Anadolu Üniversitesi Bilim ve Teknoloji Dergisi B- Teorik Bilimler
Anadolu University Journal of Science and Technology B- Theoretical Sciences
2016 - Cilt: 4 Sayı: 2
Sayfa: 113 - 120
DOI: 10.20290/btdb.22683
Geliş: 14 Mart 2016 Düzeltme: 27 Eylül 2016 Kabul: 02 Ekim 2016

ANADOLU ÜNİVERSİTESİ

YFS VE AĞAÇ OTOMORFİZMİ ANLAMINDA KENDİNE BENZER GRUPLAR ARASINDAKİ BAZI İLİŞKİLER

Mustafa SALTAN [1], *, Bünyamin DEMİR [1]

[1] Matematik Bölümü, Fen Fakültesi, Anadolu Üniversitesi, Eskişehir, Türkiye

ÖZET

Bir köklü ağaç otomorfizminin kendine benzerlik kavramı (Sidki, 1998; Nekrashevych, 2005) de verilmektedir. (Saltan ve Demir, 2013) de, yinelemeli fonksiyon sistemi (YFS) anlamında kendine benzer gruplar tanımlanmakta ve bu grupların özellikleri ayrıntılı olarak incelenmektedir. Bu çalışmada, YFS anlamında kendine benzer grup ve ağaç otomorfizminin kendine benzerlik kavramlarının birbirlerini gerektirmediği gösterilmektedir. Ayrıca bu iki tanımın bazı benzer ve farklı tarafları araştırılmaktadır.

Anahtar Kelimeler: Ağaç otomorfizmi, Yinelemeli fonksiyon sistemi, Fraktal

SOME RELATIONS BETWEEN SELF-SIMILAR GROUPS IN THE SENSE OF IFS AND TREE AUTOMORPHISM

ABSTRACT

The notion of self-similarity of the automorphism group of a rooted tree is given in (Sidki, 1998; Nekrashevych, 2005). We define self-similar groups in the sense of iterated function system (IFS) in (Saltan ve Demir, 2013) and we investigate the properties of these groups in detail. In this paper, we show that two notions of self-similarity do not imply each other. Moreover, we examine similar and different sides of these two definitions.

Keywords: Tree automorphism, Iterated function system, Fractal

1. GİRİŞ

Doğadaki pek çok şekil doğru, kare, üçgen, dikdörtgen ve çember gibi düzgün şekillerden oluşmazlar. Fraktallerin fikir babası olarak bilinen B. Mandelbrot "Bulutlar küre değildir, dağlar koni değildir, sahiller çember değildir, ağaç kabukları düzgün değildir ve yıldırım ise bir düz çizgi boyunca hareket etmez" sözü ile düzgün olmayan şekillerin ve doğanın geometrisi olarak bilinen fraktal geometrinin önemini anlatır [1]. Fraktallerin kesin bir tanımı olmamakla beraber, çoğu fraktal küme kendine benzerlik gibi ortak bir özelliği sahiptir. Kendine benzerlik özelliği şeklin küçük parçalarının şeklin tamamına benzemesidir. Kendine benzer fraktalleri elde etmek için en önemli yollardan biri ise tanımı ve teorisi ilk olarak Hutchinson tarafından verilen ve daha sonra Barnsley tarafından geliştirilen yinelemeli fonksiyon sistemleridir (YFS). Kendine benzerliği en iyi ifade eden ve en iyi bilinen kümeler olarak Cantor kümesi, Sierpinski üçgeni, Koch eğrisi ve Sierpinski halısı verilebilir [2-4].

Günümüzde fraktallerin matematik, biyoloji, fizik, tıp ve finans gibi birçok uygulama alanları vardır. Özellikle bu alanlardan son on yılda en popüler olanlarından biri de geometrik grup teorisi üzerinedir. Tanım 1 de verilen kendine benzer otomorfizm grupların temeli Sidki, Nekrashevych, Grigorchuk ve Bartholdi' nin çalışmalarından oluşturmuştur. Daha sonra birçok bilim adamı bu konu üzerinde araştırmalar yapmıştır. Köklü ağacın otomorfizm grubunun fraktallerle ilişkileri incelenmiştir. Bu çalışmalarda genellikle bu grupların cebirsel özellikleri ön plana çıkmaktadır [5-7].

* Sorumlu Yazar: mustafasaltan@anadolu.edu.tr

Saltan ve Demir ise son yıllarda bir yinelemeli fonksiyon sisteminin atraktörü olarak yazılabilen grupları araştırmaktadır [8-10]. Bu anlamda ilk tanım Ş. Koçak tarafından verilmiştir [11]. Tanım 2 ve Tanım 3' ü sağlayan grupların bir YFS nin atraktörü olarak yazılabildiği gösterilmiş ve bu grupların temel özelliklerini ayrıntılı olarak incelenmiştir. Bu tanımların, kendine benzer grupların en önemli elde ediliş yöntemlerinden biri olan YFS ile doğrudan ilişkisi olduğundan geometrik olarak önemli bir yere sahiptir.

Bu kavramlar anlaşıldıktan sonra, ilk olarak Tanım 1'i sağlayan grupların Tanım 2 yi veya Tanım 3 ü sağlayıp sağlamadığı veya bunun tersinin her zaman geçerli olup olmayacağı soruları ortaya çıkmaktadır. Bu çalışmada ise özellikle bu soruların cevabı verilecek ve bu iki farklı kendine benzerlik tanımının bazı ortak ve farklı yönleri örnekleriyle gösterilecektir. Ayrıca, bu konuyla ilgili cevabını bekleyen bazı açık sorular ifade edilecektir.

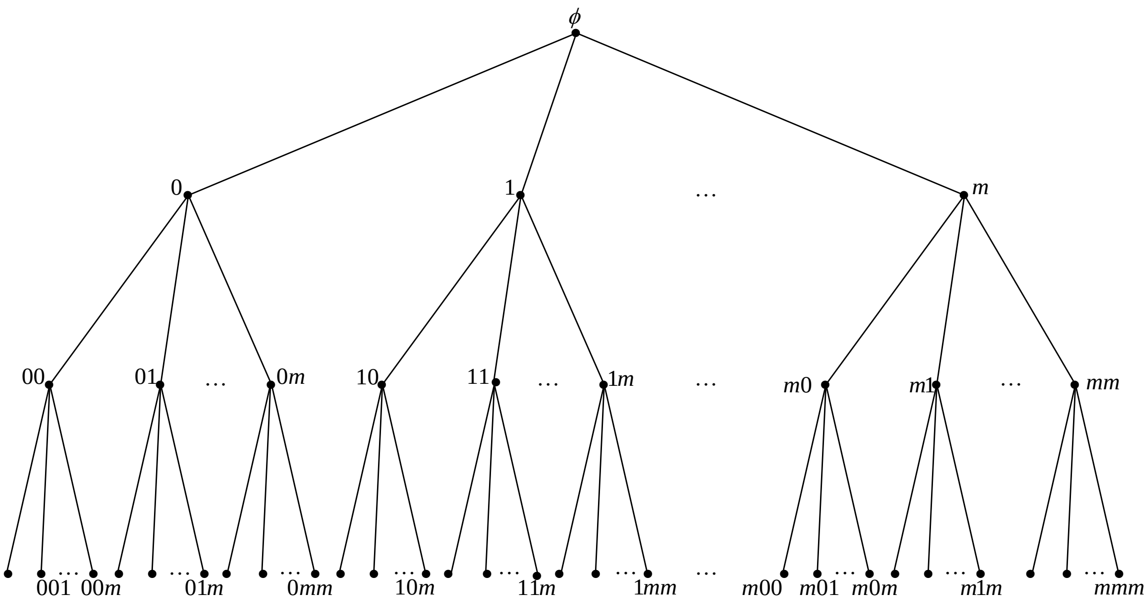
2. TEMEL TANIMLAR VE TEOREMLER

Bu bölümde kendine benzer grupların tanımlarını vermeden önce bu grupları ifade etmek için gerekli olan bazı temel tanımları, teoremleri ve kavramları ifade edeceğiz.

Sonlu bir X kümesi (alfabesi) için, boş kelimeyi içeren X alfabesi üzerindeki bütün sonlu kelimelerin kümesi,

$$X^* = \{x_0x_1x_2\dots x_m \mid x_i \in X, m \geq 0\}$$

tarafından belirtilir. $v = x_0x_1x_2\dots x_m \in X^*$ kelimesinin uzunluğu $m+1$ dir ve $|v|$ ile gösterilir. $v_1, v_2 \in X^*$ kelimelerin çarpımı doğal olarak $v_1\, v_2$ uç uca eklemesi olarak tanımlanır. Açık olarak X^* kümesi derecesi $m+1$ olan sonlu düzgün köklü ağacın köşe kümesidir. Bu ağaçta iki köşenin bir kenar tarafından bağlantılı olması için gerek ve yeter şart $v \in X^*$ ve $x \in X$ olmak üzere bu iki köşenin v, vx formunda olmasıdır. $\emptyset$, X^* ağacının köküdür ve bu ağacın n. seviyesi ise X^n ile gösterilir.



Şekil 1. $m+1$-li köklü ağacın ilk üç seviyesi

Sonlu X alfabesi için X^* ağacının sınırı, bütün sonsuz uzunluklu kelimelerin kümesi olan

$$X^{\omega} = \{x_0x_1\,x_2\dots \mid x_i \in X\}$$

kümesidir.

Eğer bir $f: X^* \longrightarrow X^*$ dönüşümü kökü ve köşelerin bağlantılığını koruyor ise ağacın bir endomorfizmi denir. Birebir ve örten endomorfizm ise otomorfizm olarak adlandırılır ve X^* ağacının tüm otomorfizmlerinin grubu $Oto(X^*)$ ile gösterilir.

$g: X^* \longrightarrow X^*$, X^* ağacının bir endomorfizmi olsun. $v, w \in X^*$ olmak üzere $g_{|v}: X^* \longrightarrow X^*$ endomorfizmi , g nin X^* ağacının v köşesine kısıtlanmışıdır ve

$$g(vw) = g(v)g_{|v}(w)$$

koşulu ile tek türlü tanımlıdır.

$G \leq Oto(X^*)$, X^* köklü ağacının bir otomorfizm grubu olsun. $v \in X^*$ için köşe sabitleyeci alt grubu

$$G_v = \{g \in G \mid g(v) = v\}$$

kümesidir. n. seviye sabitleyici alt grubu ise

$$St_G(n) = \bigcap_{v \in X^n} G_v$$

kümesidir. X^* köklü ağacının otomorfizimleri ile ilgili işlemleri daha kolayca yapmak için farklı yöntemler vardır. Ayrıntılarını [7] de bulabileceğiniz ve bu çalışmada kullanacağımız bir metodu aşağıda kısaca açıklıyoruz:

H, X üzerine permütasyonlar ile etki eden bir grup ve G keyfi bir grup olsun. $G \wr H$ ile gösterilen büküm çarpımı $G^X \rtimes H$ yarıdirekt çarpımıdır. $X = \{0,1,2,\ldots,m\}$ ve $gi, hi \in G$, $\alpha, \beta \in H$ ve $\alpha(i)$, α nın etkisi altında i nin görüntüsü olmak üzere G ≀ H nın $(g_0,\ldots,g_m)\alpha \; ve \; (h_0,\ldots,h_m)\beta$ elemanlarının çarpım kuralı;

$$(g_0,\ldots,g_m)\alpha(h_0,\ldots,h_m)\beta = (g_0 h_{\alpha(0)},\ldots,g_m h_{\alpha(m)})\alpha\beta$$

ile verilir. X in bütün permütasyonlarının grubu S_d olsun. α permütasyonu , g nin $X \subset X^*$ üzerinde etkisi olmak üzere,

$$\varphi: Oto(X^*) \rightarrow Oto(X^*) \wr S_d, \quad \varphi(g) = (g_{|0}, g_{|1}, \ldots, g_{|m})\,\alpha$$

dönüşümü bir izomorfizmdir. Böylece $Oto(X^*)$ ın her g elemanı, $g = (g_{|0}, g_{|1}, \ldots, g_{|m})\,\alpha$ olarak ifade edilebilir.

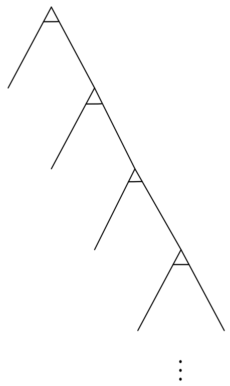
[7] de, bir köklü ağacın otomorfizm grubunun kendine benzerliği aşağıdaki gibi verilmektedir:

Tanım 1: G, X^* köklü ağacının bir otomorfizm grubu olsun. Her $g \in G$ ve $v \in X^*$ için $g_{|v} \in G$ ise G ye kendine benzerdir denir.

Bu grupların en temel örnekleri olarak Adding Machine grup, Grigorchuk grup ve Sonsuz Dihedral grup verilebilir. Ayrıca tanımdan açıktır ki $Oto(X^*)$ grubunun kendisi de bu anlamda kendine benzerdir. Bu örnekler ayrıntılı olarak [6,7] çalışmalarında incelenmektedir.

Adding Machine Grup: $X = \{0,1,2,\ldots,m\}$ ve $\sigma = (012\ldots m)$ olmak üzere $a = (\underbrace{1,1,\ldots,1}_{m}, a)\sigma$ ile verilen otomorfizmin ürettiği grup adding machine grup olarak adlandırılmaktadır.

Açık olarak, bu otomorfizm $m = 1$ durumunda ikili ağacın ilk seviyesindeki köşeleri değiştirir. İlk seviyenin sol köşesine kısıtlanmışı birim otomorfizm, sağ köşesine kısıtlanmışı ise yine a otomorfizmidir ve Şekil 2 deki gibi resmedilebilir.



Şekil 2. a otomorfizminin ikili ağaca etkisi

$Oto(X^*)$ üzerinde, otomorfizlerin ağacın seviyelerini değiştirmelerine göre farklı ama denk metrikler tanımlanabilir**.** $g_1, g_2 \in Oto(X^*)$ olsun. $n = 0,1,2,\ldots,k$ olmak üzere, $g_1\ ve\ g_2$ arasındaki uzaklık

$$d(g_1, g_2) = \begin{cases} 0 & g_1 = g_2\ ise \\ \frac{1}{2^k} & \mathrm{g_1}^{-1}\mathrm{g_2} \in \mathrm{St}_{\mathrm{Oto}(X^*)}\ (\mathrm{n}),\ \mathrm{g_1}^{-1}\mathrm{g_2} \notin \mathrm{St}_{\mathrm{Oto}(X^*)}(k+1)\ ise \end{cases} \tag{1}$$

olarak verilsin. Yani, g_1 ve g_2 otomorfizmlerinin ağacın ilk k. seviyesinin tüm köşelerindeki etkisi aynı, fakat $(k + 1)$. seviyesindeki köşelerin en az birisindeki etkisi farklı ise g_1 ve g_2 arasındaki uzaklık $\frac{1}{2^k}$ olsun. Böylece $(Oto(X^*), d)$ bir kompakt metrik gruptur.

Not: G $, Oto(X^*)$ grubunun kendine benzer bir alt grubu ise, G nin kapanışının da kendine benzer olduğu [7] de verilmektedir. Böylece yukarıda verilen kendine benzer grup örneklerinin d metriğine göre kapanışları da Tanım 1 anlamında kendine benzerdir.

Şimdi YFS anlamında kendine benzer grupları tanımlamak için gerekli kavramları kısaca verelim.

X tam metrik uzayı üzerinde bir yinelemeli fonksiyon sistemi (YFS), büzülme dönüşümlerinin sonlu kümesidir. $\{f_1, f_2, \ldots, f_n\}$, X üzerinde bir YFS ise

$$\bigcup_{i=1}^{n} f_i(S) = S$$

olacak şekilde X in boş kümeden farklı bir tek kompakt alt kümesi vardır. Bu S kümesi, ilgili YFS nin atraktörü veya kendine benzer küme olarak adlandırılır. Bu konunun detayları [2-4] de verilmektedir.

İlk olarak Ş. Koçak [7] tarafından ifade edilen YFS anlamında kendine benzer grup tanımı klasik anlamda bir fraktal kümenin kendine benzerliğinin bir grup yapısı üzerinde uygulanışıdır. Bu durumda, böyle bir grup kendisine homomorf olan öz alt gruplara sahiptir.

Tanım 2: (G, d) kompakt topolojik grup ve d öteleme altında değişmeyen bir metrik olsun. Eğer G nin kendisinden farklı sonlu indeksli bir H alt grubu ve ilgili d metriğine göre büzülme olan $\varphi: G \longrightarrow H$ örten homomorfizmi var ise G grubuna kendine benzer gruptur denir.

[9] da kuvvetli kendine benzer grup tanımı aşağıdaki gibi verilmektedir:

Tanım 3: (G, d) kompakt topolojik grup ve d öteleme altında değişmeyen bir metrik olsun. Eğer G nin kendisinden farklı sonlu indeksli bir H alt grubu ve ilgili d metriğine göre büzülme olan $\varphi: G \longrightarrow H$ grup izomorfizmi var ise G grubuna kendine benzer gruptur denir.

Tanım 2 ve Tanım 3 anlamında kendine benzer grupların özelikleri ayrıntılı olarak [9] da incelenmektedir.

3. KENDİNE BENZER GRUPLAR ARASINDAKİ BAZI İLİŞKİŞLER

Bu bölümde Tanım 1 ve Tanım 2-3 anlamında kendine benzer grupların bazı benzer ve farklı özelliklerini inceleyeceğiz.

Önerme 1. Tanım 2 ve Tanım 3 anlamında kendine benzer gruplar bir YFS nin atraktörüdür.
Kanıt. [8] ve [9] da ayrıntılı olarak verilmiştir.

Not 1: Önerme 1 den dolayı Tanım 2 ve Tanım 3 anlamındaki her kendine benzer grup bir YFS nin atraktörü olarak yazılabilir. Bu yüzden, bu gruplar YFS anlamında kendine benzer gruplar olarak adlandırılmaktadır.

Önerme 2. Tanım 1 anlamında her kendine benzer grup bir YFS nin atraktörü değildir.

Kanıt. Adding Machine grubu, Tanım 1 anlamında kendine benzer grupların en temel örneklerinden biridir ve sonsuz mertebeli tek üreteçli olduğundan dolayı Z ye izomorftur. Bir grubun bir YFS nin atraktörü olması için öncelikle kompakt bir küme olması gerekir**.** İlk olarak**,** Adding Machine grubun $(Oto(X^*), d)$ kompakt topolojik uzayının kompakt bir alt kümesi olmadığını gösterelim. Bunun için $A \neq \bar{A}$ olduğunu göstermek yeterlidir. Adding Machine grubun kapanışı, derecesi p olan düzgün köklü ağaç üzerindeki uygun bir seviye metriği ile $p - sel$ tam sayılar grubu olan Z_p ye izomorftur [12]. Açık olarak görülür ki, Adding Machine grubu kompakt değildir ve Tanım 1 anlamında her grup bir YFS nin atraktörü olarak yazılamaz. Ayrıca, Grigorchuk grubunun kapanışını da kendisinden farklı olduğundan, farklı bir örnek olarak verilebilir.

Sonuç 1: Tanım 1 anlamında her kendine benzer grup bir YFS nin atraktörü olarak yazılamadığından dolayı, Tanım 2 veya Tanım 3 anlamında kendine benzer bir grup değildir.

[7] de Y. Teorem 2.9.4 den Tanım 1 anlamında kendine benzer grubun kapanışı da bu anlamda kendine benzer olduğu gösterilmektedir. Ayrıca kompakt bir metrik uzayın kapalı alt kümesinin de kompakt olduğunu biliyoruz. Böylece, Adding Machine grup, Grigorchuk grup ve Sonsuz Dihedral gibi Tanım 1 anlamında çok iyi bilinen grupların kapanışları da kompakttır. [10] da Adding Machine grubunun ilgili seviye metriğine göre kapanışının bir YFS nin atraktörü olarak yazılabileceğini gösterilmiştir.

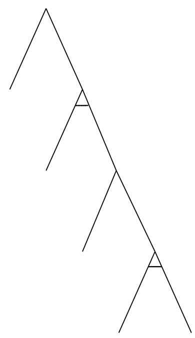
Önerme 4: Tanım 2 ve Tanım 3 anlamında kendine benzer bir grubun hem izometri ve izomorfizm dönüşümü altındaki görüntüsü de bu anlamda kendine benzer bir gruptur.

Kanıt. [8] ve [9] da ayrıntılı olarak verilmiştir.
Önerme 5: Tanım 1 anlamında kendine benzer bir grup, grup izomorfizmi altında korunmaz.

Kanıt. S_2, $X = \{0, 1\}$ kümesi üzerinde simetrik grup ve $\sigma = (01) \in S_2$ olmak üzere g, X^* üzerinde,

$$g = (1, (1, g)\sigma)$$

büküm tekrarlaması ile tanımlı dönüşümü olsun.



Şekil 3. g otomorfizminin ikili ağacının ilk dört seviyesine etkisi

Sonsuz mertebeli tek üreteçli her grup Z ye izomorftur. Öncelikle g dönüşümünün X^* üzerinde sonsuz mertebeli olduğunu gösterelim. g nin mertebesinin sonlu olduğunu kabul edelim. Bu durumda, $g^k = 1$ olacak şekilde $k \in N$ sayısı vardır ve k sayısı bu özelliği sağlayan en küçük doğal sayıdır. İki durum söz konusudur.

• k çift olsun. Bu durumda $k = 2l$ olacak şekilde $l \in N$ sayısı vardır. Böylece

$$\begin{aligned} 1 = g^k = g^{2l} &= (1,(1,g)\sigma)^{2l} \\ &= ((1,(1,g)\sigma),(1,(1,g)\sigma))^l \\ &= (1.1,(1,g)\sigma(1,g)\sigma)^l \\ &= (1,(1,g).(g,1)\sigma^2)^l \\ &= (1,(g,g))^l \\ &= (1,(g^l,g^l)) \end{aligned}$$

elde edilir. Bu durumda $g^l = 1$ olmak zorundadır. Bu ise k nın en küçük olması ile çelişir. O halde k çift olamaz.

• k tek olsun. Bu durumda $k = 2l + 1$ olacak şekilde $l \in N$ sayısı vardır. Buradan

$$\begin{aligned} 1 = g^k = g^{2l+1} &= (1,(1,g)\sigma)^{2l+1} \\ &= (1,(1,g)\sigma)^{2l}(1,(1,g)\sigma) \\ &= (1,(g^l,g^l))(1,(1,g)\sigma) \\ &= (1,(g^l,g^{l+1})\sigma) \end{aligned}$$

elde edilir. Bu ise ağacın ikinci seviyesinin sağ dalınınki köşelerin değişmesi demektir. Bu ise g^{2l+1} nin birim otomorfizm olması ile çelişir. O halde k tek olamaz.

Böylece g sonsuz mertebelidir ve $G = \langle g \rangle$, Z ye izomorftur. Açık olarak, $g|_1 = (1,g)\sigma$ dır. Fakat G, tanımından dolayı açık olarak birinci seviyeyi değiştiren hiçbir elemana sahip olmadığından $g|_1 \notin G$ dir. Bu ise G nin kendine benzer bir otomorfizm grubu olmaması demektir.

Şimdi ikili ağaca etki eden $a = (1,a)\sigma$ ile verilen otomorfizmin ürettiği grup olan kendine benzer grupların en temel örneklerinden adding machine grubunu alalım. Açıkça $A \cong Z$ olduğundan $A \cong G$ elde edilir. Bu ise Tanım 1 anlamında kendine benzerliğin izomorfizm altında korunmaması demektir.

Şimdi bu grupların ortak bir özelliğini vereceğiz:

Önerme 6: YFS anlamında kuvvetli kendine benzer grup bir profinite gruptur.

Kanıt. [9] da ayrıntılı olarak verilmektedir.

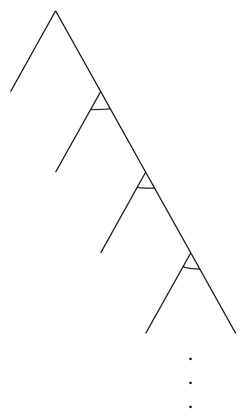
Tanım 1 anlamında kendine benzer grubun kapanışı da profinite grup olduğu aşikârdır. Köklü düzgün ağacın otomorfizmler grubunun bir alt grubu olan Adding Machine grubunun kapanışının Tanım 1 ve Tanım 2-3 anlamında kendine benzer bir grup olduğunu [10] da gösterilmektedir.

Önerme 7: YFS anlamında her kendine grup Tanım 1 anlamında kendine benzer bir grup değildir.

Kanıt. S_2, $X = \{0, 1\}$ kümesi üzerinde simetrik grup, $\sigma = (01) \in S_2$ ve $a = (1, a)\sigma$ adding machine otomorfizmi olmak üzere;

$$A' = < b = (1, a) >$$

grubunu tanımlayalım.



Şekil 4. $(1, a)$ otomorfizminin ikili ağaca etkisi

$$F: A \to A', \; F(a) = (1, a)$$

olarak tanımlanan dönüşümü düşünelim. Açık olarak F bir grup izomorfizmidir. [10] da Adding machine grubunun kapanışı olan $\overline{A}$ nın YFS anlamında kendine benzer grup olduğu gösterilmiştir. A' üzerinde tanımlanan uygun bir seviye metriği ile Önerme 4 kullanılarak $\overline{A'}$ nında YFS anlamında kendine benzer grup olduğu gösterilebilir. Fakat bu kümenin hiçbir elemanının ağacın birinci seviyesindeki köşelerini değiştirmeyeceği açıktır. Böylece $b|_1 = a = (1, a)\sigma$ otomorfizmi, ağacın birinci seviyesindeki köşeleri değiştirdiğinden $\overline{A'}$ nın bir elemanı olamaz. Yani, $\overline{A'}$ Tanım 1 anlamında kendine benzer grup değildir.

Açık Soru 1: Grigorchuk grubun kapanışının bir YFS nin atraktörü olarak yazılıp yazılmadığı bilinmemektedir. Daha genel olarak Tanım 1 anlamında kendine benzer grubun kapanışı daima bir YFS nin atraktörü olarak yazılıp yazılmadığı bilinmemektedir.

Açık Soru 2: Hangi koşullar altında YFS kendine benzer grup tanımları ile ağaç otomorfizminin kendine benzerlik tanımının birbirini gerektirdiği bilinmemektedir.

4. SONUÇ

Tanım 1 anlamında kendine benzerlik kavramı son yıllarda yapılan önemli çalışmalar ile özellikle cebirsel yönü ile literatürde yerini almıştır. YFS anlamında kendine benzer grup kavramı ise klasik fraktallerin en önemli elde ediliş yöntemi olan yinelemeli fonksiyon sistemleri ile doğrudan ilişkili olduğundan bu anlamda geometrik açıdan çok önemlidir. Bu tanımların bazı benzer ve farklı yönleri ilk olarak bu makalede ele alınarak, yeni araştırmalara yol göstermesi açısından katkı sağlamaktadır.

TEŞEKKÜR

Bu çalışmada ilk yazar 1404F209 numaralı Anadolu Üniversitesi Bilimsel Araştırma Projesi tarafından desteklenmiştir.

KAYNAKLAR

[1] Mandelbrot BB. The Fractal Geometry of Nature, W.H. Freeman and Company, San Francisco, 1982.

[2] Hutchinson JE. Fractals and self-similarity, Indiana Univ Math J 1981; 30: 713–747.

[3] Falconer KJ. Fractal Geometry, Mathematical Foundations and Application, John Wiley, 2003.

[4] Barnsley MF. Fractals Everywhere, Academic Press, Boston, 1988.

[5] Sidki SN. Regular trees and their automorphisms, Monografias de Matematica 1998; 56.

[6] Bartholdi L., Grigorchuk R., Nekrashevych V. From Fractal Groups to Fractal Sets. Fractals in Graz, (Peter Grabner and Wolfgang Woess, eds.), Birkhauser Verlag, Basel, 25-118, 2003.

[7] Nekrashevych V. Self-similar Groups, Mathematical Surveys and Monographs, Amer Math Soc Providence, RI, 117, 2005.

[8] Demir B., Saltan M. A self-similar group in the sense of iterated function system, Far East J Math Sci 2012; 60(1): 83–99.

[9] Saltan M, Demir B. Self-similar groups in the sense of an IFS and their properties, Journal of Mathematical Analysis and Applications 2013; 408: 694–704.

[10] Saltan M., Demir B. An iterated function system for the closure of the adding machine group, Fractals 2015, 23: 1550033.

[11] Koçak Ş. Kişisel görüşme, 2010.

[12] Saltan M. The relation between adding machine and p-adic integers, Konuralp Journal of Mathematics 2013; 1 (2): 41-49.

[13] Robert AM. A Course in $p-$adic Analysis, Springer, 2000.