



Yüzüncü Yıl Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü Dergisi

<https://dergipark.org.tr/tr/pub/yyufbed>



Araştırma Makalesi

Lie Grup Etkisi Altında Yörüngelerin Özellikleri

Bülent KARAKAŞ¹, Fatih TUĞRUL^{*2}

¹ Bartın Üniversitesi, Fen Fakültesi, Matematik Bölümü, 74100, Bartın, Türkiye

² Van Yüzüncü Yıl Üniversitesi, Fen Fakültesi, Matematik Bölümü, 65080, Van, Türkiye

Bülent KARAKAŞ, ORCID No: 0000-0002-3915-6526, Fatih TUĞRUL, ORCID No: 0000-0003-0967-5103

*Sorumlu yazar e-posta: fatihtugrul@yyu.edu.tr

Makale Bilgileri

Geliş: 31.03.2022

Kabul: 30.07.2022

Online Aralık 2022

DOI: 10.53433/yyufbed.1096374

Öz: Bu çalışmada, Lie grubunun manifold yapısının geometrik formu ile Lie dönüşüm grubu olarak diferensiyellenebilir bir manifoldun noktalarına etki ettirildiğinde, Lie grubunun geometrik yapısı ile Lie dönüşüm grubu etkisi altındaki noktaların yörüngelerinin geometrik yapıları arasındaki ilişkiler incelendi. Matlab uygulamaları yapıldı.

Anahtar Kelimeler

Lie grup,

Lie grup etkisi,

Yörünge

Properties of Orbits Under Lie Group Action

Article Info

Received: 31.03.2022

Accepted: 30.07.2022

Online December 2022

DOI: 10.53433/yyufbed.1096374

Abstract: In this study, the relationships between the geometrical structure of the Lie group and the geometric structures of the orbits of the points under the action of the Lie transformation group, when the geometric form of the manifold structure of the Lie group is acted upon on the points of a differentiable manifold as the Lie transform group are investigated. Matlab applications are made.

Keywords

Lie group,

Lie group action,

Orbit

1. Giriş

Adi diferensiyel denklemlerin invariant çözümlerinin araştırılması için geliştirilen ve Marius Sophus Lie tarafından 1897'de yayınladığı makalesiyle matematik literatürüne kazandırılan Lie grupları (Helgason, 1992; Lovett, 1897), hareket geometrisinde oldukça önemli bir yere sahiptir. Lie grupları, geometri, diferensiyellenebilir manifold yapısıyla ve grup olma özellikleriyle kinematik ve hareketli noktaların yörüngelerini incelemekte de kullanışlıdır (Gasparim ve ark., 2017). $O(n)$, $SU(n)$, $SL_n(\mathbb{R})$, S^1 Lie grupları ayrıca geometrik forma da sahiptirler.

Bir Lie grubunun bir manifold üstündeki etkisi, sıradan geometrik nesnelere oluşturabileceği gibi, Lie grubunun geometrik formunun izlerini taşıyan yörüngeler de oluşturabilmektedir. Bu özel durum, yörüngenin, yörünge oluşmadan önce formu hakkında bilgi sahibi olmamızı da sağlamaktadır.

Tanım 1. H diferensiyellenebilir manifold yapısına sahip bir grup olsun.

$$\theta: H \times H \rightarrow H \quad (h_1, h_2) \rightarrow h_1 \cdot h_2$$

grup işlemi diferensiyellenebiliyor ise H ye Lie grup denir (Kobayashi & Nomizu, 1963; Brickell & Clark, 1970).

Tanım 2. H Lie grup ve N diferensiyellenebilir manifold olsun. Verilen global, 1-1 ve örten,

$$\varphi: H \times N \rightarrow N$$

fonksiyonu diferensiyellenebilir ve

$$\varphi(h, \varphi(l, x)) \rightarrow \varphi(hl, x), \quad h, l \in H, \quad x \in N$$

koşulunu sağlarsa H Lie grubuna N üstünde Lie dönüşüm grubu olarak etki ediyor denir (Brickell & Clark, 1970; Herman, 1975).

Tanım 3. Bir N manifoldu ve bir H Lie grubu verildiğinde,

$$\begin{aligned} \varphi: H \times N &\rightarrow N \\ (h, x) &\rightarrow \varphi(h, x) = h \cdot x \end{aligned}$$

Lie dönüşüm etkisi olsun. Belirlenmiş bir $x \in N$ elemanı için,

$$\{h \cdot x | h \in H\} \subseteq N$$

alt kümesine x in H altındaki yörüngesi denir ve $H(x)$ ile gösterilir (Brickell & Clark, 1970; Castillo, 2010).

2. Materyal ve Yöntem

N manifoldunun geometrisindeki geometrik nesnelere yörüngelerdir. Manifoldların diferensiyellenebilir ve geometrik nitelikleri birlikte ele alındığında, her geometrik nesne diferensiyellenebilir formda olmak zorunda değildir. Bu, üzerinde diferensiyel inceleme bakımından bazı zorlukların var olduğu anlamına gelir. Bundan dolayı, çalışmada diferensiyellenebilir niteliklere sahip olan geometrik nesnelere ele alınacaktır.

Yapısal olarak geometrik forma sahip olan bazı Lie grupları vardır. Örneğin,

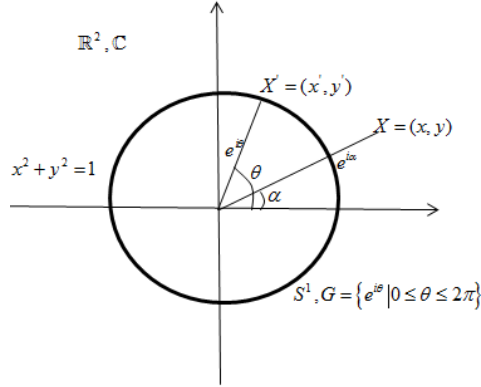
$$\{e^{i\theta} | 0 \leq \theta \leq 2\pi\}$$

Lie grubu, geometrik olarak \mathbb{R}^2 'de birim yarıçaplı S^1 çemberi olarak da düşünülebilir. Lie grubunun geometrik temsili olan çember, Lie dönüşüm grubunun etkisi altında yörüngelere aktarılır ve bu yörüngeler geometrik olarak çember formuna sahip olur.

Bu çalışmadaki amaç, Lie grubunun geometrik biçimi ile yörüngelerinin geometrik biçimi arasındaki ilişkiyi ve benzerlikleri incelemektir. İlk araştırma S^1 birim çember ile geometrik benzerliği olan Lie grubu için yapılacaktır.

Lemma 1. $H = \{e^{i\theta} | 0 \leq \theta \leq 2\pi\}$ Lie grubunun \mathbb{R}^2 üzerindeki etkisi altında oluşan $S^1(X)$ yörüngeleri $S^1_{\|X\|}(0,0)$ çemberleridir.

İspat.



Şekil 1. Birim çember.

\mathbb{R}^2 de seçilen bir X noktasının kutupsal koordinatları $(\alpha, \|X\|)$ ve üstel formu $\|X\|e^{i\alpha}$ olsun.

$$S^1 \times \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$$

etkisi altında X in yörüngesi $S^1(X)$

$$S^1(X) = \{\|X\|e^{i\theta}e^{i\alpha} | 0 \leq \theta + \alpha \leq 2\pi + \alpha\}$$

ile belli olan $(0,0)$ merkezli ve $\|X\|$ yarıçaplı çemberdir (Tuğrul, 2016).

$O(2) \times \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ Lie dönüşüm grubu etkisi ile de benzer yörüngeler elde edilebilir. Burada $O(2)$ ortogonal matrisler kümesidir. Bu nedenle $O(2)$ ile S^1 , Lie dönüşüm grup etkisi bakımından eş tutulabilir ve işlem yapılırken birbirlerinin yerine kullanılabilir. Açık işlemler aşağıdaki gibi yapılır.

$$\forall B \in O(2) \text{ için } \exists \theta \in [0, 2\pi], B = \begin{bmatrix} \cos\theta & \sin\theta \\ -\sin\theta & \cos\theta \end{bmatrix}$$

B için belli olan θ açısıyla $e^{i\theta}$ vardır ve $e^{i\theta}$, S^1 birim çemberin üzerindedir. Tersine $\forall (x, y) \in S^1$ için $\tan^{-1}(\frac{y}{x}) = \theta$ açısı tek türlü belirlidir ve böylelikle,

$$B = \begin{bmatrix} \cos\theta & \sin\theta \\ -\sin\theta & \cos\theta \end{bmatrix} \in O(2)$$

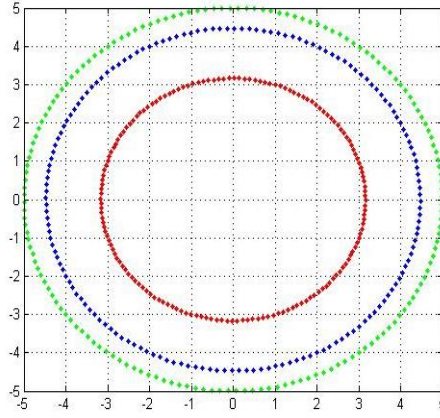
ortogonal matrisi tek türlü olarak bellidir.

İlk olarak S^1 birim çemberini irdeleyelim.

S^1 in \mathbb{R}^2 deki $M=(-3,4)$, $L=(4,2)$ ve $K=(1,3)$ noktaları üstündeki Lie dönüşüm grubu olarak etkisinin Matlabdaki m-file aşağıdaki gibi verilir. S^1 yerine $O(2)$ ortogonal matrisler kümesi alınarak işlem yapılabilir.

```

b=15
axis([-b b -b b])
for alpha=0:pi/70:2*pi
B=[cs(alpha) -sn(alpha); sn(alpha) cs(alpha)]
K=[1;3]
L=[4;2]
M=[-3;4]
N=B*K
PP=B*L
QQ=B*M
hold on
grid on
pause(0.1)
end
    
```



Şekil 2. S^1 altında $K=(1,3)$, $L=(4,2)$, $M=(-3,4)$ noktalarının yörüngeleri.

$O(2)$ ile S^1 , Lie dönüşüm grup etkisi bakımından eş tutulabileceği yukarıda ifade edilmişti. S^1 birim çember yerine $O(2)$ ortogonal matrisler kümesi alınmıştır. Şimdi verilecek olan örnekte ise S^1 in \mathbb{R}^2 üstündeki Lie dönüşüm grubu olarak doğrudan etkisi incelenecektir.

S^1 birim çember bir Lie gruptur ve S^1 in elemanları e^{it} , $t \in I \subset \mathbb{R}$ şeklindedir. S^1 in \mathbb{R}^2 üzerindeki etkisi,

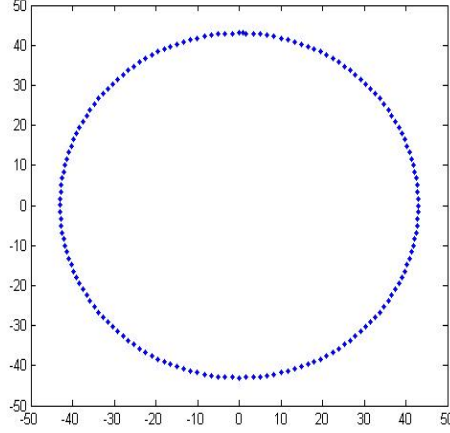
$$\begin{aligned} \varphi: S^1 \times \mathbb{R}^2 &\rightarrow \mathbb{R}^2 \\ (e^{it}, x) &\rightarrow e^{it} \cdot x, \quad x = (x_1, x_2) \end{aligned}$$

şeklinde tanımlanır. S^1 in $x \in \mathbb{R}^2$ noktasına bu etkisi, x in orijine olan uzaklığını yarıçap kabul eden çemberi verir. Eğer, S^1 Lie grubu \mathbb{R}^2 nin tümüne etki ettirilirse, bu etki \mathbb{R}^2 deki çemberler ailesini verir. Başka bir deyişle, \mathbb{R}^2 deki yörüngelerin bu ailesi merkezi $O = (0,0)$ olan $r \geq 0$ yarıçaplı çemberlerle donanmış \mathbb{R}^2 dir. \mathbb{R}^2 deki $Y = (7,6)$ noktasının yörüngesini çizdiren Matlab m-file şu şekilde verilir.

```

for alpha=0:pi/70:2*pi
Y=[7+6*i];
k=abs(Y)
B=(k*cs(alpha)+k*sn(alpha)*j)
plot(B,'b')
    
```

```
hold on
grid on
pause(0.1)
end
```



Şekil 3. S^1 altında (7,6) noktasının görüntüsü.

$O(3)$ 3×3 ortogonal matrisler Lie grubu ve \mathbb{R}^3 Lie grubu ele alınsın. $\forall B \in O(3)$ ortogonal matrisi Cayley formülü ile hesaplanabilen bir eksen etrafında ve $\theta = \frac{1}{2} \tan^{-1}(iz(B))$ ile belli olan bir dönme tanımlar. $O(3)$ te x, y ve z eksenleri etrafında dönme baz olma özelliğindedir. Bu dönmeler $B(x, \alpha), B(y, \beta)$ ve $B(z, \theta)$ ile gösterilsin. Bu durumda $Sp\{B(x, \alpha), B(y, \beta), B(z, \theta)\} = O(3)$ yazılabilir.

\mathbb{R}^3 uzayı, $Sp\{e_1, e_2, e_3\} = \mathbb{R}^3$ olarak ele alındığında $x \in \mathbb{R}^3$,

$$x = a_1 e_1 + a_2 e_2 + a_3 e_3$$

olarak yazılır. \mathbb{R}^3 te her doğru doğrultman vektörü ile bellidir. Üç temel eksen $x - \text{ekseni}$, $y - \text{ekseni}$ ve $z - \text{ekseni}$ dir. Genelliği kaybetmeden bu üç temel eksenenden biri ve bu eksen etrafındaki dönme ele alınacaktır. Bir eksen etrafındaki dönme ve bu eksene paralel öteleme hareketine silindirik yer değiştirme adı verilecektir.

Lemma 2. $B(z, \theta) \times z_{\text{eksen}} = D$ yer değiştirmesi altında her $X = (a, b, c) \in \mathbb{R}^3$ noktasının yörüngesi, taban eğrisi $a^2 + b^2$ yarıçaplı çember olan dik dairesel silindirdir.

İspat:

$$D(X) = \begin{bmatrix} \cos\theta & \sin\theta & 0 & 0 \\ -\sin\theta & \cos\theta & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & L(\theta) \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} a \\ b \\ c \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} a \cos\theta + b \sin\theta \\ -a \sin\theta + b \cos\theta \\ c + L(\theta) \\ 1 \end{bmatrix},$$

burada $L(\theta) = e \cdot \theta + f$, f noktasından geçen ve z -eksenine paralel e doğrultman vektörüne sahip bir doğrudur.

$D(X)$ yörüngesi,

$$D_{(X)}(\theta) = (a \cos\theta + b \sin\theta, -a \sin\theta + b \cos\theta, c + L(\theta))$$

dir. $z = 0$ için taban eğrisi $(a\cos\theta + b\sin\theta)^2 + (-a\sin\theta + b\cos\theta)^2 = a^2 + b^2$ yarıçaplı çemberdir.

$$\begin{aligned} & \left\langle \frac{d}{d\theta} D_{(X)}(\theta), z \right\rangle \\ &= \langle (-a\sin\theta + b\cos\theta, -a\cos\theta - b\sin\theta, L'(\theta)), (0,0,1) \rangle \\ &= L'(\theta) \end{aligned}$$

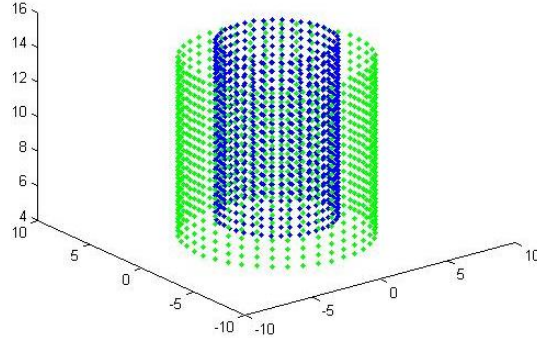
ve,

$$L'(\theta) = (e \cdot \theta + f)' = e = \text{sabit}$$

olduğundan $D(X)$ yörüngesi bir dik dairesel silindirdir (Tuğrul, 2016).

Bu Lemmadan hareketle \mathbb{R}^3 te sayısal değerler vererek bu eğriyi çizen Matlab m-file aşağıdaki gibidir.

```
for alpha =0:pi/20:2*pi
for k=0:1/2:10
K=[3;5;4;1]
L=[-2;-3;5;1]
D=[cs(alpha) -sn(alpha) 0 0;sn(alpha) cs(alpha) 0 0;0 0 1 k;0 0 0 1]
E=D*K
F=D*L
plot3(F(1),F(2),F(3),'.b')
plot3(E(1),E(2),E(3),'.g')
hold on
pause(0.001)
end
end
```



Şekil 4. K ve L noktalarının yörüngeleri.

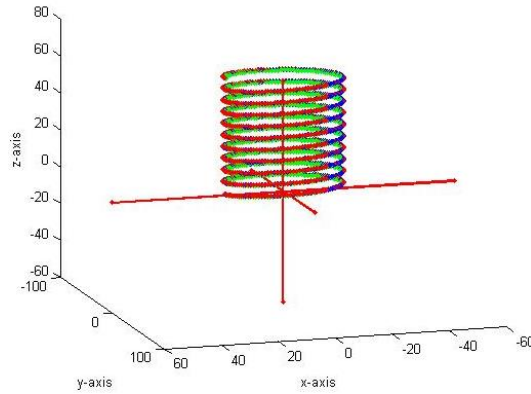
$GL(3, \mathbb{R})$ 3×3 tersinir matrisler kümesi bir Lie gruptur. $O(3)$ Lie grubu $GL(3, \mathbb{R})$ nin Lie alt grubudur. $O(3)$ ün \mathbb{R}^3 üzerindeki Lie grup etkisi

$$\varphi: O(3) \times \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$$

şekilde tanımlansın; burada $O(3) \times \mathbb{R}^3 = D$ ötelemeli dönmedir. Bir $x \in \mathbb{R}^3$ noktasına D dönüşümü etki ettirilsin. Eğer B ortogonal matrisinin eksenleri t öteleme vektörüne paralel ise bu etki altında x noktasının yörüngesi helis eğrisidir ve Matlabta bu eğriyi çizdiren m-file aşağıdaki şekilde verilir.

```

e=60
line([-e,e],[0,0],[0,0], 'Marker','.', 'LineStyle','-', 'color','r', 'linewidth',2)
line([0, 0],[-e,e],[0,0], 'Marker','.', 'LineStyle','-', 'color','r', 'linewidth',2)
line([0, 0],[0,0],[-e,e], 'Marker','.', 'LineStyle','-', 'color','r', 'linewidth',2)
xlabel('x-axis')
ylabel('y-axis')
zlabel('z-axis')
for alpha =0:pi/60:20*pi
f=0
g=0
h=1
K=[f;g;h;1]
k=20*cos(alpha)
l=20*sin(alpha)
m=t
L=[0.75;0.75;0.75;1]
M=[0.85;0.85;0.85;1]
mm= [0.35;0.35;0.35;1]
B=[(cos(alpha)+(1-cos(alpha))*(f^2)) ((1-cos(alpha))*(f*g)-(h)*sin(alpha)) ((1-cos(alpha))*(h*f) +( g*sin(alpha))) k;
(1-cos(alpha))*(f*g)+(h*sin(alpha)) cos(alpha)+(1-cos(alpha))*(g^2) (1-cos(alpha))*(h*g)-(f*sin(alpha)) l;
(1-cos(alpha))*(h*f)-(g*sin(alpha)) (1-cos(alpha))*(g*h)+(f)*sin(alpha) cos(alpha)+(1-cos(alpha))*(h^2) m ;0 0 0 1]
N=B*Y
G=B*Z
H=B*mm
hold on
plot3(N(1),N(2),N(3),'.b')
plot3(G(1),G(2),G(3),'.r')
plot3(H(1),H(2),H(3),'.g')
hold on
pause(0.001)
end
    
```



Şekil 5. Dik dairesel helis.

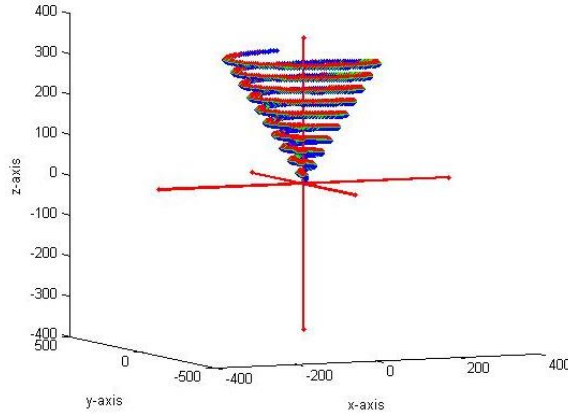
Eğer t öteleme vektörü ortogonal B matrisinin eksenleriyle kesişirse, bu etki altında noktaların yörüngeleri konisel helis eğrileridir. Bu eğriyi çizdiren Matlab m-file aşağıdaki gibi verilir.

```

e=360
line([-e,e],[0,0],[0,0], 'Marker','.', 'LineStyle','-', 'color','r', 'linewidth',2)
line([0, 0],[-e,e],[0,0], 'Marker','.', 'LineStyle','-', 'color','r', 'linewidth',2)
line([0, 0],[0,0],[-e,e], 'Marker','.', 'LineStyle','-', 'color','r', 'linewidth',2)
    
```

```

xlabel('x-axis')
ylabel('y-axis')
zlabel('z-axis')
for alpha = 0:pi/80:20*pi
f=0
g=0
h=3
K=[f;g;h;1]
k=3*alpha*(sin(alpha))
l=3*alpha*(cos(alpha))
m=5*alpha
N=[0.1;0.1;0.1;1]
NN=[0.5;0.5;0.5;1]
mm=[0.3;0.3;0.3;1]
B=[(cos(alpha)+(1-cos(alpha))*(f^2)) ((1-cos(alpha))*(f*g)-(h)*(sin(alpha))) ((1-cos(alpha))*(h*f)+(g*sin(alpha))) k; (1-
cs(alpha))*(f*g)+(h*sin(alpha)) cs(alpha)+(1-cs(alpha))*(g^2) (1-cs(alpha))*(h*g)-(f*sin(alpha)) l ;(1-cs(alpha))*(h*f)-
(g*sin(alpha)) (1-cs(alpha))*(g*h)+(f)*sin(alpha) cs(alpha)+(1-cs(alpha))*(h^2) m ; 0 0 0 1]
P=B*N
L=B*NN
F=B*mm
hold on
plot3(P(1),P(2),P(3),'b')
plot3(L(1),L(2),L(3),'r')
plot3(F(1),F(2),F(3),'g')
hold on
pause(0.001)
end
    
```



Şekil 6. Konisel helis eğrileri.

\mathbb{R}^2 deki bütün vektörler kümesi $T(2, \mathbb{R}^2)$ ile gösterilsin. Bu kümenin \mathbb{R}^2 üzerindeki

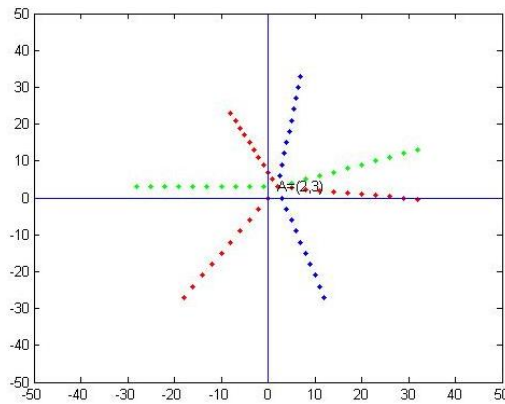
$$T(2, \mathbb{R}^2) \times \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$$

etkisi verilsin. Her t için $t: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ şeklinde tanımlanan dönüşüm, t vektörünü \mathbb{R}^2 deki x noktasına bağlayacak biçimde tanımlanır. Bu dönüşüm $x \rightarrow x + t$ şeklindedir. Vektörler kümesi bir denklik sınıfıdır. Denklik sınıfının her temsilcisi x noktasıyla birleşecek biçimde bir yönelim içinde olacaktır. x noktasına bağlanan bu vektörler, \mathbb{R}^2 üstünde $T(2, \mathbb{R}^2)$ nin Lie dönüşüm grubu etkisiyle $T(2, \mathbb{R}^2)$ deki vektör uzay yapısını \mathbb{R}^2 nin x noktasındaki $T_x \mathbb{R}^2$ ye taşıyacaktır. Bu da x noktasındaki $T_x \mathbb{R}^2$ tanjant uzayını verecektir. x noktasının yörüngesi ise,

$$T(x) = \{x + t | t \in T(2, \mathbb{R}^2)\} = T_x(\mathbb{R}^2)$$

dir. Eğer $T(2, \mathbb{R}^2), \mathbb{R}^2$ deki bir x yer vektörüne etki ettirilirse, yani; $t: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2, x \rightarrow x + t$ iki vektörün toplamı biçiminde tanımlansın. Bu dönüşüm $T_0 \mathbb{R}^2$ yi yani orijindeki tanjant uzayını verecektir. \mathbb{R}^2 de $(2,3)$ noktasının $T_{(2,3)} \mathbb{R}^2$ tanjant uzayının grafiğini çizdiren Matlab m-file aşağıdaki gibi verilir.

```
b=10  
axis([-b b -b b ])  
for t=0:1:10  
XX=[2 ;3]  
TT=[-1 ;2]  
MM=[1 ;-3]  
RR=[3;1]  
LL=[-2;-3]  
NN=[-3;0]  
SS=[1/2;3]  
FF=[3;-1/3]  
KK=XX+SS*t  
GG=XX+FF*t  
HH=XX+NN*t  
DD=XX+LL*t  
CC=XX+RR*t  
BB=XX+MM*t  
AA=XX+TT*t  
plot(KK(1),KK(2),'b')  
plot(GG(1),GG(2),'r')  
plot(HH(1),HH(2),'g')  
plot(DD(1),DD(2),'r')  
plot(CC(1),CC(2),'g')  
plot(BB(1),BB(2),'b')  
plot(AA(1),AA(2),'r')  
line([-60,60],[0,0])  
line([0,0],[-60,60])  
text(2,3,'A=(2,3)')  
hold on  
pause(0.1)  
end
```



Şekil 7. $(2,3)$ noktasındaki $T_{(2,3)} \mathbb{R}^2$ tanjant uzayının görüntüsü.

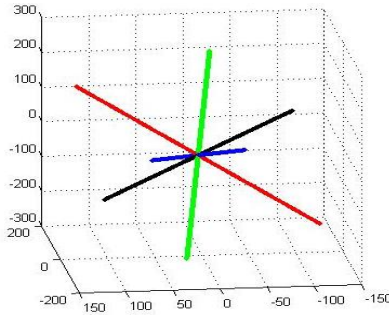
\mathbb{R}^n bir Lie grubudur ve aynı zamanda bir manifold yapısına sahiptir. Lie grubu olan \mathbb{R}^n in manifold olan \mathbb{R}^n üzerindeki etkisi,

$$\varphi: \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$$
$$(x, t) \rightarrow x + \lambda \cdot t$$

şeklinde tanımlansın. \mathbb{R}^n öteleme vektörlerinin altında x noktasının yörüngesi $O = (0, \dots, 0)$ noktasından geçen doğrulardır.

\mathbb{R}^3 te sayısal değerler verilerek Matlabda m-file aşağıdaki şekilde verilir.

```
axis([-8 8 -8 8 -8 8 ])  
for t=-16:1/10:16  
XX=[-3 ;4;-10]  
TT=[5 ;6; 8]  
KK=[-5;-2;3]  
LL=[4;-1;13]  
NN=[-0;-5;6]  
AA=XX+t*TT  
BB=XX+t*KK  
CC=XX+t*LL  
DD=XX+t*NN  
plot3(AA(1),AA(2),AA(3),'r')  
plot3(BB(1),BB(2),BB(3),'b')  
plot3(CC(1),CC(2),CC(3),'g')  
plot3(DD(1),DD(2),DD(3),'k')  
hold on  
grid on  
axis square  
pause(0.01)  
end
```



Şekil 8. $O = (0,0,0)$ başlangıç noktasından geçen doğrular.

3. Bulgular ve Tartışma

$O(2)$ ortogonal matrisler kümesi $GL(2, \mathbb{R})$ nin bir Lie alt grubudur. $O(2)$ nin elemanları $O = (0,0)$ noktası etrafında dönme operatörleridir. $O(2)$ kümesi, \mathbb{R}^2 nin noktalarına etki ettiğinde, bu etki altında noktaların yörüngeleri orijine olan uzaklığı yarıçap kabul eden çemberlerdir. $GL(3, \mathbb{R})$ nin Lie alt grubu olan $A(z, \theta) \times z_{eksen} = D$ yer değiştirmeler kümesi, z –eksen etrafında dönme ve z – eksen boyunca öteleme operatörüdür. $A(z, \theta) \times z_{eksen} = D$ Lie alt grubu \mathbb{R}^3 ün noktalarına etki ettirildiğinde, öteleme vektörünün yapısına göre eğri elde edilir. Eğer öteleme vektörü z –eksenine paralel ise eğri dik dairesel helis, z –ekseni ile kesişiyorsa konisel helis eğrisidir. Bunlara dair sayısal örneklerin m-file kodları oluşturularak Matlabda grafikleri elde edildi.

4. Sonuç

Yukarıda incelenen Lie alt grupları bazı geometrik niteliklere sahiptir. Bu alt gruplar manifold üzerindeki noktalara etki ettiğinde, bu geometrik nitelikler yörüngelere taşınır. Böylece yörüngelerin geometrik yapıları etki eden Lie grubunun geometrik yapısına sahip olur. Bundan dolayı Lie grubunun geometrik yapısından hareketle yörüngelerin geometrik yapısı doğrudan bulunabilir.

Kaynakça

- Brickell, F., & Clark, R. S. (1970). *Diferentiable Manifolds*. London, UK: Van Nostrand Reinhold Company Ltd.
- Castillo, G. F. (2010). *Differentiable Manifolds, A theoretical physics approach*. London, UK: Birkhäuser Cham. doi: 10.1007/978-3-030-45193-6
- Gasparim, E., Grama, L., & San Martin, L. A. B. S. (2017). Adjoint orbits of semi-simple Lie groups and Lagrangian submanifolds. *Proceedings of the Edinburgh Mathematical Society*, 60, 361–385. doi: 10.1017/S0013091516000286
- Helgason, S. (1992). Sophus Lie, the mathematician, chrome-extension://efaidnbmnnnibpcajpcgiclfndmkaj/viewer.html?pdfurl=https%3A%2F%2Fmath.mit.edu%2F~helgason%2Fsophus-lie.pdf&clem=1253215&chunk=true.pdf Erişim tarihi: 17.02.2022.
- Herman, R. (1975). *Lie Groups: History, Frontiers And applications Volume I, Sophus Lie's 1880 transformation group paper*. Massachusetts, USA: Math Sci Press.
- Lovett, E. O. (1897). Sophus Lie's transformation groups. *The American Mathematical Monthly*, 4, 237-242. doi: 10.1080/00029890.1898.11999787.
- Kobayashi, S., & Nomizu, K. (1963). *Foundations of Differential Geometry*, John Wiley & Sons, New-York, London.
- Tuğrul, F. (2016). *Reflection to orbit submanifolds with acting Lie subgroup of properties of Lie subgroups*. (MSc), Yuzuncu Yıl University, Institute of Natural and Applied Science, Van, Türkiye.