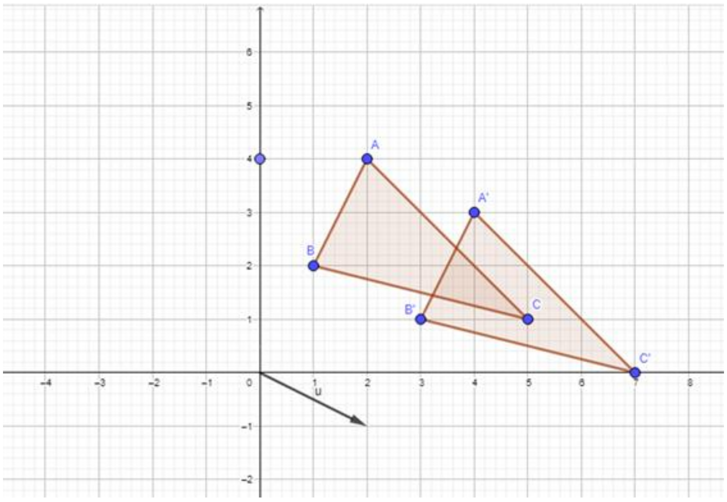
Aday 12: Evet, sadece üçgen ötelenir diğer şeyler ötelenmez dersek fonksiyon olmasında sıkıntı olur. Re kareden $(\mathbb{R}^2)$ re kareye $(\mathbb{R}^2)$ tanımladık fonksiyonu.

Aday 3: Tanım kümesi bir düzlem ve biz bir öteleme yaptığımızda düzlemde hiçbir şekil, nokta invaryant kalmaz demiştik, (0,0) *öteleme vektörü olursa hariç. O yüzden değişir yani etkilenir.*

Eğitmen: GeoGebra niye göstermiyor o zaman?

Aday 3: Çünkü biz sadece üçgenin görüntüsünü bul diyoruz.

Aday 12: Bir de ben ötelemeyi birebir ve örten fonksiyon diye tanımladım. İyi tanımlılıktan tanım kümesindeki her elemanın bir görüntüsü olmak zorunda değil mi? Düzlemden aldığım (0,4) *noktasının bir görüntüsü olmuyorsa yani ötelenmiyorsa o zaman nasıl fonksiyon diyeceğim bu ötelemeye?*



Şekil 11. Üçgenin Öteleme Sonrası Oluşan Görüntüsü ve (0,4) Noktası

Burada dersi yürüten öğretim elemanları, özellikle bu örneği seçmiş ve öğretmen adaylarının yukarıda yönlendirildikleri geriye katlamadan faydalanarak, dönüşümlerle ilgili fonksiyon anlamasına yönelik formal bir anlama geliştirmelerini hedeflemiştir. Adayların GeoGebra aracıyla oluşturulan örneği temel alan soruya verdikleri cevaplar göz önüne alındığında, teşvik edildikleri bu geriye katlamayı etkili bir forma dönüştürebildikleri, yani düzlem, fonksiyon, tanım ve görüntü/değer kümesi kavramlarıyla ilgili geliştirilen anlamalarını daha formal bir seviyede anlama geliştirmek için uygun bir şekilde kullanabildikleri söylenebilir. Yapılan geriye katlamalar sonucu gelişen matematiksel anlamanın, ötelemenin tanım kümesi olarak sadece ötelenen şekilleri değil, düzlemin tamamını düşünmeye başlamalarında yardımcı olduğu belirlenmiştir.

TARTIŞMA, SONUÇ VE ÖNERİLER

Bu araştırma, öğrencileri önceki anlamalarına geriye katlama yaptırmaya teşvik eden öğretim müdahalelerinin, öğrencilerin formal bir matematiksel anlama geliştirmelerine nasıl yardımcı olabileceğine yönelik bir örnek sunmaktadır. Konu olarak, öğrencilerin anlamlı bir şekilde öğrenirken zorluklar yaşadığı geometrik dönüşümlerden biri olan öteleme seçilmiştir.

Öteleme kavramını anlamaya çalışan öğrencilerin, dönüşümde vektörün rolünü anlamaya çalışırken zorlandıkları önceki araştırmalarda tespit edilmiştir (bkz. Harper, 2003; Hollebrands, 2003; Yanık ve Flores, 2009). Hatta Hollebrands (2004), vektör kavramından dolayı, lise öğrencilerinin dönme ve yansımaya göre en çok ötelemeyi anlamlandırmakta zorlandıklarını ifade etmektedir. Araştırmalar (örn. Sünker ve Zembat, 2012; Yanık, 2011, 2013), öğrencilerin ötelemede parametre olarak vektörün dönüşümden nasıl etkilendiğini kavrayabilmeleri için öğretim ortamının iyi bir şekilde planlanması gerektiğine işaret etmektedir. Bu bağlamda, bu araştırmadaki ilk müdahale, vektör kavramının formal bir seviyede anlamlandırılmasına yönelik olmuştur. Öğretmen adaylarının vektörü yönlü doğru parçasından öte, bir denklik sınıfı olarak anlayabilmeleri için, dersi yürüten öğretim elemanları tarafından bazı önceki kavramlara odaklanılmıştır. Sırasıyla, kartezyen çarpım, bağıntı, denklik sınıfı kavramlarıyla ilgili anlamaları hatırlatılan veya zenginleştirilen adayların, daha sonra vektörün formal tanımını anlamlandırabilmeleri için bazı örnekler verilmiştir. Bu örneklerde, öğretim elemanları, adayların vektörle ilgili sahip oldukları imajları (yönlü doğru parçası) ya da vektörün farklı öğrenme alanlarında kullanımıyla ilgili deneyimlerini (vektör uzayının elemanları) göz ardı etmemiştir. Aksine, adayları bu fikirler üzerinde düşünmeye yönlendirmiş, daha sonra vektörü bir denklik sınıfı olarak tanımlamıştır. Yapılan bu müdahalenin, öğretmen adaylarına (i) ötelemede parametre olarak vektörün rolünü; (ii) ötelemede invaryant kalan/kalmayan şekilleri ve özellikleri anlamaya çalışırken nasıl yardımcı olduğu Kesit 1'de açıklanmıştır.

Benzer şekilde, Kesit 2'de, öğretmen adaylarının tanım ve değer kümesi $\mathbb{R}^2$ olan birebir ve örten fonksiyonlarla ilgili anlamaları geliştirildiğinde, düzlemdeki tüm noktaların ötelemeden etkilendiğini anlamalarının kolaylaştığı görülmektedir. Yanık (2011), öğretmen adaylarının ötelemede tanım kümesi olarak düzlemin tamamını anlamakta zorluklar yaşadıklarını tespit etmiştir. Burada, dersi yürüten öğretim elemanları yine söz konusu kavramlarla ilgili adayların imajlarını göz ardı etmemiş ve adayların tanım ve değer kümesi $\mathbb{R}^2$ olan fonksiyonlarla çalışmamış olabileceklerini temel alarak ders içeriğini şekillendirmiştir. Kesit 1 ve 2'de bahsi geçen tüm bu matematiksel fikirler, ötelemeyi fonksiyon olarak anlamlandırmada önemli olduğundan (Hollebrands, 2003; Yanık, 2013), öğretmen adaylarının ön bilmelerinde yer alan söz konusu kavramlarla ilgili anlamalarının zenginleştirilmesinin, adayların ötelemeyi formal bir seviyede anlamasında yol gösterici olduğu belirlenmiştir.

Araştırmada, öğretmen adaylarının ötelemeye yönelik anlamalarının geliştirilmeye çalışıldığı uygulamalarda kullanılan temel öğretim araçlarından birisi GeoGebra'dır. Öteleme kavramının ilköğretim öğrencileriyle nasıl çalışılabileceği üzerine öneriler sunan Sünker ve Zembat'a (2012) göre, öğrenciler dinamik geometri ortamlarının özelliklerine "kendilerini gereğinden fazla kısıtlayıp", sorgulama yapmadıkları takdirde, "arka planda yatan matematiksel fikirleri göz ardı edebilirler" (s.193). Bu ortamların, ötelemeyi formal olarak anlamlandırması beklenilen öğretmen adaylarına yardımcı olabileceği önceki araştırmalarda (Avcu ve Çetinkaya, 2021; Turgut, 2019; Yanık, 2013) belirlenmiştir. Söz konusu bu araştırmalarda, özellikle GeoGebra'daki farklı araçların (örn. sürükleme, iz, ızgara) uygun öğretim müdahaleleriyle kullanılmasının önemli olduğu vurgulanmaktadır. Diğer yandan Akarsu ve Öçal (2022), GeoGebra'nın, yansımayı bir düzlem dönüşümü olarak anlamlandırmaya çalışan öğretmen adaylarını sınırladığını tespit etmiştir. Bu araştırmada, GeoGebra'nın ötelemede vektörün rolünü anlamada öğretmen adaylarına yardımcı olabileceği (Kesit 1), ötelemenin bir fonksiyon olarak tanım kümesinin düzlem olduğunu anlamada ise adaylara hareket anlamasını çağrıştırabileceği (Kesit 2) belirlenmiştir. GeoGebra'daki vektörle ötele aracını kullanarak yapılan ötelemeler, ötelemenin düzleme değil de sadece şekle uygulandığı izlenimini destekleyebilir. DGY'lerin kullanıldığı öğretim ortamlarında, bu yazılımların avantajları kadar sınırlılıkları da öğretim hedeflerine göre uygun bir şekilde kullanılabilir (Chan, 2017; Leung ve Bolite-Frant, 2015). Kesit 2'de, öğretmen adaylarının geriye katlama yapmalarını teşvik edecek müdahale, bu sınırlılık temel alınarak şekillendirilmiştir. Bu bağlamda araştırmanın, dinamik geometri ortamını bir araç olarak kullanmak isteyen matematik eğitimcilerine, öğretim tasarımlarında bu aracın sınırlılıklarını göz önüne alabilecekleri bir durum hakkında fikir verebileceği düşünülmektedir.

Öğretmen adaylarının, ön bilgilerine odaklanarak ötelemeyi bir fonksiyon olarak anlamlandırabilecekleri bir eylem araştırması planlamak ve yürütmek ciddi bir çaba ve zaman gerektirmiştir. Bu yüzden, matematik eğitiminde herhangi bir şekilde uygulamaları iyileştirmeye çalışan matematik eğitimcilerine, işbirliği yaparak çalışmaları önerilmektedir. Bu eylem araştırmasında, gerek araştırmacının gerekse öğretmen adaylarının matematiği öğretme bilgisi kapsamında belli kazanımlar elde ettiği düşünülmektedir. Örneğin, araştırmanın başlangıcında ötelemeyi sadece şekillerin fiziksel bir hareketi olarak düşünen öğretmen adaylarının, araştırma sonunda öteleme kavramına yönelik daha formal bir anlama geliştirebildikleri söylenebilir. Benzer şekilde, öğretmen adaylarını geriye katlama yapmaya teşvik edecek müdahaleleri tasarlamak, araştırmacının da pedagojik alan bilgisine katkıda bulunmuştur.

Bu araştırmada, öğretmen adaylarının ön bilmeleri üzerinde çalışmalarını sağlayacak öğretim müdahalelerinin, adayların ötelemede vektörün rolünü ve ötelemenin $\mathbb{R}^2$ den $\mathbb{R}^2$ ye birebir ve örten bir fonksiyon olduğunu anlamlandırmalarına yardımcı olduğu belirlenmiştir. Sınıf içinde öğrencilerin matematiksel anlamalarını geliştirmek için ön bilgilerine başvurmaları ve bu bilgileri etkili bir şekilde kullanmaları çoğu zaman öğretmenin müdahalesi ve desteği ile mümkün olmaktadır (Martin, 2008; Yao ve Manouchehri, 2020a). Bu süreçte, öğrencilerinin matematiksel anlamasını geliştirmeye odaklanan öğretmenlerin, öğrencilerinin ön bilgileri hakkında bilgi sahibi olması ve derslerini söz konusu bu bilgileri gelişmekte olan daha formal seviyedeki anlamayla sağlam bir şekilde ilişkilendirebilmeleri gerekmektedir. Bunun için, Pirie-Kieren teorisinde yer alan geriye katlamalar ve öğretim müdahaleleri kullanışlı bir araç olabilir. Araştırmanın, öğretim sürecinin öğrencilerin ön bilgilerini kullanmaya teşvik edecek şekilde nasıl tasarlanabileceğine dair bir yaklaşım sunması umulmaktadır.

KAYNAKÇA

Ada, T., & Kurtulus, A. (2010). Students' misconceptions and errors in transformation geometry. *International Journal of Mathematical Education in Science and Technology, 41*(7), 901–909. https://doi.org/10.1080/0020739X.2010.486451

Akarsu, M. (2022). Understanding of geometric reflection: John's learning path for geometric reflection. *Journal of Theoretical Educational Science, 15*(1), 64-89. http://doi.org/10.30831/akukeg.952022

Akarsu, M., & Öçal, M. F. (2022). How pre-service teachers perceive geometric reflection in a dynamic environment: Motion view and mapping view: Pre-service teachers' perception of geometric reflection. *International Journal of Curriculum and Instruction, 14*(2), 1531-1560. http://ijci.wcci-international.org/index.php/IJCI/article/view/973 adresinden 23.04.2022 tarihinde alınmıştır.

Avcu, S. (2019). Prospective middle school mathematics teachers' use of parameters in explaining geometric transformations. *Ihlara Journal of Educational Research, 4*(1), 102-111. http://ihead.aksaray.edu.tr/en/pub/issue/42161/519518 adresinden 10.01.2022 tarihinde alınmıştır.

Avcu, S., & Çetinkaya, B. (2021). An instructional unit for prospective teachers' conceptualization of geometric transformations as functions. *International Journal of Mathematical Education in Science and Technology, 52*(5), 669-698. https://doi.org/10.1080/0020739X.2019.1699966

Chan, Y. C. (2017). Discrepancy potential as a lens to designing and researching technology-based mathematics education tasks. *Electronic Journal of Mathematics & Technology, 11*(3), 161-172. https://web.p.ebscohost.com/ehost/pdfviewer/pdfviewer?vid=0&sid=c120f0b0-f64c-4763-812a-54e0a7df1d0a%40redis

Creswell, J. W. (2012). *Educational research: Planning, conducting, and evaluating quantitative and qualitative research* (4th Ed.). Boston, MA: Pearson.

Düzenli-Gökalp, N., & Bulut, S. (2018). A new form of understanding maps: Multiple representations with Pirie and Kieren model of understanding. *International Journal of*

Innovation in Science and Mathematics Education, 26(6), 1–21. https://openjournals.library.sydney.edu.au/index.php/CAL/article/view/12454/0 adresinden 10.01.2022 tarihinde alınmıştır.

Edwards, L. D. (2003). *The nature of mathematics as viewed from cognitive science.* The Third Congress of the European Society for Research in Mathematics, Bellaria. http://www.mathematik.tudortmund.de/~erme/CERME3/Groups/TG1/TG1_edwards_cerme3.pdf adresinden 10.01.2022 tarihinde alınmıştır.

Gülkılık, H. (2016). The role of virtual manipulatives in high school students' understanding of geometric transformations. In P. S. Moyer-Packenham (Ed.), *International perspectives on teaching and learning mathematics with virtual manipulatives* (pp. 213–243). Cham: Springer International Publishing.

Gülkılık, H., Moyer-Packenham, P. S., Ugurlu, H. H., & Yuruk, N. (2020). Characterizing the growth of one student's mathematical understanding in a multi-representational learning environment. *The Journal of Mathematical Behavior, 58,* 100756. https://doi.org/10.1016/j.jmathb.2020.100756

Gülkılık, H., Uğurlu, H. H., & Yürük, N. (2015). Examining students' mathematical understanding of geometric transformations using the Pirie-Kieren model. *Educational Sciences: Theory and Practice, 15*(6), 1531–1548.

Güner, P., & Uygun, T. (2020). Examining students' mathematical understanding of patterns by Pirie-Kieren model. *Hacettepe University Journal of Education, 35 (3), 644-661.* https://acikerisim.istanbulc.edu.tr/xmlui/handle/20.500.12831/1564 adresinden 10.01. 2022 tarihinde alınmıştır.

Harper, S. (2003). Enhancing elementary pre-service teachers' knowledge of geometric transformations through the use of dynamic geometry computer software. In C. Crawford et al. (Eds.), *Proceedings of Society for Information Technology & Teacher Education International Conference* (pp. 2909–2916). Chesapeake: AACE. https://www.researchgate.net/publication/317571398 adresinden 10.01.2022 tarihinde alınmıştır.

Hollebrands, K. F. (2003). High school students' understandings of geometric transformations in the context of a technological environment. *Journal of Mathematical Behavior, 22*(1), 55-72. https://doi.org/10.1016/S0732-3123(03)00004-X

Hollebrands, K. F. (2004). High school students' intuitive understandings of geometric transformations. *The Mathematics Teacher, 97*(3), 207–214. http://www.jstor.org/stable/20871559 adresinden 10.01.2022 tarihinde alınmıştır.

Hollebrands, K. F. (2007). The role of a dynamic software program for geometry in the strategies high school mathematics students employ. *Journal for Research in Mathematics Education, 38*(2), 164-192. https://doi.org/10.2307/30034955

Kaba, Y., & Şengül, S. (2018). The relationship between middle school students' mathematics anxiety and their mathematical understanding. *Pegem Journal of Education and Instruction*, *8*(3), 599–622. https://doi.org/10.14527/pegegog.2018.023

Kilpatrick, J., Swafford, J., & Findell, B. (2001). *Adding it up. Helping children learn mathematics*. Washington, DC: National Academy Press.

Komatsu, K., & Jones, K. (2021). Generating mathematical knowledge in the classroom through proof, refutation, and abductive reasoning. *Educational Studies in Mathematics.* https://doi.org/10.1007/s10649-021-10086-5

Krainer, K. (2004). Editorial. On giving priority to learners' prior knowledge and our need to understand their thinking. *Journal of Mathematics Teacher Education, 7*(2), 87–90. https://doi.org/10.1023/B:JMTE.0000022007.18083.64

Leung, A., & Bolite-Frant, J. (2015). Designing mathematics tasks: The role of tools. In A. Watson, & M. Ohtani (Eds.), *Task design in mathematics education: The 22nd ICMI study (New ICMI study series)* (pp. 191–225). Springer.

Mabotja, S., Chuene, K., Maoto, S., & Kibirige, I. (2018). Tracking grade 10 learners' geometric reasoning through folding back. *Pythagoras, 39*(1), 1–10. https://pdfs.semanticscholar.org/37e9/e64f4c15058caf721287d7b91b014a04fcc7.pdf adresinden 10.01.2022 tarihinde alınmıştır.

Mack, N. K. (2001). Building on informal knowledge through instruction in a complex content domain: Partitioning, units, and understanding multiplication of fractions. *Journal for Research in Mathematics Education, 32*(3), 267–295. https://doi.org/10.2307/749828

Martin, G. (1982). *Transformation geometry: An introduction to symmetry*. New York: Springer.

Martin, L. C. (2008). Folding back and the growth of mathematical understanding: Elaborating the Pirie-Kieren theory. *Journal of Mathematical Behavior, 27*(1), 64–85. https://doi.org/10.1016/j.jmathb.2008.04.001

Martin, L. C., & Towers, J. (2016). Folding back, thickening and mathematical met-befores. *The Journal of Mathematical Behavior, 43*, 89–97. https://doi.org/10.1016/j.jmathb.2016.07.002

Meel, D. E. (2003). Models and theories of mathematical understanding: Comparing Pirie and Kieren's theory for the growth of mathematical understanding and APOS theory. In A. Selden, E. Dubinsky, G. Harel, & F. Hitt (Eds.), *Conference Board of the Mathematical Sciences, Issues in Mathematics Education: Vol. 12. Issues in Collegiate Mathematics Education V* (pp. 132–181). Providence, RI: American Mathematical Society.

Milli Eğitim Bakanlığı. (2015a*). İlköğretim matematik öğretmeni özel alan yeterlikleri.* https://oygm.meb.gov.tr/www/ilkogretim-ozel-alan-yeterlikleri/icerik/257 adresinden 10.01.2022 tarihinde alınmıştır.

Milli Eğitim Bakanlığı. (2015b). *Ortaöğretim matematik öğretmeni özel alan yeterlikleri.* https://oygm.meb.gov.tr/www/ortaogretim-ozel-alan-yeterlikleri/icerik/258 adresinden 10.01.2022 tarihinde alınmıştır.

Milli Eğitim Bakanlığı. (2018a). *Matematik dersi öğretim programı (İlkokul ve Ortaokul 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7 ve 8. Sınıflar).* Ankara: MEB Yayınları. http://mufredat.meb.gov.tr/Programlar.aspx adresinden 10.01.2022 tarihinde alınmıştır.

Milli Eğitim Bakanlığı. (2018b). *Ortaöğretim matematik dersi (9, 10, 11 ve 12. sınıflar) öğretim programı.* Ankara: MEB Yayınları. http://mufredat.meb.gov.tr/Programlar.aspx adresinden 10.01.2022 tarihinde alınmıştır.

Mills, G. E. (2014). *Action research: A guide for the teacher researcher* (5th Ed.). Boston, MA: Pearson.

National Council of Teachers of Mathematics (NCTM). (2000). *Principles and standards for school mathematics*. Reston, VA: NCTM.

National Council of Teachers of Mathematics (NCTM). (2020a). *Standards for the preparation of secondary mathematics teachers.* https://www.nctm.org/Standards-and-Positions/CAEP-Standards/ adresinden 10.01.2022 tarihinde alınmıştır.

National Council of Teachers of Mathematics (NCTM). (2020b). *Standards for the preparation of middle level mathematics teachers*. https://www.nctm.org/Standards-and-Positions/CAEP-Standards/ adresinden 10.01.2022 tarihinde alınmıştır.

Pirie, S. E. B., & Kieren, T. (1994). Growth in mathematical understanding: How can we characterise it and how can we represent it? *Educational Studies in Mathematics, 26*(2–3), 165–190. https://doi.org/10.1007/BF01273662

Portnoy, N., Grundmeier, T., & Graham, K. J. (2006). Students' understanding of mathematical objects in the context of transformational geometry: Implications for constructing and understanding proofs. *Journal of Mathematical Behavior*, *25*, 196–207. https://doi.org/10.1016/j.jmathb.2006.09.002

Powell, A., Francisco, J., & Maher, C. (2003). An analytical model for studying the development of learners' mathematical ideas and reasoning using videotape data. *Journal of Mathematical Behavior, 22,* 405–435. https://doi.org/10.1016/j.jmathb.2003.09.002

Sünker, S., & Zembat, İ. Ö. (2012). Teaching of translations through use of vectors in Wingeom-tr environment. *Elementary Education Online*, *11*(1), 173-194. https://www.ilkogretim-online.org/?iid=2012-11-1.000&&jid=218&lng= adresinden 10.06.2022 tarihinde alınmıştır.

Şengül, S., & Göktepe-Yıldız, S. (2016). An examination of the domain of multivariable functions using the Pirie-Kieren Model. *Universal Journal of Educational Research*, *4*(7), 1533-1544. DOI: 10.13189/ujer.2016.040706

Thaqi, X., Gimenez, J., & Rosich, N. (2011, February). Geometrical transformation as viewed by prospective teachers. In M. Pytlak, T. Rowland, & E. Swoboda (Eds.), *Proceedings of the Seventh Congress of the European Society for Research in Mathematics Education* (pp. 578–587). Poland: Univerity of Rszeszów. https://hal.archives-ouvertes.fr/hal-02158191/ adresinden 10.01.2022 tarihinde alınmıştır.

Thom, J. S., & Pirie, S. E. (2006). Looking at the complexity of two young children's understanding of number. *The Journal of Mathematical Behavior*, *25*(3), 185-195. https://doi.org/10.1016/j.jmathb.2006.09.004

Turgut, M. (2019). Sense-making regarding matrix representation of geometric transformations in $\mathbb{R}^2$: A semiotic mediation perspective in a dynamic geometry environment. *ZDM Mathematics Education, 51*, 1199–1214. https://doi.org/10.1007/s11858-019-01032-0

Uygun, T. (2020). An inquiry-based design research for teaching geometric transformations by developing mathematical practices in dynamic geometry environment. *Mathematics Education Research Journal*, *32*(3), 523-549. https://doi.org/10.1007/s13394-020-00314-1

Wright, V. (2014). Frequencies as proportions: Using a teaching model based on Pirie and Kieren's model of mathematical understanding. *Mathematics Education Research Journal, 26*(1), 101–128. https://doi.org/10.1007/s13394-014-0118-7

Yanık, H. B. (2011). Prospective middle school mathematics teachers' preconceptions of geometric translations. *Educational Studies in Mathematics, 78*(2), 231-260. https://www.jstor.org/stable/41486163

Yanık, H. B. (2013). Learning geometric translations in a dynamic geometry environment. *Education and Science, 38*(168), 272–287.

Yanık, H. B. (2014). Middle-school students' concept images of geometric translations. *The Journal of Mathematical Behavior*, *36*(1), 33–50. https://doi.org/10.1016/j.jmathb.2014.08.001

Yanık, H. B., & Flores, A. (2009). Understanding rigid geometric transformations: Jeff's learning path for translation. *The Journal of Mathematical Behavior, 28*(1), 41–57. https://doi.org/10.1016/j.jmathb.2009.04.003

Yao, X. (2020a). Unpacking learner's growth in geometric understanding when solving problems in a dynamic geometry environment: Coordinating two frames. *The Journal of Mathematical Behavior, 60,* 100803. https://doi.org/10.1016/j.jmathb.2020.100803

Yao, X. (2020b). Characterizing learners' growth of geometric understanding in dynamic geometry environments: a perspective of the Pirie–Kieren theory. *Digital Experiences in Mathematics Education, 6,* 293-319. https://doi.org/10.1007/s40751-020-00069-1

Yao, X., & Manouchehri, A. (2019). Middle school students' generalizations about properties of geometric transformations in a dynamic geometry environment. *The Journal of Mathematical Behavior, 55,* 100703. https://doi.org/10.1016/j.jmathb.2019.04.002

Yao, X., & Manouchehri, A. (2020a). Folding back in students' construction of mathematical generalizations within a dynamic geometry environment. *Mathematics Education Research Journal*. https://doi.org/10.1007/s13394-020-00343-w

Yao, X., & Manouchehri, A. (2020b). Teacher Interventions for Advancing Students' Mathematical Understanding. *Education Sciences*, *10*(6), 164. https://doi.org/10.3390/educsci10060164

EXTENDED ABSTRACT

Introduction

Geometric translation is one of the fundamental plane transformations for both school and university-level mathematics education. Martin (1982) defines a transformation on the plane as "a one-to-one correspondence from the set of points in the plane onto itself" (p. 2). However, studies (e.g., Edwards, 2003; Hollebrands, 2003; 2007; Yanık, 2014) have shown that regardless of grade level, students' understanding of transformations is quite different from that of mathematicians. Researchers focusing specifically on pre-service teachers (e.g., Ada & Kurtuluş, 2010; Akarsu, 2022; Akarsu & Öçal, 2022; Avcu, 2019; Harper, 2003; Portnoy, Grundmeier, & Graham, 2006; Thaqi, Gimenez, & Rosich, 2011; Yanık, 2011, 2013) also determined that it is not easy for pre-service teachers to make sense of transformations at the formal level. This research examines how instruction that focuses on pre-service mathematics teachers' prior understandings may help them develop a formal mathematical understanding about geometric translation.

One of the most important goals of mathematics education is to design instruction taking into account students' prior knowledge (Krainer, 2004). This goal is clearly expressed in national or international documents that are expected to guide mathematics teaching. For example, it is stated explicitly that both primary and secondary education mathematics curricula are "solid and associated with previous learning" in Türkiye (Ministry of National Education [MEB], 2018a, 2018b, p. 4). Similarly, the National Council of Teachers of Mathematics [NCTM] (2000) states that students should construct new knowledge based on prior knowledge and experiences.

Students need guidance in constructing new knowledge based on prior knowings to improve their understanding (Mack, 2001; Pirie & Kieren, 1994). Mathematics teachers who focus on students' understanding and creating meaning in their lessons should organize the lesson's content to relate it to students' prior knowledge (Kilpatrick et al., 2001). Despite the apparent emphasis in the literature on using students' prior knowings to enrich teaching, research on how teachers can fulfill this task in the teaching environment is not detailed (Martin

& Towers, 2016). The purpose of this research was to examine how instructional interventions that encourage folding backs to their prior knowings may help pre-service mathematics teachers understand geometric translation as a function. Geometric translation was chosen as one of the crucial subjects whose importance is clearly revealed in education and training resources in different countries (see MEB, 2018a, 2018b; NCTM, 2020a, 2020b). Mathematical understanding was considered "as a whole, dynamic, levelled but non-linear process of growth" (Pirie & Kieren, 1994, p. 187). The focus was on interventions where the instructors intentionally encouraged students to fold back to their Primitive Knowing.

Methodology

An action research was designed drawing on the folding backs and interventions in the Pirie-Kieren theory. The participants were 28 pre-service secondary mathematics teachers studying in the fourth year of the Mathematics Teaching program at a state university. Mathematical concepts that the pre-service teachers were expected to have grasped in order to develop a formal understanding of translation were determined. These concepts were limited to the plane, cartesian product, function, one-to-one function, onto function, parameter, and vector.

First, a pre-test was administered to determine pre-service teachers' existing understanding of translation, plane, function, and vector concepts. The action plan that was designed considering previous research findings on students' understanding of translation (Hollebrands, 2003; Yanık, 2013) and prior knowing (Martin & Towers, 2016; Pirie & Kieren, 1994) was applied during a geometry lesson. During the lessons, the pre-service teachers were guided to improve their understanding of translation by encouraging them to work on their understanding of these concepts. The data consists of the written answers given by the participants to the pre-test applied before the translation lessons, the recordings of the mathematical discussions that took place during the lessons, the lesson observation notes, and the notes taken during the pre-or post-lesson interviews of the instructors.

At the beginning of the data analysis, the written statements of the pre-service teachers to the pre-test were analyzed. For this, pre-service teachers' explanations of translation and related concepts were coded, and their knowledge of each concept was categorized. Then, the video recordings obtained during the translation lessons were analyzed. The stages proposed by Powell, Francisco, and Maher (2003) were used for the analysis of the videotaped lesson data.

Findings and Discussion

When the explanations written by the pre-service teachers about the concepts in the pre-test were analyzed, it was determined that they had images indicating that they conceived translation as a motion. Therefore, the instructors took many deliberate actions in teaching to help pre-service teachers understand translation as a mapping of the plane. The focus of these actions was to get pre-service teachers to fold back their prior knowings. The findings were presented in two different sections describing how encouraged folding backs improved pre-service teachers' mathematical understanding. In these sections, the concepts of vector, function, and real plane were studied.

Interventions that encouraged pre-service teachers to work on their prior knowings through folding backs helped them understand the geometric translation as a function. With the help of these folding backs, the pre-service teachers were able to understand the role of the vector as the parameter and the invariant or non-invariant figures in the translation. In addition, improving the understanding of the pre-service teachers about one-to-one and onto functions whose domain and range is $\mathbb{R}^2$ helped them understand that all points in the plane were translated. The research provides an approach to mathematics educators who want to help students understand the geometric translation as a function and design instruction based on prior knowledge to support students' mathematical understanding.