

AKÜ FEMÜBİD 22 (2022) 051302 (998-1004)

AKU J. Sci. Eng. 22 (2022) 051302 (998-1004)

DOI: 10.35414/akufemubid.1124445

Araştırma Makalesi / Research Article

Kesirli Mertebeden Pseudo Hiperbolik Diferansiyel Denklemlerin Sonlu Fark Metodu ile Nümerik Çözümleri

Fatih ÖZBAĞ¹, Mahmut MODANLI²^{1,2} Harran Üniversitesi, Fen Edebiyat Fakültesi, Matematik Bölümü, Şanlıurfa.Sorumlu yazar e-posta: fozbag@harran.edu.tr ORCID ID: <http://orcid.org/0000-0002-5456-4261>e-posta: mmodanli@harran.edu.tr ORCID ID: <http://orcid.org/0000-0002-7743-3512>

Geliş Tarihi: 01.06.2022

Kabul Tarihi: 05.10.2022

Öz

Anahtar kelimeler

Kesirli Mertebeden
Pseudo Hiperbolik
Denklemler; Sonlu Fark
Metodu; Nümerik
Çözüm; Kararlılık.

Kesirli mertebeden diferansiyel denklemler mühendislik, fizik ve biyoloji gibi alanlarda matematiksel problemlerin modellenmesinde önemli yer almaktadır. Bu makalede kesirli mertebeden pseudo hiperbolik diferansiyel denklemler için bir başlangıç sınır değer probleminin sonlu fark metodu ile yaklaşık çözümleri araştırılmıştır. İlk olarak başlangıç sınır değer problemi için birinci mertebeden sonlu fark şeması oluşturulmuştur. Daha sonra bu sonlu fark şeması için kararlılık analizi yapılmıştır. Elde edilen teorik sonuçları desteklemek için örnek bir problemin farklı kesirli mertebeden türevlerinde gerçek ve yaklaşık çözümler için hata değerleri hesaplanmıştır. Uygulanan çözüm metodunun etkinliğini göstermek için bazı nümerik simülasyonlar verilmiştir.

Numerical Solutions of Fractional Order Pseudo Hyperbolic Differential Equations by Finite Difference Method

Keywords

Fractional Order
Pseudo Hyperbolic
Equation; Finite
Difference Method;
Numerical Solutions;
Stability.

Abstract

Fractional differential equations are useful for modelling mathematical issues in fields including engineering, physics, and biology. In this article, approximate solutions of an initial boundary value problem for fractional pseudo hyperbolic differential equations are investigated using the finite difference method. First, a first-order finite difference scheme is created for the initial boundary value problem. Then, stability analysis was performed for this finite difference scheme. In order to support the theoretical results obtained, error values were calculated for precise and approximate solutions in different fractional order derivatives of a sample problem. Some numerical simulations are also given to show the effectiveness of the applied solution method.

© Afyon Kocatepe Üniversitesi.

1. Giriş

Kesirli mertebeden kısmi diferansiyel denklemler klasik kısmi diferansiyel denklemlerin genellemeleridir. Tamsayı olmayan integral ve diferansiyel operatörlerin bilimi ve uygulamaları kesirli hesap olarak bilinir. Kesirli mertebeden diferansiyel denklemler mühendislik, fizik ve biyoloji gibi alanlarda matematiksel problemlerin modellenmesinde önemli yer almaktadır (Hilfer 2000, Ghanbari 2021, Kilbas *et al.* 2006, Poldlubny 1998, Ozbag and Modanli 2021). Literatürde kesirli mertebeli türevler için birçok tanım vardır. En yaygın olarak kullanılan kesirli türevler, Riemann-Liouville,

Caputo, Atangana–Baleanu ve Grünwald-Letnikov'dur.

Pseudo hiperbolik denklemler, zaman ve uzay değişkenlerine göre karışık kısmi türev içeren hiperbolik kısmi diferansiyel denklemlerdir. Bu tür denklemlerin tam ve yaklaşık sayısal çözümlerini elde etmek için çeşitli yöntemler vardır. Zhang *et al.* (2012) ve Liu *et al.* (2011) çalışmalarında H1-Galerkin karışık sonlu eleman yöntemine dayalı sayısal şemalar pseudo hiperbolik denklemler için oluşturulmuştur. Yeni bir yaklaşım çeşidi olarak rezidü güç serisi metodu (RPSM) pseudo hiperbolik

kısmi diferansiyel denklemlere uygulanmıştır (Modanlı *et al.* 2021). Potapova (2012)'de regülasyon metodu ve parametrelerin sürekliliği metodu kullanılarak pseudo hiperbolik denklemler için sınır değer probleminin düzenli çözülebilirliği ispatlanmıştır. Literatürde bu denklemleri hem analitik hem de sayısal olarak çözmek için çalışılan çeşitli yöntemler bulunmaktadır (Fedotov *et al.* 2016, Chen and Yang 1993, Zhao and Li 2019, Krutitskii 1997).

Modanlı *et al.* (2022) çalışmasında zamana göre birinci mertebeden türevde Caputo kesirli türevi alınarak ($0 < \alpha \leq 1$) pseudo parabolik diferansiyel denklemlerin çözümleri için modifiye çift Laplace ve açık sonlu fark metotları uygulanmıştır. Abdulazeez ve Modanlı (2022) çalışmasında yine birinci mertebeden türevde Caputo kesirli türevi alınarak ($0 < \alpha \leq 1$) pseudo hiperbolik telegraf kısmi diferansiyel denklemi için sonlu fark metodu uygulanmıştır. Çiçek ve Modanlı (2022) çalışmasında pseudo hiperbolik diferansiyel denkleminin homotopi pertürbasyon yöntemi ile yaklaşık çözümleri bulunmuştur. Bu makalede ise zamana göre ikinci mertebeden türevde Caputo kesirli türevi alınarak ($1 < \alpha \leq 2$) pseudo hiperbolik diferansiyel denklemler için çözüm araştırılmıştır.

Bu çalışmada $1 < \alpha \leq 2$ için aşağıda verilen

$$\begin{cases} \frac{\partial^\alpha v(t,x)}{\partial t^\alpha} = \frac{\partial^3 v(t,x)}{\partial t \partial x^2} + \frac{\partial^2 v(t,x)}{\partial x^2} + \Psi(t,x), \\ 0 < x < L, 0 < t < T, 1 < \alpha \leq 2, \\ v(0,x) = u_0(x), \frac{\partial v(t,x)}{\partial t} = u_1(x), \\ v(t,0) = v(t,L) = 0, \end{cases} \quad (1)$$

kesirli mertebeden hiperbolik kısmi diferansiyel denklem için bir başlangıç sınır değer probleminin yaklaşık çözümleri araştırılmıştır. Burada $u_0(x), u_1(x), \Psi(t,x)$ bilinen fonksiyonlar ve $v(t,x)$ bilinmeyen fonksiyondur. Ayrıca ele alınan kesirli türev Caputo kesirli türevidir ve tanımı aşağıdaki gibidir: $n - 1 < \alpha \leq n$ için α ncı dereceden zamana göre Caputo kesirli türevi

$$D_t^\alpha v(t,x) = \frac{1}{\Gamma(n-\alpha)} \frac{\partial^n}{\partial t^n} \int_0^t \frac{1}{(t-s)^{\alpha-n+1}} v(s,x) ds, \quad (2)$$

olarak tanımlanır.

Diğer taraftan, Caputo kesirli türevin en önemli avantajlarından biri, problemin formülasyonunda geleneksel başlangıç ve sınır koşullarının dahil edilmesine izin vermesidir. Dolayısıyla gerçek dünya problemlerini modellerken, Caputo türevi kullanılacak en iyi kesirli operatörlerden biridir (Qureshi and Yusuf 2019, Almeida *et al.* 2019, Baleanu *et al.* 2020).

Bu tür denklemlerin analitik çözümünü bulmak genellikle zordur, bu nedenle nümerik hesaplamalara dayalı yaklaşık çözüm gereklidir. Literatürde bu denklemin sayısal çözümü için sonlu farklar tekniği uygulanmamıştır. Bu makalede sonlu fark metodu ile yaklaşık çözümler araştırılmıştır. Bu yöntem, kısmi diferansiyel denklemlerin ayrıklaştırılmasında kullanılan en doğrudan yaklaşımdır. Sonlu fark yöntemi tipik olarak normal bir ızgara aralıkları üzerinde tanımlanır ve bu da hata payı çok daha küçük ve etkili çözüm yöntemleri için kullanılabilir. Ayrıca, bu yöntem, boyut başına boyut olarak tanımlanır; Bu, daha yüksek mertebeden doğruluk elde etmek için element mertebesini arttırmayı kolaylaştırır.

İlk olarak başlangıç sınır değer problemi için birinci mertebeden sonlu fark şeması oluşturulmuştur. Daha sonra bu sonlu fark şeması için kararlılık analizi yapılmıştır. Elde edilen teorik sonuçları desteklemek için örnek bir problemin farklı kesirli mertebeden türevlerinde gerçek ve yaklaşık çözümler için hata değerleri hesaplanmıştır. Uygulanan çözüm metodunun etkinliğini göstermek için bazı nümerik simülasyonlar verilmiştir. Hata analizi sonucunda grid noktaları arttıkça maksimum norm hatalarının azalma eğiliminde olduğu gözlemlenmiştir. Buradan kurulan şemanın doğru ve etkili olduğu sonucuna varılmıştır.

2. Materyal ve Metot

2.1 Sonlu Fark Metodunun Kararlılığı

İlk olarak x ve t eksenleri için düzgün aralıklar sırasıyla $h = \frac{L}{M}$ ve $\tau = \frac{T}{N}$ olacak şekilde tanımlansın. Bu durumda $x_n = nh$, $n = 0,1,2, \dots, M$ ve $t_k = k\tau$, $k = 0,1,2, \dots, N$ elde edilir. $1 < \alpha \leq 2$ için (2) denkleminin sonlu fark şeması

$$D_{\tau}^{\alpha} v_k \cong \frac{\tau^{-\alpha}}{\Gamma(3-\alpha)} \sum_{j=0}^{k-1} ((j+1)^{2-\alpha} - j^{2-\alpha}) (v_n^{k-j+1} - 2v_n^{k-j} + v_n^{k-j-1}) \quad (3)$$

şeklindedir. Denklemleri daha sade yazabilmek için $p_{\alpha,\tau} = \frac{\tau^{-\alpha}}{\Gamma(3-\alpha)}$ ve $b_j^{\alpha} = ((j+1)^{2-\alpha} - j^{2-\alpha})$ şeklinde alınacaktır. (1) problemi için birinci mertebeden fark şeması (3) denklemi ve sonlu fark metodu kullanılarak

$$\begin{cases} p_{\alpha,\tau} \sum_{j=0}^{k-1} b_j^{\alpha} (v_n^{k-j+1} - 2v_n^{k-j} + v_n^{k-j-1}) - \frac{1}{\tau} \left(\frac{v_{n-1}^k - 2v_n^{k+1} + v_{n+1}^k}{h^2} - \frac{v_{n-1}^{k-1} - 2v_n^k + v_{n+1}^{k-1}}{h^2} \right) - \frac{v_{n+1}^k - 2v_n^k + v_{n-1}^k}{h^2} = \Psi_n^k, \\ v_n^0 = u_0(x_n), \frac{v_n^1 - v_n^0}{\tau} = u_1(x_n), 0 \leq n \leq M, \\ v_0^k = v_M^k = 0, 0 \leq k \leq N \end{cases} \quad (4)$$

şeklinde elde edilir. Daha sonra (4) denklemi düzenlenerek

$$\begin{cases} p_{\alpha,\tau} \sum_{j=1}^{k-1} b_j^{\alpha} (v_n^{k-j+1} - 2v_n^{k-j} + v_n^{k-j-1}) + \frac{1}{\tau h^2} v_{n+1}^{k-1} + \left(-\frac{1}{\tau h^2} - \frac{1}{h^2} \right) v_{n+1}^k + \frac{1}{\tau h^2} v_{n-1}^{k-1} + \left(-\frac{1}{\tau h^2} - \frac{1}{h^2} \right) v_{n-1}^k + \left(\frac{2}{\tau h^2} + p_{\alpha,\tau} \right) v_n^{k+1} + p_{\alpha,\tau} v_n^{k-1} + \left(-\frac{2}{\tau h^2} + \frac{2}{h^2} - 2p_{\alpha,\tau} \right) v_n^k = \Psi_n^k, \\ v_n^0 = u_0(x_n), \frac{v_n^1 - v_n^0}{\tau} = u_1(x_n), 0 \leq n \leq M, \\ v_0^k = v_M^k = 0, 0 \leq k \leq N \end{cases} \quad (5)$$

biçiminde yazılabilir.

Başlangıç koşullarını kullanarak (5) fark şeması matris formunda yazılırsa

$$\begin{cases} v^1 = v^0 + k\tau, \\ Av^{k+1} = Bv^k + Cv^{k-1} - p_{\alpha,\tau} \sum_{j=1}^{k-1} b_j^{\alpha} (v_n^{k-j+1} - 2v_n^{k-j} + v_n^{k-j-1}) + \Psi_n^k, \\ v_n^0 = u_0(x_n), \frac{v_n^1 - v_n^0}{\tau} = u_1(x_n), 0 \leq n \leq M, \\ v_0^k = v_M^k = 0, 0 \leq k \leq N \end{cases} \quad (6)$$

elde edilir. Burada $\Psi_n^k = (\Psi_0^k, \Psi_1^k, \dots, \Psi_M^k)^T$, $\Psi_n^0 = u_0(x_n)$, $\Psi_n^k = \Psi(t_k, x_n)$, $1 \leq n \leq M$, $1 \leq k \leq N$ ve $v^k = (v_0^k, v_1^k, \dots, v_M^k)^T$ dir. Ayrıca, A bir köşegensel matris, B ve C simetrik matrislerdir. Başlangıç ve sınır koşulları dahil edilmediğinden dolayı A, B, C matrislerinin boyutu $(N-1) \times (N-1)$ dir ve aşağıdaki şekilde verilmiştir.

$$A = \begin{bmatrix} a & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & a & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & a & \dots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \dots & \ddots & \vdots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \dots & \vdots & a & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & a \end{bmatrix}, a = \frac{2}{\tau h^2} + p_{\alpha,\tau}$$

$$B = \begin{bmatrix} b & d & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ d & b & d & \dots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & d & b & \dots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \dots & b & d & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \dots & d & b & d \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & d & b \end{bmatrix},$$

$$b = -\frac{2}{\tau h^2} + \frac{2}{h^2} - 2p_{\alpha,\tau}, d = -\frac{1}{\tau h^2} - \frac{1}{h^2}.$$

$$C = \begin{bmatrix} c & e & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ e & c & e & \dots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & e & c & \dots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \dots & c & e & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \dots & e & c & e \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & e & c \end{bmatrix}, c = p_{\alpha,\tau}, e = \frac{1}{\tau h^2}.$$

A matrisinin normu $\|A\| = \|A\|_{\infty} = \max_{1 \leq k \leq N-1} \sum_{i=1}^{N-1} |a_{ki}|$ ve $A = [a_{ki}]_{(N-1) \times (N-1)}$ şeklindedir. (6) fark şeması formülü için aşağıdaki kararlılık teoremini verelim.

Teorem 1. Fark şeması formülü (6) denklemi kararlıdır.

İspat. (4) denkleminde $v_n^k = r^k e^{in\theta}$ Von-Neumann analiz metodu kullanılırsa

$$p_{\alpha,\tau} \sum_{j=0}^{k-1} b_j^{\alpha} (r^{k-j+1} - 2r^{k-j} + r^{k-j-1}) e^{in\theta} = \frac{1}{\tau h^2} (r^k e^{i(n-1)\theta} - 2r^{k+1} e^{in\theta} + r^k e^{i(n+1)\theta} - r^{k-1} e^{i(n-1)\theta} + 2r^k e^{in\theta} - r^{k-1} e^{i(n+1)\theta}) + \frac{r^k}{h^2} (e^{i(n+1)\theta} - 2e^{in\theta} + e^{i(n-1)\theta}) + \Psi_n^k$$

elde edilir. $n = 0, k = 1$ alınır

$$\frac{1}{\tau h^2} (r e^{-i\theta} - 2r^2 + r e^{i\theta} - e^{-i\theta} + 2r - e^{i\theta}) + \frac{r}{h^2} (e^{i\theta} - 2 + e^{-i\theta}) = 0$$

olur. Burada $\frac{e^{i\theta} + e^{-i\theta}}{2} = \cos\theta$ olmak üzere

$$-\frac{2}{\tau h^2} r^2 + \left(\frac{2\cos\theta}{\tau h^2} + \frac{2}{\tau h^2} - \frac{2}{h^2} + \frac{2\cos\theta}{h^2} \right) r - \frac{2\cos\theta}{\tau h^2} = 0$$

kuadratik denklemi elde edilir. Gerekli düzenleme yapıldıktan sonra

$$\frac{-2}{\tau h^2} r^2 + \left(\frac{4\cos^2 \frac{\theta}{2}}{\tau h^2} - \frac{4\sin^2 \frac{\theta}{2}}{h^2} \right) r - \frac{2\cos\theta}{\tau h^2} = 0$$

şeklinde yazılabilir. Bu denklemin kökleri arasında

$$\begin{aligned} r_1 + r_2 &= \frac{\frac{4\cos^2 \frac{\theta}{2}}{\tau h^2} - \frac{4\sin^2 \frac{\theta}{2}}{h^2}}{\frac{2}{\tau h^2}} \\ &= 2\cos^2 \frac{\theta}{2} - 2\tau \sin^2 \frac{\theta}{2} \leq 2\tau \cos^2 \frac{\theta}{2} - 2\tau \sin^2 \frac{\theta}{2} \\ &= 2\tau \cos\theta \leq 2\tau = \frac{2}{N} \leq 1 \end{aligned}$$

ve

$$r_1 r_2 = \frac{-\frac{2\cos\theta}{\tau h^2}}{-\frac{2}{\tau h^2}} = \cos\theta \leq 1$$

olduğundan $r_1 < 1$ ve $r_2 < 1$ elde edilir. Dolayısıyla (6) fark şeması kararlıdır.

3. Bulgular

Bu bölümde Teorem 1.'in uygulamaları için sayısal sonuçlar sunulmuştur ve oluşturulan fark şemalarının çözümü sayısal bir örnekle desteklenmiştir. Bu nedenle, kesirli mertebeden pseudo hiperbolik denkleminin aşağıdaki başlangıç-sınır değer problemini sayısal bir örnek olarak ele alıyoruz:

$$\begin{cases} \frac{\partial^\alpha v(t,x)}{\partial t^\alpha} = \frac{\partial^3 v(t,x)}{\partial t \partial x^2} + \frac{\partial^2 v(t,x)}{\partial x^2} + \Psi(t,x), \\ \Psi(t,x) = \left(t^2 + 2t + 1 + \frac{2t^{2-\alpha}}{\Gamma(3-\alpha)} \right) \text{Sin}x, \\ 0 < x < 1, 0 < t < 1, 1 < \alpha \leq 2 \\ v(0,x) = \text{Sin}x, \quad \frac{\partial v(t,x)}{\partial t} = 0, 0 \leq x \leq 1 \\ v(t,0) = v(t,1) = 0, 0 \leq t \leq 1. \end{cases} \quad (7)$$

(7) denkleminin tam çözümü $v(t,x) = (t^2 + 1)\text{Sin}x$ olarak veriliyor.

(7) probleminin yaklaşık çözümünü hesaplamak için

(5) formülü kullanılarak fark şeması oluşturulur.

$$\begin{cases} p_{\alpha,\tau} \sum_{j=1}^{k-1} b_j^\alpha (v_n^{k-j+1} - 2v_n^{k-j} + v_n^{k-j-1}) + \\ \frac{1}{\tau h^2} v_{n+1}^{k-1} + \left(-\frac{1}{\tau h^2} - \frac{1}{h^2} \right) v_{n+1}^k + \frac{1}{\tau h^2} v_{n-1}^{k-1} + \\ \left(-\frac{1}{\tau h^2} - \frac{1}{h^2} \right) v_{n-1}^k + \left(\frac{2}{\tau h^2} + p_{\alpha,\tau} \right) v_n^{k+1} + \\ p_{\alpha,\tau} v_n^{k-1} + \left(-\frac{2}{\tau h^2} + \frac{2}{h^2} - 2p_{\alpha,\tau} \right) v_n^k = \Psi_n^k, \\ x_n = nh, t_k = k\tau, 1 \leq k \leq N-1, 1 \leq n \leq M-1 \\ v_n^0 = \text{Sin}x, \quad \frac{v_n^1 - v_n^0}{\tau} = 0, 0 \leq n \leq M, \\ v_0^k = v_M^k = 0, 0 \leq k \leq N \end{cases} \quad (8)$$

Daha sonra bu sistem matris formunda yazılırsa

$$Wv_{n+1} + Yv_n + Zv_{n-1} = I\Psi_n \quad (9)$$

elde edilir. Başlangıç ve sınır koşulları da eklendiğinde W, Y ve Z $(N+1) \times (N+1)$ boyutunda kare matrislerdir ve I ise birim matristir. (9) denklem sistemini çözmek için modifiye Gauss eliminasyon metodu kullanıldı. $v(t,x)$ tam ve $v(t_k, x_n)$ yaklaşık çözümler olmak üzere maksimum norm hata analizi

$$\varepsilon = \max_{1 \leq k \leq N-1, 1 \leq n \leq M-1} |v(t_k, x_n) - v(t, x)| \quad (10)$$

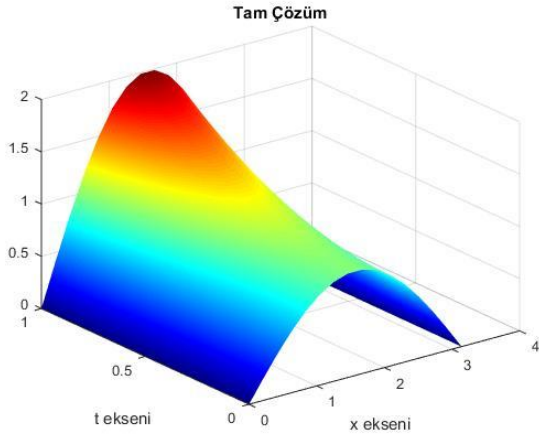
formülü ile hesaplanmıştır. Fark şeması (8) de α nın farklı değerleri 1.1, 1.5, 1.9 için hata analiz tablosu Çizelge 1'de verilmiştir.

Çizelge 1. Problem (7) için hata analizi.

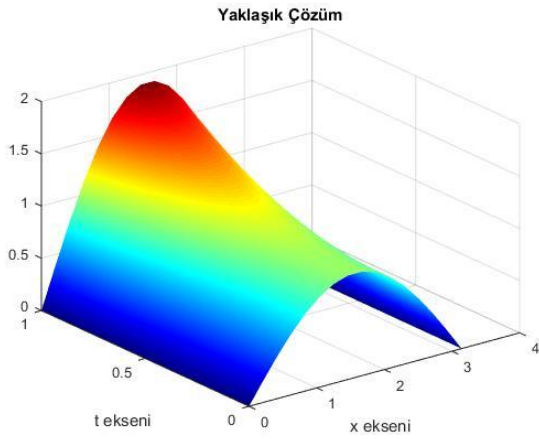
Fark şeması (8)					
N, M	N=25, M=5	N=150, M=10	N=400, M=15	N=1000, M=20	N=2500, M=25
$\alpha = 1.1$	0.1484	0.1004	0.0850	0.0611	0.0382
$\alpha = 1.5$	0.1415	0.0959	0.0810	0.0585	0.0368
$\alpha = 1.9$	0.1188	0.0859	0.0735	0.0535	0.0339

Hata analizi tablosundan oluşturulan fark şeması için yapılan sayısal hesaplamalarda hata payının 1'den küçük olduğu görülmektedir. Çizelge 1 oluşturulan fark şemasının doğruluğunu onaylamaktadır. Ayrıca her farklı α değeri için tam ve yaklaşık çözümlerin birbirlerine ne kadar benzer olduklarını göstermek için nümerik simülasyonları verildi.

Örnek problem (7)'nin tam ve yaklaşık çözümleri $\alpha = 1.1$ için Şekil 1 ve 2'de verilmiştir.

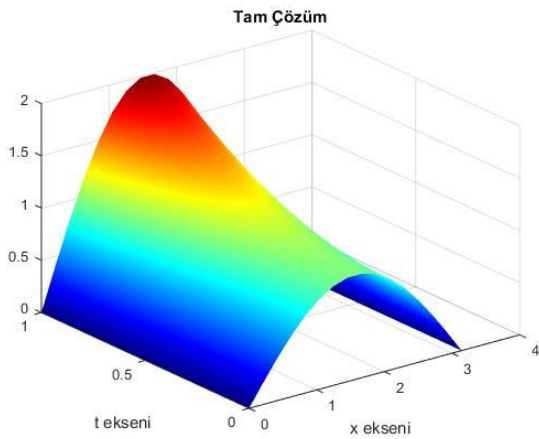


Şekil 1. $M=15$, $N=400$ ve $\alpha = 1.1$ için problem (7)'nin tam çözümü.

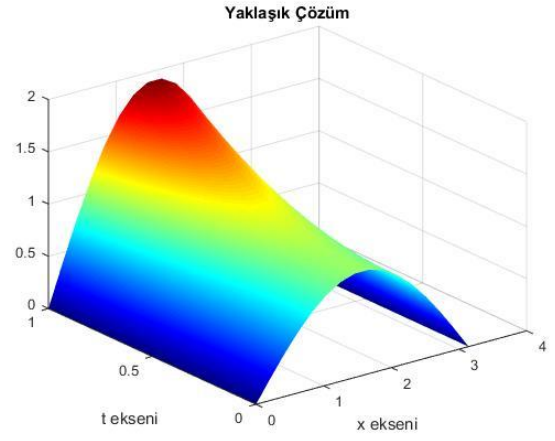


Şekil 2. $M=15$, $N=400$ ve $\alpha = 1.1$ için problem (7)'nin yaklaşık çözümü.

$\alpha = 1.5$ ve aynı N , M değerleri için problem (7)'nin tam ve yaklaşık çözümleri Şekil 3 ve 4'de verilmiştir.

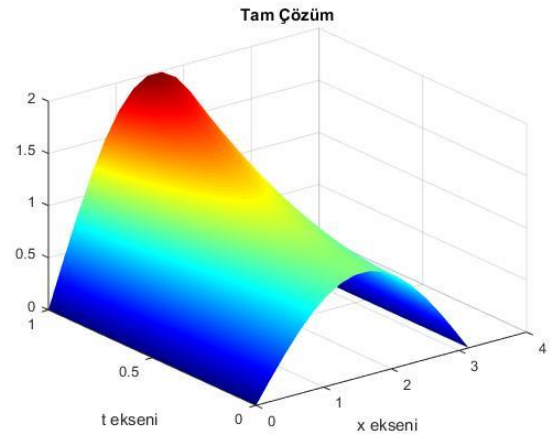


Şekil 3. $M=15$, $N=400$ ve $\alpha = 1.5$ için problem (7)'nin tam çözümü.

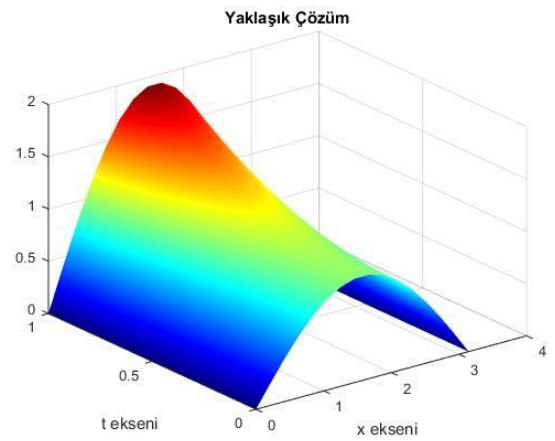


Şekil 4. $M=15$, $N=400$ ve $\alpha = 1.5$ için problem (7)'nin yaklaşık çözümü.

Son olarak $\alpha = 1.9$ için problem (7)'nin tam ve yaklaşık çözümleri Şekil 5 ve 6'de verilmiştir.



Şekil 5. $M=15$, $N=400$ ve $\alpha = 1.9$ için problem (7)'nin tam çözümü.



Şekil 6. $M=15$, $N=400$ ve $\alpha = 1.9$ için problem (7)'nin yaklaşık çözümü.

Şekil 1, 2, 3, 4, 5 ve 6'dan görüldüğü üzere nümerik sonuçlar ile teorik sonuçların tutarlı olduğu ve

oluşturulan fark şemasının ele alınan problem için doğru ve etkili olduğu sonucuna varıyoruz.

4. Tartışma ve Sonuç

Bu çalışmanın amacı, kesirli mertebeden pseudo hiperbolik diferansiyel denklemi için bir başlangıç-sınır değer probleminin tam çözümünün analitik olarak bulunamadığı durumlarda, bu problemi yüksek doğruluk oranında sayısal olarak çözebilecek bir metot ortaya koymaktır. Sonlu fark metodu ile oluşturulan fark şemasının kararlılık kestirimleri verildi. Bu kestirimlerle tutarlı farklı kesir değerleri için sayısal çözümler hesaplandı ve hata analiz tablosu ile bunlara karşılık gelen grafikler verildi. Matlab programı ile hesaplanan çıktılar, grid noktaları artarken maksimum norm hatasının azaldığını göstermektedir. Hata tablosu ve verilen şekillerden, çalışılan bu yöntemin ele alınan kesirli mertebeden pseudo hiperbolik diferansiyel denklem için iyi ve etkili bir yöntem olduğu açıkça görülmektedir.

5. Kaynaklar

- Abdulazeez, S. T. and Modanlı, M., 2022. Solutions of fractional order pseudo-hyperbolic telegraph partial differential equations using finite difference method. *Alexandria Engineering Journal*, **61(12)**, 12443-12451.
- Almeida, R., Brito da Cruz, A., Martins, N. and Monteiro, M. T. T., 2019. An epidemiological MSEIR model described by the Caputo fractional derivative. *International journal of dynamics and control*, **7(2)**, 776-784.
- Baleanu, D., Jajarmi, A., Mohammadi, H. and Rezapour, S., 2020. A new study on the mathematical modelling of human liver with Caputo–Fabrizio fractional derivative. *Chaos, Solitons & Fractals*, **134**, 109705.
- Chen, G. and Yang, Z., 1993. Initial value problem for a class of nonlinear pseudo-hyperbolic equations. *Acta Mathematicae Applicatae Sinica*, **9(2)**, 166-173.
- Çiçek, H. ve Modanlı, M., 2022. Kesirli mertebeden pseudo hiperbolik kısmi diferansiyel denkleminin homotopi pertürbasyon yöntemiyle yaklaşık çözümü. *Uşak Üniversitesi Fen ve Doğa Bilimleri Dergisi*, (Basım aşamasında).
- Fedotov, I., Shatalov, M. and Marais, J., 2016. Hyperbolic and pseudo-hyperbolic equations in the theory of vibration. *Acta Mechanica*, **227(11)**, 3315-3324.

- Ghanbari, B. 2021. A new model for investigating the transmission of infectious diseases in a prey-predator system using a nonsingular fractional derivative. *Mathematical Methods in the Applied Sciences*, 1-20.
- Hilfer, R., 2000. Applications of Fractional Calculus in Physics, Rudolf Hilfer, World Scientific Publishing, 1-85.
- Kilbas, A. A., Srivastava, H. M. and Trujillo J. J., 2006. Theory and applications of fractional differential equation, 204, Jan van Mill, Elsevier, 1-463.
- Krutitskii, P. A., 1997. An initial-boundary value problem for the pseudo-hyperbolic equation of gravity-gyroscopic waves. *Journal of Mathematics of Kyoto University*, **37(2)**, 343-365.
- Liu, Y., Wang, J., Li, H., Gao, W. and He, S., 2011. A new splitting H1-Galerkin mixed method for pseudo-hyperbolic equations. *International Journal of Mathematical and Computational Sciences*, **5(3)**, 413-418.
- Modanlı, M., Abdulazeez, S. T. and Husien, A. M., 2021. A residual power series method for solving pseudo hyperbolic partial differential equations with nonlocal conditions. *Numerical Methods for Partial Differential Equations*, **37(3)**, 2235-2243.
- Modanlı, M., Göktepe, E., Akgül, A., Alsallami, S. A., and Khalil, E. M., 2022. Two approximation methods for fractional order Pseudo-Parabolic differential equations. *Alexandria Engineering Journal*, **61(12)**, 10333-10339.
- Ozbag, F. and Modanlı, M., 2021. On the stability estimates and numerical solution of fractional order telegraph integro-differential equation. *Physica Scripta*, **96(9)**, 094008.
- Podlubny, I., 1998. Fractional differential equations: an introduction to fractional derivatives, fractional differential equations, to methods of their solution and some of their applications, 198, Elsevier, 1-340.
- Potapova, S. V., 2012. Boundary value problems for pseudohyperbolic equations with a variable time direction. *Journal of Pure Applied Mathematics*, **3(1)**, 73-91.

Qureshi, S. and Yusuf, A., 2019. Modeling chickenpox disease with fractional derivatives: From caputo to atangana-baleanu. *Chaos, Solitons & Fractals*, **122**, 111-118.

Zhang, Y., Niu, Y. and Shi, D., 2012. Nonconforming H1 - Galerkin mixed finite element method for pseudo-hyperbolic equations. *American Journal of Computational Mathematics*, **2**, 269-273.

Zhao, Z., and Li, H., 2019. A continuous Galerkin method for pseudo-hyperbolic equations with variable coefficients. *Journal of Mathematical Analysis and Applications*, **473(2)**, 1053-1072.