

Atf İçin: Kılıç H, Ceyhan S, 2022. Görüntü İşleme Uygulamaları İçin Finsler Eğri Evrim Modeli İncelemesi. İğdır Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü Dergisi, 12(4): 1906 - 1916.

To Cite: Kılıç H, Ceyhan S, 2022. Finsler Curve Evolution Analysis for Image Processing. Journal of the Institute of Science and Technology, 12(4): 1906 - 1916.

Görüntü İşleme Uygulamaları İçin Finsler Eğri Evrim Modeli İncelemesi

Haydar Kılıç^{1*}, Salim Ceyhan¹

ÖZET: Bu çalışmada Finsler geometrisi ile kurulan ve varyasyonlar hesabı ile eğri evrim modeline dönüşen Finsler eğri evrim modeli incelenecektir. Bu model, Riemann eğri evrim modelinde olduğu gibi sadece görüntü uzayındaki konumlar değil yönlerde dikkate alınarak anizotropik bir uzayda kurulmuştur. Model, görüntüye izotropik bir yapı olarak bakan Riemann modelinin aksine anizotropik yapı olarak bakarak daha esnek bir çalışma alanı sunar. Bu nedenle görüntü işleme üzerine çalışan araştırmacıların sıklıkla üzerinde çalıştıkları bir model haline gelmiştir. Bu çalışmada ele alınan Finsler eğri evrim modelinin matematiksel analizi kullanılarak gelecekteki görüntü işleme alanında yapılacak çalışmalara katkı sağlanması amaçlanmaktadır.

Anahtar Kelimeler: Finsler metrik, görüntü işleme, varyasyonlar hesabı, eğri evrimi

Finsler Curve Evolution Analysis for Image Processing

ABSTRACT: In this study, the Finsler curve evolution model, which was established with Finsler geometry and turned into a curved evolution model with the calculation of variations, will be examined. This model is not constructed by considering only locations in the image space as in the Riemann curve evolution model. It was established in an anisotropic space by considering both locations and directions. The model offers a flexible operation in the image by eliminating the necessity of isotropic spaces. Therefore, it has become a model that researchers working on image processing mostly work on. It is aimed to contribute to future studies in the field of image processing by using the mathematical analysis of the Finsler curve evolution model discussed in this study.

Keywords: Finsler metric, image processing, variational calculus, curve evolution.

¹ Haydar Kılıç ([Orcid ID: 0000-0002-2551-3772](https://orcid.org/0000-0002-2551-3772)), Salim Ceyhan ([Orcid ID: 0000-0003-0274-6175](https://orcid.org/0000-0003-0274-6175)), Bilecik Şeyh Edebali Üniversitesi, Mühendislik Fakültesi, Bilgisayar Mühendisliği Bölümü, Bilecik, Türkiye

***Sorumlu Yazar/Corresponding Author:** Haydar Kılıç, e-mail: haydar.kilic@bilecik.edu.tr

GİRİŞ

Finsler geometrisi son yıllarda avantajlı geometrik araçlara sahip olması nedeniyle çeşitli disiplinlerde kullanılmaya başlanmıştır. Literatürde Finsler metrikleri kullanılarak görüntü işleme alanında gerçek dünya problemlerinden birini Melonakos ve ark., jeodezik aktif kontur çerçevesini yön bilgisi ile güçlendiren bir görüntü bölütleme tekniği önermiştir. İzotropik durumda, öklid metriği, ilgilenilen noktalar (nesne kenarları) üzerinde ağırlıklı eğri uzunluğu küçük olacak şekilde, görüntü bilgisine dayalı ve sadece konuma bağlı olan izotropik bir skaler konformal faktör ile çarpılır. Bu çalışmada, jeodezik aktif kontura yön bilgisi de ekleyerek Finsler metriği tanımlanması ile bir minimizasyon problemi elde edildiği gösterilmiştir. Problemin çözümü olan optimal eğriler, varyasyon hesabı veya dinamik programlama tabanlı şemalar kullanılarak elde edilmektedir (Melonakos ve ark., 2008). Zach ve ark., başlangıçta verilen bir tohum bölgesi veya bölgesel bir eğilim terimi ile Finsler aktif konturlar için sürekli ve dışbükey bir formülasyon sunmuşlardır. Bu çalışmada, Riemann metrikleri yerine yaygın Finsler metriklerinin kullanılması, segmentasyon sınırının uygun konumlarına (örn. güçlü görüntü süreksizliklerine) ve uygun yönlerine (örn. koyudan parlak noktalara görüntü gradyanlarıyla hizalanmış) izin vermesine neden olmaktadır (Zach, 2009). Yajima ve ark., anizotropik homojen olmayan ortamlarda incelenen sismik ışın teorisini, Finsler geometrisi kullanarak yeniden ele almışlardır. Çalışmada, iki boyutlu bir ışın yolu için, anizotropik ortamda sismik dalga cephesi Finsler parametreleri ile geometrik olarak ifade edilmiştir. Gerçek bir kayanın elastikiyet sabitleri kullanılarak, Finsler parametreleri yardımıyla kayada yayılan bir dalga cephesi şeklinin bir daire ile değil, süper elips adı verilen dışbükey bir eğri olduğu gösterilmiştir (Yajima ve ark., 2009). Yazarların sonraki yayını, gözenekli homojen olmayan ortam boyunca Darcy kanununa uyan akışkan akışını Finsler geometrisi kullanarak incelemiştir. Fermat'ın prensibinin varyasyonel hesabına göre Darcy akışının lineer olmayan yörüngesi bir Finsler uzayında geodezikler ile tanımlanmıştır. Homojen olmayan ortam için, yöne bağlı Darcy akışkanını Kropina metriği adı verilen özel bir Finsler metriği ile göstermişlerdir. Böylece, Darcy akışkanının yön bağımlılığının etkisi Riemann ve Finsler geodezikleri arasındaki farklarla gösterilmiştir (Yajima ve ark., 2015). Chen ve ark., bilgisayarlı görme alanında ağırlıklı Euler elastika eğrilere dayalı, kapalı kontur tespiti yoluyla görüntü bölütleme için yeni bir eğrilik cezalı minimal yol modeli önermişlerdir. Görüntü segmentasyon yöntemi, kullanıcı tarafından verilen bir dizi noktayı birbirine bağlayarak, kapalı bir kontur oluşturacak şekilde birleştirilen eğrilikle cezalandırılmış minimal jeodeziklerin bir koleksiyonunu oluşturmaktır. Global olarak optimal minimum yollar, bir eğrilik terimi de dahil olmak üzere jeodezik enerjinin küresel minimumunu bulmayı sağlayan yeni bir Finsler metriği kullanarak elde edilmiştir. Deneysel sonuçlarla, önerilen Finsler minimum yol modelinin hem yapay hem de gerçek görüntülerde son teknolojiye minimum yol modellerinden daha iyi performans verdiğini göstermişlerdir (Da Chen ve ark., 2016). Dokur ve ark., rüzgar hızı modellemesi gibi birçok alanda kullanılan Weibull dağılımı için iki boyutlu Finsler fonksiyonu elde etmişlerdir. İki boyutlu Finsler uzayında şekil ve ölçek parametrelerine sahip iki parametrelili Weibull olasılık yoğunluk fonksiyonunun metrik tanımı, farklı bir yaklaşım kullanılarak elde edilmiştir. Ayrıca, birçok gerçek dünya uygulamasında kullanılacak Finsler geometrisine dayalı, yeni olasılık ve kümülatif olasılık yoğunluk fonksiyonları önermişlerdir (Dokur ve ark., 2016) Son olarak, Kılıç ve ark., yeni bir Finsler metriği tanımlayarak, gürültülü bir renkli görüntünün filtreleme sonuçlarını incelemişlerdir. Ayrıca, filtrelemede kullanılan renkli görüntüler için Finsler metriğine ait filtreyi oluşturmak için gereken matematiksel çıkarımları vermişlerdir (Kılıç ve ark., 2022).

Finsler geometrisi ile yukarıda verilen gerçek dünya çalışmaları dan sonra, bir sonraki bölümün daha iyi anlaşılabilmesi temel bir giriş olarak aşağıdaki bilgiler verilecektir.

Bir uzayın herhangi iki noktası arasındaki uzaklık hesabı için kullanılan fonksiyona metrik denmektedir. Uzayın yapısına bağlı olarak tanımlanan metriklerin en yaygın olarak bilinen örnekleri, düz uzaylar için Öklid metriği ve düz olmayan uzaylar için Riemann ve Finsler metrikleridir. Riemann metriği tanımlı olduğu uzaydaki herhangi bir nokta ele alınarak hesaplanırken Finsler metriği, uzaydaki bir nokta ve o noktadaki teğet vektör kullanarak hesaplanır.

Bu çalışmada incelenecek model için, M, n boyutlu düzgün bir manifold ve manifold üzerinde bir C eğrisi $[a, b] \subset \mathbb{R}$ alt kümesi üzerinde değer alan bir t parametresinin fonksiyonu olarak $C: t \in [a, b] \mapsto M$ parametrize edilen sürekli bir fonksiyon olsun. M üzerindeki yerel koordinat sistemine x^i , ($i = 1, 2, \dots, n$) dersek, eğriyi veren manifold üzerindeki noktalar kümesi $x^i = x^i(t), t \in [a, b]$ şeklindedir ve t parametresinin türetilebilir fonksiyonlarıdır. Manifoldun her noktasındaki teğet vektör alanının bileşenleri $\dot{x}^i = \frac{dx^i}{dt}$ şeklindedir (Lee, 2006). M üzerinde Riemann anlamında ds yay uzunluğu metriği:

$$ds = \sqrt{g_{ij}(x)dx^i dx^j} \quad (1)$$

ile verilir. Burada, g_{ij} pozitif tanımlı simetrik metrik tensördür (Lee, 2006). Manifold üzerinde bir C eğrisinin Riemann anlamında uzunluğu $L_R(C)$:

$$L_R(C) = \int_a^b ds = \int_a^b \sqrt{g_{ij}(x(t))\dot{x}^i \dot{x}^j} dt \quad (2)$$

olarak yazılır.

Manifoldun TM teğet demeti üzerinde tanımlı $F(C(t), \dot{C}(t))$ negatif olmayan bir fonksiyon için eğrinin uzunluğu

$$L_F(C) = \int_a^b F(C(t), \dot{C}(t)) dt \quad (3)$$

olarak yazılabilir. $L_F(C)$ uzunluk hesabının C eğrisinin parametrisasyonundan bağımsız olması beklenir. Bunun için $F(x, y)$, $x \in M$, $y \in T_x M$ 1.dereceden y -ye göre pozitif homojen yani, $F(x, \lambda y) = \lambda F(x, y)$, $\lambda > 0$ olmalıdır.

Manifold üzerinde tanımlı $d_F: M \times M \rightarrow [0, \infty)$, $\forall p, q \in M$ için

$$d_F(p, q) = \inf_C L_F(C) \quad (4)$$

mesafe fonksiyonu ile p noktasından bir q noktasına en kısa mesafe ölçülebilir. p noktasından q noktasına ölçülen mesafe fonksiyonu tek yönlüdür, yani $d_F(p, q) \neq d_F(q, p)$ 'dir. Buna göre, $F(x, y_1 + y_2) \leq F(x, y_1) + F(x, y_2)$, $y_1, y_2 \in T_x M$ konvekslik şartını sağlamak zorundadır. Bu koşullara en uygun metriğin Finsler metriği olduğu aşağıda verilen tanımından kolayca görülür (Rund, 2012).

Tanım (Finsler Metriği). M, n -boyutlu düzgün bir manifold olsun. Manifoldun teğet demeti üzerinde tanımlı $F: TM \rightarrow [0, \infty)$ negatif olmayan fonksiyonuna aşağıdaki şartları sağladığında Finsler Metriği denir (Shen ve Shen, 2016).

Pozitif Homojenlik: $F(x, \lambda y) = \lambda F(x, y)$, $\forall \lambda > 0$.

Düzlük: $F(x, y), TM - 0$ teğet demeti üzerinde C^∞ fonksiyondur.

Güçlü Konvekslik: Herhangi sıfırdan farklı bir $y \neq 0$ teğet vektör için metrik tensör (Hessian matrisi):

$$g_{ij}(x, y) = \frac{1}{2} \frac{\partial^2 F^2}{\partial y^i \partial y^j}(x, y) = \frac{1}{2} [F^2]_{y^i y^j} \quad (5)$$

olarak pozitif tanımlıdır. Türevlenebilir, F Finsler metrikli bir M manifolduna Finsler manifoldu ve (M, F) 'ye Finsler uzayı denir (Rund, 2012).

MATERYAL ve METOT

Matematiksel optimizasyon, bir fonksiyonun sayısal olarak minimumlarını, maksimumlarını veya sıfırlarını bulmakla ilgilenir ve bu bağlamda optimize edilecek mühendislik modelinde bunu sağlayan fonksiyona mühendislik dallarına göre amaç fonksiyonu, maliyet fonksiyonu veya enerji denilebilmektedir. Amaç fonksiyonları ya da maliyet fonksiyonları mühendislik modelinin kurgusuna göre değişebilmektedir. Örneğin finansal alanda kullanılan portföy optimizasyonunda bir dizi varlığa sermaye yatırmanın en iyi yolunu arar, tüm portföye ait kabul edilebilir bir minimum getiri değeri için maliyet fonksiyonu portföy getirisinin genel riskinin bir ölçüsü olabilir. Bu durumda optimizasyon problemi riski minimize eden bir portföy tahsisi olacaktır. Bir başka örnek olarak, elektronik devre tasarımındaki cihaz boyutlandırma işi olabilir. Elektronik devre tasarımı cihaz boyutlandırılır iken devre tarafından tüketilen toplam güç ortak bir amaç ya da maliyet olarak düşünülebilir. Dolayısıyla cihaz boyutlandırılırken üretilebilirliği, zamanlamayı ve alanı en fazla kullanan güç verimlidir ve optimizasyonu sağlar (Boyd ve ark., 2004). Bu çalışmada, yerel maliyet fonksiyonunun seçimi manifold üzerinde oluşturulan başlangıç eğrisinin ağırlıklı uzunluğu olarak ele alınmıştır. Bu şekilde alınan maliyet fonksiyonuna ilave olarak yön bilgiside eklenmiştir. Başlangıç eğrisinin minimizasyonu çalışmada verilen diferansiyel denklemle sağlanarak görüntüdeki nesne kenarlarını belli eden eğriye uydurulması sağlanır. Çalışmanın bundan sonraki bölümündeki örneklerde de verildiği gibi, yerel maliyet eğri hareketini sağlayan bir analitik fonksiyonda olabilir, veya bu hareketi sağlatacak maliyeti bulan derin öğrenme modelide olabilir.

Eğri evriliminin Riemann modelinde, görüntü üzerinde iki nokta arasındaki ağırlıklı mesafeyi tanımlayan bir yerel maliyet fonksiyonu $\varphi: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^+$ şeklinde yazılabilir (Kilic ve Ceyhan, 2021). Verilen bir C eğrisi üzerinde tanımlı maliyetlerin toplamı yerel maliyetlerin eğri boyunca integre edilmesiyle elde edilen $E(C)$ enerji fonksiyoneli ile bulunur (Casellas ve ark., 1997; Melonakos ve ark., 2008). Eğri bu enerji fonksiyoneli minimize edecek şekilde deforme edilir.

$$E(C) = \int_C \varphi(C) ds \quad (6)$$

enerji fonksiyoneli, φ -ağırlıklı eğri uzunluğu olarak yorumlanabilir. Ayrıca, enerji fonksiyonelinin s yay uzunluğu parametresine bağlı olması ele alınan uzayın geometrisine bağlı olması anlamına gelmektedir. Buradaki temel fikir, manifold üzerinde φ maliyetlerinin minimum olduğu noktalardan geçme eğiliminde olan ve minimal uzunluklu eğrileri belirlemektir. Dolayısıyla (6) enerji integralinin minimizasyonu ile görüntü üzerindeki nesnelerin kenarları en uygun şekilde bulunabilir.

L_2 anlamında (6) enerji fonksiyoneli minimize etmek için fonksiyonelin argümanı olan C eğrisini evrilten kısmi türevli diferansiyel denklem aşağıdaki gibi elde edilir:

$$\frac{\partial C}{\partial t} = -(\nabla \varphi \cdot \mathbf{N})\mathbf{N} + \varphi C_{ss} \quad (7)$$

Burada \mathbf{N} eğrinin bükülme yönüne doğru olan birim normal vektör ve C_{ss} , eğrinin eğrilik vektörüdür. (7) denkleminde görüleceği gibi C eğrisi birim normal vektör doğrultusunda gelişerek evrilir.

φ yerel maliyeti, azalan, sınırlı görüntü üzerindeki nesnelerin kenarlarını bulan fonksiyon olarak seçilirse, (7) diferansiyel denkleminin çözümü eğriyi, görüntüdeki objenin kenarına doğru evriltir. Esasen, φ ele alınan görüntü işleme problemine uygun herhangi bir desen algılayıcı (pattern detector) olabilir (Pichon, 2005).

Şimdi eğri evriliminin Finsler modeli için gerekli tanımlamaları verelim. $M = \mathbb{R}^2$ görüntü manifoldunda yön bilgisini tanımlamak için \mathbb{R}^2 'de bir $S^1 = TM$ birim çemberi kullanılır. $\forall p \in \mathbb{R}^2$ konumu ve o konumdaki bir $\tau \in S^1 = T_p M$ yön vektörü için yön bağımlı desen algılayıcı, yani yerel

maliyet $\varphi : \mathbb{R}^2 \times S^1 \rightarrow \mathbb{R}^+$ şeklinde tanımlanır. Böylece toplam maliyet yalnızca C eğrisinin konumuna değil, aynı zamanda o konumdaki \mathbf{T} birim teğet vektörünün yönüne de bağlı olur. Toplam maliyeti veren (6) enerji fonksiyoneli Finsler anlamında :

$$E(C) = \int_C \varphi(C, \mathbf{T}) ds \quad (8)$$

şeklinde yazılır (Melonakos ve ark., 2008).

Dijital görüntü üzerinde bir Finsler normu tanımlayarak görüntü bir Finsler manifoldu olarak modellenebilir. Bunun bir sonucu olarak, manifoldun bir $x \in M$ noktasındaki belirli bir $y \in T_x M$ vektörü yönünde Finsler normunu minimum yapılabilmesi (jeodezik eğri boyunca) maliyet fonksiyonu olarak Finsler fonksiyonu kullanmak alternatif bir yol olacaktır. Ayrıca, görüntü segmentasyonu gibi problemlerin analizi için zengin Finsler geometrisi araçları sunacaktır.

Eğri Evrilimi için Finsler Modeli

Bu bölümde, Finsler manifoldunda eğri evrilmesi modeli incelenecektir. Görüntü manifoldu ile teğet demeti arasındaki ilişkiyi, eğrinin evrilmesinde teğetlerin ve normallerin rolünü, Finsler geometrisi anlamında gereken matematiksel bağlantılar bu bölümde ele alınacaktır.

$C: [0,1] \times [0,T) \rightarrow \mathbb{R}^2, t \in \mathbb{R}^+$ formunda evrilen eğriler ailesini ele alalım. t_0 anında $C(x, t_0)$ başlangıç eğrisinin, x parametresine ve s yay uzunluğu parametresine göre birim teğet vektörü:

$$\mathbf{T} = \frac{C_x}{|C_x|} = C_s$$

olarak hesaplanır. Eğrinin s yay uzunluğu parametresi ve x parametresi arasında

$$\frac{\partial}{\partial s} = \frac{1}{|C_x|} \frac{\partial}{\partial x}, ds = |C_x| dx$$

eşitlikleri geçerlidir. C eğrisinin normali yönündeki \mathbf{K} eğrilik vektörü:

$$\mathbf{K} = C_{ss} = \frac{\partial^2 C}{\partial s^2}$$

olarak verilir. Eğrinin daima dış normal doğrultusunda evrildiği varsayılırsa,

$$\mathbf{V} = \frac{\partial C}{\partial t} \perp \mathbf{T}$$

olur.

Eğrilik ve hız vektörleri arasındaki ilişki, Lie türevi yardımıyla şöyle açıklanabilir. Lie türevi eğrinin zamana göre değişimi ile yay uzunluğuna göre değişimi arasındaki farka karşılık gelir. Yani, eğrilik vektörünün birim hız vektörü yönündeki değişimine eşittir (Melonakos ve ark., 2008). Bu matematiksel olarak:

$$\left[\frac{\partial}{\partial t}, \frac{\partial}{\partial s} \right] = (\mathbf{K} \cdot \mathbf{V}) \frac{\partial}{\partial s} \quad (9)$$

Şeklinde yazılır ve aşağıdaki gibi ispatlanabilir.

İspat (9)

$$\begin{aligned} \left[\frac{\partial}{\partial t}, \frac{\partial}{\partial s} \right] &= \left[\frac{\partial}{\partial t}, \frac{1}{|C_x|} \frac{\partial}{\partial x} \right] \\ &= \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{1}{|C_x|} \frac{\partial}{\partial x} \right) - \frac{1}{|C_x|} \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial}{\partial t} \right) \\ &= \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{1}{|C_x|} \right) \frac{\partial}{\partial x} + \frac{1}{|C_x|} \frac{\partial^2}{\partial t \partial x} - \frac{1}{|C_x|} \frac{\partial^2}{\partial x \partial t} \end{aligned}$$

Sonuç olarak Lie türevi

$$\left[\frac{\partial}{\partial t}, \frac{\partial}{\partial s} \right] = \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{1}{|C_x|} \right) \frac{\partial}{\partial x}$$

eşit olur.

$|C_x| = \langle C_x, C_x \rangle^{1/2}$ ve $\frac{\partial}{\partial x} = |C_x| \frac{\partial}{\partial s}$ eşitlikleri kullanılarak

$$\frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{1}{|C_x|} \right) = - \frac{1}{|C_x|^3} \langle C_{xt}, C_x \rangle$$

olduğu görülür ve Lie türevi şimdi

$$\left[\frac{\partial}{\partial t}, \frac{\partial}{\partial s} \right] = \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{1}{|C_x|} \right) \frac{\partial}{\partial x} = - \left\langle \frac{C_{xt}}{|C_x|}, \mathbf{T} \right\rangle \frac{\partial}{\partial s} \quad (10)$$

olur. $\langle \mathbf{V}, \mathbf{T} \rangle = \langle C_t, C_s \rangle = 0$ eşitliğinin s'ye göre türevi alınırsa,

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial s} \langle C_t, C_s \rangle &= \langle C_{ts}, C_s \rangle + \langle C_t, C_{ss} \rangle = 0 \\ \text{eşitliğinden } \langle C_t, C_{ss} \rangle &= -\langle C_{ts}, C_s \rangle \text{ veya} \\ \langle \mathbf{V}, \mathbf{K} \rangle &= -\langle C_{ts}, T \rangle \end{aligned} \quad (11)$$

elde edilir. Buradaki C_{ts} büyüklüğü

$$C_{ts} = \frac{\partial C_t}{\partial s} = \frac{\partial C_t}{\partial x} \frac{\partial x}{\partial s} = \frac{C_{tx}}{|C_x|}$$

(11) eşitliğinde yerine yazılırsa,

$$\langle \mathbf{V}, \mathbf{K} \rangle = - \left\langle \frac{C_{tx}}{|C_x|}, \mathbf{T} \right\rangle \quad (12)$$

bulunur. Denklem (10)'da (12) ifadesi yazılırsa

$$\left[\frac{\partial}{\partial t}, \frac{\partial}{\partial s} \right] = - \left\langle \frac{C_{tx}}{|C_x|}, T \right\rangle \frac{\partial}{\partial s} = \langle \mathbf{V}, \mathbf{K} \rangle \frac{\partial}{\partial s} \quad (13)$$

sonucu elde edilmiş olur. Eğrinin yay uzunluğunun zamana göre değişimi, bu sonucun negatiftir.

Yani eğriliğin birim hız büyüklüğündeki negatif değişimine karşılık gelir (Melonakos ve ark., 2008).

Matematiksel ifadesi ve ispatı aşağıdaki gibidir:

$$\frac{\partial}{\partial t} ds = -(\mathbf{K} \cdot \mathbf{V}) ds \quad (14)$$

İspat (14)

$$\begin{aligned} \left[\frac{\partial}{\partial t}, \frac{\partial}{\partial s} \right] ds &= (\mathbf{K} \cdot \mathbf{V}) \frac{\partial}{\partial s} ds \\ \Rightarrow \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{\partial}{\partial s} ds \right) - \frac{\partial}{\partial s} \left(\frac{\partial}{\partial t} ds \right) &= [(\mathbf{K} \cdot \mathbf{V}) ds] \frac{\partial}{\partial s} \\ \Rightarrow \left(\frac{\partial}{\partial t} ds \right) &= -(\mathbf{K} \cdot \mathbf{V}) ds. \end{aligned}$$

(8) integralinin minimizasyonu için, sürekli bir C eğrisi, E enerji fonksiyonelinin yerel minimumu olmalıdır. Riemann anlamında E enerjisinin yerel minimumlarının sayısını sınırlandırmak için, φ düzgün olarak seçilmelidir. Eğer φ düzgün değilse, eğri çok hızlı bir şekilde istenmeyen bir yerel minimum noktaya doğru evrilir. Bu durumda, eğrinin düzgünleştirici bir filtreden geçirilmesi gerekir (Pichon, 2005).

Finsler anlamında bir gradyan akış modeli, (8) enerji integralini minimize edecek şekilde eğriyi evrilten bir modeldir. Bir başka deyişle, gradyan akışı enerji değişimini sağlayan bir C eğrisinin hareketini, ya da evrilimini veren bir diferensiyel denklemdir. (8) enerji integrali, s yay uzunluğu yerine x değişkeni ile yeniden parametrisasyonu yapılır ve φ 'nin birinci dereceden homojen olduğu ve parametreler arasında $x = x(s)$ birebir ilişkisi

$$\frac{dx}{ds} = \frac{1}{|C_x|} \text{ ve } C_s = \frac{C_x}{|C_x|}$$

dikkate alınırsa

$$E(C) = \int_C \varphi(C, C_s) ds = \int_0^1 \varphi \left(C, \frac{C_x}{|C_x|} \right) |C_x| dx \quad (15)$$

şeklinde yazılabilir.

Enerji Fonksiyonelinin Birinci Varyasyonu

Ağırlıklı anizotropik mesafe fonksiyonelinin (15) birinci varyasyonunu, t zaman değişimine göre türevini alarak hesaplayalım:

$$\frac{dE}{dt} = \frac{d}{dt} \int_C \varphi(C, C_s) ds = \int_0^1 \frac{d}{dt} \left[\varphi \left(C, \frac{C_x}{|C_x|} \right) |C_x| \right] dx. \quad (16)$$

Burada x ve t birbirinden bağımsız parametrelerdir. Görüntü manifoldu üzerinde bir $x \in M$ noktasından geçen tüm eğrilerin birim teğet vektörlerine τ denirse, bu birim teğet vektörler birim çemberin bir elemanı olarak düşünülebilir. Yani $\tau \in S^1$ ve bir parametredir. Buna göre (16) yeniden yazılırsa,

$$\frac{dE}{dt} = \int_0^1 \frac{d}{dt} [\varphi(x, \tau) |C_x|] dx \quad (17)$$

elde edilir. Şimdi türevi hesaplayalım;

$$\begin{aligned} \frac{dE}{dt} &= \int_0^1 \frac{d}{dt} \left[\varphi \left(C, \frac{C_x}{|C_x|} \right) |C_x| \right] dx \\ &= \int_0^1 \left[\varphi_x C_t |C_x| + \varphi_\tau \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{C_x}{|C_x|} \right) |C_x| + \varphi \frac{\partial}{\partial t} (|C_x|) \right] dx \end{aligned} \quad (18)$$

Bu integral içindeki terimleri ayrı ayrı integraller olarak alıp, düzenleyelim.

$$E_1 = \int_0^1 \varphi_x C_t |C_x| dx \quad (19)$$

$$E_2 = \int_0^1 \varphi_\tau \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{C_x}{|C_x|} \right) |C_x| dx \quad (20)$$

$$E_3 = \int_0^1 \varphi \frac{\partial}{\partial t} (|C_x|) dx \quad (21)$$

Öncelikle (20) 'deki türev

$$\frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{C_x}{|C_x|} \right) = \frac{C_{xt}|C_x| - C_x \frac{1}{2} (C_x, C_x)^{-\frac{1}{2}} 2 \langle C_{xt}, C_x \rangle}{|C_x|^2} = \frac{C_{xt}(I - C_s^T C_s)}{|C_x|}$$

şeklinde hesaplanır. Uzayda herhangi bir \vec{u} vektörünün \vec{v} vektörü üzerine dik izdüşümü, yani projeksiyonu Young (1930):

$$\text{Proj}_{\vec{v}} \vec{u} = \left(\frac{\vec{u} \cdot \vec{v}}{v^2} \right) \vec{v} \quad (22)$$

kullanılarak

$$\text{Proj}_{C_s} C_{xt} = \frac{C_{xt} C_s^T}{|C_s|^2} C_s = C_{xt} C_s^T C_s \quad (23)$$

yazılır. $C_{xt} C_s^T C_s$ ve φ_τ büyüklükleri, sırasıyla, eğrinin teğeti ve normali yönünde olduğundan $\varphi_\tau \perp$

$$C_{xt} C_s^T C_s \text{ ve } \varphi_\tau \cdot C_{xt} C_s^T C_s = 0 \text{ eşitliğinden } \varphi_\tau \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{C_x}{|C_x|} \right) |C_x| = \varphi_\tau \frac{C_{xt}(I - C_s^T C_s)}{|C_x|} |C_x| = \varphi_\tau C_{xt}$$

bulunur. Sonuç olarak, E_2 integrali

$$E_2 = \int_0^1 \varphi_\tau C_{xt} dx \quad (24)$$

olarak bulunur. Bu integral $\int u dv = uv - \int v du$ kısmi integrasyon ile,

$$u = \varphi_\tau \Rightarrow du = \frac{\partial}{\partial s} (\varphi_\tau) |C_x| dx,$$

$$dv = C_{xt} dx \Rightarrow v = C_t$$

yazılarak integre edilirse,

$$E_2 = \varphi_\tau C_t \Big|_0^1 - \int_0^1 C_t \frac{\partial}{\partial s} (\varphi_\tau) |C_x| dx = - \int_0^1 C_t \frac{\partial}{\partial s} (\varphi_\tau) |C_x| dx \quad (25)$$

elde edilir. Burada kapalı eğri tanımından dolayı $C_t(0) = C_t(1) = 0$ 'dır. (21)'deki E_3 integralindeki türev hesaplanır.

$$\frac{\partial}{\partial t} (|C_x|) = \frac{\partial}{\partial t} \langle C_x, C_x \rangle^{\frac{1}{2}} = \langle C_{xt}, C_s \rangle$$

ve yerine yazılırsa,

$$E_3 = \int_0^1 \varphi C_{xt} \cdot C_s dx \quad (26)$$

bulunur. Burada yine kısmi integrasyon uygulanır ve $\varphi(x, \tau) = \varphi(C, C_s)$ göz önüne alınır,

$$\begin{aligned} E_3 &= - \int_0^1 C_t \frac{\partial}{\partial s} (\varphi C_s) |C_x| dx \\ &= - \int_0^1 C_t \left(\varphi_x \frac{\partial \varphi}{\partial s} C_s + \varphi_\tau \frac{\partial \tau}{\partial s} C_s + \varphi C_{ss} \right) |C_x| dx \\ &= - \int_0^1 C_t \left((\varphi_x C_s) C_s + (\varphi_\tau C_{ss}) C_s + \varphi C_{ss} \right) |C_x| dx \end{aligned}$$

bulunur. Sonuç olarak, $E_t = E_1 + E_2 + E_3$

$$\frac{dE}{dt} = \int_0^1 C_t \varphi_x |C_x| dx - \int_0^1 C_t \frac{\partial}{\partial s} \varphi_\tau |C_x| dx - \int_0^1 C_t \left[(\varphi_x C_s) C_s + (\varphi_\tau C_{ss}) C_s + \varphi C_{ss} \right] |C_x| dx$$

$$\frac{dE}{dt} = \int_0^1 C_t \left\{ [\varphi_x - (\varphi_x C_s) C_s] - \left[\frac{\partial}{\partial s} \varphi_\tau + (\varphi_\tau C_{ss}) C_s \right] - \varphi C_{ss} \right\} |C_x| dx$$

elde edilir (Pichon, 2005). Burada integral içerisindeki terimler:

$$\begin{aligned} \varphi_x - (\varphi_x C_s) C_s &= (I - C_s C_s^T) \varphi_x \\ \frac{\partial}{\partial s} \varphi_\tau + (\varphi_\tau C_{ss}) C_s &= (I - C_s C_s^T) \frac{\partial}{\partial s} \varphi_\tau \end{aligned}$$

şeklindedir. $\varphi_\tau \perp C_s$ olduğundan φ_τ yerine

$$\varphi_\tau = (I - C_s C_s^T) \varphi_\tau$$

kullanılırsa,

$$\frac{\partial}{\partial s} \varphi_\tau = \frac{\partial}{\partial s} \left((I - C_s C_s^T) \varphi_\tau \right) = (I - C_s C_s^T) \frac{\partial}{\partial s} (\varphi_\tau) - (C_{ss} \varphi_\tau) C_s$$

bulunur. Elde edilen sonuçlar E_t integralinde yerine yazılırsa:

$$E_t = \int_0^1 C_t \left\{ (I - C_s C_s^T) \left(\varphi_x - \frac{\partial}{\partial s} \varphi_\tau \right) - \varphi C_{ss} \right\} ds \quad (27)$$

elde edilir.

Bir $\int \langle a, b \rangle ds$ integralinin minimum olması için $b = -a$ olmalıdır. Yani $\int \langle a, -a \rangle ds = -\int a^2 ds$ olmalıdır (Kühnel, 2015). Dolayısıyla E_t integralinin minimum değer alması için:

$$C_t = -(I - C_s C_s^T) \left(\varphi_x - \frac{\partial}{\partial s} \varphi_\tau \right) + \varphi C_{ss} \quad (28)$$

olmalıdır (Pichon, 2005). (28) denklemini Finsler anlamında bir eğrinin evrilimini veren diferansiyel denklemdir.

BULGULAR VE TARTIŞMA

(28) denkleminde C, E enerji integralini minimize eden eğri ve φ maliyet fonksiyonudur. Bu denklemde yer alan diğer kısmi türevli bileşenlerin anlamları:

- C_s : Eğrinin birim teğet vektörü.
- C_s^T : Eğrinin birim teğet vektörünün transpozu.
- φ_x : Maliyetinin x konumundaki gradyanı ($\varphi_x = \nabla_x \varphi$). İki boyutta, $x = (x_1, x_2)$ noktası için $\nabla_x \varphi = \varphi_{x_1} \mathbf{i} + \varphi_{x_2} \mathbf{j}$ dir.
- φ_τ : Maliyetinin τ birim teğet vektör yönündeki gradyanı ($\varphi_\tau = \nabla_\tau \varphi = \tau \nabla \varphi$).
- C_{ss} : Eğrinin eğrilik vektörü.

Burada önemli olan φ maliyet fonksiyonunun seçimidir. Daha önceden de bahsedildiği gibi bir pattern detektör seçilebilir. Burada pattern olarak kenarlarla ilgilendiğimiz için maliyet fonksiyonu yerine yön bağımlı bir kenar bulucu da seçilebilir. Sayısal hesaplamalar için Algoritma 1 izlenir.

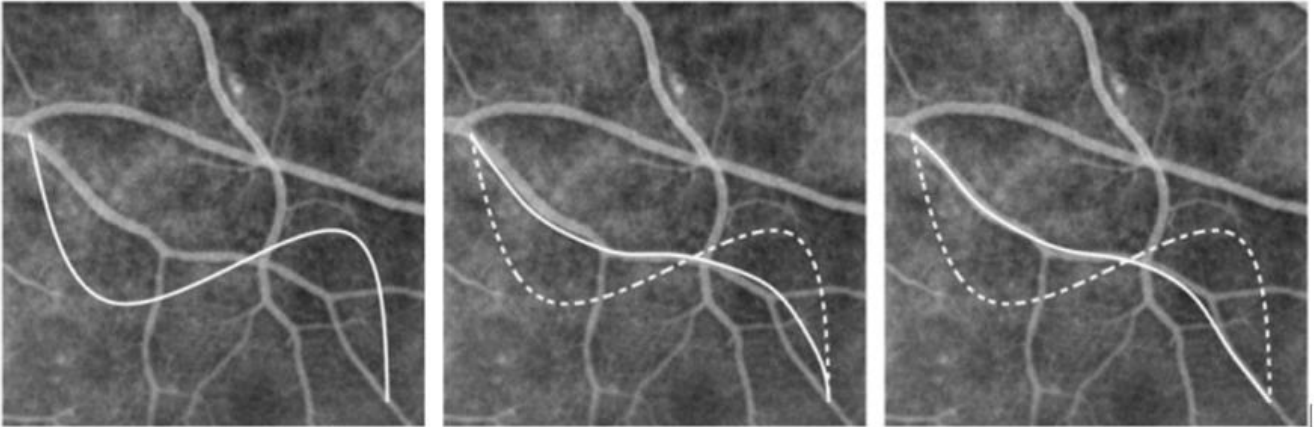
Algoritma 1: Finsler Eğri evrimi

```

1 İşlenecek görüntüyü yükle.;
2 Gri seviyeli görüntüye çevir.;
3 Başlangıç eğrisini oluştur.;
4 for her bir  $t$  için do
5    $C_s = \frac{C(x_{i+1}, y_j) - C(x_{i-1}, y_j)}{2\Delta t}$  ve;
6    $C_{ss} = \frac{C(x_{i+1}, y_j) - 2C(x_i, y_j) + C(x_{i-1}, y_j)}{\Delta t^2}$ ;
7   merkezi fark ile türevleri hesapla;
8   Uygun bir  $\varphi$  maliyet fonksiyonu belirle.;
9   Merkezi fark türevleri ile  $\varphi_x = \nabla_x \varphi$  hesapla.;
10   $\tau$  birim teğet yön vektörlerini oluştur.;
11  Yukarıdaki türev formüllerini kullanarak  $\varphi_\tau = \nabla_\tau \varphi = \tau \cdot \nabla \varphi$ 
    hesapla.;
12   $C_t = -(I - C_s C_s^T)(\varphi_x - \frac{\partial}{\partial s} \varphi_\tau) + \varphi C_{ss}$  hesapla.;
13   $C_{t+1} \leftarrow C_{t+1} + \Delta t C_t$ ;
14 end

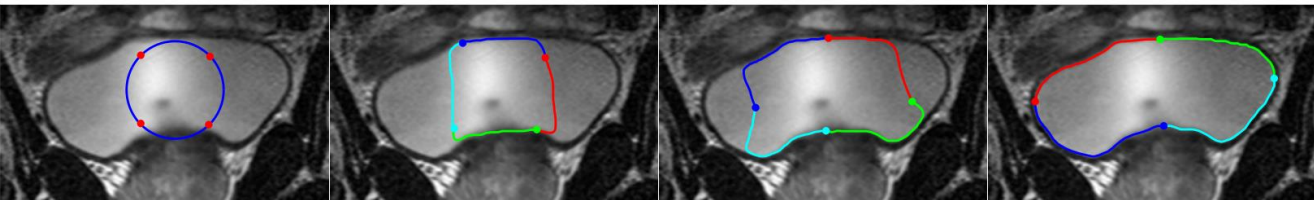
```

Bu konudaki Melonakos ve ark. (2008) çalışmasında maliyet fonksiyonunu analitik olarak belirlemek yerine başlangıç eğrisi üzerindeki her noktada bir biçim detektör alınarak, sınır ağları ile bir eğitimden geçirilmiş ve en büyük değişimin olduğu yön seçilmiştir. Şekil 1'de soldan sağa başlangıç eğrisi, evrilen eğri ve son durumu görülmektedir.



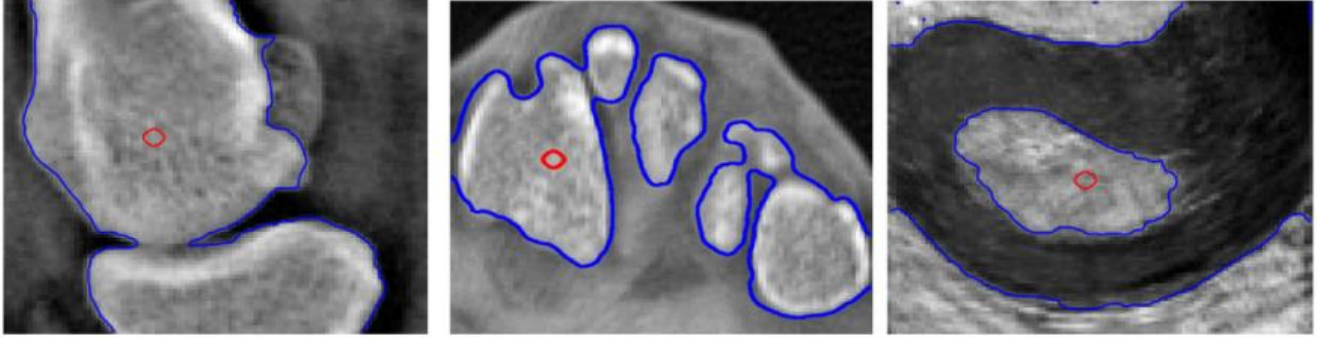
Şekil 1. Biçim detektör kullanılarak evrilen eğri incelemesi (Melonakos ve ark. 2008).

Da Chen ve ark. (2016) çalışmasında Finsler manifoldunda bir başlangıç kontur eğrisinin hareketleri incelenerek, medikal görüntülerde nesne segmentasyonu işlemi yapılmıştır. Bu çalışma kontur eğrileri Finsler metriği kullanılarak görüntü segmentasyonu için eğri evrim modeli tanıtılmıştır. Bu iki çalışma, burada incelenen Finsler eğri evrim modelinin kullanımına birer örnektir.



Şekil 2. Kontur eğrileri ile Finsler manifoldunda eğri evrimi incelemesi (Da Chen ve ark. 2016).

Riemann eğri evrilimine bir örnek, Estellers ve ark. (2013) çalışmasında harmonik aktif kontur kullanılarak eğri evrilimi incelenmiş ve maliyet fonksiyonu olarak görüntü manifoldu üzerinde bir kenar algılayıcı Riemann metriği kullanılmıştır. Medikal görüntülerdeki sonuçları Şekil 3'de görülmektedir. Görüntülerdeki kırmızı ile belirtilen kontur başlangıç eğrisi, mavi ile belirtilen kontur ise eğri evriliminin kenarları çevreleyecek şekildeki sonucudur.



Şekil 3. Seviye eğrileri ile Riemann manifoldunda eğri evrimi incelemesi (Estellers ve ark. 2013).

Buradaki örnekler ele alındığında, Finsler anlamında eğri evrilimi için maliyet fonksiyonu iki türlü belirlenmektedir. Birincisi başlangıç eğrisi üzerindeki herhangi bir noktayı içine alan belli boyutlardaki dikdörtgen çerçeve içerisindeki görüntüdeki en büyük değişimi veren yönü maliyet fonksiyonu olarak seçmektir. İkincisi ise seviye eğrileri ile Riemann metriği kullanarak mesafe ölçümü yapan bir maliyet fonksiyonu belirlemektir.

Bu model ve benzerlerinin yazılım ortamlarına entegrasyonu yazılım dilinden bağımsız olarak diferensiyel modelin sayısallaştırılması ile olmaktadır. Segmentasyon, filtreleme, kenar bulma gibi görüntü işleme operasyonlarında diferensiyel modeller kullanıldığından kolayca entegrasyonu sağlanacaktır. Okuyucular <https://github.com/HAYDARKILIC> adresinden örnek modellere erişebilirler.

SONUÇ

Sonuç olarak Finsler anlamında bir ölçüm yapabilmek için görüntüye en uygun maliyet fonksiyonu belirlemek gerekmektedir. Finsler metriği kullanılarak görüntü işleme uygulamaları arasında yer alan, segmentasyon, gürültü giderme gibi işlemlerin kolayca üstesinden gelinebilir (Kolmogorov ve Boykov, 2005).

Finsler metrik yaklaşımı ile görüntü işleme uygulamalarına iyi bir çözüm sunan Zucchini (1991); Zucchini (1993) makalelerinde yer alan ve adını ünlü fizikçi Polyakov'dan alan "Polyakov Action" enerji modelinde görülmektedir. "Polyakov Enerji Modeli"nde enerji integrali görüntünün yapısına uygun bir metrik seçimine imkan vermektedir. Ayrıca görüntü işleme uygulamalarına uygun enerji fonksiyoneli yazılarak gürültü giderme, segmentasyon, kontrast geliştirme gibi işlemler yapılabilir (Jelena, 2015; Kimmel ve ark. 1997). Sonraki çalışmalarda, Polyakov enerji integrali modeli kullanılarak görüntü işleme operasyonları derinlemesine araştırılacak ve sonuçları sunulacaktır.

Çıkar Çatışması

Makale yazarları aralarında herhangi bir çıkar çatışması olmadığını beyan ederler.

Yazar Katkısı

Yazarlar makaleye eşit oranda katkı sağlamış olduklarını beyan eder.

KAYNAKLAR

Boyd, S., Boyd, S. P., & Vandenberghe, L. (2004). Convex optimization. Cambridge university press.

- Caselles V, Kimmel R, Sapiro G, 1997. Geodesic Active Contours. *International Journal of Computer Vision*, 22 (1): 61–79.
- Chen, D., Mirebeau, J., & Cohen, L.D. (2016). A New Finsler Minimal Path Model with Curvature Penalization for Image Segmentation and Closed Contour Detection. *2016 IEEE Conference on Computer Vision and Pattern Recognition (CVPR)*, 355-363.
- Dokur, E., Ceyhan, S., & Kurban, M. (2017). Finsler Geometry for Two-Parameter Weibull Distribution Function. *Mathematical Problems in Engineering*, 2017, 1-6.
- Estellers V, Zosso D, Bresson X, Thiran JP, 2013. Harmonic active contours. *IEEE Transactions on Image Processing*, 23 (1): 69–82.
- Jelena S, 2015. Anisotropic frameworks for dynamical systems and image processing. Ph. D. thesis, Univerzitet u Novom Sadu, Prirodnomatematički fakultet u Novom Sadu.
- Kilic H, Ceyhan S, 2021. Riemann anlamında eğri evrim modeli incelemesi: Görüntü segmentasyonu uygulaması. *Bilecik Şeyh Edebali Üniversitesi Fen Bilimleri Dergisi* 8 (2): 693–721.
- Kılıç, H. & Ceyhan, S. (2022). Yeni Bir Anizotropik Metrik Kullanılarak Renkli Görüntü İyileştirme. *30. IEEE Sinyal İşleme ve İletişim Uygulamaları Kurultayı*, (Yayın no, 276).
- Kimmel R, Sochen N, Malladi R, 1997. From high energy physics to low level vision. In *International Conference on Scale-Space Theories in Computer Vision*, 236–247.
- Kolmogorov V, Boykov Y, 2005. What metrics can be approximated by geo-cuts, or global optimization of length/area and flux. In *Tenth IEEE International Conference on Computer Vision (ICCV'05)*, 564–571.
- Kühnel W, 2015. *Differential geometry, Curves - Surfaces - Manifolds*, Volume 77. American Mathematical Soc., 3th edition.
- Lee JM, 2006. *Riemannian manifolds: An introduction to curvature*, Volume 176. Springer Science & Business Media.
- Melonakos J, Pichon E, Angenent S, Tannenbaum A, 2008. Finsler active contours. *IEEE Transactions on Pattern Analysis and Machine Intelligence*, 30 (3): 412–423.
- Pichon E, 2005. Novel methods for multidimensional image segmentation. Ph. D. thesis, Georgia Institute of Technology.
- Rund H, 2012. *The differential geometry of Finsler spaces*, Volume 101. Springer Science & Business Media.
- Shen YB, Shen Z, 2016. *Introduction to modern Finsler geometry*. World Scientific Publishing Company.
- Yajima, T., & Nagahama, H. (2009). Finsler geometry of seismic ray path in anisotropic media. *Proceedings of the Royal Society A: Mathematical, Physical and Engineering Sciences*, 465, 1763 - 1777.
- Yajima, T., & Nagahama, H. (2015). Finsler geometry for nonlinear path of fluids flow through inhomogeneous media. *Nonlinear Analysis-real World Applications*, 25, 1-8.
- Young JW, 1930. *Projective geometry*, Volume 4. American Mathematical Soc.
- Zach, C., Shan, L., & Niethammer, M. (2009). Globally Optimal Finsler Active Contours. *Pattern recognition: DAGM Symposium, proceedings. DAGM (Organization)*, 5748, 552-561.
- Zucchini R, 1991. A polyakov action on riemann surfaces. *Physics Letters B*, 260 (3-4): 296–302.
- Zucchini R, 1993. A polyakov action on riemann surfaces (ii). *Communications in mathematical physics*, 152 (2): 269–297.