



4-Boyutlu Lorentz-Minkowski Uzayında Null Olmayan Ortak İzoasimptotik Eğrili Hiperyüzey Aileleri

Çiğdem Turan^{1*}, Mustafa Altın², H. Bayram Karadağ³

^{1*} İnönü Üniversitesi, Fen Bilim Enstitüsü, Matematik Bölümü, Malatya, Türkiye, (ORCID: 0000-0002-5224-730X), cigdemturan427@gmail.com
² Bingöl Üniversitesi, Teknik Bilimler Meslek Yüksekokulu, Bingöl Türkiye (ORCID: 0000-0001-5544-5910), maltin@bingol.edu.tr
³ İnönü Üniversitesi, Fen-Edebiyat Fakültesi, Matematik Bölümü, Malatya, Türkiye (ORCID: 0000-0001-6474-877X), bayram.karadag@inonu.edu.tr

(İlk Geliş Tarihi 25 Mart 2022 ve Kabul Tarihi 11 Mayıs 2022)

(DOI: 10.31590/ejosat.1093177)

ATIF/REFERENCE: Turan, C., Altın, M. & Karadağ, H. B. (2021). 4-Boyutlu Lorentz-Minkowski Uzayında Null Olmayan Ortak İzoasimptotik Eğrili Hiperyüzey Aileleri. *Avrupa Bilim ve Teknoloji Dergisi*, (38), 99-109.

Öz

Bu çalışmada, E_1^4 Lorentz-Minkowski uzayında null olmayan Frenet vektörlere sahip spacelike ve timelike $\alpha = \alpha(s)$ eğrilerinden geçen hiperyüzeylerin parametrik denklemi, bu eğrilerin Frenet çatıları yardımıyla ifade edildi. Ayrıca E_1^4 Lorentz-Minkowski uzayında spacelike ve timelike eğrilerin hiperyüzey üzerinde ortak izoasimptotik olması için gerekli ve yeterli koşullar verilerek hiperyüzey aileleri oluşturuldu. Daha sonra sarma fonksiyonları yardımıyla elde edilen bu koşullar sadeleştirildi. Son olarak, örneklerle çalışma desteklendi ve belli iz düşüm metodları kullanılarak bu örneklerin grafikleri çizildi.

Anahtar Kelimeler: 4-Boyutlu Lorentz-Minkowski Uzayı, Spacelike ve Timelike İzoasimptotik Eğri, Hiperyüzey Aileleri.

Hypersurfaces Families with Common Non-Null Isoasymptotic Curve in Lorentz-Minkowski 4-Space

Abstract

In this study, the parametric equation of hypersurfaces passing through spacelike and timelike $\alpha = \alpha(s)$ curves having non-null Frenet vectors in E_1^4 Lorentz-Minkowski space is expressed with the help of the Frenet frames of these curves. In addition, hypersurface families are formed by giving necessary and sufficient conditions for spacelike and timelike curves to be common isoasymptotic on the hypersurface in E_1^4 Lorentz-Minkowski space. Then, these conditions obtained with the help of marching-scale functions are simplified. Finally, the study is supported with examples and the graphs of these examples are drawn using certain projection methods.

Keywords: Lorentz-Minkowski 4-Space, Spacelike and Timelike Isoasymptotic Curve, Hypersurface Families.

* Sorumlu Yazar: cigdemturan427@gmail.com

1. Giriş

Diferansiyel geometride önemli bir yere sahip olan eğriler ve yüzeyler teorisi, uygulama açısından oldukça geniş bir kullanım alanına sahip olduğundan birçok bilim insanı tarafından çalışılmaktadır. Eğriler ve yüzeyler teorisinde, farklı uygulama alanlarında kullanılan birçok özel eğriden bir tanesi de asimptotik eğrilerdir. Asimptotik eğriler yüzeylerin analizinde asli doğrultuların manyetik sapmalarını belirlemek için faydalı bir araç olup diferansiyel geometri, astronomi, astrofizik, mimari ve CAD gibi farklı alanlarda uygulama imkânına sahiptir. Ayrıca Contopoulos "Asymptotic curves and escapes in Hamiltonian systems" isimli çalışmasında Lyapunov yörüngelerindeki asimptotik eğrilerin bulunması durumunda, yıldız sistemindeki yıldızların kaçan yörüngelerinin bulunabileceğini göstermiştir (Contopoulos 1990). Özellikle 3-boyutlu Öklid uzayında asimptotik eğrilerle ilgili birçok çalışma yapılmıştır (Farin 1988, Latifi 2015, Hartman and Wintner 1951, Kitagawa 1988, Garcia and Tello 1997, Garcia et al. 1999).

Wang ve arkadaşlarının ayakkabı üretim maliyetini düşürmek için yaptıkları "Parametric representation of a surface pencil with a common spatial geodesic" isimli çalışması, eğriler ve yüzeyler teorisinin bir uygulaması olarak düşünülebilir. Bu çalışmada sapma fonksiyonları, herhangi bir eğri ve bu eğrinin Frenet çatısı yardımıyla belirli bir karakteristik özelliğe sahip yüzey aileleri oluşturulmuştur. Ayrıca parametrik olarak ifade edilen bu yüzey aileleri üzerinde eğrinin geodezik olması için gerekli koşullar incelenmiştir (Wang et al. 2004). Wang ve arkadaşlarının bu çalışmasından sonra konuyla ilgili 3 ve 4 boyutlu farklı uzaylarda birçok araştırma yapılmıştır. Örneğin 3 boyutlu Öklid uzayında; Rashad ve Abdel (2016) ortak asimptotik eğriye sahip yüzey ailesini inceleyip gerekli ve yeterli koşulları oluşturmuştur. Ayrıca, Bayram vd. (2012) ortak asimptotik eğrili yüzey ailesi bulma problemini incelemiştir. Kasap vd. (2008) yüzeylerin parametrik ifadesini bir ortak uzay geodesiğinin Frenet çatısının katsayılarını, sapma fonksiyonlarını kullanarak Wang'ın çalışmasını genellemiştir. Daha sonra Bayram ve Kasap ise (2014a) ve (2014b) çalışmalarında sırasıyla, 4-boyutlu Öklid uzayında ortak izogeodezik ve izoasimptotik eğrilere sahip hiperyüzeyleri incelemiştir. Bu çalışmalara ek olarak Öklid uzayında yüzey aileri üzerine (Ayvaci and Atalay 2020, Şenyurt et al. 2020, Atalay and Kasap 2016) gibi çalışmalar da yapılmıştır.

Yüzey aileleri ile ilgili Öklid uzayından farklı olarak Minkowski ve Galilean uzaylarında da çalışmalar mevcuttur. Kasap ve Akyıldız (2006) da, 3-boyutlu Minkowski uzayında ortak bir geodezik eğriye sahip olan yüzey ailelerini elde ederek sapma fonksiyonları için yeterli koşulları vermiştir. Şaffak ve Kasap (2009) ise ortak null geodezik eğrili yüzey ailesini incelemiştir. Bu çalışmalara ek olarak 3-boyutlu Minkowski uzayında Şaffak vd. (2013) yüzey ailelerini ortak bir asimptotik eğri ve üç tür sapma ölçek fonksiyonları ile ifade etmiştir. Minkowski uzayında yüzey aileri ile ilgili diğer bazı çalışmalar da (Ergün and Bayram 2019, Kocayığıt and Çiçek 2015, Ergün et al. 2015, Turan et al. 2022) vardır. Ayrıca Galilean uzayında da hiperyüzey aileleriyle ilgili çalışmalara yer verilmiştir. Örneğin, 3-boyutlu Galilean uzayında Yüzbaşı ile Bektaş (2016) ve Yüzbaşı (2016) da sırasıyla ortak geodezik ve ortak asimptotik eğrilerden geçen yüzey aileleri üzerine çalışmıştır. 4-boyutlu Galilean uzayında Yoon ve Yüzbaşı (2018) de verilen ortak izogeodezik eğrili hiperyüzey aileleri üzerine çalışarak bazı karakterizasyonlar vermiştir. Bu çalışmalara ek olarak Galilean

uzayında yüzey ailesi ile ilgili olarak çalışmalar da mevcuttur (Altın and Yüzbaşı 2020, Altın and Ünal 2020, Altın et al. 2021).

Bu makalede, 4-boyutlu Lorentz-Minkowski uzayında null olmayan Frenet vektörlere sahip spacelike ve timelike ortak izoasimptotik eğrilere sahip hiperyüzey aileleri oluşturulmuştur. Bu hiperyüzey aileleri üzerinde null olmayan Frenet vektörlere sahip spacelike ve timelike bir eğrinin hem parametre eğrisi hem de asimptotik eğri olması için gerekli ve yeterli koşullar elde edilmiştir. Bulunan bu koşullar, özel sapma fonksiyonları yardımıyla yeniden oluşturulmuştur. Ayrıca elde edilen koşullar sayesinde izoasimptotik eğrili hiperyüzey aileleri için örnekler oluşturulmuş ve bu örnekleri üç boyuta iz düşürerek grafikleri çizilmiştir.

2. Materyal ve Metot

Bu bölümde, sonraki bölümlerde kullanılacak olan bazı temel kavramlar verilecektir.

Tanım 1. E_1^4 Lorentz-Minkowski uzayında

$$\vec{D} = (x_1, x_2, x_3, x_4),$$

$$\vec{F} = (y_1, y_2, y_3, y_4),$$

ve

$$\vec{G} = (z_1, z_2, z_3, z_4)$$

vektörleri için skaler çarpım ve vektörel çarpım sırasıyla;

$$g(\vec{D}, \vec{F}) = -x_1y_1 + x_2y_2 + x_3y_3 + x_4y_4$$

ve

$$\vec{D} \wedge \vec{F} \wedge \vec{G} = - \begin{vmatrix} -e_1 & e_2 & e_3 & e_4 \\ x_1 & x_2 & x_3 & x_4 \\ y_1 & y_2 & y_3 & y_4 \\ z_1 & z_2 & z_3 & z_4 \end{vmatrix} \quad (1)$$

şeklinde tanımlanır. Burada $\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3$ ve \vec{e}_4 vektörleri E_1^4 de standart baz vektörleridir (Turgut and Yılmaz 2008).

Tanım 2. V bir skaler çarpım uzay ve $\vec{u} \in V$ olsun.

$$\|\vec{u}\| = \left(g(\vec{u}, \vec{u}) \right)^{\frac{1}{2}}$$

eşitliği ile tanımlı $\|\vec{u}\|$ reel sayıma \vec{u} vektörünün normu denir.

Ayrıca normu 1 olan vektöre de birim vektör denir (Turgut and Yılmaz 2009).

Tanım 3. Sıfırdan farklı $\forall \vec{u}, \vec{v} \in E_1^4$ için

$$g(\vec{u}, \vec{v}) = 0,$$

ise \vec{u} ve \vec{v} vektörleri Lorentz anlamında diktir (ortogonaldir) denir (Turgut and Yılmaz 2009).

Tanım 4. $\alpha : I \rightarrow E_1^4$ herhangi regüler bir eğri olmak üzere $\alpha(s)$ eğrisine; $g(\overline{\alpha}'(s), \overline{\alpha}'(s)) < 0$ ise timelike eğri, $g(\overline{\alpha}'(s), \overline{\alpha}'(s)) > 0$ ise spacelike eğri ve $g(\overline{\alpha}'(s), \overline{\alpha}'(s)) = 0$ ise null eğri denir. Burada $\alpha'(s), \alpha(s)$ eğrisinin hız vektörüdür (Tozak 2010).

Teorem 5. $\alpha = \alpha(s), E_1^4$ Lorentz-Minkowski uzayında bir spacelike ya da timelike eğri olsun. Bu durumda α eğrisinin $\alpha(s)$ noktasındaki $\{\overline{T}, \overline{N}, \overline{B}_1, \overline{B}_2, k_1, k_2, k_3\}$ Frenet takımı

$$T = \frac{\alpha'}{\|\alpha'\|},$$

$$N = \frac{\|\alpha'\|^2 \cdot \alpha'' - \varepsilon \cdot g(\alpha', \alpha'') \cdot \alpha'}{\|\|\alpha'\|^2 \cdot \alpha'' - \varepsilon \cdot g(\alpha', \alpha'') \cdot \alpha'\|},$$

$$B_1 = N \wedge T \wedge B_2,$$

$$B_2 = \mu \frac{T \wedge N \wedge \alpha''}{\|T \wedge N \wedge \alpha''\|},$$

$$k_1 = \frac{\|\|\alpha'\|^2 \cdot \alpha'' - \varepsilon \cdot g(\alpha', \alpha'') \cdot \alpha'\|}{\|\alpha'\|^4},$$

$$k_2 = \frac{\|T \wedge N \wedge \alpha''\| \cdot \|\alpha'\|}{\|\|\alpha'\|^2 \cdot \alpha'' - \varepsilon \cdot g(\alpha', \alpha'') \cdot \alpha'\|},$$

$$k_3 = \frac{g(\alpha^{(n)}, B_2)}{\|T \wedge N \wedge \alpha''\| \cdot \|\alpha'\|},$$

dir. Burada $[\overline{T}, \overline{N}, \overline{B}_1, \overline{B}_2]$ matrisinin determinantını +1 yapmak için $\mu = -1$ ya da $\mu = 1$ olarak alınır ve $\langle \alpha', \alpha' \rangle > 0 \Rightarrow \varepsilon = 1, \langle \alpha', \alpha' \rangle < 0 \Rightarrow \varepsilon = -1$ dir. E_1^4 de $\{\overline{T}, \overline{N}, \overline{B}_1, \overline{B}_2, k_1, k_2, k_3\}$ olarak verilen Frenet takımı sırasıyla, α eğrisinin $\alpha(s)$ noktasındaki tanjant vektörü, asli normal vektörü, binormal vektörü, trinormal vektörü, birinci, ikinci ve üçüncü eğriliklerdir (Turgut and Yılmaz 2008, Ali 2010).

Şimdi E_1^4 de null olmayan Frenet vektörlerine sahip spacelike ve timelike $\alpha = \alpha(s)$ eğrilerinin $\{\overline{T}, \overline{N}, \overline{B}_1, \overline{B}_2\}$ Frenet çatısının türev denklemleri verilecektir (Walrave 1995).

İlk olarak, α eğrisi E_1^4 de bir spacelike eğri olsun. Bu durumda α eğrisinin $\alpha(s)$ noktasındaki asli normal, binormal ve trinormal vektörleri spacelike ve timelike vektör iken Frenet türev denklemleri aşağıdaki gibidir.

Durum 1. α eğrisi, E_1^4 de bir spacelike eğri ve asli normal vektörü timelike olsun. Bu durumda $\alpha = \alpha(s)$ eğrisinin Frenet türev denklemi

$$\begin{bmatrix} \overline{T}'(s) \\ \overline{N}'(s) \\ \overline{B}_1'(s) \\ \overline{B}_2'(s) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & k_1 & 0 & 0 \\ k_1 & 0 & k_2 & 0 \\ 0 & k_2 & 0 & k_3 \\ 0 & 0 & -k_3 & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \overline{T}(s) \\ \overline{N}(s) \\ \overline{B}_1(s) \\ \overline{B}_2(s) \end{bmatrix} \quad (2)$$

dir.

Durum 2. α eğrisi, E_1^4 de bir spacelike eğri ve binormal vektörü timelike olsun. Bu durumda $\alpha = \alpha(s)$ eğrisinin Frenet türev denklemi

$$\begin{bmatrix} \overline{T}'(s) \\ \overline{N}'(s) \\ \overline{B}_1'(s) \\ \overline{B}_2'(s) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & k_1 & 0 & 0 \\ -k_1 & 0 & k_2 & 0 \\ 0 & k_2 & 0 & k_3 \\ 0 & 0 & k_3 & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \overline{T}(s) \\ \overline{N}(s) \\ \overline{B}_1(s) \\ \overline{B}_2(s) \end{bmatrix} \quad (3)$$

dir.

Durum 3. α eğrisi, E_1^4 de bir spacelike eğri ve trinormal vektörü timelike olsun. Bu durumda $\alpha = \alpha(s)$ eğrisinin Frenet türev denklemi

$$\begin{bmatrix} \overline{T}'(s) \\ \overline{N}'(s) \\ \overline{B}_1'(s) \\ \overline{B}_2'(s) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & k_1 & 0 & 0 \\ -k_1 & 0 & k_2 & 0 \\ 0 & -k_2 & 0 & k_3 \\ 0 & 0 & k_3 & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \overline{T}(s) \\ \overline{N}(s) \\ \overline{B}_1(s) \\ \overline{B}_2(s) \end{bmatrix} \quad (4)$$

dir.

İkinci olarak, α eğrisi E_1^4 de bir timelike eğri olsun. Bu durumda $\alpha = \alpha(s)$ eğrisinin asli normal, binormal ve trinormal vektörleri spacelike vektör olacağından Frenet türev denklemi

$$\begin{bmatrix} \overline{T}'(s) \\ \overline{N}'(s) \\ \overline{B}_1'(s) \\ \overline{B}_2'(s) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & k_1 & 0 & 0 \\ k_1 & 0 & k_2 & 0 \\ 0 & -k_2 & 0 & k_3 \\ 0 & 0 & -k_3 & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \overline{T}(s) \\ \overline{N}(s) \\ \overline{B}_1(s) \\ \overline{B}_2(s) \end{bmatrix} \quad (5)$$

dir.

E_1^4 de bir hiperyüzey üzerindeki indirgenmiş metrik bir Lorentz metrik (ya da pozitif tanımlı Riemannian metrik) ise bu hiperyüzey bir timelike (ya da spacelike) hiperyüzey olarak adlandırılır. Bu durumda hiperyüzeyin normali spacelike (ya da timelike) vektördür.

E_1^4 deki bir $\Psi(s, x, y)$ hiperyüzeyinin $n(s, x, y)$ normal vektörü

$$n(s, x, y) = \frac{\partial \Psi(s, x, y)}{\partial s} \wedge \frac{\partial \Psi(s, x, y)}{\partial x} \wedge \frac{\partial \Psi(s, x, y)}{\partial y} \quad (6)$$

olarak hesaplanır (Thorpe 2012).

$\alpha = \alpha(s)$ eğrisinin $\Psi(s, x, y)$ hiperyüzeyi üzerinde bir parametre eğrisi olması için gerek ve yeter şart hiperyüzey üzerindeki keyfi $x = x_0$ ve $y = y_0$ parametreleri için $\Psi(s, x_0, y_0) = \alpha(s)$ olmasıdır (O'Neill 2014).

Ayrıca, hiperyüzey üzerindeki bir eğri için eğer eğrinin hız vektörü asimptotik doğrultu ise eğri asimptotik eğri olarak adlandırılır. Böylece, $\alpha = \alpha(s)$ eğrisinin $\Psi(s, x, y)$ hiperyüzeyi üzerinde bir asimptotik eğri olması için

$$\left\langle \frac{\partial n(s, x_0, y_0)}{\partial s}, T(s) \right\rangle = 0 \quad (7)$$

olmasıdır. E_1^4 de herhangi bir hiperyüzey üzerinde verilen bir eğrinin izoasimptotik olması için bu eğrinin hiperyüzey üzerinde hem parametre hem de asimptotik eğri olmasıdır (Şaffak et al. 2013).

3. E_1^4 Lorentz-Minkowski Uzayında Non-Null Ortak İzoasimptotik Eğriye Sahip Hiperyüzey Aileleri

Bu bölümde E_1^4 Lorentz-Minkowski uzayında null olmayan Frenet vektörlere sahip spacelike ve timelike ortak izoasimptotik eğrili hiperyüzey aileleri oluşturulacaktır. E_1^4 de hiperyüzey ailelerinin ortak izoasimptotik eğrilere sahip olması için gerekli teorem ifade edilip ispatı yapılacaktır. Teoremden verilen koşullar, sapma fonksiyonları kullanılarak yeniden ifade edilecektir. Ayrıca bu çalışmayı destekleyen örneklere yer verilecektir.

E_1^4 de $\alpha = \alpha(s)$ eğrisinden geçen hiperyüzey ailesinin parametrik denklemi

$$\Psi(s, x, y) = \alpha(s) + u(s, x, y).T(s) + v(s, x, y).N(s) + w(s, x, y).B_1(s) + q(s, x, y).B_2(s) \quad (8)$$

$$C_1 \leq s \leq C_2, \quad P_1 \leq x \leq P_2, \quad M_1 \leq y \leq M_2$$

şeklinde verilmiş olsun. Burada $u(s, x, y)$, $v(s, x, y)$, $w(s, x, y)$, $q(s, x, y) \in C^1$ sapma fonksiyonlarını ve $T(s)$, $N(s)$, $B_1(s)$, $B_2(s)$ de α eğrisinin $\alpha(s)$ noktasındaki Frenet çatısını göstermektedir. Bu çalışmada non-null hiperyüzey aileleri çalışılacaktır.

E_1^4 de α null olmayan Frenet vektörlere sahip spacelike veya timelike bir eğri olmak üzere aşağıdaki teoremi verebiliriz.

Teorem 9. E_1^4 de $\alpha = \alpha(s)$ null olmayan Frenet vektörlere sahip spacelike ya da timelike bir eğri olsun. Bu durumda, $\alpha = \alpha(s)$ eğrisinin (8) parametrik denklemi ile verilen $\Psi(s, x, y)$ hiperyüzeyi üzerinde bir izoasimptotik olması için gerek ve yeter şart

$$u(s, x_0, y_0) = v(s, x_0, y_0) = w(s, x_0, y_0) = q(s, x_0, y_0) = 0, \quad (9)$$

$$\frac{\partial w(s, x_0, y_0)}{\partial x} \frac{\partial q(s, x_0, y_0)}{\partial y} = \frac{\partial q(s, x_0, y_0)}{\partial x} \frac{\partial w(s, x_0, y_0)}{\partial y}, \quad (10)$$

$$\left(\frac{\frac{\partial q(s, x_0, y_0)}{\partial x} \frac{\partial v(s, x_0, y_0)}{\partial y}}{\frac{\partial q(s, x_0, y_0)}{\partial y} \frac{\partial v(s, x_0, y_0)}{\partial x}} \right)^2 + \left(\frac{\frac{\partial v(s, x_0, y_0)}{\partial x} \frac{\partial w(s, x_0, y_0)}{\partial y}}{\frac{\partial w(s, x_0, y_0)}{\partial x} \frac{\partial v(s, x_0, y_0)}{\partial y}} \right)^2 \neq 0 \quad (11)$$

olmasıdır.

İspat. Herhangi bir hiperyüzey üzerinde verilen bir eğrinin izoasimptotik olması için bu eğrinin hiperyüzey üzerinde hem parametre hem de asimptotik eğri olması gerekmektedir. İlk olarak α eğrisi (8) parametrik denklemi ile verilen $\Psi(s, x, y)$ hiperyüzey ailesinin üzerinde bir parametre eğrisi olsun. Bu durumda $\Psi(s, x_0, y_0) = \alpha(s)$ olması için gerek ve yeter şart $\exists x_0 \in [P_1, P_2], y_0 \in [M_1, M_2]$ bulunabilir öyle ki

$$u(s, x_0, y_0) = v(s, x_0, y_0) = w(s, x_0, y_0) = q(s, x_0, y_0) = 0, \quad (12)$$

$$C_1 \leq s \leq C_2$$

dir. Bu da bize teoremden ki (9) şartlarını verir. Ayrıca, (12) eşitliğinden

$$\frac{\partial u(s, x_0, y_0)}{\partial s} = \frac{\partial v(s, x_0, y_0)}{\partial s} = \frac{\partial w(s, x_0, y_0)}{\partial s} = \frac{\partial q(s, x_0, y_0)}{\partial s} = 0 \quad (13)$$

olduğu kolayca görülür.

Şimdi kabul edelim ki $\alpha = \alpha(s)$ eğrisi timelike bir eğri olsun. Bu durumda, (5) deki Frenet türev formülleri yardımıyla, $\Psi = \Psi(s, x, y)$ hiperyüzeyinin kısmi türevleri

$$\begin{aligned} \frac{\partial \Psi(s, x, y)}{\partial s} &= \left(1 + \frac{\partial u(s, x, y)}{\partial s} + k_1 v(s, x, y) \right) T(s) \\ &+ \left(k_1 u(s, x, y) + \frac{\partial v(s, x, y)}{\partial s} - k_2 w(s, x, y) \right) N(s) \\ &+ \left(k_2 v(s, x, y) + \frac{\partial w(s, x, y)}{\partial s} - k_3 q(s, x, y) \right) B_1(s) \\ &+ \left(k_3 w(s, x, y) + \frac{\partial q(s, x, y)}{\partial s} \right) B_2(s), \quad (14) \end{aligned}$$

$$\frac{\partial \Psi(s, x, y)}{\partial x} = \frac{\partial u(s, x, y)}{\partial x} T(s) + \frac{\partial v(s, x, y)}{\partial x} N(s) + \frac{\partial w(s, x, y)}{\partial x} B_1(s) + \frac{\partial q(s, x, y)}{\partial x} B_2(s), \quad (15)$$

$$\frac{\partial \Psi(s, x, y)}{\partial y} = \frac{\partial u(s, x, y)}{\partial y} T(s) + \frac{\partial v(s, x, y)}{\partial y} N(s) + \frac{\partial w(s, x, y)}{\partial y} B_1(s) + \frac{\partial q(s, x, y)}{\partial y} B_2(s) \quad (16)$$

olarak hesaplanır. (1), (6), (14), (15) ve (16) dan, parametrik olarak (8) ile verilen $\Psi(s, x, y)$ hiperyüzey ailesinin normal vektörü

$$n(s, x, y) = \beta_1(s, x, y)T(s) + \beta_2(s, x, y)N(s) + \beta_3(s, x, y)B_1(s) + \beta_4(s, x, y)B_2(s)$$

olarak elde edilir. Burada

$$\begin{aligned} \beta_1(s, x, y) = & \frac{\partial v(s, x, y)}{\partial x} \frac{\partial w(s, x, y)}{\partial y} \left(k_3 w(s, x, y) + \frac{\partial q(s, x, y)}{\partial s} \right) \\ & + \frac{\partial w(s, x, y)}{\partial x} \frac{\partial q(s, x, y)}{\partial y} \left(k_1 u(s, x, y) + \frac{\partial v(s, x, y)}{\partial s} - k_2 w(s, x, y) \right) \\ & + \frac{\partial q(s, x, y)}{\partial x} \frac{\partial v(s, x, y)}{\partial y} \left(k_2 v(s, x, y) + \frac{\partial w(s, x, y)}{\partial s} - k_3 q(s, x, y) \right) \\ & - \frac{\partial v(s, x, y)}{\partial y} \frac{\partial w(s, x, y)}{\partial x} \left(k_3 w(s, x, y) + \frac{\partial q(s, x, y)}{\partial s} \right) \\ & - \frac{\partial q(s, x, y)}{\partial x} \frac{\partial w(s, x, y)}{\partial y} \left(k_1 u(s, x, y) + \frac{\partial v(s, x, y)}{\partial s} - k_2 w(s, x, y) \right) \\ & - \frac{\partial v(s, x, y)}{\partial x} \frac{\partial q(s, x, y)}{\partial y} \left(k_2 v(s, x, y) + \frac{\partial w(s, x, y)}{\partial s} - k_3 q(s, x, y) \right), \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \beta_2(s, x, y) = & \frac{\partial w(s, x, y)}{\partial x} \frac{\partial q(s, x, y)}{\partial y} \left(1 + \frac{\partial u(s, x, y)}{\partial s} + k_1 v(s, x, y) \right) \\ & + \frac{\partial u(s, x, y)}{\partial x} \frac{\partial w(s, x, y)}{\partial y} \left(k_3 w(s, x, y) + \frac{\partial q(s, x, y)}{\partial s} \right) \\ & + \frac{\partial u(s, x, y)}{\partial y} \frac{\partial q(s, x, y)}{\partial x} \left(k_2 v(s, x, y) + \frac{\partial w(s, x, y)}{\partial s} - k_3 q(s, x, y) \right) \\ & - \frac{\partial u(s, x, y)}{\partial y} \frac{\partial w(s, x, y)}{\partial x} \left(k_3 w(s, x, y) + \frac{\partial q(s, x, y)}{\partial s} \right) \\ & - \frac{\partial q(s, x, y)}{\partial x} \frac{\partial w(s, x, y)}{\partial y} \left(1 + \frac{\partial u(s, x, y)}{\partial s} + k_1 v(s, x, y) \right) \\ & - \frac{\partial u(s, x, y)}{\partial x} \frac{\partial q(s, x, y)}{\partial y} \left(k_2 v(s, x, y) + \frac{\partial w(s, x, y)}{\partial s} - k_3 q(s, x, y) \right), \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \beta_3(s, x, y) = & \frac{\partial u(s, x, y)}{\partial y} \frac{\partial v(s, x, y)}{\partial x} \left(k_3 w(s, x, y) + \frac{\partial q(s, x, y)}{\partial s} \right) \\ & + \frac{\partial q(s, x, y)}{\partial x} \frac{\partial v(s, x, y)}{\partial y} \left(1 + \frac{\partial u(s, x, y)}{\partial s} + k_1 v(s, x, y) \right) \\ & + \frac{\partial u(s, x, y)}{\partial x} \frac{\partial q(s, x, y)}{\partial y} \left(k_1 u(s, x, y) + \frac{\partial v(s, x, y)}{\partial s} - k_2 w(s, x, y) \right) \\ & - \frac{\partial q(s, x, y)}{\partial y} \frac{\partial v(s, x, y)}{\partial x} \left(1 + \frac{\partial u(s, x, y)}{\partial s} + k_1 v(s, x, y) \right) \\ & - \frac{\partial u(s, x, y)}{\partial x} \frac{\partial v(s, x, y)}{\partial y} \left(k_3 w(s, x, y) + \frac{\partial q(s, x, y)}{\partial s} \right) \\ & - \frac{\partial q(s, x, y)}{\partial x} \frac{\partial u(s, x, y)}{\partial y} \left(k_1 u(s, x, y) + \frac{\partial v(s, x, y)}{\partial s} - k_2 w(s, x, y) \right) \end{aligned}$$

ve

$$\begin{aligned} \beta_4(s, x, y) = & \frac{\partial v(s, x, y)}{\partial x} \frac{\partial w(s, x, y)}{\partial y} \left(1 + \frac{\partial u(s, x, y)}{\partial s} + k_1 v(s, x, y) \right) \\ & + \frac{\partial u(s, x, y)}{\partial x} \frac{\partial v(s, x, y)}{\partial y} \left(k_2 v(s, x, y) + \frac{\partial w(s, x, y)}{\partial s} - k_3 q(s, x, y) \right) \\ & + \frac{\partial u(s, x, y)}{\partial y} \frac{\partial w(s, x, y)}{\partial x} \left(k_1 u(s, x, y) + \frac{\partial v(s, x, y)}{\partial s} - k_2 w(s, x, y) \right) \\ & - \frac{\partial u(s, x, y)}{\partial y} \frac{\partial v(s, x, y)}{\partial x} \left(k_2 v(s, x, y) + \frac{\partial w(s, x, y)}{\partial s} - k_3 q(s, x, y) \right) \\ & - \frac{\partial w(s, x, y)}{\partial x} \frac{\partial v(s, x, y)}{\partial y} \left(1 + \frac{\partial u(s, x, y)}{\partial s} + k_1 v(s, x, y) \right) \\ & - \frac{\partial w(s, x, y)}{\partial y} \frac{\partial u(s, x, y)}{\partial x} \left(k_1 u(s, x, y) + \frac{\partial v(s, x, y)}{\partial s} - k_2 w(s, x, y) \right) \end{aligned}$$

dir. Burada (12) ve (13) eşitliklerini sağlayan x_0 ve y_0 değerleri alındığında

$$\begin{aligned} \beta_1(s, x_0, y_0) = & \frac{\partial w(s, x_0, y_0)}{\partial x} \frac{\partial q(s, x_0, y_0)}{\partial y} \frac{\partial v(s, x_0, y_0)}{\partial s} \\ & + \frac{\partial v(s, x_0, y_0)}{\partial x} \frac{\partial w(s, x_0, y_0)}{\partial y} \frac{\partial q(s, x_0, y_0)}{\partial s} \\ & + \frac{\partial q(s, x_0, y_0)}{\partial x} \frac{\partial v(s, x_0, y_0)}{\partial y} \frac{\partial w(s, x_0, y_0)}{\partial s} \\ & - \frac{\partial v(s, x_0, y_0)}{\partial y} \frac{\partial w(s, x_0, y_0)}{\partial x} \frac{\partial q(s, x_0, y_0)}{\partial s} \\ & - \frac{\partial q(s, x_0, y_0)}{\partial x} \frac{\partial w(s, x_0, y_0)}{\partial y} \frac{\partial v(s, x_0, y_0)}{\partial s} \\ & - \frac{\partial v(s, x_0, y_0)}{\partial x} \frac{\partial q(s, x_0, y_0)}{\partial y} \frac{\partial w(s, x_0, y_0)}{\partial s} = 0, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \beta_2(s, x_0, y_0) &= \frac{\partial u(s, x_0, y_0)}{\partial x} \frac{\partial w(s, x_0, y_0)}{\partial y} \frac{\partial q(s, x_0, y_0)}{\partial s} \\ &+ \frac{\partial w(s, x_0, y_0)}{\partial x} \frac{\partial q(s, x_0, y_0)}{\partial y} \left(1 + \frac{\partial u(s, x_0, y_0)}{\partial s}\right) \\ &+ \frac{\partial u(s, x_0, y_0)}{\partial y} \frac{\partial q(s, x_0, y_0)}{\partial x} \frac{\partial w(s, x_0, y_0)}{\partial s} \\ &- \frac{\partial u(s, x_0, y_0)}{\partial y} \frac{\partial w(s, x_0, y_0)}{\partial x} \frac{\partial q(s, x_0, y_0)}{\partial s} \\ &- \frac{\partial q(s, x_0, y_0)}{\partial x} \frac{\partial w(s, x_0, y_0)}{\partial y} \left(1 + \frac{\partial u(s, x_0, y_0)}{\partial s}\right) \\ &- \frac{\partial u(s, x_0, y_0)}{\partial x} \frac{\partial q(s, x_0, y_0)}{\partial y} \frac{\partial w(s, x_0, y_0)}{\partial s} \\ &= \frac{\partial w(s, x_0, y_0)}{\partial x} \frac{\partial q(s, x_0, y_0)}{\partial y} - \frac{\partial q(s, x_0, y_0)}{\partial x} \frac{\partial w(s, x_0, y_0)}{\partial y}, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \beta_3(s, x_0, y_0) &= \frac{\partial u(s, x_0, y_0)}{\partial y} \frac{\partial v(s, x_0, y_0)}{\partial x} \frac{\partial q(s, x_0, y_0)}{\partial s} \\ &+ \frac{\partial q(s, x_0, y_0)}{\partial x} \frac{\partial v(s, x_0, y_0)}{\partial y} \left(1 + \frac{\partial u(s, x_0, y_0)}{\partial s}\right) \\ &+ \frac{\partial u(s, x_0, y_0)}{\partial x} \frac{\partial q(s, x_0, y_0)}{\partial y} \frac{\partial v(s, x_0, y_0)}{\partial s} \\ &- \frac{\partial q(s, x_0, y_0)}{\partial y} \frac{\partial v(s, x_0, y_0)}{\partial x} \left(1 + \frac{\partial u(s, x_0, y_0)}{\partial s}\right) \\ &- \frac{\partial u(s, x_0, y_0)}{\partial x} \frac{\partial v(s, x_0, y_0)}{\partial y} \frac{\partial q(s, x_0, y_0)}{\partial s} \\ &- \frac{\partial q(s, x_0, y_0)}{\partial x} \frac{\partial u(s, x_0, y_0)}{\partial y} \frac{\partial v(s, x_0, y_0)}{\partial s} \\ &= \frac{\partial q(s, x_0, y_0)}{\partial x} \frac{\partial v(s, x_0, y_0)}{\partial y} - \frac{\partial q(s, x_0, y_0)}{\partial y} \frac{\partial v(s, x_0, y_0)}{\partial x} \end{aligned}$$

ve

$$\begin{aligned} \beta_4(s, x_0, y_0) &= \frac{\partial u(s, x_0, y_0)}{\partial x} \frac{\partial v(s, x_0, y_0)}{\partial y} \frac{\partial w(s, x_0, y_0)}{\partial s} \\ &+ \frac{\partial v(s, x_0, y_0)}{\partial x} \frac{\partial w(s, x_0, y_0)}{\partial y} \left(1 + \frac{\partial u(s, x_0, y_0)}{\partial s}\right) \\ &+ \frac{\partial u(s, x_0, y_0)}{\partial y} \frac{\partial w(s, x_0, y_0)}{\partial x} \frac{\partial v(s, x_0, y_0)}{\partial s} \\ &- \frac{\partial u(s, x_0, y_0)}{\partial y} \frac{\partial v(s, x_0, y_0)}{\partial x} \frac{\partial w(s, x_0, y_0)}{\partial s} \\ &- \frac{\partial w(s, x_0, y_0)}{\partial x} \frac{\partial v(s, x_0, y_0)}{\partial y} \left(1 + \frac{\partial u(s, x_0, y_0)}{\partial s}\right) \\ &- \frac{\partial w(s, x_0, y_0)}{\partial y} \frac{\partial u(s, x_0, y_0)}{\partial x} \frac{\partial v(s, x_0, y_0)}{\partial s} \\ &= \frac{\partial v(s, x_0, y_0)}{\partial x} \frac{\partial w(s, x_0, y_0)}{\partial y} - \frac{\partial w(s, x_0, y_0)}{\partial x} \frac{\partial v(s, x_0, y_0)}{\partial y} \end{aligned}$$

elde edilir.

Bu durumda hiperyüzey ailesinin x_0, y_0 noktasındaki normal vektörü

$$\begin{aligned} n(s, x_0, y_0) &= \begin{pmatrix} \frac{\partial w(s, x_0, y_0)}{\partial x} \frac{\partial q(s, x_0, y_0)}{\partial y} \\ -\frac{\partial q(s, x_0, y_0)}{\partial x} \frac{\partial w(s, x_0, y_0)}{\partial y} \end{pmatrix} N(s) \\ &+ \begin{pmatrix} \frac{\partial q(s, x_0, y_0)}{\partial x} \frac{\partial v(s, x_0, y_0)}{\partial y} \\ -\frac{\partial q(s, x_0, y_0)}{\partial y} \frac{\partial v(s, x_0, y_0)}{\partial x} \end{pmatrix} B_1(s) \quad (17) \\ &+ \begin{pmatrix} \frac{\partial v(s, x_0, y_0)}{\partial x} \frac{\partial w(s, x_0, y_0)}{\partial y} \\ -\frac{\partial w(s, x_0, y_0)}{\partial x} \frac{\partial v(s, x_0, y_0)}{\partial y} \end{pmatrix} B_2(s) \end{aligned}$$

olduğu görülür. α eğrisinin spacelike eğri olması durumunda, yukarıdaki işlemlere benzer hesaplamalar yapıldıktan sonra (12) ve (13) eşitliklerini sağlayan x_0 ve y_0 değerleri yerine yazılırsa (8) ile verilen hiperyüzey ailesinin normal vektörünün de (17) ye benzer olduğu görülür.

Ayrıca, (7) ve (17) den $\alpha = \alpha(s)$ eğrisinin $\Psi(s, x, y)$ hiperyüzeyi üzerinde bir asimptotik eğri olması için gerek ve yeter şart

$$\begin{aligned} \beta_1(s, x_0, y_0) &= \beta_2(s, x_0, y_0) = 0, \\ (\beta_3(s, x_0, y_0))^2 &+ (\beta_4(s, x_0, y_0))^2 \neq 0, \end{aligned}$$

$$C_1 \leq s \leq C_2, \quad P_1 \leq x_0 \leq P_2, \quad M_1 \leq y_0 \leq M_2$$

olmasıdır. Bu da bize teoremin (10) ve (11) şartlarını verir.

3.1. Sapma Fonksiyonları

Bu alt bölümde, hesaplamalarda kolaylık sağlaması ve dizayn problemlerinin daha iyi analiz edilebilmesi için hiperyüzey denklemindeki $u(s, x, y), v(s, x, y), w(s, x, y)$ ve $w(s, x, y)$ sapma fonksiyonları üç özel durumda incelenecektir.

3.1.1. I.Çeşit Sapma Fonksiyonları

Bu alt kısımda, $h(s), k(s), r(s), b(s), U(x, y), V(x, y), W(x, y), Q(x, y) \in C^1$ ve $h(s) \neq k(s) \neq r(s) \neq b(s) \neq 0, \forall s \in [C_1, C_2]$ olmak üzere sapma fonksiyonları

$$u(s, x, y) = h(s)U(x, y),$$

$$v(s, x, y) = k(s)V(x, y),$$

$$w(s, x, y) = r(s)W(x, y),$$

$$q(s, x, y) = b(s)Q(x, y),$$

$$C_1 \leq s \leq C_2, P_1 \leq x \leq P_2, M_1 \leq y \leq M_2$$

olsun. Teorem (9) dan E_1^4 Lorentz-Minkowski uzayında null olmayan Frenet vektörlerine sahip spacelike veya timelike $\alpha(s)$ eğrinin, $\Psi(s, x, y)$ hiperyüzeyi üzerinde izoasimptotik olması için gerek ve yeter şart

$$U(x_0, y_0) = V(x_0, y_0) = W(x_0, y_0) = Q(x_0, y_0) = 0,$$

$$\frac{\partial W(x_0, y_0)}{\partial x} \frac{\partial Q(x_0, y_0)}{\partial y} = \frac{\partial Q(x_0, y_0)}{\partial x} \frac{\partial W(x_0, y_0)}{\partial y},$$

$$\left(\begin{array}{l} \left(b(s) \frac{\partial Q(x_0, y_0)}{\partial x} k(s) \frac{\partial V(x_0, y_0)}{\partial y} \right)^2 \\ - b(s) \frac{\partial Q(x_0, y_0)}{\partial y} k(s) \frac{\partial V(x_0, y_0)}{\partial x} \\ \left(k(s) \frac{\partial V(x_0, y_0)}{\partial x} r(s) \frac{\partial W(x_0, y_0)}{\partial y} \right)^2 \\ - r(s) \frac{\partial W(x_0, y_0)}{\partial x} k(s) \frac{\partial V(x_0, y_0)}{\partial y} \end{array} \right) \neq 0,$$

$$x_0 \in [P_1, P_2], y_0 \in [M_1, M_2], C_1 \leq s \leq C_2$$

olmalıdır.

3.1.2. II. Çeşit Sapma Fonksiyonları

Bu alt kısımda, $h(s, x), k(s, x), r(s, x), b(s, x), U(y), V(y), W(y), Q(y) \in C^1$ ve $\forall s \in [C_1, C_2]$ olmak üzere sapma fonksiyonları

$$u(s, x, y) = h(s, x)U(y),$$

$$v(s, x, y) = k(s, x)V(y),$$

$$w(s, x, y) = r(s, x)W(y),$$

$$q(s, x, y) = b(s, x)Q(y),$$

$$C_1 \leq s \leq C_2, P_1 \leq x \leq P_2, M_1 \leq y \leq M_2$$

olsun. Teorem (9) dan E_1^4 Lorentz-Minkowski uzayında null olmayan Frenet vektörlerine sahip spacelike veya timelike $\alpha = \alpha(s)$ eğrinin, $\Psi(s, x, y)$ hiperyüzeyi üzerinde izoasimptotik olması için gerek ve yeter şart

$$h(s, x_0)U(y_0) = k(s, x_0)V(y_0) = 0,$$

$$r(s, x_0)W(y_0) = b(s, x_0)Q(y_0) = 0,$$

$$\frac{\partial r(s, x_0)}{\partial x} W(y_0) b(s, x_0) \frac{\partial Q(y_0)}{\partial y} = \frac{\partial b(s, x_0)}{\partial x} Q(y_0) r(s, x_0) \frac{\partial W(y_0)}{\partial y},$$

$$\left(\begin{array}{l} \left(\frac{\partial b(s, x_0)}{\partial x} Q(y_0) k(s, x_0) \frac{\partial V(y_0)}{\partial y} \right)^2 \\ - b(s, x_0) \frac{\partial Q(y_0)}{\partial y} \frac{\partial k(s, x_0)}{\partial x} V(y_0) \\ \left(\frac{\partial k(s, x_0)}{\partial x} V(y_0) r(s, x_0) \frac{\partial W(y_0)}{\partial y} \right)^2 \\ - \frac{\partial r(s, x_0)}{\partial x} W(y_0) k(s, x_0) \frac{\partial V(y_0)}{\partial y} \end{array} \right) \neq 0,$$

$$x_0 \in [P_1, P_2], y_0 \in [M_1, M_2], C_1 \leq s \leq C_2$$

olmalıdır.

3.1.3. III. Çeşit Sapma Fonksiyonları

Bu alt kısımda, $h(s, y), k(s, y), r(s, y), b(s, y), U(x), V(x), W(x), Q(x) \in C^1$ ve $\forall s \in [C_1, C_2]$ olmak üzere sapma fonksiyonları

$$u(s, x, y) = h(s, y)U(x),$$

$$v(s, x, y) = k(s, y)V(x),$$

$$w(s, x, y) = r(s, y)W(x),$$

$$q(s, x, y) = b(s, y)Q(x),$$

$$C_1 \leq s \leq C_2, P_1 \leq x \leq P_2, M_1 \leq y \leq M_2$$

olsun. Teorem (9) dan E_1^4 Lorentz-Minkowski uzayında null olmayan Frenet vektörlerine sahip spacelike veya timelike $\alpha(s)$ eğrinin, $\Psi(s, x, y)$ hiperyüzeyi üzerinde izoasimptotik olması için gerek ve yeter şart

$$h(s, y_0)U(x_0) = k(s, y_0)V(x_0) = 0,$$

$$r(s, y_0)W(x_0) = b(s, y_0)Q(x_0) = 0,$$

$$r(s, y_0) \frac{\partial W(x_0)}{\partial x} \frac{\partial b(s, y_0)}{\partial y} Q(x_0) =$$

$$b(s, y_0) \frac{\partial Q(x_0)}{\partial x} \frac{\partial r(s, y_0)}{\partial y} W(x_0),$$

$$\left(\begin{array}{l} \left(b(s, y_0) \frac{\partial Q(x_0)}{\partial x} \frac{\partial k(s, y_0)}{\partial y} V(x_0) \right)^2 \\ - \frac{\partial b(s, y_0)}{\partial y} Q(x_0) k(s, y_0) \frac{\partial V(x_0)}{\partial x} \\ \left(k(s, y_0) \frac{\partial V(x_0)}{\partial x} \frac{\partial r(s, y_0)}{\partial y} W(x_0) \right)^2 \\ - r(s, y_0) \frac{\partial W(x_0)}{\partial x} \frac{\partial k(s, y_0)}{\partial y} V(x_0) \end{array} \right) \neq 0,$$

$$x_0 \in [P_1, P_2], y_0 \in [M_1, M_2], C_1 \leq s \leq C_2$$

olmalıdır.

3.2. Örnekler

Bu alt bölümde, önceki bölümde elde edilen teorik sonuçları destekleyen non-null Frenet vektörlerine sahip spacelike ya da timelike izoasimptotik eğrili hiperyüzey aileleri için örnekler verilecektir. Ayrıca bu örnekleri 3-boyutlu uzaya iz düşürülerek grafikleri çizilecektir.

Örnek 3.2.1. Binormali timelike olan spacelike

$$\alpha(s) = \left(\frac{\sqrt{11}s}{3}, \frac{\sqrt{2}s}{3}, \sqrt{2} \cos s, \sqrt{2} \sin s \right), \quad (18)$$

$0 < s \leq 2\pi$, eğrisi verilsin. (3) den, bu eğrinin Frenet vektörleri

$$T(s) = \left(\frac{\sqrt{11}}{3}, \frac{\sqrt{2}}{3}, -\sqrt{2} \sin s, \sqrt{2} \cos s \right),$$

$$N(s) = (0, 0, -\cos s, -\sin s),$$

$$B_1(s) = \left(\frac{\sqrt{22}}{3}, \frac{2}{3}, -\sin s, \cos s \right),$$

$$B_2(s) = \left(\frac{-\sqrt{2}}{3}, \frac{-\sqrt{11}}{3}, 0, 0 \right),$$

olarak hesaplanır.

$x_0 = 2, y_0 = 0, s \neq 0$ için, sapma fonksiyonları

$$u(s, x, y) = s^2(x-2) + y^2,$$

$$v(s, x, y) = (s^2 + x^2)y,$$

$$w(s, x, y) = (x^2 - 4)(y^2 + s),$$

$$q(s, x, y) = sxy^2$$

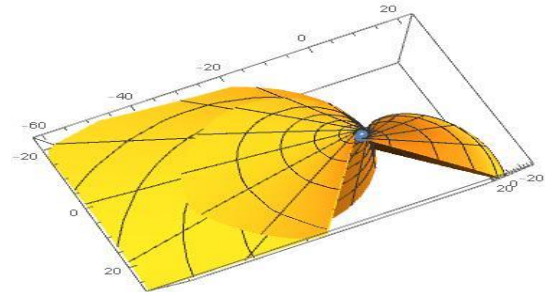
olarak seçilirse teorem (9) da verilen şartlar sağlanır ve böylece

E_1^4 de $\alpha = \alpha(s)$ eğrisini izoasimptotik eğri kabul eden hiperyüzey ailesi

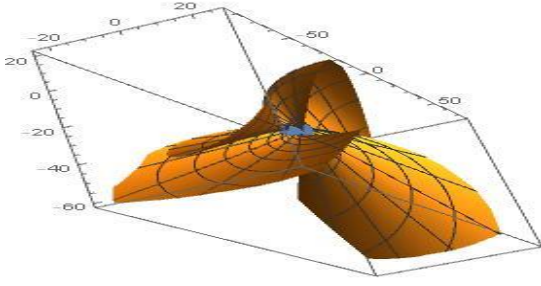
$$\Psi(s, x, y) = \left(\begin{array}{l} \frac{\sqrt{11}s}{3} + \frac{\sqrt{11}}{3}(s^2(x-2) + y^2) \\ + \frac{\sqrt{22}}{3}(x^2 - 4)(y^2 + s) - \frac{\sqrt{2}}{3}sxy^2, \\ \frac{\sqrt{2}s}{3} + \frac{\sqrt{2}}{3}(s^2(x-2) + y^2) \\ + \frac{2}{3}(x^2 - 4)(y^2 + s) - \frac{\sqrt{11}}{3}sxy^2, \\ \cos s(\sqrt{2} - y(s^2 + x^2)) \\ - \sin s \left(\begin{array}{l} \sqrt{2}(s^2(x-2) + y^2) \\ + (x^2 - 4)(y^2 + s) \end{array} \right), \\ \sin s(\sqrt{2} - y(s^2 + x^2)) \\ + \cos s \left(\begin{array}{l} \sqrt{2}(s^2(x-2) + y^2) \\ + (x^2 - 4)(y^2 + s) \end{array} \right) \end{array} \right) \quad (19)$$

olarak elde edilir.

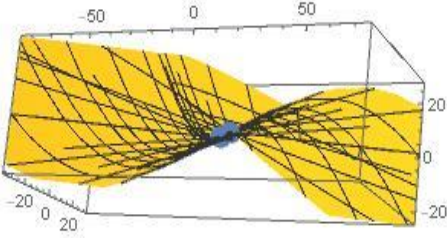
Şimdi (18) eğrisinin ve (19) hiperyüzeyinin 3-boyutlu uzaylara iz düşürülerek oluşan eğriler mavi, yüzeyler ise sarı renkle aşağıda gösterilecektir.



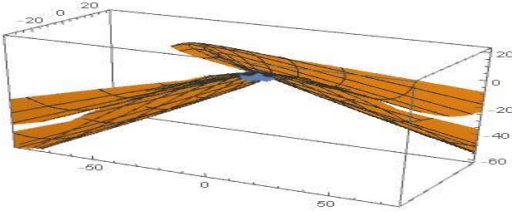
Şekil 1. (18) eğrisinin ve (19) hiperyüzeyinin x-eksenine iz düşümü



Şekil 2. (18) eğrisinin ve (19) hiperyüzeyinin y-eksenine iz düşümü



Şekil 3. (18) eğrisinin ve (19) hiperyüzeyinin z-eksenine iz düşümü



Şekil 4. (18) eğrisinin ve (19) hiperyüzeyinin t-eksenine iz düşümü

Örnek 3.2.2. Timelike

$$\alpha(s) = (\sqrt{2} \sinh s, \sqrt{2} \cosh s, \sin s, \cos s), \quad (20)$$

$0 < s \leq 2\pi$, eğrisi verilsin. (5) den, bu eğrinin Frenet vektörleri

$$T(s) = (\sqrt{2} \cosh s, \sqrt{2} \sinh s, \cos s, -\sin s),$$

$$N(s) = \left(\frac{\sqrt{6}}{3} \sinh s, \frac{\sqrt{6}}{3} \cosh s, -\frac{\sqrt{3}}{3} \sin s, -\frac{\sqrt{3}}{3} \cos s \right),$$

$$B_1(s) = (-\cosh s, -\sinh s, -\sqrt{2} \cos s, \sqrt{2} \sin s),$$

$$B_2(s) = \left(-\frac{\sqrt{3}}{3} \sinh s, -\frac{\sqrt{3}}{3} \cosh s, -\frac{\sqrt{6}}{3} \sin s, -\frac{\sqrt{6}}{3} \cos s \right),$$

olarak hesaplanır:

$x_0 = 2, y_0 = 0, s \neq 0$ için, sapma fonksiyonları

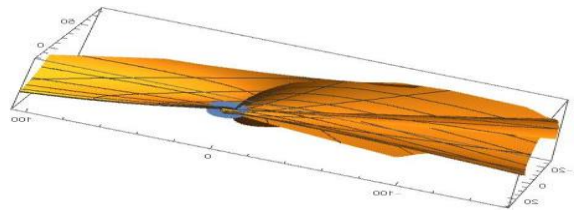
$$\begin{aligned} u(s, x, y) &= s^2(x-2) + y^2, \\ v(s, x, y) &= (s^2 + x^2)y, \\ w(s, x, y) &= (x^2 - 4)(y^2 + s), \\ q(s, x, y) &= sxy^2 \end{aligned}$$

olarak seçilirse teorem (9) da verilen şartlar sağlanır ve böylece E_1^4 de $\alpha = \alpha(s)$ eğrisini izoasimptotik eğri kabul eden hiperyüzey ailesi

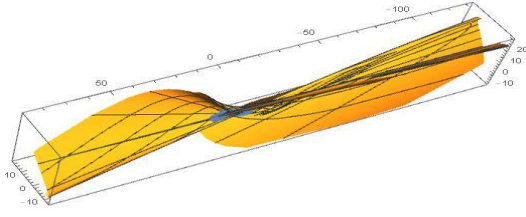
$$\Psi(s, x, y) = \left(\begin{aligned} &\sinh s \left(\sqrt{2} + \frac{\sqrt{6}}{3} y(s^2 + x^2) - \frac{\sqrt{3}}{3} sxy^2 \right) \\ &+ \cosh s \left(\begin{aligned} &\sqrt{2}(s^2(x-2) + y^2) \\ &-(x^2 - 4)(y^2 + s) \end{aligned} \right), \\ &\cosh s \left(\sqrt{2} + \frac{\sqrt{6}}{3} y(s^2 + x^2) - \frac{\sqrt{3}}{3} sxy^2 \right) \\ &+ \sinh s \left(\begin{aligned} &\sqrt{2}(s^2(x-2) + y^2) \\ &-(x^2 - 4)(y^2 + s) \end{aligned} \right), \\ &\sin s \left(1 - \frac{\sqrt{3}}{3} y(s^2 + x^2) - \frac{\sqrt{6}}{3} sxy^2 \right) \\ &+ \cos s \left(\begin{aligned} &(s^2(x-2) + y^2) \\ &-\sqrt{2}(x^2 - 4)(y^2 + s) \end{aligned} \right), \\ &\cos s \left(1 - \frac{\sqrt{3}}{3} y(s^2 + x^2) - \frac{\sqrt{6}}{3} sxy^2 \right) \\ &+ \sin s \left(\begin{aligned} &\sqrt{2}(x^2 - 4)(y^2 + s) \\ &-(s^2(x-2) + y^2) \end{aligned} \right), \end{aligned} \right), \quad (21)$$

olarak elde edilir.

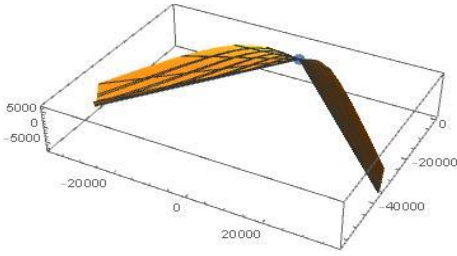
Şimdi (20) eğrisinin ve (21) hiperyüzeyinin 3-boyutlu uzaylara iz düşürülerek oluşan eğriler mavi, yüzeyler ise sarı renkle aşağıda gösterilecektir.



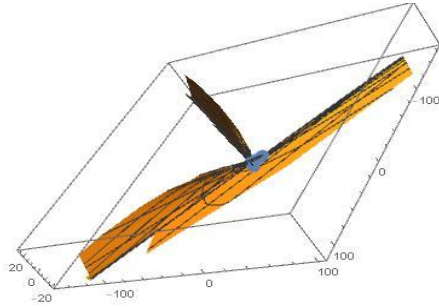
Şekil 5. (20) eğrisinin ve (21) hiperyüzeyinin x-eksenine iz düşümü



Şekil 6. (20) eğrisinin ve (21) hiperyüzeyinin y-eksenine iz düşümü



Şekil 7. (20) eğrisinin ve (21) hiperyüzeyinin z-eksenine iz düşümü



Şekil 8. (20) eğrisinin ve (21) hiperyüzeyinin t-eksenine iz düşümü

4. Sonuç

Bu çalışmada, E_1^4 Lorentz-Minkowski uzayında null olmayan Frenet vektörlere sahip spacelike ve timelike eğrilerden geçen hiperyüzeylerin parametrik denklemi, bu eğrilerinin Frenet çatıları yardımıyla ifade edilerek spacelike ve timelike eğrilerin hiperyüzey üzerinde ortak izoasimptotik olması için gerekli ve yeterli koşullar verilerek hiperyüzey aileleri oluşturulmuştur. Sapma fonksiyonları yardımıyla da elde edilen bu koşullar sadeleştirilmiştir. Bu çalışma ve kaynaklarda verdiğimiz bu konu ile ilgili yapılan bazı çalışmalar göz önüne alınarak E_1^4 Lorentz-Minkowski uzayında pseudo null eğrilerden geçen hiperyüzeyler elde edilerek uygulamada kullanılacak bazı sonuçlar verilebilir. Ayrıca bu metodlar diğer bazı farklı uzaylara da genelleştirilebilir. Bu nedenle, çalışmamız bu konu üzerine araştırma yapanlara referans olacaktır.

Kaynakça

- Abdel-Baky, R. A., (2016). A surface family with a common asymptotic curve in the Euclidean 3-space. *Asian Journal of Mathematics and Applications*, 201(6) 12.
- Ali, A. T., (2010). Time-like Smarandache curves derived from a Space-like Helix. *Journal of Dynamical Systems and Geometric Theories*, 8(1), 93-100.
- Altın, M., Kazan, A. & Karadağ, H.B., (2021). Hypersurface families with Smarandache curves in Galilean 4-space. *Communications Faculty Of Science University of Ankara Series A1 Mathematics and Statistics*, 70(2), 744-761.
- Altın, M. & Küçükarslan Yüzbaşı, Z., (2020). Surfaces using Smarandache asymptotic curves in Galilean Space. *International Journal of Mathematical Combinatorics*, (3), 1-15.
- Altın, M., & Unal, I., (2020). Surface family with common line of curvature in 3-dimensional Galilean space. *The journal Facta Universitatis: Series Mathematics and Informatics*, (35), 535(5), 1315-1325.
- Atalay, G. Ş. & Kasap, E., (2016). Surfaces family with common Smarandache geodesic curve according to Bishop frame in Euclidean space. *Mathematical Sciences and Applications E-Notes*, 4(1), 164-174.
- Ayvacı, K. H. & Atalay, G. Ş., (2020). Ortak Bertrand-B isogeodezik eğriye sahip yüzey aileleri. *Journal of the Institute of Science and Technology*, 10(3), 1975-1983.
- Bayram, E., Güler, F. & Kasap, E., (2012). Parametric representation of a surface pencil with a common asymptotic curve. *Computer-Aided Design*, 44(7), 637-643.
- Bayram, E. & Kasap, E., (2014a). Hypersurface family with a common isogeodesic. *Scientific Studies and Research*, 24(2), 5-24.
- Bayram, E. & Kasap, E., (2014b). Hypersurface family with a common isoasymptotic curve. *Geometry*, 2014, 1-6.
- Bejancu, A. & Duggal, K. L., (1995). Lightlike submanifolds of semi-Riemannian manifolds. *Acta Applicandae Mathematica*, 38(2), 197-215.
- Contopoulos, G., (1990). Asymptotic curves and escapes in Hamiltonian systems. *Astronomy and Astrophysics*, 231, 41-55.
- Turan, Ç., Altın, M. & Karadağ, H. B., (2022). Hypersurface families with common non-null geodesic in Minkowski 4-space. *Advanced Studies: Euro-Tbilisi Mathematical Journal*, 15(1), 167-180.
- Ergün, E. & Bayram, E., (2019). 3-Boyutlu Minkowski Uzayında Timelike Binormalı Spacelike Eğrinin Tabii Liftini Asimptotik Kabul Eden Yüzey Ailesi. *Journal of the Institute of Science and Technology*, 9(2), 1082-1089.
- Ergün, E., Bilici, M. & Çaliskan, M., (2015). The Natural Lift Curve of the Spherical Indicatrix of a Spacelike Curve in Minkowski 4-Space. *Journal of Science and Arts*, 15(1), 39.
- Farin, G., (1988). *Curves and surfaces for computer aided geometric design: A practical guide*. San Diego, CA, Academic Press, Inc., 348.
- Garcia, R., Gutierrez, C. & Sotomayor, J., (1999). Structural stability of asymptotic lines on surfaces immersed in R^3 . *Bulletin des sciences mathematiques*, 123(8), 599-622.
- Garcia, R. A. & Tello, J. M. S., (1997). Structural stability of parabolic points and periodic asymptotic lines. *Brasil*, 39, 84-102.
- Hartman, P. & Wintner, A., (1951). On the asymptotic curves of a surface. *American Journal of Mathematics*, 73(1), 149-172.

- Kasap, E., Akyildiz, F. T. & Orbay, K., (2008). A generalization of surfaces family with common spatial geodesic. *Applied Mathematics and Computation*, 201(1-2), 781-789.
- Kasap, E. & Akyildiz, F. T., (2006). Surfaces with common geodesic in Minkowski 3-space. *Applied mathematics and computation*, 177(1), 260- 270.
- Kitagawa, Y., (1988). Periodicity of the asymptotic curves on flat tori in S^3 . *Journal of the Mathematical Society of Japan*, 40(3), 457-476.
- Kocayigit, H. & Çiçek, Z., (2015). Some characterizations of constant breadth spacelike curves in Minkowski 4-space E^4 . *New Trends in Mathematical Sciences*, 3(2), 1-12.
- Latifi, S., (2015). Numerical solution of geodesic differential equations on a surface in R^3 . In *8th Seminar on Geometry and Topology*, 20, 450.
- O'Neill, B. (2014). *The geometry of Kerr black holes*. Courier Corporation, 400.
- Şaffak, G. and Kasap, E., (2009). Family of surface with a common null geodesic. *Fizik Bilimleri Dergisi*, 4(8), 428-433.
- Şaffak, G., Bayram, E. & Kasap, E., (2013). Surfaces with a common asymptotic curve in Minkowski 3-space. *arXiv preprint arXiv:1305.0382*.
- Şenyurt, S., Ayvaci, K. H. & Canlı, D., (2020). Ortak Mannheim-D isogeodezik eğriye sahip yüzeyler. *Ordu Üniversitesi Bilim ve Teknoloji Dergisi*, 10(2), 105-116.
- Thorpe, J. A., (1994). *Elementary topics in differential geometry*. Springer Science and Business Media, 256.
- Tozak, H., (2010). Minkowski 4-uzayında eğriler ve hareketlerin geometrisi. *Yüksek Lisans Tezi, Pamukkale Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü, Denizli*, 113.
- Turgut, M. & Yılmaz, S., (2008). On the Frenet frame and a characterization of space-like involute-evolute curve couple in Minkowski space-time. In *Int. Math. Forum*, 3(16), 793-801.
- Turgut, M. & Yılmaz, S., (2009). Some characterizations of type-3 slant helices in Minkowski space-time. *Involve, a Journal of Mathematics*, 2(1), 115-120.
- Yoon, D. W. & Yüzbaşı, Z. K., (2018). An approach for Hypersurface family with common geodesic curve in the 4D Galilean space G^4 . *The Pure and Applied Mathematics*, 25(4), 229-241.
- Yüzbaşı, Z. K. & Bektaş, M., (2016). On the construction of a surface family with common geodesic in Galilean space G^3 . *Open Physics*, 14(1), 360-363.
- Yüzbaşı, Z. K., (2016). On a family of surfaces with common asymptotic curve in the Galilean space G^3 . *J. Nonlinear Sci*, (9), 518-523.
- Walrave, J. (1995). *Curves and surfaces in Minkowski space*.
- Wang, G. J., Tang, K. & Tai, C. L., (2004). Parametric representation of a surface pencil with a common spatial geodesic. *Computer-Aided Design*, 36(5), 447-459.