

## Fonksiyonlarla İlgili Bazı Kavram Yanılgıları

Merve ÖZKAYA<sup>1</sup>

Tevfik İŞLEYEN<sup>2</sup>

---

### Özet

Bu çalışmanın amacı ilköğretim matematik öğretmenliği birinci sınıf öğrencilerinin fonksiyonlarda tanım ve görüntü kümesi ile ilgili sahip oldukları kavram yanılgılarını belirlemektir. 2011-2012 öğretim yılında gerçekleştirilen bu çalışma, ilköğretim matematik öğretmenliği 1. sınıfta öğrenim gören 57 öğrenciyle yürütülmüştür. Araştırmada betimsel yöntem kullanılmıştır. Veriler, araştırmacılar tarafından hazırlanan kavram yanılgısı testi ve yarı yapılandırılmış görüşmelerle toplanmıştır. Elde edilen verilerin analizinden, fonksiyonlardaki tanım ve görüntü kümesini belirlemeye yönelik kavram yanılgıları; cebirsel ve geometriksel olarak iki kategoriye ayrılmıştır. Tanım ve görüntü kümesini cebirsel olarak belirlemede en çok dikkat çeken kavram yanılgısı aşırı genellemedir. Geometriksel olarak belirlemede ise öğrencilerin tanım ve görüntü kümesini grafik altında veya üstünde kalan alan olarak göstermeleridir.

*Anahtar Kelimeler:* Kavram yanılgısı, tanım kümesi, görüntü kümesi

## Some Misconceptions Related to Functions

### Abstract

The purpose of this study is to determine first grade pre-service elementary school mathematics teachers' misconceptions about the domain and range sets for the functions. This study realizing in 2011-2012 academic year is conducted to 57 first grade students who were enrolled in the department of elementary school mathematics education. In this study, descriptive method is used. The data were gathered from misconception test and semi-structured interviews which were prepared by the researcher. According to the analysis of the data gathered, students' misconceptions about identifying domain and range sets for the functions were divided into two categories as algebraic and geometrical. The most noticeable misconception about identifying domain and range sets for the functions with respect to algebraic category is overgeneralization. Further, geometrically students showed domain and range sets as area above or under the graphic.

*Keywords:* Misconception, domain, range

---

<sup>1</sup> Atatürk Üniversitesi Kazım Karabekir Eğitim Fakültesi, Erzurum - TÜRKİYE  
E-posta: mdurkaya@atauni.edu.tr

<sup>2</sup> Atatürk Üniversitesi Kazım Karabekir Eğitim Fakültesi, Erzurum - TÜRKİYE  
E-posta: tisleyen@atauni.edu.tr, tevfikisleyen@gmail.com

## Giriş

Matematik eğitimi, matematik öğrenme ve öğretme sürecinin tamamını içine alır. Bu süreçteki bütün etkinlikler zihinsel becerilere yöneliktir (Anıl, 2007). Öğrencilerin bu becerileri kazanmaları onların kavram ve kavramsal yapıları zihinlerinde oluşturmalarıyla yakından ilişkilidir. “Kavramlar, toplumsal olarak kabul edilmiş sözcüklerin anlamını ifade edebileceği gibi ortak özellikleri olan nesne, olay, fikir ve davranışların oluşturduğu sınıflamaların soyut temsilcisi olarak da ifade edilebilir” (Albayrak, 2000: 43). Bireylerde ise kavramların oluşumu genelleme ve soyutlama ile olur. Soyutlama, özelliği nesneden ayırır, genelleme ise birden çok nesnede ortak kullanılır (Öncül, 2000’den akt. Pesen, 2008). İster genelleme ister soyutlama yoluyla oluşturulsun, kavramların zihinde oluşumu sırasında meydana gelen bazı olumsuz durumlar bireyleri geri dönüşü oldukça zor olan yanlış kavrayışlara sürükleyebilir. Bu yanlış kavrayışlar kavram yanlışlarına sebebiyet verebilir. Özellikle matematik için, kavram yanlışlığı, çoğunlukla öğrencinin önceki öğrenmelerinden kaynaklanmış, şu anda bilimsel olarak kabul gören görüşlerden farklı kavrayış, sistematik olarak hata üreten öğrenci kavrayışı anlamındadır (Smith vd., 1993). Görüldüğü gibi kavram yanlışlığı ve hata kavramı birbiri içerisinde yer almaktadır. Bu nedenle ikisi arasındaki farkın ortaya konulması önem taşımaktadır. Burada işlemsel hata, kavram yanlışlığı ve hata arasındaki farkın ifade edilmesi gerekir. İşlemsel hata, çözüm sürecinde verilen yanlış cevaplardır. Hem uzman hem de deneyimsiz kişiler tarafından dikkatsizlik sonucu ve nadiren yapılabilir. Kolay bir şekilde ortaya çıkarılır ve hemen düzeltilir. Hata, uygulamadan kaynaklanan yanlış cevaplardır. Hatalar, belli kavramsal yapıların oluşmasına sebep olur. Bunlar kavramsal hataların sebeplerini meydana getirir. Kavram yanlışlığı ise sistematik kavramsal hatalara sebep olan bilişsel yapının temelindeki inançlar ve esaslardır (Olivier, 1989). Yeni araştırmalarda, öğrencilerin çoğununun matematikle ilgili kavram yanlışlığına sahip olduğu belirlenmiştir. Öğrencilerin önceden zihinlerinde oluşturdukları teoriler bu kavram yanlışlığının en büyük sebeplerinden biridir (Mestre, 1989).

Matematiksel düşünme becerilerini geliştiren fonksiyon üniversitelerde ve liselerde önemli bir yere sahiptir (Polat ve Şahiner, 2007; Dubinsky ve Harel, 1992). Soyut boyutu oldukça ağır (Dreyfus, 1990) ve anlaşılması oldukça karmaşık bir süreç içeren ve matematik ders programlarının önemli bir konusu olan fonksiyon, kavramlar arası geçişleri sağlamaktadır (Selden ve Selden, 1992). Fonksiyon kavramında, öğrencilerin yaşadığı sıkıntıların temeli soyut olan kavramın kendisinden kaynaklanmaktadır (Bayazıt, 2010). Bu sıkıntıları ortadan kaldırmak için ise birçok öneri sunulmuştur. NCTM (2000)’de cebir öğrenme alanı içerisindeki fonksiyon kavramı için diğer

cebir konularında olduğu gibi sayısal ifadelerin temsillerine göre kavramların ve bir genellemeye varılabilecek matematiksel düşünme yollarının oluşturulması gerektiği ifade edilmiştir. Fey tarafından 1992 yılında geliştirilmiş bir öğrenme aracı olarak bilgisayarların aktif olduğu CIA metodunu kullanan O'callaghan (1998), bu metodun fonksiyonları modelleme, farklı formlara çevirme ve sözel olarak ifade etmede etkili olduğunu belirtmiştir. Aksine, Nagel (1994) çalışmasında teknolojinin fonksiyonlardaki çoklu temsiller arasındaki geçişlerde etkili bir yol olmadığını göstermiştir. Fonksiyonlarda çoklu temsillerin kullanılıyor olması ve bu temsiller arasında geçişlerin varlığı kavramın anlaşılmasını güçlendirmektedir (Dreyfus ve Eisenberg, 1982; Eisenberg, 1991). Fonksiyonun sembolik ve grafiksel özellikleri arasında ilişki kurulamamaktadır (Zachariades vd., 2002). Karşılaşılan bu tür problemlerin üstesinden gelebilmek için fonksiyonların çoklu temsilleri arasındaki ilişkiler güçlendirilmelidir (Akkoç, 2004).

Matematiğin önemli konularından biri olan fonksiyon kavramı ile ilgili birçok çalışma yapılmıştır. İlköğretim matematik, fen bilgisi ve sınıf öğretmenliği birinci sınıf öğrencileri için bağıntı ve fonksiyon kavramı zor öğrenilen kavramlar arasında yer almaktadır (Tatar vd., 2008). Vinner ve Dreyfus (1989), öğrencilerin fonksiyon tanımını anlamada zorlandıklarını ifade etmişler; fonksiyon tanımının, öğrencilere verilmiş olan örneklerin genel bir temsili olarak oluşturulması gerektiğini belirtmişlerdir. Lise birinci sınıf öğrencileri birebir ve örten olmayı fonksiyonun tanımı olarak algılayıp kavram yanılışına düşmüşlerdir (Güveli ve Güveli, 2002). Akkoç (2004) öğrencilerin çok az bir kısmının fonksiyonu düşünürken tanımsal özellikleri dikkate aldığını ifade etmiş, bununun sebebi olarak ise tanımsal özellikleri ortaya çıkaracak örneklere yer verilmemesini göstermiştir. Öğrenciler fonksiyonu tanımlarken de açık ifadeler kullanmamışlar, fonksiyonla ilişkili birkaç kelimeyle fonksiyonunun tanımını vermeye çalışmışlardır (Aydın ve Köğçe, 2008). Yine fonksiyonu, birebir fonksiyonmuş gibi algılayıp, tanımı o şekilde vermişlerdir (Dubinsky ve Harel, 1992; Vinner ve Dreyfus, 1989; Elia ve Spyrou, 2006).

Fonksiyon, öğrenciler tarafından aritmetik işlemlerin sürdürüldüğü bir formül olarak düşünülmektedir. Değişkenler arasında ilişkileri belirleyen öğrenciler, bir formül oluşturarak fonksiyonu ortaya koymaya çalışmışlardır. Formül oluşturamadıkları durumda ise kesin çözüm arayışına girmişlerdir (Breidenbach vd., 1992). Ayrıca fonksiyonun cebirsel olarak gösterilmesinde grafik olarak gösterimine göre daha fazla başarı oranı saptanmıştır (Elia ve Spyrou, 2006). Öğrenciler, fonksiyonun grafiğinin ise kopmaması gerektiğini yani bir süreklilik arz etmesi gerektiğini ifade etmişlerdir (Elia ve Spyrou, 2006; Tall ve Bakar, 1992; Vinner, 1983; Even, 1990). Fonksiyon

grafliğini bu şekilde olması gerektiğini düşünen öğrencilerde kavramsal olarak bazı boşluklar olduğu açıktır. Bayazıt (2010: 96)'ın da belirttiği gibi bu durum “öğrencilerin fonksiyonların grafiksel formlarına ilişkin kavram imajlarının sadece düzgün ve sürekli doğru veya eğri şeklindeki grafiklere kısıtlanmış” olduğunu göstermektedir.

Fonksiyonlardaki kavram yanılgıları ve zorluklar yedi etki altında toplanmıştır. Bunlar:

- 1) Fonksiyonu bire-bir eşleme yapan bir bağıntı olarak görme
- 2) Liste biçiminde yazılımlara ilişkin zorluklar
- 3) Fonksiyon grafiklerine ilişkin öğrenci yanılgıları
- 4) Cebirsel ifadelerle ilişkin öğrenci zorlukları ve yanılgıları
- 5) Fonksiyonlar konusunda kullanılan sembol ve simgelere ilişkin zorluklar
- 6) Fonksiyonların alt kavramlarına yönelik zorluklar
- 7) Fonksiyonun temsilleri arasındaki mânâsal ilişkilerin anlaşılmasına ilişkin zorluklar (Bayazıt, 2010: 92-104).

Fonksiyonla ilgili öğrencilerin karşılaştıkları düşünce tarzlarından biri fonksiyonu “bir kümeden başka bir kümeye eleman eşleyen özel bir bağıntı olarak” tanımlamaktadır. “Bu yaklaşım, fonksiyonu tanım ve değer kümelerinden bağımsız tek bir matematiksel varlık olarak algılamakla birlikte tanım ve değer kümelerini fonksiyonun ayrılmaz parçaları olarak kabul etmektedir” (Bayazıt ve Aksoy, 2010: 698). Fonksiyonlardaki tanım ve değer kümesini oluşturan rasyonel, irrasyonel ve reel sayılar gibi sayı sistemlerinin tam olarak anlaşılmamış olması da fonksiyonların kavranmasına engel oluşturmaktadır (Even, 1990). Fonksiyonların kavranmasına engel teşkil eden bir başka durum ise temel kavramlardır. Fonksiyon kavramının oluşmasını sağlayan temel kavramlar, öğrencilerin zihninde yeterli düzeyde oluşmamıştır (Moralı ve Köroğlu, 2004). Ayrıca fonksiyonun kavranmasında yaşanan zorlukların nedeni tanım kümesi, değer kümesi, görüntü kümesi gibi temel kavramlarında içinde bulunduğu epistemolojik nedenlerdir (Sierpinska, 1992'den akt. Sajka, 2003).

Bu çalışmada; öğrencilerin fonksiyondan bağımsız olarak düşünemeyeceği tanım kümesi ve görüntü kümesi üzerinde durulacaktır. Fonksiyonun her türlü formunda tanım ve görüntü kümesinden bahsedilmektedir. Aslında bu kavramlar, fonksiyonun temelinde yer alan kavramlardır. Ama literatürde tanım ve görüntü kümesiyle ilgili çalışmalara

fazla rastlanmamıştır. Tanım ve görüntü kümesini içselleştirememiş bir öğrenci için, fonksiyonunun farklı temsillerini anlamlandırmak ve bu temsiller arasındaki geçişleri sağlamak oldukça zor olabilir. Verilen bir fonksiyonun tanım ve görüntü kümesini belirlerken, öğrencilerin işlettikleri zihinsel süreçler önem taşımaktadır. Bahsedilenler göz önüne alınarak, bu çalışmanın amacı ilköğretim matematik öğretmenliği birinci sınıf öğrencilerinin fonksiyonlardaki tanım ve görüntü kümesi kavramlarında sahip oldukları kavram yanlışlarının belirlenmesidir.

## **Yöntem**

İlköğretim matematik birinci sınıf öğrencilerinin fonksiyonlardaki tanım ve görüntü kümesi kavramlarında sahip oldukları kavram yanlışlarını belirlemenin amaçlandığı bu çalışmada, deneysel olmayan desenlerden betimsel çalışma yöntemi kullanılmıştır. Betimsel çalışma, var olan bir durumu özetler ve ayrıca “Nedir?” sorusuna cevap arar (McMillan ve Schumacher, 2006: 215). Bu yöntem uygun olarak, öğrencilerin tanım ve görüntü kümesiyle ilgili sahip oldukları kavram yanlışlarının neler olduğu ortaya konulmuş ve kavram yanlışları belirlenirken var olan durumlara hiçbir müdahalede bulunulmadan, bu durumlar olduğu gibi aktarılmıştır.

## ***Verilerin Toplanması***

Bu çalışmanın örneklemini İlköğretim Matematik Öğretmenliğinde okuyan 57 adet 1. sınıf öğrencisi oluşturmaktadır. Katılımcılar, üniversite 1. sınıfta olup iki aşamalı sınavla bu bölüme gelmişlerdir. Fonksiyonlar konusu hem matematik öğretim programında yer almakta hem de üniversite birinci sınıf dersi olan genel matematik dersinin konuları arasında bulunmaktadır. Yani öğrenciler fonksiyon konusuna ayrıca bu konunun temeli olan tanım ve görüntü kümesi kavramlarına yabancı değillerdir. Bu durum göz önüne alınarak araştırmacılar tarafından on yedi açık uçlu sorudan oluşan bir test hazırlanıp katılımcılara uygulanmıştır. Bu on yedi sorudan, birinci soru hariç, diğer sorulardan benzer olanlar ikişer ikişer bir araya getirilmek kaydıyla sekiz kısım oluşturulmuştur. Her bir kısım için öğrencilerin yaptıklarına göre kategoriler meydana getirilmiştir. Daha sonra ise her bir kategori gruplandırılmıştır. Her bir grup için de bir kod kullanılmıştır. Ardından yarı yapılandırılmış görüşmeler gerçekleştirilmiştir. En son ise her bir kısım için ortaya çıkan kavram yanlışları belirlenmiştir.

## ***Veri Toplama Aracı***

Veriler, araştırmacılar tarafından fonksiyonlarda tanım ve görüntü kümesindeki kavram yanlışlarını belirlemeye yönelik hazırlanan on yedi açık uçlu sorudan oluşan kavram yanlışları testiyle toplanmıştır. İlk dokuz

soru, fonksiyonlardaki tanım ve görüntü kümesini cebirsel olarak belirlemeye yöneliktir. Burada verilen fonksiyonların bir kısmının tanım kümesi tamsayılardan alınmıştır. O yüzden fonksiyonlar sadece  $y = f(x)$  şeklinde cebirsel kuraldan ibaret değildir. Diğer sekiz soru ise fonksiyonlardaki tanım ve görüntü kümesini geometriksel olarak belirlemeye yöneliktir. Birinci soruda tanım ve görüntü kümesi çok kolay belirlenebilmektedir. Diğer on altı soruda ise sekiz soru tipi mevcuttur. Testte, her soru tipinden birbirine paralel iki soru yer almaktadır. Bu birbirine paralel sorular peş peşe verilmemiştir. Böylelikle öğrencilerin gerçek anlamda bir kavram yanılığısına sahip olup olmadığı ortaya konmaya çalışılmıştır. Sorular hazırlanırken uzman görüşleri alınmıştır. İlk önce her bir yanılığı belirlemeye yönelik bir soru hazırlanmıştır. Daha sonrasında ise testteki soruların sayısının artırılmasına karar verilmiştir. Testin uygulanması esnasında yeterli süre verilmiş, gerekli açıklamalar dışında müdahalede bulunulmamıştır.

Diğer bir veri toplamı aracı ise yarı yapılandırılmış görüşmelerdir. Görüşmeler on üç öğrenci ile gerçekleştirilmiştir. Her bir öğrenci ile yapılan görüşme, yaklaşık on beş dakika sürmüştür. Görüşmeler esnasında katılımcıların teyidi ile veriler doğrulanmaya çalışılmıştır. Görüşmelerden elde edilen veriler, ayrıntılı bir şekilde betimlenmiştir.

### ***Verilerin Analizi***

İkişer ikişer benzer soruların bir kısım oluşturması koşuluyla belirlenen sekiz kısım için öğrencilerin cevaplarına göre kategoriler oluşturulmuştur. Kategoriler; her iki soruda da benzer çözüm yollarını kullanmayanlar, en az bir soruyu boş bırakanlar, her iki soruda da aynı çözüm yolunu kullananlardır. Yine öğrenci cevaplarına göre her iki soruda da aynı çözüm yolunu kullananlar kategorisinde kodlamalar yapılmıştır. Daha sonrada yapılan görüşmeler betimsel analize tabi tutulmuştur.

### **Bulgular**

#### ***Fonksiyonlardaki Tanım ve Görüntü Kümesini Cebirsel Olarak Belirlemeye Yönelik Kavram Yanılığları***

Birinci soru doğrusal bir fonksiyonun tanım ve görüntü kümesini bulmaya yöneliktir. Çok açık olarak hem tanım hem de görüntü kümesi reel sayılardan oluşur. Her şeyin açık olarak belirtildiği bu soruda üç öğrenci görüntü kümesini belirlerken sadece pozitif reel sayıları almışlardır. Bir öğrencinin ise gösterimlerde sıkıntısı olduğu ortaya çıkmıştır. Geriye kalan tüm öğrenciler doğru cevap vermiştir.

Aynı amaca hizmet eden iki ve dokuzuncu sorular ise rasyonel olarak verilen bir fonksiyonunun tanım ve görüntü kümesini bulmaya yöneliktir. Her bir soruda farklı çözüm yolları kullanan yirmi öğrenci vardır. En az bir soruyu boş bırakan kategorisinde iki öğrenci yer almaktadır. Her iki soruya da benzer cevap veren kategorisinde ise bazı kodlar oluşturulmuştur. Tanım kümesini doğru yapan ve her iki soruda aşırı genellemeye giderek görüntü kümesini reel sayılar olarak belirleyen yirmi yedi öğrenci vardır. Hiç de yadsınamayacak bu sayı aşırı genelleyerek görüntü kümesini reel sayılar bulan kodu altında yer almıştır. İki öğrenci her iki soruya da doğru cevap vermiştir. İki ve daha az öğrencinin yerleştiği kodlar ise birleştirilerek diğer kodu altında toplanmıştır. Öğrencilerde aşırı genelleme sonucu görüntü kümesini belirleyememe kavram yanlışlığının var olduğu söylenebilir. Bu durumlar aşağıdaki tabloda özetlenmiştir.

**Tablo 1: Öğrencilerin 2. ve 9. soruya verdikleri cevaplarla oluşturulmuş frekans tablosu**

Her iki soruda da benzer çözüm yollarını kullanmayanlar	En az bir soruyu boş bırakanlar	Her iki soruda da aynı çözüm yolunu kullananlar	Aşırı genelleyerek görüntü kümesini reel sayılar bulan	Doğru çözümü yapan	Diğer
20	2	27	2	6	

Aşırı genelleme sonucu görüntü kümesini belirleyememe kavram yanlışlığına sahip olduğu düşünülen yirmi yedi öğrenciden rastgele seçilmiş biriyle yarı yapılandırılmış bir görüşme gerçekleştirilmiştir. KB olarak kodlanan bu öğrencinin, kâğıdındaki cevabı ve görüşmeden alınan alıntı aşağıda verilmiştir.

2.  $f(x)=\frac{1}{x-1}$  fonksiyonunun tanım ve görüntü kümesini bulunuz.

$\forall x \in \mathbb{R} - \{1\} \rightarrow$  Tanım kümesi / den kümesi;  
 $x-1 \neq 0$  ( $x \neq 1$ ) olmalıdır. ( $1/0 \rightarrow$  Tanımsız)  
 Görüntü kümesi  $\mathbb{R}$ ;  $\mathbb{R}$  / den  
 $\mathbb{R} - \{1\} \rightarrow \mathbb{R} //$

9.  $f(x) = \frac{x-1}{x+1}$  fonksiyonunun tanım ve görüntü kümesini bulunuz.

$$\begin{array}{l} x+1 > 0 \\ \textcircled{x > -1} \\ \text{Görüntü: } \frac{\mathbb{R}}{0} \rightarrow \text{tanımsız olmaması} \\ \text{İm 1'i çıkarırız.} \end{array} \quad \mathbb{R} - \{ -1 \} \rightarrow \mathbb{R}$$

A:  $f(x)=1/x$  fonksiyonunun tanım ve görüntü kümesini bulur musun?

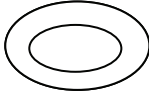
**KB:**  $\frac{1}{x} = y$  ise  $x = \frac{1}{y}$ . Şimdi bizim reel sayılar kümesinde, tanım kümesinden herhangi bir değeri verdiğimizde sağlar. Ama görüntü kümesinde çıkar. Burada  $x$ 'in sıfırdan büyük olması gerekir. Çünkü  $\frac{1}{x}$  tanımsız olduğu için yani reel sayılar kümesinde tanımsız olduğu için, değer kümesinde-görüntü kümesinde reel sayılar olmadığı için bu yüzden tanım kümesinden sıfırı çıkaracağız. Bu fonksiyon, sıfır haricinde her sayıyı verdiğimizde değer kümesindeki sayıları sağlar. O yüzden  $f: \mathbb{R} - \{0\} \rightarrow \mathbb{R}$  dir.

A: Peki yazdığın fonksiyonda değer kümesi neresidir bana gösteriri misin?

**KB:** Değer kümesi?

A: Yazdığın fonksiyonda değer kümesi neresidir bana gösterir misin?

**KB:**  $\mathbb{R} - \{0\}$  dir. Görüntü kümesi de  $\mathbb{R}$  dir. Aslında yanlış dedim galiba, şöyle diyeyim.



Dışarıdaki görüntü kümesidir. İçerideki de değer kümesidir. Değer kümesi de  $x$ 'leri sağlayan sayılar olduğu için değer kümesi adını alır.

Yukarıda görüldüğü gibi KB'nin, kavram yanılışı testindeki iki ve dokuzuncu soruya verdiği cevap ile görüşmede sorulan soruya verdiği cevap paraleldir. Hatta görüşmede bu tip bir soruda öğrencinin kavram yanılışına sahip olduğu anlaşılmaktadır. Tanım ve görüntü kümesini bulurken kullandığı ifadeler bakılırsa çok da anlamlı bir sonuç elde edilemez. Ama çok anlamlı olmayan, kendi zihninde oluşturduğu bu yöntemle fonksiyonun tanım ve görüntü kümesini belirlemiştir. Başka bir hususta öğrencinin değer ve görüntü kümesini birbirine karıştırıyor olmasıdır. Kısacası bu öğrenci de aşırı genelleme sonucu görüntü kümesini belirleyememe kavram yanılışı mevcuttur. Tanım ve görüntü kümesini belirlerken işlettiği zihinsel süreç ise bilimsellikten tamamen uzaktır.

Üçüncü ve sekizinci sorularda sınırlı sayıda elemandan oluşan bir kümeden reel sayılara tanımlı bir fonksiyon verilmiş ve bu fonksiyonun görüntü kümesinin bulunması istenmiştir. Üç elemanlı olan tanım kümesi göz önüne alınarak görüntü kümesini belirleyen öğrencilerin görüntü



kümesini belirlerken zorlanmadıkları anlaşılmaktadır. Öğrencilerden biri işlem hatasına düşmüşken, biri ise sadece üç elemandan oluşması gereken görüntü kümesini aralık olarak göstermiştir. Geri kalan tüm öğrenciler her iki soruya da cevap vermiştir. Bu durumda, bir kavram yanlışlığı söz konusu değildir.

Dört ve altıncı sorular, bir aralıktan reel sayılara tanımlı fonksiyonlardan oluşur. Öğrencilerden tanım kümesi bir aralık olan fonksiyonun görüntü kümesini bulmaları istenmiştir. Her bir soruda farklı çözüm yolları kullanan on bir öğrenci vardır. En az bir soruyu boş bırakan yedi öğrenci vardır. Her iki soruya da benzer cevap verenlerin oluşturulduğu kategoride otuz dokuz cevap yer almaktadır. Bu kategoride yer alan aralıktaki tamsayı değerlerini koyarak görüntü kümesini bulan kodunda, yirmi dört öğrenci yer almaktadır. Burada, öğrencilerin herhangi bir aralıkta sonsuz reel sayının olduğunu düşünememe kavram yanlışlığına sahip olduğu belirlenmiştir. Bu kavram yanlışlığının sebebinin pedagojik ya da psikolojik olduğu bilinmemektedir. Altı öğrenci ise sadece aralıktaki uç noktaları yazarak yeni bir aralık belirlemişlerdir. Öğrenciler, verilen fonksiyonu göz önüne almamışlardır. Burada oluşan kavram yanlışlığı ise verilen fonksiyon düşünülmeden sadece tanım kümesinden yola çıkarak görüntü kümesini bulmaya odaklanmadır. Üç öğrenci ise tanım kümesindeki yani aralıktaki tamsayı değerlerini fonksiyonda yerine yazarak bulduğu en küçük ve en büyük değerleri sınır yapıp tekrar bir aralık oluşturmuştur. Burada bir anlamda verilen fonksiyon göz önüne alınmıştır. Fakat sadece aralıktaki birkaç tamsayı değeriyle görüntü kümesini belirlemek öğrencileri yanlışlığa sürüklemiştir. Diğer kodunda ise altı öğrenci yer almaktadır. Her bir kod ve kategorinin frekans tablosu aşağıdaki gibidir.

**Tablo 2: Öğrencilerin 4. ve 6. soruya verdikleri cevaplarla oluşturulmuş frekans tablosu**

Her iki soruda da benzer çözüm yollarını kullanmayanlar	En az bir soruyu boş bırakanlar	Her iki soruda da aynı çözüm yolunu kullananlar			
		Tamsayı değerlerini koyarak görüntü kümesini bulan	Uç noktaları koyarak yeni bir aralık belirleyen	Belirlediği kritik noktalarla yeni bir aralık oluşturan	Diğer
11	7	24	6	3	6

Herhangi bir aralıkta sonsuz reel sayının olduğunu düşünememe kavram yanlışlığının sahip rastgele bir öğrencinin kavram yanlışlığı testindeki cevabı ve görüşmenin bir kısmı aşağıda verilmiştir.

4.  $f: [-3, 3] \setminus \{0\} \rightarrow \mathbb{R}$  şeklinde tanımlanan  $f(x) = \frac{1}{x}$  fonksiyonunun görüntü kümesini bulunuz.

Öğrencinin cevabı: Tanım kümesini fonksiyonun yerine yazarak görüntü kümesini bulunuz.  $f(-3) = \frac{1}{-3} = -\frac{1}{3}$ ,  $f(-2) = \frac{1}{-2} = -\frac{1}{2}$ ,  $f(-1) = \frac{1}{-1} = -1$ ,  $f(1) = \frac{1}{1} = 1$ ,  $f(2) = \frac{1}{2} = \frac{1}{2}$ ,  $f(3) = \frac{1}{3} = \frac{1}{3}$ .  $gt = \{-\frac{1}{3}, -\frac{1}{2}, -1, 1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}\}$

6.  $f: (-2, 2] \rightarrow \mathbb{R}$  şeklinde tanımlanan  $f(x) = \frac{1}{\sqrt{x+2}}$  fonksiyonunun görüntü kümesini bulunuz.

Öğrencinin cevabı:  $f(-1) = \frac{1}{\sqrt{1}} = 1$ ,  $f(0) = \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}$ ,  $f(1) = \frac{1}{\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{3}}{3}$ ,  $f(2) = \frac{1}{\sqrt{4}} = \frac{1}{2}$ .  $gt = \{1, \frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{3}}{3}, \frac{1}{2}\}$

A:  $f: [-3, 3] \setminus \{0\} \rightarrow \mathbb{R}$  şeklinde tanımlanan  $f(x) = \frac{1}{x}$  fonksiyonunun görüntü kümesini bulur musun?

AY: Şimdi fonksiyon  $[-3, 3]$  kapalı aralığından sıfırın farkı reel sayılara tanımlanmış.

$[-3, 3] \setminus \{0\}$  benim tanım kümem. Reel sayılarda benim değer kümem yani görüntü kümem. Tanım kümemin elemanlarını yazıyorum.  $\{-3, -2, -1, 0, 1, 2, 3\}$  demiş bana. Burada sıfırı istemediği için sıfırı sildim. Fonksiyonumda  $f(x) = \frac{1}{x}$  dir. Tanım kümesini yerine yazdığım zaman bana görüntü kümesini verir değer kümesini verir. Tanım kümesini fonksiyonda yazdığım zaman bana görüntü kümemi verecek. O zaman  $\{-\frac{1}{3}, -\frac{1}{2}, -1, 1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}\}$  benim görüntü kümemdir.

A: Peki değer kümesi nedir?

AY: Değer kümesi tüm reel sayılardır.

A: Görüntü kümesi nedir?

AY: Görüntü kümesi de fonksiyonda verilen değerleri yerine yazdığım zaman çıkan değerlerdir.

A:  $[0, 1]$  kapalı aralığındaki reel sayılar nelerdir bana açıklar mısın?

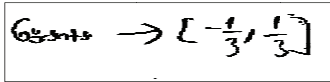
AY: Sıfır ile bir arasında sonsuz tane reel sayı girer. Ama görüntü kümesi gibi değerlendirilecek olursam boş kümedir. Yani tam sayı yoktur arasında.

Öğrencinin görüşme esnasında verdiği cevaplar incelendiğinde ilk fark edilen görüntü ve değer kümesinin farkına varmamış olduğudur. Ancak görüntü ve değer kümesine odaklı sorular sorulduğunda öğrencinin değer ve görüntü kümesini doğru algıladığı anlaşılmıştır. Yalnız  $[0,1]$  aralığında sonsuz reel sayı olduğunu söylerken, fonksiyon için içine girince sadece aradaki tam sayıları göz önüne almıştır.

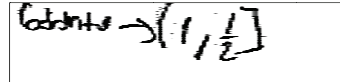
Verilen fonksiyon düşünülmeden sadece tanım kümesinden yola çıkarak görüntü kümesini bulmaya odaklanma kavram yanlışlığına düşen öğrencilerden birinin yazılı testte verdiği cevabı ve görüşme esnasında sorulan sorulara verdiği cevap özetlenmiştir.

Verilen fonksiyon düşünülmeden sadece tanım kümesinden yola çıkarak görüntü kümesini bulmaya odaklanma kavram yanlışlığına düşen öğrencilerden birinin yazılı testte verdiği cevabı ve görüşme esnasında sorulan sorulara verdiği cevap özetlenmiştir.

4. soruya verilen cevap

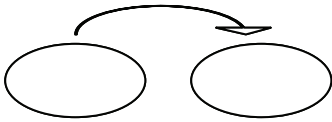


6. soruya verilen cevap



A:  $f(x)=x+1$  ve  $f: [-1,1] \rightarrow R$  fonksiyonunun görüntü kümesini belirler misin?

SG: Bakıyorum ki tanımsız yapan bir şey yok. Öyle bir şey olsaydı sıfıra eşitleyip onu çıkaracaktık. Normalde  $[-1,1]$  görüntü,  $R$  tanım olmuyor muydu? Hayırrr  $[-1,1]$  tanım  $R$  görüntüydü. Tamamıyla karıştırdım özür dilerim. Öncelikle tanımdan görüntüye gidiyordu. Yani



ilki tanım ikincisi ise görüntü kümesiydi. O halde görüntümüz bu reel sayılar.

Görüntü kümemiz reel sayılar. Nedeni de burada tanımsız yapacak başka bir değer olmadığı için görüntü kümemiz reel sayılar.

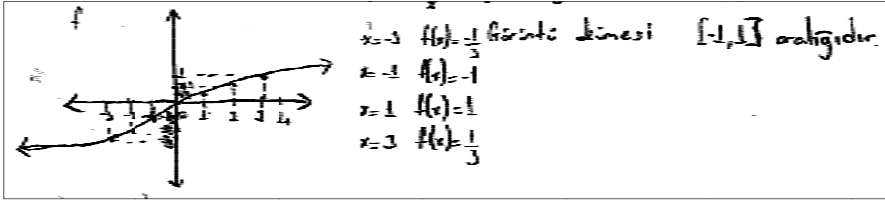
A: O zaman  $[-3,3] \setminus \{0\} \rightarrow R$  şeklinde tanımlanan  $f(x) = \frac{1}{x}$  fonksiyonunun görüntü kümesini bulur musun?

SG: Öncelikli olarak bizim tanım kümemizde  $[-3,3]$  vermiş ama sıfırı çıkarmış. Normalde sıfırı çıkarmasaydı biz onu görüntü kümesinden şey yapmamız gerekiyordu. Ama tanımsız yapıyor diye zaten onu çıkarmış. Görüntü kümesi yine reel sayılardır. Ben burada yanlış yapmışım sanırım. Zaten  $[-3,3] \setminus \{0\}$  bizim tanım kümemiz,  $R$  görüntü kümemizdir. Zaten sıfırı çıkarmış tanımsız yapan bir şey yok. O zaman yine görüntü kümemiz reel sayılar.

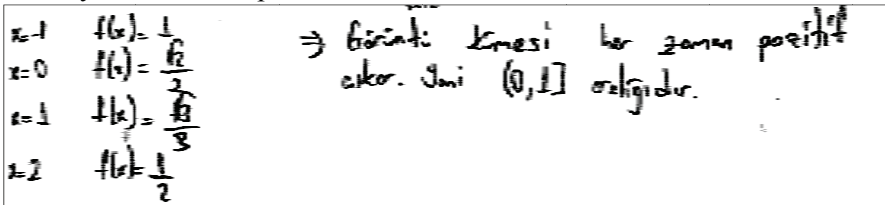
Uygulanan kavram yanılgısı testinde, SG isimli öğrenci sadece tanım kümesindeki kapalı aralığın uç değerlerini yerine koyarak görüntü kümesini belirlemiştir. Yapılan görüşmede, bu öğrencinin değer kümesini görüntü kümesi olarak algıladığı anlaşılmaktadır. Bu nedenle verilen fonksiyonun görüntü kümesini reel sayılar olarak ifade etmiştir. Hatta kâğıdındaki soruyu tekrar çözmüş, ardından kâğıdına baktığında testte bu soruya verdiği cevabın yanlış olduğunu söylemiş, doğru cevabın yine reel sayılar olması gerektiğini vurgulamıştır.

ME olarak kodlanan öğrenci ise görüntü kümesinin bir aralık olması gerektiğini düşünmüştür. Bunun için de tanım kümesinde yer alan elemanlardan kendisi için kritik olarak düşündüğü noktaları fonksiyonda yerine koymuş ve bulduğu değerlerin en küçüğünü, görüntü kümesini oluşturan aralığı en küçük elmanı; en büyüğünü ise en büyük elemanı olarak belirleyerek aralığı oluşturmuştur. ME'nin kavram yanılgısı testindeki cevapları ve yapılan görüşmenin transkripti şöyledir.

#### 4. soruya verilen cevap



#### 6. soruya verilen cevap



A:  $f: [-2, 2] \rightarrow \mathbb{R} f(x) = x^2 + 1$  fonksiyonunun görüntü kümesini bulunuz?

ME: -2'yi yerine yazarım. Beş olur. 2'yi yerine yazarım. Beş olur. Bunların arasından bir de sıfırı alırız.  $f(0) = 1$  olur. Görüntü kümesi birden beşe kadardır.

A: Niye sıfırı aldın?

ME: Sıfır ortadaki sayı olduğu için aldım. -1 ve 1'yi de alsam -2 ve 2 olduğu gibi aynı şey gelir. O halde görüntü kümesi  $[1, 5]$  dir.

A: 6.sorunu tekrar çözer misin? Ama nedenleriyle açıklayarak çöz.

**ME:**  $f: (-2, 2] \rightarrow \mathbb{R}$   $f(x) = \frac{1}{\sqrt{x+2}}$  fonksiyonunun görüntü kümesini bulunuz. O halde burada öncelikle  $x = -1$  için alırsınız çünkü  $-2$  içeride değildir.  $x = -1$  için alıyorum.  $f(-1) = 1$  dir.  $x = 0$  alınırsa  $f(0) = \frac{1}{\sqrt{2}}$  dir.  $x = 1$  için  $f(1) = \frac{1}{\sqrt{3}}$  dir.  $x = 2$  için  $f(2) = \frac{1}{2}$  dir. Eksi değerler verildiğinde pozitif değerler çıkıyordu ya ondan dolayı buradaki en büyük değer  $\frac{1}{\sqrt{3}}$  şey  $1$  olduğundan  $0$  ile bir arasında değerler çıkar ama sıfır açık aralık. Görüntü kümesi  $(0, 1]$  dir.

Beşinci soru  $f(x) = x^2 + 1$ , yedinci soru ise  $f(x) = x^2$  fonksiyonunun tanım ve görüntü kümesini bulmaya yöneliktir. Burada öğrenciler tanım kümesini belirlerken zorlanmamışlardır; yalnız görüntü kümesini belirlerken zorlanmışlardır. Aslında beşinci soru için görüntü kümesinin  $[1, \infty)$ ,  $\mathbb{R}^+ \cup \{0\}$  ise yedinci sorunun görüntü kümesidir. Fakat her iki soruya da doğru cevap veren yalnızca beş kişidir. Hiçbir öğrenci bu soruları boş bırakmamıştır. İki soru için de farklı çözüm yolları geliştiren öğrenci sayısı on dokuzdur. Otuz üç öğrenci ise kendilerince doğru olan çözümler oluşturmuşlardır. Öğrenci cevaplarına ait frekans tablosu aşağıda verilmiştir.

**Tablo 3: Öğrencilerin 5. ve 7. soruya verdikleri cevaplarla oluşturulmuş frekans tablosu**

Her iki soruda da benzer çözüm yollarını kullanmayanlar	En az bir soruyu boş bırakanlar	Her iki soruda da aynı çözüm yolunu kullananlar			
		Tanım kümesi doğru, görüntü kümesini reel sayılara genelleştiren	Doğru çözüm yapan	Tanım kümesi doğru, görüntü kümesini pozitif reel sayılara genelleştiren	Tanım kümesi doğru, görüntü kümesini tam sayılardan bulan
19	0	17	5	12	4

Tanım kümesi doğru, görüntü kümesini pozitif reel sayılara genelleştiren bir öğrencinin kavram yanılığısı testine verdiği cevaplar ve görüşmenin bir kısmı şu şekildedir.

5.  $f(x) = x^2 + 1$  fonksiyonunun tanım ve görüntü kümesini bulunuz.

Tanım kümesi =  $\mathbb{R}$  sayılar.  
Görüntü kümesi =  $\mathbb{R}^+$

7.  $f(x) = x^2$  fonksiyonunun tanım ve görüntü kümesini bulunuz.

Tanım kümesi:  $\mathbb{R}$   
Görüntü kümesi:  $\mathbb{R}^+$

A:  $f(x) = x^2 - 1$  fonksiyonunun tanım ve görüntü kümesini bulur musun bana ve nedenleriyle açıklar mısın?

**OÇAD:** Tanım kümesi  $x$ 'in aldığı değerlerdir.  $f(x)$  sabit bir değere eşit olmadığı için  $x$  bütün reel sayıları alır. O yüzden tanım kümesi  $T.K = \mathbb{R}$  dir. Sonra görüntü kümesini bulurken  $x^2$  olduğu için ekside versek artıda versek sonuç pozitif olacak burada. Değerler verdim  $x$ 'e mesela bir verdiğimde sıfır, eksi bir verdiğimde yine sıfır, o zaman pozitif reel sayılardır.

A: Pozitif reel sayıları bana küme olarak yazar mısın?

**OÇAD:**  $G.K = \{x: x \in \mathbb{R}^+\}$

Görüldüğü gibi yapılan görüşmede öğrenci  $x$ 'e değerler vererek görüntü kümesini tahmin etmeye çalışmıştır. Bu durum, öğrenciyi ister istemez hataya sürüklemiştir. Yani görüntü kümesini tanım kümesindeki birkaç elemanın görüntüsüyle tahmin etme yanılığısına düşmüştür.

***Fonksiyonlardaki Tanım ve Görüntü Kümesini Geometrik Olarak Belirlemeye Yönelik Kavram Yanılgıları***

**Tablo 4: Öğrencilerin 10. ve 14. soruya verdikleri cevaplarla oluşturulmuş frekans tablosu**

Her iki soruda da benzer çözüm yollarını kullanmayanlar	En az bir soruyu boş bırakanlar	Her iki soruda da aynı çözüm yolunu kullananlar			
		Tanım ve görüntü kümesini alan olarak belirten	Şekilsel olarak doğru olan	Tanım ve görüntü kümesini grafik üzerinde belirten	Diğer
10	12	11	12	3	9

Verilen bir fonksiyon grafiği üzerinde tanım ve görüntü kümesini göstermeye yönelik birbirine paralel olarak hazırlanan on ve on dördüncü sorular göz önüne alınarak yukarıdaki tablo oluşturulmuştur. Her iki soruda da benzer çözüm yollarını kullanmayanlar, aynı çözüm yolunu kullananlar ve bu sorulardan en az birini boş bırakanlar olmak üzere üç kategori oluşturulmuştur. İki soru için de aynı çözüm yolunu kullananlarda kendi içerisinde kodlanmıştır.

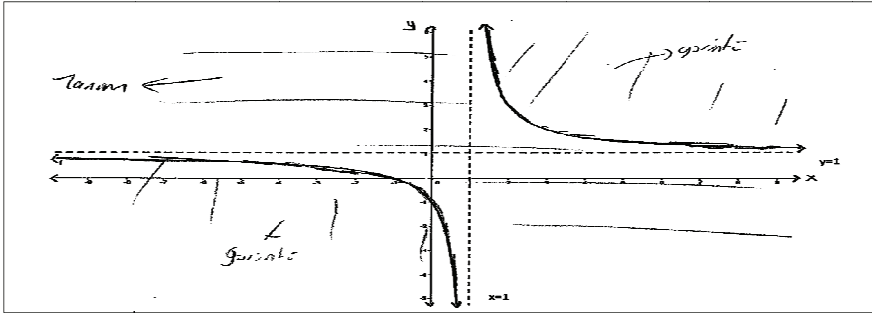
Asimptotları çıkararak tanım kümesini doğru gösteren fakat görüntü kümesini sadece grafik altında kalan alan olarak ifade eden iki öğrenci vardır. Başka iki öğrenci ise tanım kümesini  $x$ -ekseni, görüntü kümesini  $y$ -ekseni olarak göstermiştir. Yine tanım kümesini  $x$ -ekseni olarak düşünen iki öğrenciden biri görüntü kümesini fonksiyon altında kalan alan olarak göstermiş, diğeri ise grafiğin üzerini işaretlemiştir. Geriye kalan üç öğrenciden biri tanım ve görüntü kümesini sadece tamsayı noktalarından oluşturmuş, diğeri hem tanım hem de görüntü kümesini belirlerken hem grafiğin üzerini hem de alanları taramış, üçüncü ise tanım kümesini alan; görüntü kümesini ise hem alan olarak taramış hem de grafik üzerini işaretlemiştir. Oluşturulan bu kodlarda iki ve ikiden daha az öğrenci bulunduğundan bu kodlar birleştirilerek, diğer kodu altında toplanmıştır.

Şekilsel olarak doğru kodundaki cevaplar incelendiğinde, öğrenciler tanım kümesini  $x$ -ekseninden, görüntü kümesini ise  $y$ -ekseninden seçmişlerdir. Gösterim doğru olmasına karşın, asimptot kavramına tam hâkim olmadıklarından ötürü tanım kümesi ve görüntü kümesi yanlış belirlemişlerdir. Bir öğrenci haricinde diğerlerinin hepsi grafik üzerinde

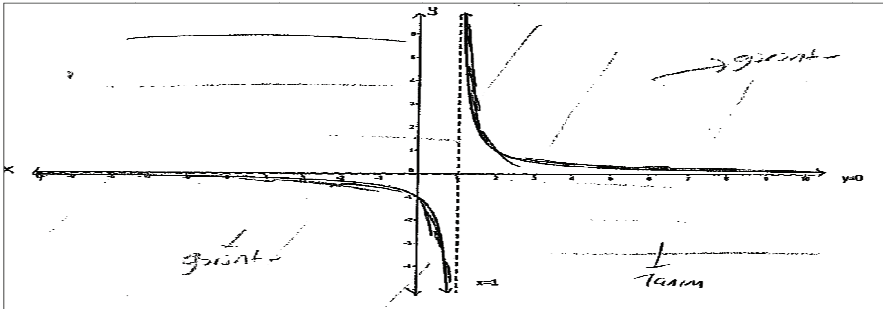
gösterimi doğru yapmışlarsa da tam anlamıyla tanım ve görüntü kümesini işaretleyememişlerdir. Belirlenen diğer kodlarda yukarıdaki tabloda yer almaktadır.

Tanım ve görüntü kümesini grafik altında kalan alan olarak gösteren öğrencilerden birinin cevabı aşağıda verilmiştir.

10. Aşağıda grafiği verilen fonksiyonun tanım ve görüntü kümesini şekil üzerinde işaretleyerek gösteriniz.



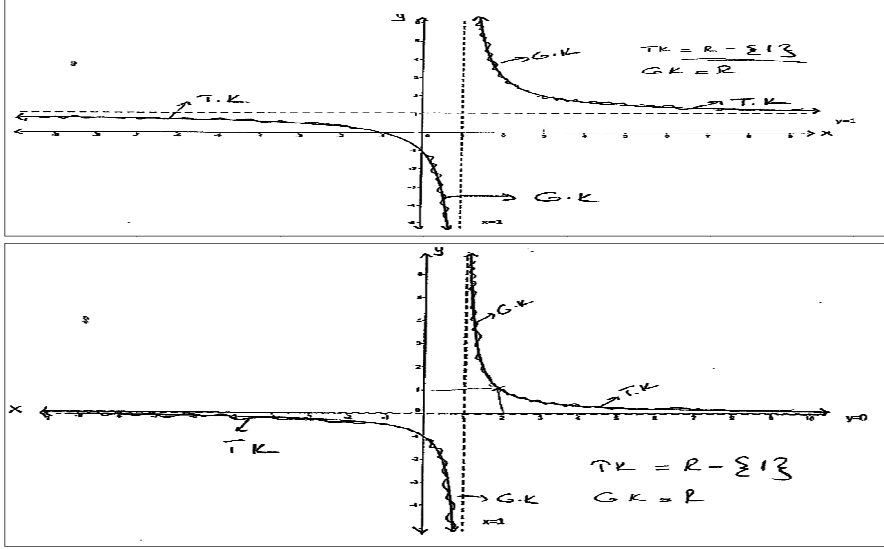
14. Aşağıda grafiği verilen fonksiyonun tanım ve görüntü kümesini şekil üzerinde işaretleyerek gösteriniz.



HD'nin cevabı incelendiğinde, tanım ve görüntü kümesini belirlemeden ziyade analitik düzlemde gösterebilmeye alakalı sıkıntıların olduğu görülmektedir. Yapılan görüşmede de öğrencinin, tanım ve görüntü kümesini şekil üzerinde gösterirken ilginç bir yol izlediği ortaya çıkmıştır. HD, görüntü kümesini belirlerken asimptotların aşağı ve yukarı kısımlarını düşündüğünü söylemiştir. Geri kalan bölgeleri de tanım kümesi olarak düşünmektedir. Yani tanım ve görüntü kümesini eksenler üzerinde göstermek yerine, alan olarak gösterme yanılışı ortaya çıkmıştır.



Tanım ve görüntü kümesini fonksiyon grafiği üzerinde gösteren bir öğrencinin kavram yanlışlığı testindeki cevabı şu şekildedir.



Öğrencinin burada verdiği cevabı anlamak gerçekten güçtür. Yapılan görüşmede öğrenci, neden böyle bir yol izlediğini açıklayamamıştır. Her ne kadar yaptığı çözümü açıklattırmak için uğraşılsa da öğrenci belli neden göstermeksizin ısrarla aynı şeyleri yapmaktadır. Yani hatasında ısrarlıdır. Bu öğrenci, belirlenen görüntü kümesini ve tanım kümesini eksenler üzerinde göstermek yerine fonksiyon grafiği üzerinde gösterme yanlışlığına düşmüştür.

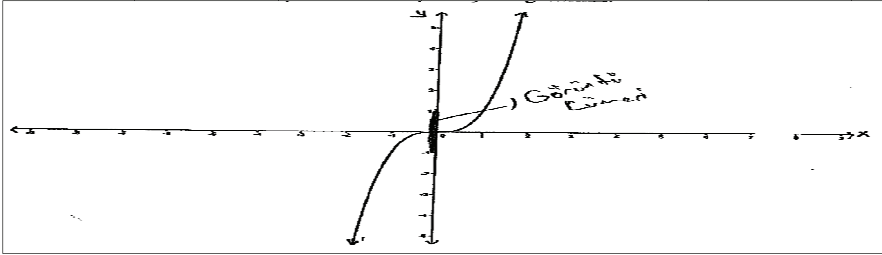
**Tablo 5: Öğrencilerin 11. ve 16. soruya verdikleri cevaplarla oluşturulmuş frekans tablosu**

Her iki soruda benzer çözüm yollarını kullanmayanlar	En az bir soruyu boş bırakanlar	Her iki soruda da aynı çözüm yolunu kullananlar						
			y- ekseni üzerinde aralık belirten	Görüntü kümesi noktalarını grafik üzerinde gösteren	Alan olarak belirten	Grafiğin kendisi olduğunu söyleyen	Şekil olarak doğru gösteren	Diğer
13	1	12	9	5	7	7	3	

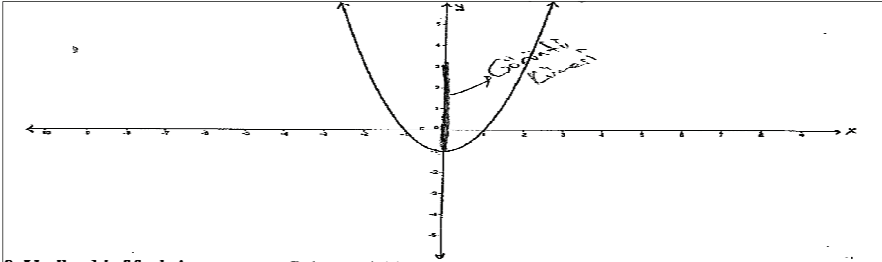
On bir ve on altıncı sorularda tanım kümesi sınırlı sayıda elemandan oluşan fonksiyonun grafiği verilmiştir ve bu fonksiyonun görüntü kümesinin analitik düzlemde gösterilmesi istenmiştir. Her iki soru da aynı çözüm yolunu kullanan kırk üç öğrenci vardır. Bu öğrencilerden on ikisi görüntü kümesinin en büyük ve en küçük elemanlarını belirleyerek, görüntü kümesini  $y$ -ekseni üzerinde bir aralık olarak belirtmiştir. Dokuzu ise bulunduğu noktaları grafik üzerinde göstermiştir. Bu durumda ilkinde noktalardan oluşan görüntü kümesini aralık olarak belirtme yanlılığı, ikincisinde ise görüntü kümesindeki noktaları grafik üzerinde gösterme yanlılığı mevcuttur. Beş öğrenci fonksiyon grafiği altında kalan alanı görüntü kümesi olarak ifade etmiş iken, yedi öğrenci grafiğin üzerini karalayarak görüntü kümesinin grafiğin kendisi olduğunu düşünmüştür. Yine ilkinde noktalardan oluşan görüntü kümesini alan olarak gösterme, ikincisinde ise noktalardan oluşan görüntü kümesini grafiğin kendisi olarak algılama yanlılığı vardır. Belirlenen diğer kod ve kategoriler yukarıdaki tabloda yer almaktadır.

Görüntü kümesini  $y$ -ekseni üzerinde aralık olarak belirten KS isimli öğrenci sorulan sorulara şu şekilde cevap vermiştir.

11.  $f(x) = x^3$  fonksiyonunun grafiği aşağıdaki gibidir. Eğer tanım kümesi  $A = \{-1, 0, 1\} \subset \mathbb{R}$  olursa  $f(x)$  fonksiyonunun görüntü kümesini şekil üzerinde işaretleyerek gösteriniz.

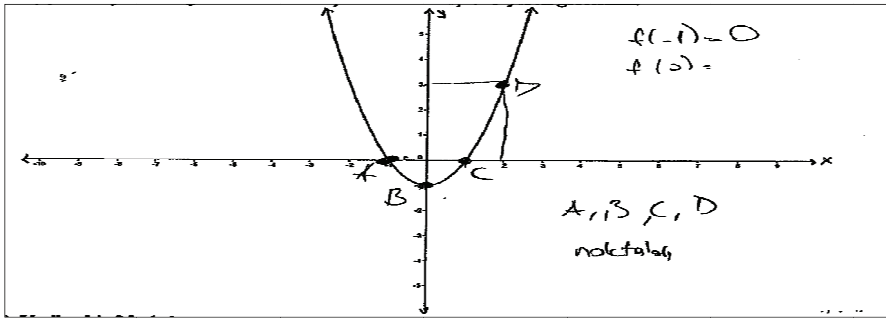
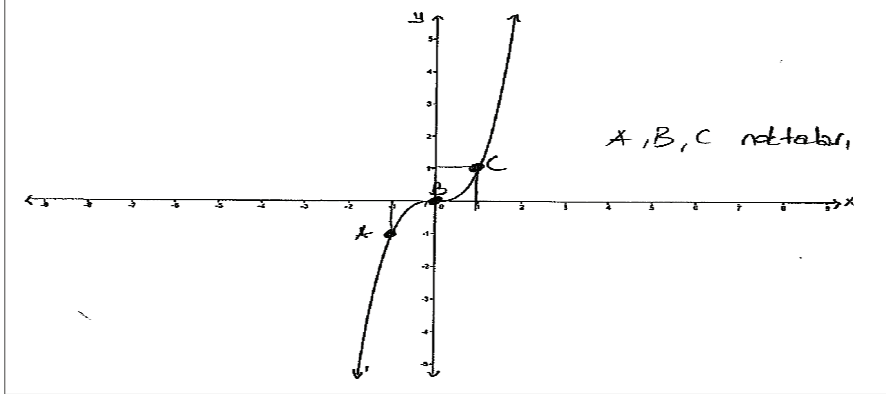


16.  $f(x) = x^2 - 1$  fonksiyonunun grafiği aşağıdaki gibidir. Eğer tanım kümesi  $A = \{-1, 0, 1, 2\} \subset \mathbb{R}$  olursa  $f(x)$  fonksiyonunun görüntü kümesini şekil üzerinde işaretleyerek gösteriniz.



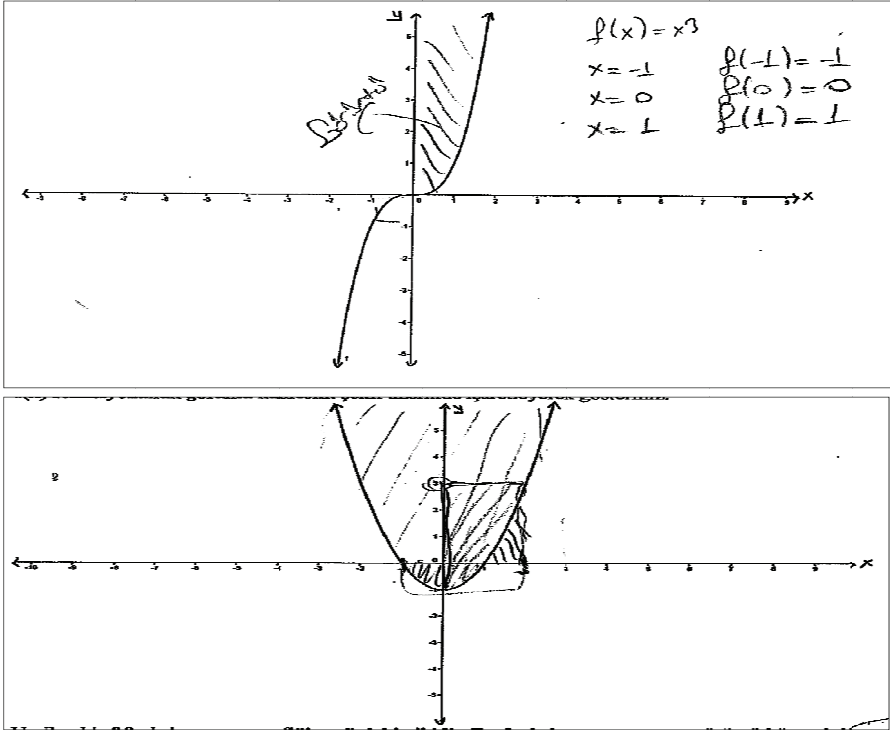
Öğrencinin cevabı yukarıdaki gibidir. On birinci soru temel alınarak yapılan görüşmede öğrenci A kümesindeki elemanları fonksiyonda yerine yazarak, görüntü kümesinin elemanlarını belirlemiştir. Belirlediği bu üç noktayı  $y$ -ekseninde işaretlemiş ve ardından  $-1$  ile  $1$  arasında  $y$ -ekseni boyunca taramıştır. Öğrencide dikkat eksikliğinden mi bu sonuca ulaştığı düşüncesiyle “0 ile 1 arasındaki değerleri de dâhil etmiş mi oldum?” sorusu yöneltilmiştir. Fakat öğrenci ısrarcı bir şekilde çözümün bu şekilde olması gerektiğini savunmuştur. Neden bu şekilde bir çözüm izlediği konusuna gelince “ Değerleri yerine yazdım, onları  $y$ -ekseninde işaretledim. Ondan sonra orayı taradım” cevabıyla karşı karşıya kalınmıştır. Görüldüğü gibi kendi de bulduğu sonucu bilimsel bir temele oturtamamıştır.

Görüntü kümesinde belirlediği noktaları grafiğin üzerinde gösteren dokuz öğrenciden rastgele seçilen birinin cevabı şöyledir.

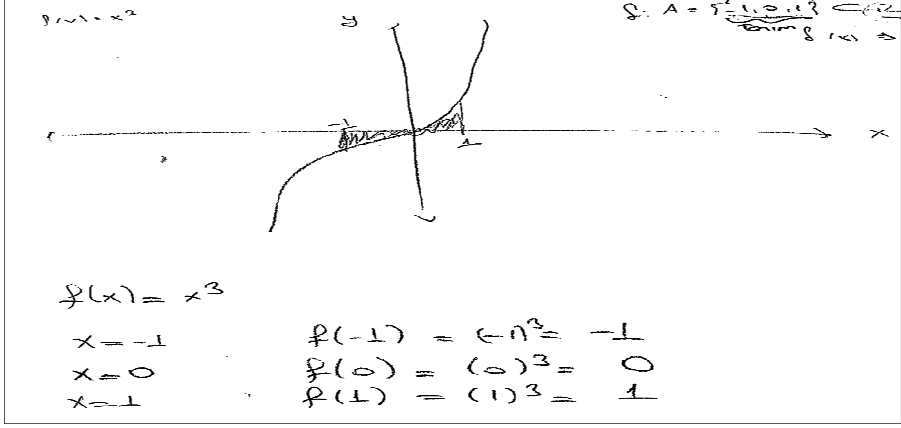


FB isimli öğrenci ile yapılan görüşme esnasında hatasını fark etmiştir. İlk önce on birinci soruyu tekrar çözmesi istenmiştir. Tanım kümesindeki değerleri fonksiyonda yerine koyarak görüntü kümesini bulan öğrenci, bu kümeyi bir aralık şeklinde  $y$ -ekseni üzerinde göstermiştir. Söylediklerinden emin olup olmadığını belirlemek için verdiği cevabı bir daha düşünerek teyit etmesi istenmiştir. Fakat FB teyit etmek yerine görüntü kümesinin sadece üç noktadan oluştuğunu sezmiştir. Bu seferde belirlediği noktaları  $y$ -ekseni üzerinde gösterip doğru cevaba varmıştır. Ardından yazılı kâğıdı gösterildiğinde yaptığı çözümün doğru çözüm olduğunu ifade etmiştir.

Görüntü kümesini grafik altında kalan alan olarak belirten BŞ'nin cevabı ise şöyledir.

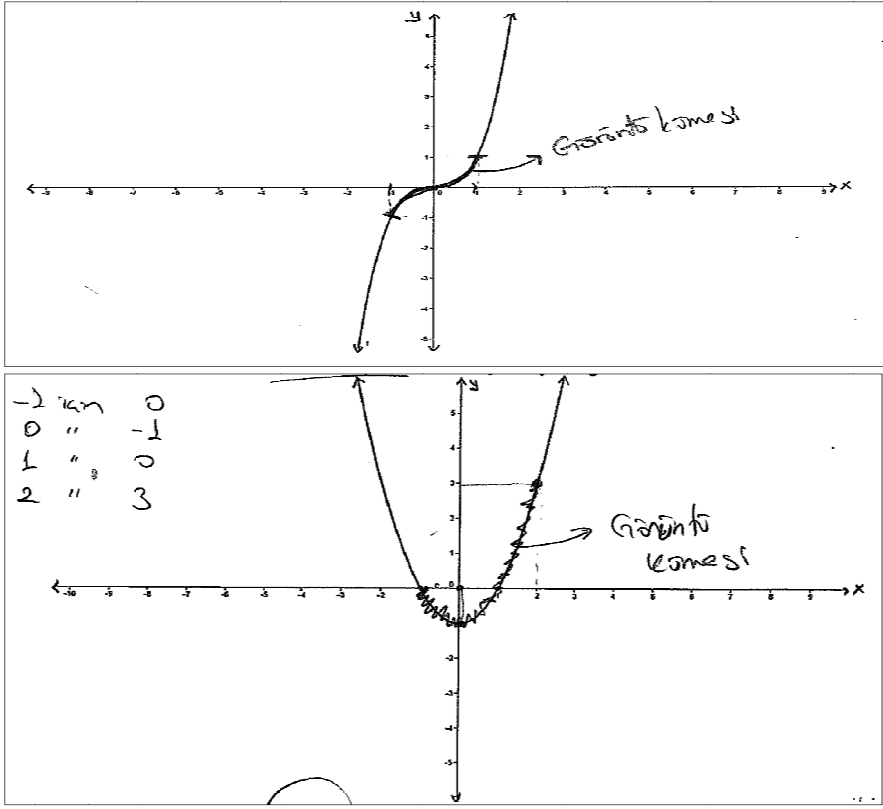


Yukarıdaki cevap incelendiğinde öğrenci görüntü kümesinin sonlu sayıda olan elemanlarını belirlemiştir. Fakat grafik üzerinde gösterirken grafik altında kalan alanı görüntü kümesi olarak göstermiştir. Neden böyle bir yol izlendiğinin ortaya çıkarılması için ise yine yarı yapılandırılmış bir görüşme yapılmıştır. Bu görüşmede on birinci soruyu tekrar çözmesi istenmiştir. Gerçekleştirdiği yeni çözümde de yine bir alan göstermiştir. Fakat yazılı testte gösterdiği alandan farklı bir alandır. Görüşme esnasında verdiği cevap ise aşağıdaki gibidir.



Öğrenci on birinci soruyu tekrar çözerken görüntü kümesi için yine bir alan göstermiştir. Fakat bu sefer belirlediği alan için farklı bir yeri işaretlemiştir. Görüşme esnasında öğrenciye bu alanı nasıl belirlediği sorulmuştur. “Alandaki  $x$  değerlerini göstererek, görüntü kümesi bunlar olduğu için görüntü kümesini bu şekilde belirledim” cevabıyla karşılaşmıştır. Bu cevaptan öğrencinin görüntü kümesinin ne olduğu hakkında yanlış düşüncelere sahip olduğu anlaşılmıştır. Bu nedenle öğrenciden  $f: A = \{-1, 0, 1\} \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  ifadesinde tanım, görüntü ve değer kümesini göstermesi istenmiştir. Öğrencinin cevabı dikkate alındığında, bu tür bir hatanın olmasının sebebi tanım, görüntü ve değer kümesinin karıştırılıyor olmasıdır.

TÇ, tanım kümesindeki elemanları fonksiyonda yerine koyarak başlangıç ve bitiş noktalarını belirledikten sonra bu iki nokta arasında fonksiyonu karalayarak görüntü kümesini göstermiştir. Bu öğrencinin cevabı şu şekildedir.



Bu öğrenciyle de yine yarı yapılandırılmış bir görüşme gerçekleştirilmiştir. Öğrenciden on birinci soruyu tekrar çözmesi istenmiştir. Ardından öğrenciye, görüşmede verdiği cevap ile kâğıdında verdiği cevabı karşılaştırması söylenmiştir. Son olarak da on altıncı soruda ne yaptığını sözlü olarak açıklaması istenmiştir. Her durumda öğrenci nedenini açıklayamadan grafiğin üzerini çizmiştir. Ayrıca, on birinci soru için bulunduğu -1, 0 ve 1 değerlerinin ne olduğu öğrenciye sorulunca değer kümesi şeklinde bir cevap alınmıştır. “Peki, görüntü kümesi nedir?” diye sorulduğunda TÇ isimli öğrenci görüntü ve değer kümesinin aynı şeyler olduğunu ifade etmiştir. Yani bu öğrenci görüntü ve değer kümesinin farkını bilmemektedir.

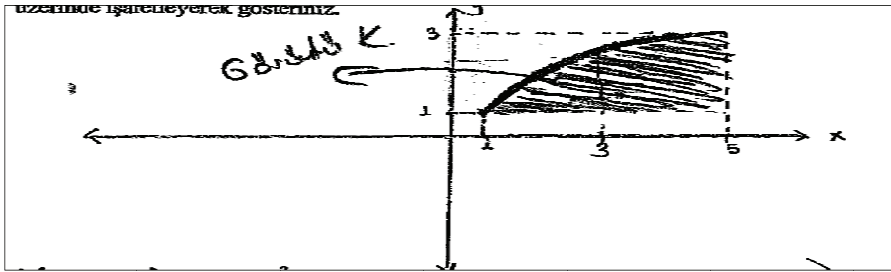
**Tablo 6: Öğrencilerin 12. ve 15. soruya verdikleri cevaplarla oluşturulmuş frekans tablosu**

Her iki soruda da benzer çözüm yollarını kullanmayanlar	En az bir soruyu boş bırakanlar	Her iki soruda da aynı çözüm yolunu kullananlar		
		Görüntü kümesini grafik altında veya üstünde kalan alan olarak belirten	Görüntü kümesinin grafiğin kendisi olduğunu söyleyen	Görüntü kümesini şekil olarak doğru gösteren
12	4	13	7	21

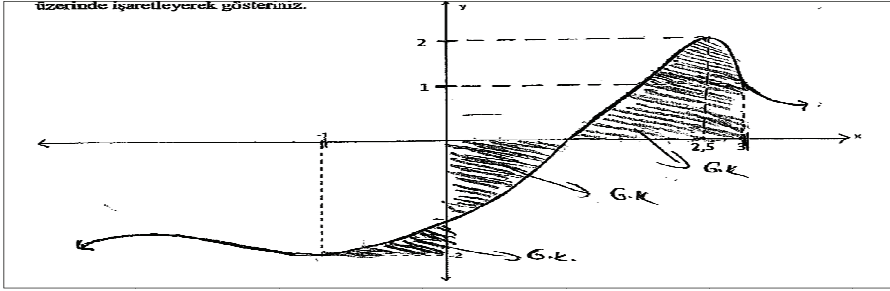
On iki ve on beşinci sorularda bir  $f$  fonksiyonun grafiği verilmiştir. Tanım kümesi kapalı bir aralık olan fonksiyonun görüntü kümesinin şekil üzerinde gösterilmesi istenmiştir. Belirlenen kod ve kategoriler Tablo 6 da yer almaktadır. Kapalı bir aralığın görüntü kümesinin şekil üzerinde gösterilmesinde, görüntü kümesini grafik altında veya üstünde kalan alan olarak belirtme, grafiğin kendisi olduğunu ifade etme kavram yanılgıları mevcuttur.

Görüntü kümesini alan olarak belirten bir öğrencinin yazılı testteki cevabı aşağıdaki şekildedir.

12. Verilen bir  $f$  fonksiyonunun grafiği aşağıdaki gibidir.  $[1,5]$  aralığının görüntü kümesini şekil üzerinde işaretleyerek gösteriniz.

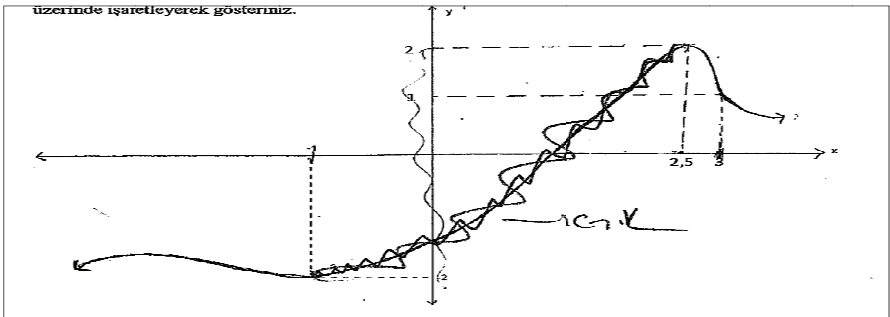
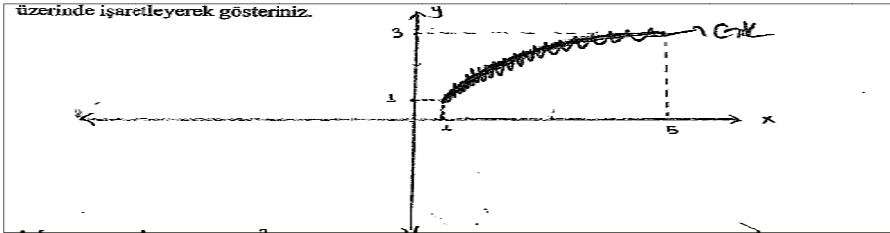


15. Verilen bir  $f$  fonksiyonunun grafiği aşağıdaki gibidir.  $[-1,3]$  aralığının görüntü kümesini şekil üzerinde işaretleyerek gösteriniz.



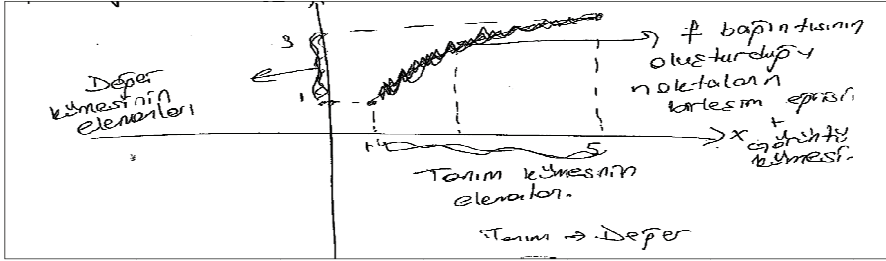
Yapılan görüşmede, bu öğrencinin tanım kümesinin kapalı bir aralık olmasından dolayı görüntü kümesinin eğri altındaki alan olması gerektiği düşüncesiyle hareket ettiği görülmüştür. FG, eğer belirlenen tanım kümesi sonlu sayıda elemandan oluşsaydı elemanları  $y$ -ekseni üzerinde göstereceğini açıklamıştır. Gerçekten de tanım kümesinin sonlu sayıda elemandan oluştuğu on ikinci soruda görüntü kümesinin elemanlarını  $y$ -ekseninde göstermiştir. Tanım kümesinin kapalı aralık olması, öğrencinin zihninde alan kavramını oluşturmaktadır.

Görüntü kümesi için grafiğin kendisini gösteren NY, kavram yanılışı testinde şu cevapları vermiştir.





Görüşme esnasında on ikinci soruyu öğrenci tekrar çözmüştür. Kâğıdındaki çözümünü karşılaştırmıştır ve on beşinci soruda ise çözümünü sesli olarak ifade etmiştir. Hem kâğıdında hem de görüşme esnasında aynı çözümü gerçekleştiren NY'nin görüşme esnasında gerçekleştirdiği çözüm aşağıdaki gibidir.



Bu öğrenci, fonksiyon noktalarının oluşturduğu grafiği yani ikilileri görüntü kümesi olarak düşünmektedir. Bu anlamda öğrencinin kavramsal anlama düzeyinin eksik olduğu anlaşılmaktadır. On dokuzuncu soruyu gösterdiğimizde de çözümü aynı şekilde açıklayarak doğrusunun bu olması gerektiğini savunmuştur.

On üç ve on yedinci sorular analitik düzlemde verilen bir  $f$  fonksiyonunun grafiğinden faydalanarak tanım ve görüntü kümesini yazmadır ve çoğunlukla doğru cevap verilmiştir. Her iki soruya da yirmi dokuz öğrenci doğru cevap vermiştir. Geriye kalanlar ise en az birini boş bırakan öğrencilerdir.

## **Sonuç ve Tartışma**

Bulgular ışığında belirlenen kavram yanlışları şu şekilde özetlenmiştir:

### ***Fonksiyonlardaki tanım ve görüntü kümesini cebirsel olarak belirlemeye yönelik kavram yanlışları***

1. Rasyonel olarak verilen bir fonksiyonun tanım ve görüntü kümesini bulmada yaşanan kavram yanlışları

- Aşırı genelleme sonucu görüntü kümesini belirleyememe

2. Tanım kümesi bir aralık olan fonksiyonun görüntü kümesinin bulunmasına yönelik kavram yanlışları

- Bir aralıkta sonsuz reel sayının olduğunu düşünememe
- Verilen fonksiyon düşünülmeden sadece tanım kümesinden yola çıkarak görüntü kümesini bulmaya odaklanma
- Sadece aralıktaki birkaç tamsayı değeriyle görüntü kümesini belirleme

3. Polinom fonksiyonlarının tanım ve görüntü kümesinin bulunmasında yaşanan kavram yanlışları

- Görüntü kümesini tanım kümesindeki birkaç elemanın görüntüsüyle tahmin etme

Doğrusal bir fonksiyonun tanım ve görüntü kümesini bulmada öğrencilerin bir kavram yanlışlığına sahip olduğu söylenemez. Ayrıca sınırlı sayıda elemandan oluşan bir kümeden reel sayılara tanımlı bir fonksiyonun görüntü kümesinin bulunmasına yönelik olarak da kavram yanlışlığına rastlanmamıştır.

### ***Fonksiyonlardaki tanım ve görüntü kümesini geometriksel olarak belirlemeye yönelik kavram yanlışları***

1. Verilen bir fonksiyon grafiği üzerinde tanım ve görüntü kümesi bulmada yaşanan kavram yanlışları

- Tanım ve görüntü kümesini eksenler üzerinde göstermek yerine, alan olarak gösterme
- Belirlenen görüntü kümesini ve tanım kümesini eksenler üzerinde göstermek yerine, fonksiyon grafiği üzerinde gösterme

2. Grafiği verilmiş herhangi bir fonksiyonun tanım kümesi sınırlı sayıda elemandan oluşan bir küme olursa görüntü kümesini şekil üzerinde belirlemeye yönelik kavram yanılgıları

- Noktalardan oluşan görüntü kümesini aralık olarak belirtme
- Görüntü kümesindeki noktaları grafik üzerinde gösterme
- Noktalardan oluşan görüntü kümesini alan olarak gösterme
- Noktalardan oluşan görüntü kümesini grafiğin kendi olarak algılama

3. Tanım kümesi kapalı aralık olarak verilen bir  $f$  fonksiyonunun grafiğinde görüntü kümesinin şekil üzerinde gösterilmesinde karşılaşılan kavram yanılgıları

- Görüntü kümesini grafik altında veya üstünde kalan alan olarak belirtme
- Görüntü kümesini grafiğin kendisi olduğunu belirtme

Analitik düzlemde verilen bir  $f$  fonksiyonun grafiğinden faydalanarak tanım ve görüntü kümesinin yazılmasına yönelik hazırlanan sorularda öğrenciler başarılı olmuştur. Bu nedenle kavram yanılgısından söz etmek anlamlı olmamaktadır.

Eisenberg (1991)'in de belirttiği gibi fonksiyonlarda yaşanan en büyük sıkıntı temsil sayısının fazla olmasıdır. Tanım ve görüntü kümesi kavramlarındaki bilişsel boşluğun temel sebeplerinden biri de budur. Öğrenciler, Polat ve Şahiner (2007)'in çalışmasında da vurgulandığı gibi tanım ve görüntü kümesi denildiğinde direkt küme eşleme diyagramını kullanmaya yönelmişlerdir. Çünkü tanım ve görüntü kümesi denildiği zaman öğrencilerin kendi zihinlerindeki genel tanıma en yakın algı küme eşleme diyagramıdır (Akkoç, 2006). Fakat sorular, tanım ve görüntü kümesini sadece cebirsel ve geometriksel olarak belirlemeye yönelik olduğundan, bocalama yaşanmıştır. Öyle ki öğrencilerin çoğu tanım, görüntü ve değer kümesini birbirine karıştırmaya başlamıştır. Oysa bu kavramlar onlar için oldukça basit kavramlardır. Hem hazır bulunuşluk düzeylerinin yeterli olması, hem de genel matematik dersini almış olmaları bu durumu en iyi açıklayan sebeplerdir. Zaten görüşme esnasında da “ben bunları bilmiyorum” diye bir cevapla karşılaşılmamıştır. Ayrıca Elia ve Spyrou (2006)'nın da belirttiği gibi öğrenciler cebirsel gösterime göre geometriksel gösterimde daha çok zorlanmışlardır. Fonksiyonlarda grafikler öğretilirken  $x$ -ekseninin tanım kümesi,  $y$ -ekseninin ise değer kümesi olarak belirtildiğini ifade eden Bayazıt (2010)'ın aksine öğrencilere bu tarz bir yönlendirmenin yapılmış olsa da kalıcı olmadığı bu çalışmada anlaşılmıştır. Çünkü

öğrencilerin çok büyük bir kısmı tanım ve görüntü kümesini analitik düzlemde belirlerken hataya düşmüşlerdir. Öğrencilerin grafikleri görünce korkuya kapıldıkları da yapılan görüşmelerde hissedilmiştir. Bu nedenle fonksiyon yapısını tamamen unutup grafiğe odaklanmışlardır. Yani Bayazit (2010)'ın da belirttiği gibi öğrenciler, fonksiyonu bir bütün olarak algılayamayıp grafik üzerinde yoğunlaşmaktadırlar. Gerçekten de özellikle asimptotların bulunduğu grafiklerde tanım ve görüntü kümesinin bulunmasının istenildiği on ve on dördüncü soruya doğru cevap veren öğrencilerde sadece şekilsel olarak doğru cevap vermişlerdir. Yani tanım kümesini  $x$ -ekseninde, görüntü kümesini ise  $y$ -ekseninde göstermişlerdir. Ama gösterdikleri tanım ve görüntü kümeleri yanlıştır. Zaten o yüzden de bu öğrenciler, sadece şekilsel olarak doğru olan kodu altında toplanılmıştır. Öğrencilerin sayı sistemlerini tam olarak anlamamış olmaları fonksiyon kavramını anlamalarını zorlaştırmaktadır (Even, 1990). Gerçekten de reel sayıların bir aralığında tanımlı fonksiyonun görüntü kümesini belirlerken, öğrenciler sadece aralıktaki tamsayı değerlerini kullanmaktadırlar. Oysa reel sayıların kapalı bir aralığında sadece tamsayılar yoktur. Öğrencilere herhangi bir kapalı aralık sorulduğunda bu aralık içerisinde sonsuz sayı olduğunu söylemektedirler. Yalnız bu kapalı aralık bir fonksiyonun tanım kümesi olarak verildiğinde, öğrenciler görüntü kümesini belirlerken sadece bu aralıktaki yer alan tamsayı değerlerini göz önüne almaktadırlar.

Fonksiyonlarda tanım, görüntü ve değer kümesine lise müfredatında yer verilmiştir. Ayrıca kümülatif olarak ilerleyen matematik dersi için ilerideki konular, fonksiyon biliniyormuş gibi işlenmektedir. Bu temeli alarak gelen öğrencilere, fonksiyon kavramı genel matematik dersinde detaylı olarak anlatılmıştır. Oysa çok basit gibi görünen bu kavramlarda sıkıntılar büyüktür. Bu sıkıntıların sebeplerinden biri de öğretmenlerin tanımsal özellikleri konu başında vermesi ve ardından bu özellikleri düşünmeyi aktif kılacak örneklerden bahsetmiyor olmalarıdır (Akkoç, 2005). Bu kavramsal boşluklar dolmadan yeni kavramların öğretilmeye çalışılması problemi daha da büyütmektedir. Bu nedenle kavramlar verilirken sadece tanımın verilmesi yerine, tanımları farklı yönlerden öğrencilere düşündürmek gerekir. Kavramsal öğretim ön plana çıkarılmalıdır. Fonksiyonlarda birçok çalışma yapılmıştır (Dubinsky ve Harel, 1992; Tall ve Bakar, 1992; Vinner,1983). Ama özel olarak tanım ve görüntü kümesine odaklanmış bir çalışmanın varlığından söz edilememektedir. Bu konuda literatürdeki boşluğu doldurmayı amaçlayan bu çalışma birçok çalışmaya ışık tutacaktır. Tanım ve görüntü kümesi ile ilgili kavram yanlışlarının belirlenmesinin yanında bu yanlışlar için çözüm önerileri de geliştirilebilir.

## KAYNAKÇA

- Akkoç, H. (2004). Lise 3 öğrencilerinin çekirdek fonksiyon kavramını anlamaları. *VI. Ulusal Fen Bilimleri ve Matematik Eğitimi Kongresi*, 9-11 Eylül 2004, Marmara Üniversitesi, İstanbul.
- Akkoç, H. (2005). Fonksiyon kavramının anlaşılması: tanımsal özellikler ve çoğul temsiller. *Eğitim Araştırmaları Dergisi*, 20.
- Akkoç, H. (2006). Concept images evoked by multiple representations of functions. *H.U. Journal of Education*, 30: 1-10.
- Albayrak, M. (2000). *İlköğretimde Matematik ve Öğretimi*. Ankara: Aşık Matbaası.
- Anıl, Ş. (2007). *Mutlak Değer Konusundaki Kavram Yanılgılarının Belirlenmesi ve Giderilmesi*. Balıkesir Üniversitesi, Yüksek Lisans Tezi.
- Aydın, M., Köğce, D. (2008). Öğretmen adaylarının “denklem ve fonksiyon” kavramlarına ilişkin algıları. *Yüzüncü Yıl Üniversitesi Eğitim Fakültesi Dergisi*, 5(1): 46-58.
- Bayazıt, İ. (2010). Fonksiyonlar konusunun öğreniminde karşılaşılan zorluklar ve çözüm önerileri. M F Özmantar, E Bingölbali ve H Akkoç , (Ed.), *Matematisel Kavram Yanılgıları ve Çözüm Önerileri* içinde (s. 92-104), Pegem Akademi, Ankara.
- Bayazıt, İ., Aksoy, Y. (2010). Teachers’ pedagogical indications about the concept of function and its teaching. *Gaziantep Üniversitesi Sosyal Bilimler Dergisi*, 9(3): 697-723.
- Breidenbach, D., Dubinsky, E., Hawks, J., Nichols, D. (1992). Development of the process conception of function. *Educational Studies in Mathematics*, 23(3): 247-285.
- Dreyfus, T., Eisenberg, T. (1982). Intuitive functional concepts: A baseline study on intuitions. *Journal for Research in Mathematics Education*, 13: 360-380.

- Dreyfus, T. (1990). Advanced mathematical thinking. In P. Neshier, J. Kilpatrick (Eds.), *Mathematics and cognition: A research synthesis by the International Group for the Psychology of Mathematics Education* (pp. 113-134). Cambridge, England: Cambridge University Press.
- Dubinsky, E., Harel, G. (1992). The nature of process conception of function. In G. Harel and Ed. Dubinsky (Eds.), *The Concept of function: aspects of epistemology and pedagogy* (pp.85-104) Mathematical Association of America.
- Eisenberg, T. (1991). Function and Associated Learning Difficulties. In D. Tall (Ed.), *Advanced Mathematical Thinking* (140-152). Kluwer Academic Publishers.
- Elia, I., Spyrou, P. (2006). How students conceive function: a triarchic conceptual-semiotic model of the understanding of a complex concept. *TMME*, 3(2): 256-272.
- Even, R. (1990). Subject matter knowledge for teaching and the case of functions. *Educational Studies in Mathematics*, 21(6): 521-544.
- Güveli, H., Güveli, E. (2002). Bağntı, Fonksiyon Tanımı, Bire-Bir Fonksiyon ve Örten Fonksiyon Konularında Lise-1 Düzeyinde Kavram Yanılgılarını Tespiti, *V. Ulusal Fen Bilimleri ve Matematik Eğitimi Kongresi*. <http://www.fedu.metu.edu.tr/ufbmek-5/ozetler/d233.pdf>.
- McMillan, J., Schumacher, S. (2005). *Research in education: Evidence-based inquiry* (6th ed.). Boston, MA: Allyn & Bacon.
- Mestre, J. (1989). Hispanic and Anglo students' misconceptions in mathematics eric digest. *ERIC Clearinghouse on Rural Education and Small Schools Charleston WV*, 1-7.
- Moralı, S., Köroğlu, H. (2004). Trainee mathematics teachers' misconceptions and attitudes towards abstract mathematics course: a sample of Buca faculty of education. *Gazi Eğitim Fakültesi Dergisi*, 24(1): 161-175.
- Nagel, E.A. (1994). *Effects of Graphing Calculators on College Algebra Students' Understanding of Functions and Graphs*, San Diego State University, USA, Master.

- NCTM (2000). Principles and Standarts for School Mathematics, Reston, Virginia. <http://www.nctm.org/standards>.
- Olivier, A. (1989). Handling pupils' misconceptions. Presidential address delivered at the Thirteenth National Convention on Mathematics, Physical Science and Biology Education, Pretoria, 3-7 July 1989.
- O'callaghan, B. (1998). Computer-intensive algebra and students' conceptual knowledge of functions, *Journal for Research in Mathematics Education*, (29): 21-40.
- Pesen, C. (2008). Kesirlerin sayı doğrusu üzerindeki gösteriminde öğrencilerin öğrenme güçlükleri ve kavram yanlışları. *İnönü Üniversitesi Eğitim Fakültesi Dergisi*, 9(15): 157-168.
- Polat, Z.S., Şahiner, Y. (2007). A study about the elimination of pre-service primary education teachers' misconceptions about relations and functions concepts. *Education and Science*, 32(146): 89-95.
- Sajka, M. (2003). A secondary school students' understandings of the concept of function-a case study. *Educational Studies in Mathematics*, 53: 229-254.
- Selden, A., Selden, J. (1992). Research perspectives on conception of functions: Summary and overview. In G. Harel and E. Dubinsky (eds.), *The Concept of Function: Aspects of Epistemology and Pedagogy* (pp. 1-16). Washington DC: Mathematical Assn of Amer.
- Smith, J.P., diSessa, A.A., Roschelle, J. (1993). Misconceptions reconceived: A constructivist analysis of knowledge in transition. *The Journal of the Learning Sciences*, 3(2): 115-163.
- Tall, D., Bakar, M. (1992). Students' mental prototypes for functions and graphs. *International Journal of Mathematical Education in Science and Technology*, 23(1): 39-50.
- Tatar, E., Okur, M., Tuna, A. (2008). Ortaöğretim matematiğinde öğrenme güçlüklerinin saptanmasına yönelik bir çalışma. *Kastamonu Eğitim Dergisi*, 16(2): 507-516.
- Vinner, S. (1983). Concept definition, concept image and the notion of function. *International Journal of Mathematical Education in Science and Technology*, 14(3): 293-305.

Vinner, S., Dreyfus, T. (1989). Images and definitions for the concept of function. *Journal for Research in Mathematics Education*, 20(4): 356-366.

Zachariades, T., Christou, C., Papageorgiou, E. (2002). The difficulties and reasoning of undergraduate mathematics students in the identification of functions. *Proceedings in the 10th ICME Conference*, Crete, Greece. <http://www.math.uoc.gr/~ictm2/Proceedings/pap353.pdf>.