Ankara University Journal of Faculty of Educational Sciences
Year: Volume: 56, Issue: 2, 879-927
DOI: 10.30964/auebfd.1150640, E-ISSN: 2458-8342, P-ISSN:1301-3718

Analysis of Different Rational Number Definitions Used in the Literature

ARTICLE TYPE	Received Date	Accepted Date	Published Date
Review Article	07.29.2022	12.07.2022	05.04.2023

Çiğdem Alkaş Ulusoy [1]
TED University

Yeter Şahiner [2]
Hacettepe University

Abstract

A comprehensive search in the literature shows that there are two different rational number definitions: Definition 1 (D1) Q = {a/b : a and b integer, b≠0} and Definition 2 (D2) Q = {a/b : a and b is integer, b≠0, a and b are co-prime}. It is an important contradiction that the sets of Q (rational number) expressed by D1 and D2 are not the same set, and this contradiction is the source of motivation for this study. This article aims to analyze which definition is correct by examining the non-equivalent definitions of D1 and D2 within the framework of the construction and properties of rational numbers, and therefore to prevent the use of the incorrect definition from becoming widespread. This research was carried out using document analysis, one of the qualitative data analysis methods. As data collection tools, textbooks approved by the Ministry of National Education of Türkiye, national and international mathematics and mathematics education books, and documents consisting of academic articles (37 books and 15 articles) containing the definitions of D1 and (or) D2 were used. With the analysis of the data, it has been determined for what reasons the condition of "being co-prime" is needed, which makes the definitions different from each other. As a result, it has been argued that there is no need for the condition "being co-prime" added to D2, and therefore D1 is a sufficient and correct definition to define rational numbers, and it does not create contradictions such the definition (D2). Additionally, when the definitions were evaluated according to the criteria of being a definition, it was concluded that D1 was suitable for the criteria.

Keywords: Mathematical definition, rational number, fraction, equivalence in definition, co-prime.

Citation: Alkaş Ulusoy, Ç., & Şahiner, Y. (2023). Analysis of different rational number definitions used in the literature. *Ankara University Journal of Faculty of Educational Sciences, 56*(2), 879-927. https://doi.org/10.30964/auebfd. 1150640

---

[1]*Corresponding Author*: Assist. Prof. Dr., Faculty of Education, Department of Elementary Mathematics Education, E-mail: cigdem.ulusoy@tedu.edu.tr, https://orcid.org/ 0000-0002-0763-4044
[2]Prof. Dr., Faculty of Education, Department of Elementary Mathematics Education, E-mail: ysahiner@hacettepe.edu.tr, https://orcid.org/0000-0002-6696-4190

The word 'definition' can be expressed as specifying or explaining the characteristics of a concept completely (Türk Dil Kurumu, 2011). So much so that having the qualities given in the definition includes or excludes any object from the set related to the concept. Therefore, defining a concept with the right qualities is extremely important in terms of distinguishing that concept from other concepts and being precise.

Definitions are extremely important corner stones for the field of mathematics, as in many disciplines. The most basic element in constructing mathematical structures and conveying mathematical ideas is the definitions of mathematical concepts. Regarding mathematical communication, the strongest bridge between the minds of those who express the concept and those who try making sense of the concept can only be established by clearly defining the concept for both parties. Only in this way, a correct transfer takes place in mathematical communication. Otherwise, there will be some confusion in the mathematical communication of the parties, and it will be difficult for them to look at a common point over the same concept.

Characteristics of a Mathematical Definition

In order for a definition to be accepted for a mathematical concept, the definition must meet some criteria. In the relevant literature, these criteria; the criterion of hierarchy (Winicki-Landman & Leikin, 2000), the criterion of existence, the criterion of equivalence, establishing necessary and sufficient conditions for the concept, the criterion of minimality (Van Dormolen & Zaslavsky, 2003). To elaborate on these criteria, what is meant by the criterion of hierarchy is that each concept is defined as a special case of a wider concept than itself. In mathematics, concepts are built on each other. For example, to define rational numbers, integers must be defined first. In this way, integers exemplify a special case of the rational numbers that contain them. Van Dormolen and Zaslavsky (2003) used the expression "criterion of existence" while explaining the criterion for the existence of the phenomenon or concept to be defined (p.94). If this criterion is exemplified through the axiomatic structure, the concept of rational number comes into being by constructing the set of whole numbers and then constructing integers and then rational numbers. The equivalence criterion is important in cases where more than one definition of the same concept is made. In this case, one must be able to arrive at the other by any definition chosen among them and the logical inferences that can be drawn from that definition. For example, the definitions that are given to define prime numbers,

PN1: Whole numbers that have only two positive integer as divisor.

PN2: Positive integers greater than one that are only divisible by themselves and 1 without a remainder.

are equivalent definitions (Vinner, 1991). Perhaps the most important criterion for being a definition is establishing necessary and sufficient conditions for the concept. Let's assume that to define a concept, several properties must exist. Giving only one of these features as a definition may have provided the necessary condition for that concept definition. However, since sufficient conditions are not provided to define that concept, the definition of the concept will be incomplete and therefore erroneous. For example, if PN1 is taken as the definition of a prime number, the necessary condition for a number to be prime is that it is a whole number. The sufficient condition is that this number has only two positive integers as divisor. Another criterion sought in the definition of a concept is that the definition to be made is minimal. What is meant by minimal here is that while a concept can be defined with less than the qualities that make up that concept, more is not needed. Therefore, when defining that concept, it will be simpler, and the definition will be more economical by including only enough qualifications to define the concept. For example, by removing the word "positive" in PN2, which is used for the definition of prime numbers (any integer greater than one is already positive), the definition of PN2 can be written more economically. Although it is not a criterion, a feature sought in mathematical definitions is elegance or aesthetics. It is preferred more than the other in terms of being simple, creative and prompting the reader to think (Çakıroğlu, 2013). For example, the PN1 definition is more elegant than the PN2 definition.

Purpose and Problem Statement

Considering the criteria and qualifications for definition, the researchers of this study wondered whether the expressions given as definitions in course materials and written sources really define mathematical concepts. This curiosity about all mathematical concepts in general focused on the concept of "rational number" in particular. When research articles on the definition of rational number, mathematics education books, mathematics books, high school and secondary school textbooks are examined through a comprehensive literature review, it is seen that the following two definitions are discussed;

Definition 1: $Q = \{a/b : a \text{ and } b \text{ integer}, b \neq 0\}$

Definition 2: $Q = \{a/b : a \text{ and } b \text{ integer}, b \neq 0, a \text{ and } b \text{ co-prime}\}$

(In the rest of the article, Definition 1 and 2 will be abbreviated as D1 and D2. In which reference and how each definition is handled will be explained in detail in the findings section).

The fact that the sets of Q (rational numbers) expressed by these two different definitions in the literature are not the same, causes confusion and misconceptions about rational numbers for secondary and high school students, prospective teachers, teachers and academicians. Therefore, by drawing attention to this problem, studies to determine the reasons for the emergence of a second definition for the rational number definition and to examine these two different definitions with mathematical content knowledge will make an important contribution to the literature by eliminating this confusion. The lack of studies on this confusion in the literature is the source of motivation for this article. This article aims to analyze which definition is correct by examining the non-equivalent D1 and D2 definitions within the framework of mathematical definition criteria, the construction of rational numbers and their properties, and therefore to prevent the spread of the wrong definition. In line with these purposes, answers to the following questions are sought:

In what sources are different definitions of rational numbers found?

What is the difference between the definitions used to define rational numbers, and why is this difference necessary?

Which definition used to describe rational numbers is mathematically correct?

Do the definitions used to define rational numbers meet the characteristics of a mathematical definition?

Method

This section covers the research model, data collection tools, data analysis, validity and reliability evidences.

Research Model

A qualitative approach was used to find solutions to the problems of this research and document analysis, one of the data analysis methods, was used. Document analysis is a qualitative research method used to carefully and systematically analyze the content of written documents (Wach, 2013). As it is known, which documents are important and can be used as a data source in document analysis are closely related to the research problem. Bogdan and Biklen (2007) stated that textbooks are frequently examined in educational studies. In this study, in addition to the textbooks, academic articles, which discuss rational numbers in their research problems were also included in the study.

Data Collection Tools

In the document analysis carried out to find answers to the research questions, secondary and high school mathematics textbooks containing rational numbers approved by the Ministry of National Education (as rational numbers are included in the mathematics curriculum at the 7th and 9th grade levels, mathematics textbooks at these levels were examined), national-international mathematics textbooks, mathematics education books, and national-international academic articles were used as data collection tools.

Data Analysis

Many stages must be completed when conducting a document analysis. According to Forster (1994), these stages are: (1) accessing the documents, (2) checking the originality, (3) understanding the documents, (4) analyzing the data, and (5) using the data. In accordance with the framework given in this study, first, university libraries were scanned for textbooks. For articles, to increase access to electronic resources and databases, databases containing academic publications were searched through the proxy server of the university and books (37 books) and research articles (15 articles) on rational number definitions were reached in this way. Since only two different definitions were seen in the scanned sources, the stage of reaching the document was limited to 37 books and 15 articles. The current study examines the definitions used rather than to describe the sources reached numerically (with the thought that the sources with different definitions are sufficient), the mentioned limitation was deemed appropriate. For the originality control stage, the sources from which the rational number definitions in each book/article were cited were accessed and it was checked whether the quoted definition was consistent with the quoting source. At the stage of understanding the documents, each document was examined by determining the rational number definition used. For the stage of analyzing the data, the reasons for using the definitions used in the documents were analyzed and the documents were classified in this way. As a result of the research, the data consisting of the reasons for using the definitions were examined, then the definitions were examined, and which definition was suitable for defining the set of rational numbers was defended in a mathematical sense. Additionally, the characteristics of these definitions were also examined. Thus, the phase of using the data was completed.

Validity and Reliability

Validity in qualitative research means that the researcher observes the researched phenomenon as it is and as impartially as possible (Yıldırım & Şimşek, 2008). Explaining in detail how the research data was accessed, which criteria were used, and how the results were interpreted are among the important criteria of validity in qualitative research. The data of this study consist of textbooks and articles. Which books and articles were included in the dataset with different criteria were explained in detail with their justifications. Apart from this, during the determination of the rationale for using the rational number definition, if the rationale was not clearly expressed in the examined document, confirmation was obtained from the author of the document by either e-mail or face-to-face interview.

The concept of reliability is related to the reproducibility of the research by other researchers. The measures taken to ensure reliability in this research can be summarized as follows: The data sources used in the research are clearly stated. Since the documents used are articles published in peer-reviewed journals and sources in the status of textbooks, the data are reliable. Additionally, the original sources used as a reference in the documents were also reached, and the cases where an accurate transfer was not provided were also specified in the research. Apart from that, the research process has been reported in full detail. The research data were examined separately and intermittently several times by the two researchers who carried out the study, and a consensus was reached on the results. Additionally, the research results were shared with three different field experts and their opinions on the interpretation of the data were obtained.

Sak et al. (2021) stated that it would be meaningful to try interpreting the documents together with their source and the way they were formed and to verify the results obtained from the documents from different sources, instead of just examining the documents to ensure validity and reliability in the document analysis method. In this study, the definitions used for the concept of rational numbers were examined from this perspective, different definitions were explained with the reasons presented by the documents examined, and which definition was suitable for rational numbers was confirmed by verifying from different sources.

Ethical Declaration and Committee Approval

Since this study included document analysis and did not involve any intervention, an ethics committee document was not needed.

Findings

In this section, the findings related to each research problem will be given.

Sources using different definitions of rational numbers

In this section, the findings regarding the sources and reasons for using the different rational number definitions used in the literature are presented.

D1 in the Literature

D1: $Q = \{a/b : a \text{ and } b \text{ integers}, b \neq 0\}$

Students encounter the concept of rational number for the first time at the seventh grade level of secondary school. Seventh-grade mathematics textbooks (Altıntaş & Keskin, 2019, p. 40; Erenkuş & Eren Savaşkan, 2018, p. 52; Keskin Oğan & Öztürk, 2019, p. 62) and high school textbooks (Çetiner, et al., 2001; Gündoğdu, 1999, p. 188; Maviş et al., 2019, p. 81; Ministry of National Education, 2013, p. 135) use D1 to define rational numbers.

The resources that give the rational number definition as D1 from the national mathematics education books are very few (Argün et al., 2020; Baki, 2018; Baykul, 2009). In one of these sources, Baki (2018) gave place to construction of numbers and defined rational numbers as D1 in his book chapter "Do We Know the Mathematics We Will Teach?" (p. 36). In widely used international books of well-known authors in mathematics education (Musser et al., 2008, p. 382; Van de Walle et al., 2015, p. 626), it is used to define rational numbers. However, D1 is given in few basic/general mathematics books (Esin & Ağlı, 1977; Kaçar, 2006; Koçak, 1989; Sulak, 2007) and in many national or international undergraduate level analysis/calculus books (Adams, 2003; Çelik & Çelik, 2010; Karaçay, 2009; Silverman, 1985; Stewart, 1998; Thomas et al., 2010).

In addition to books, there are many articles on rational numbers in national and international literature. Among these articles, it has been observed that D1 is used in some international education articles (Obersteiner et al., 2015; Omoruan & Osadebe, 2020; Pinto & Tall, 1996; Vamvakoussi, 2015). There are also articles using D1 when defining rational numbers at the national level (Çetin, 2020).

D2 in the Literature

D2: $Q = \{a/b : a \text{ and } b \text{ integers}, b \neq 0, a \text{ and } b \text{ co-prime}\}$

While D2 is not found in middle school mathematics textbooks, it is included in some 9th grade high school mathematics textbooks (Aytar, 2018, p.94; Uçak et al., 2019, p. 93.). In some national mathematics education books D2 is used as the definition of rational number (Hıdıroğlu, 2019, p.78; Olkun & Yeşildere, 2007, p.64; Tuna & Biber, p.141, 2019; Yanık, 2013, p.95). For instance, Hıdıroğlu (2019) uses D2 after explaining his reasons. Tuna and Biber (2019) state that they quoted this definition from the sources of Balcı (1999), Kadıoğlu and Kamalı (2009), and Moss (2000). It is seen that Yanık (2013) used D2 by stating that he quoted the sources of Çelik (2006) and Başkan et al. (2006). D2 is also used in the other basic/general mathematics books of the cited authors (Bizim et al., 2011; Çelik, 2010). While there are no international articles using D2 in the literature, the articles of Aktaş and Cansız Aktaş (2012) and Cansız Aktaş et al. (2014) at the national level uses D2 by referencing from the 9th grade mathematics textbooks published by the Ministry of National Education in 2007 and 2011.

According to the information of the viewed sources and their references, the definition of D2 was first encountered in 1999. Afterwards, especially in 2006–2007, the use of D2 started to increase throughout only one 9th grade mathematics textbook and generally basic/general mathematics textbooks and became widespread in the following years.

Other Findings Regarding Definitions and Citations in the Literature

In this section, in the books and articles examined, some other observed situations will be presented, apart from using D1 and (or) D2.

Miscitation

When Moss (2000) and Kadıoğlu and Kamalı (2009) sources cited in Tuna and Biber (2019) are examined, it is seen that the rational number definition is given as D1 rather than D2 in these sources. For this reason, it is concluded that the rational number definition is D2 with conditional acceptance of the wrong attribution made in the source of Tuna and Biber (2019). However, this situation (citing the cited sources as if they were given a different definition in the content) should be approached carefully because the originality of the information is not preserved and it may create confusion about the definition in the literature.

Studies Include/Not Include D1 and D2 Together

In most of the articles on the concept of rational number published in Turkish, data analysis was carried out according to the answers of the students to the questions selected to determine the level of knowledge of the students. Since the answers to the questions examining the concept of rational number and the definition they adopted were not given by the authors in these studies, it is unclear which definition they refer to (Birgin & Gürbüz, 2009; Çevikbaş & Argün; 2017; Ercire et al., 2016; Gürbüz & Birgin, 2008). There are also articles in the international literature on rational numbers in which the definition used is not clearly shared (Behr et al., 1997; Hurst & Cordes, 2018). In articles on learning/teaching mathematical concepts, it is critical for the authors to share the definition they defend, in terms of the full content of the work they present, and thus inform the reader and evaluate how the data is interpreted. Unlike these, Macit and Nacar (2019) and Doruk (2020) cited the definition of rational number in the literature and included both D1 and D2 in their articles. However, they did not mention according to which definition they evaluated the data. In the book Basic Mathematics Concepts (Argün et al., 2020, p. 435), the rational number definition is stated as D1. Then, by emphasizing the importance of being aware of D1 as a teacher and knowing that rational numbers are an "equivalence class" according to the teaching levels, it has been mentioned that it can be expressed symbolically as D2 to enable students to construct this concept more clearly in their minds and to distinguish the concept of rational number from the concept of fraction. In another source (Balcı, 2006, p. 5), although D1 is given, it actually points to D2, stating that the integers in the definition should be considered co-prime.

Difference between the definitions used to define rational numbers

When the rational number definitions in the literature are examined, it is seen that while the rational number definition is given as D2 in some high school, national mathematics education and basic/general mathematics books, D2 is not used in national/international calculus/analysis books. Additionally, it is quite remarkable that the definition of rational number is only in the form of D1 in international publications and that D1-D2 confusion is not seen.

Considering equivalence criteria, which is one of the definition criteria mentioned in the introduction, it would be appropriate to emphasize that even if the definitions of rational numbers, which is a mathematical concept, are expressed differently, the defined set must be the same and the definitions cannot change according to the authors.

Notice that the difference between the definitions is the "being co-prime" condition in D2. With this condition, the elements of the set expressed by D1 and D2 cannot be the same. So D1 and D2 are not equivalent definitions. For example, while 2/4 is a rational number according to D1, it is not according to D2. This is just one of the important contradictions that needs to be addressed. To eliminate these and other contradictions, first, it should be discussed why this condition is needed and whether this condition is necessary.

When the sources are examined, the condition of "being co-prime" in D2 was added mainly for two reasons. First of these reasons is to prove some mathematical propositions, and the other is to explain the fraction-rational number difference. In addition to these, this condition needs to be added due to "other reasons" such as the infinite number of equal elements in the set Q, the countability of Q, etc. All of these justifications will be examined in turn in this section and will be discussed in the next section.

Proving Mathematical Propositions

Although some studies that share D2 by quoting from each other (Başkan et al., 2006; Bizim et al., 2011; Çelik, 2006; Çelik, 2010; Yanık, 2013) define the set of rational numbers, mention the necessity of "being co-prime" condition. They state that it was not clearly stated, but this condition was used in the proofs and it was quite important. In the study of Çelik (2010), to support this requirement, the proof that the number √2 is not rational is given as follows using D2 (p. 31):

"Conversely, assume the number √2 is rational. By definition, there are integers p and q (q≠0) such that √2 = p/q can be written. If we write p = √2 q from here and square the two sides, p2=2 is found. So, which is divisible by 2, is an even number. This is possible only if p is even. Therefore, it can be expressed as p = 2m, with m being an integer. Substituting this result in the last equation (2m)2 = 4m2 = 2q2 and from there 2m2 = q2 is obtained. This means that q2 and therefore q are even as above. As a result, the fact that the numbers p and q, which we assume to be prime, are both even, contradicts our assumption. So √2 is not a rational number and is irrational by definition."

Fraction-Rational Number Differences

When the literature is reviewed, it is seen that another reason for an additional condition in D2 is the need to reveal the difference between a rational number and a fraction. According to some authors, there is no such difference. It is not among the purpose of this article to examine the rational number-fraction relationship. The aim of this study is limited to examining the necessity of "being co-prime" condition, which creates the difference between D1 and D2, and defending which definition is appropriate for the concept of rational number.

According to the opinions cited in Bizim et al. (2011), Çelik (2006), Çelik (2010) and Yanık (2013) sources, "rational numbers are the simplest form of fractions" Here, by using the additional condition, the difference between fraction and rational number is emphasized and D1 is fraction and D2 is given for the rational number definition. According to these definitions, although all the numbers ...8/12=6/9=4/6=2/3 represent fractions belonging to the same equivalence class, only 2/3 is a rational number. Similarly, when we look at the unity of expression in the sources of Tuna and Biber (2019) and Hıdıroğlu (2019), it is thought that the acceptance of "being co-prime" in the definition is needed to reveal the difference between rational numbers and fractions.

Argün et al. (2020) stated that although the authors defined rational number as D1, the research in mathematics education revealed that students should construct this concept more clearly in their minds according to their education level. To distinguish the concept of rational number from the concept of fraction in a pedagogical sense, they proposed to introduce the set of numbers as D2 symbolically.

Other Reasons

Balcı (2006, p. 5) gave D1 in his study, and after he highlighted, "Since c is a non-zero integer, a/b=ca/cb, the above number (a/b) will be considered co-prime." He commented as "otherwise, the statement Q contains an infinite number of equal elements." By this statement, he needs the condition of "being co-prime" to exclude the case of containing infinitely many equivalent fractions.

In the source of Hıdıroğlu (2019), it is stated that the fractions equivalent to each other are represented by a point on the number line and that point is represented by the simplest form of fractions. Considering this, he pointed out that this approach is important in many proofs such as the infinity and countability of rational numbers, and that this is an example that shows the difference and relationship between fractions and rational numbers. Finally, he provided D2 as the definition of the rational numbers. It can be concluded that the author claims that the problems regarding the representation of infinitely many equivalent fractions on the number line, the infinity of the set of rational numbers (containing infinitely many equivalent fractions), and the proof of the countability of rational numbers are overcome by "being co-prime" condition.

Mathematical Analysis of Definitions Used to Define Rational Numbers

In this section, it is argued that D1 is mathematically correct for the definition of rational numbers.

The proof that the number $\sqrt{2}$ is not rational, based on D2 (Çelik, 2010), was given above. However, this can be proved using D1 without the "being co-prime" condition:

Let's assume that $\sqrt{2}$ is rational. Then, according to D1, a and b integers ($b \neq 0$), it can be written $\sqrt{2} = a/b$. If GCD (a,b) = 1, it means that a and b are co-prime and the proof is completed by obtaining the contradiction as above. If GCD (a,b) = k, k is an integer, and $k \neq 1$ (that is, when a and b are not prime), there are integers p and q such that they can be written as a=kp and b=kq.

Additionally, since the number k is the largest of the common divisors of a and b, GCD (p,q) = 1. In other words, p and q are co-prime and we get $\sqrt{2} = a/b = kp/kq = p/q$, $k \neq 0$. After that, with the same operations using p and q instead of a and b as in the proof in the "Proving Mathematical Propositions" section, it is seen that p and q are even numbers, which contradicts the fact that p and q are co-prime. As a result, it is concluded that the assumption that "$\sqrt{2}$ is rational" made with the contradiction obtained whether a and b are co-prime or not, is wrong. That is, $\sqrt{2}$ is not a rational number, since the number $\sqrt{2}$ cannot be written as a/b, where a and b ($b \neq 0$) are integers. As it can be seen, D1 is sufficient to prove the proposition given by the author of the chapter in the source of Çelik (2010), and it would be appropriate to emphasize here that it is not necessary to add the condition "a, b is co-prime."

To understand why the "being co-prime" condition, which forms the basis for the reasons mentioned in the "Rational Number-Fraction Difference" and "Other Reasons" sections, is not necessary, the reader should firstly read the construction of rational numbers in the Appendix (partly compiled from Karaçay and Eş).

With Z* = Z\{0}, Q is the set of equivalence classes of an equivalence relation defined on ZxZ*. In other words, the class of representatives formed by a representative chosen from each equivalence class is called the set of rational numbers. For example, the set {2/3, 4/6, 6/9, 8/12,...} is an equivalence class, so this set is a rational number. Only one of the equivalent fractions that makes up this class represents this rational number, and the choice for the representation is arbitrary. Therefore, it is possible to select one of the representations {2/3, 4/6, 6/9, 8/12,...} = [2/3] or {2/3, 4/6, 6/9, 8/12,..} = [8/12]. There are no rules or requirements for a representative selection. However, the aesthetics of mathematics is simplicity and its language is universal. For this reason, universally accepted simplicity is preferred in the selection of representatives. Since 2/3 is the simplified form of 8/12, 2/3 is preferred as the representative of {2/3, 4/6, 6/9, 8/12,...} equivalence class. With this preference, it is quite natural to choose the fraction a/b as a representative of any equivalence class, with a and b being co-prime. One of the most important things to emphasize here is the comparison of two different types of concepts. A fraction is an element of the equivalence class, while a rational number is the entire set of equivalence classes.

After the explanations above, it can be concluded that the expression "rational numbers are the simplest of fractions" in the "Rational Number-Fraction Difference" section may actually have originated from the perception of natural selection for representatives as a rule or a necessity. As a result of this perception, with the thought that rational number and fraction should have been in different definitions; D1 might have been given for fraction and D2 might have been given for rational number.

Whether an operation defined on equivalence classes depends on the items to be selected to represent the equivalence classes is critical. No matter which representatives we choose from the equivalence classes when operating on equivalence classes, we should always obtain the same result. This property means that the operation is well defined (if an operation defined in the set of equivalence classes does not depend on the delegate chosen to represent the equivalence class, that operation is well defined). If not, the result of the operation will be different because anyone may choose different representatives and such situation is undesirable.

When operating on rational numbers in different fraction forms (with different representation choice), we always get the same result. For example, adding the pairs 1/2 and 3/4 or 3/6 and 12/16 gives the same result.

(E1) 1/2+3/4=5/4

(E2) 3/6+12/16=120/96

In this example {1/2, 2/4,3/6,...} represents the equivalence class (rational number) as 1/2 in (E1), 3/6 in (E2) and similarly {3/ 4, 6/8, 9/12, 12/16,...} were chosen as 3/4 in (E1) and 12/16 in (E2) to represent the equivalence class (rational number). The results obtained by these choices are different representatives of the equivalence classes 5/4 and 120/96, {5/4, 10/8,...,120/96,...} and are different representations of the same rational number. The addition operation defined on rational numbers, which are the set of equivalence classes, is well-defined, that is, no matter, which representatives of the equivalence classes we choose when adding on rational numbers, the sum always gives the same result. Therefore, 5/4 and 120/96, which are the result of operations (E1) and (E2), are the same rational number. These examples can also be derived for subtraction, multiplication, and division (as well as for addition).

Additionally, the fact that an operation defined on the set is well-defined means that the set is actually closed to the operation. Rational numbers are closed according to four operations (the result of two rational numbers being operated is also a rational number). If the rational number definition is accepted as D2, according to this definition, 1/8 and 3/8 are rational numbers. The number (1/8+3/8=4/8) obtained as a result of the addition operation is not a rational number according to D2 because 4 and 8 are not co-prime. However, rational numbers are closed under addition. So the sum, 4/8, would also have to be rational. With this contradiction, it is concluded that the assumption made for the definition is not correct. Therefore, the aforementioned contradiction arises from the "being co-prime" condition in D2. If the definition of rational numbers had been made as D1 without this condition, such no contradiction would have occurred. As a result, it is seen that rational numbers cannot be defined as D2.

In some publications, it was mentioned that D1 could be given as a fraction and D2 for a rational number, with the thought that the rational number and fraction should have different definitions. Assuming the authors' claims are true, let the set of fractions defined by D1 be symbolized by K, and the set of rational numbers defined by D2 by Q. The following result emerges from these definitions made with the claim that "every rational number is a fraction, but not every fraction is a rational number": The claimed set of rational numbers Q is a subset of the claimed set of fractions K. If this is true, there are two cases to be observed: First, since $Q \subset K$, there is at least one element x in the set of fractional numbers K but not in Q. Since $x \notin Q$, ie not rational, x must be an irrational number. The fact that $x \in K$ also means that the set K contains an irrational number. Therefore, x, which is an irrational number, should be written in accordance with the definition of the set K, that is, as the division of two integers, since $x \in K$, but this is not possible as is known. This contradiction arises from the fact that the set of rational numbers Q is defined as D2 and therefore, is included in the set expressed by D1. This contradiction, which consists of the definitions made to reveal the fraction-rational number difference, will disappear when the set of rational numbers Q is actually made as D1. The second situation that needs to be emphasized is again to the relationship between being a subset among the number sets. According to the definitions made, Q is a subset of the set of fractions K. Knowing that Q is also a subset of the real numbers R, the question can be asked: What is the subset relationship between the sets K and R? Which relationship is true since both sets cover the set Q; $Q \subset K \subset R$ or $Q \subset R \subset K$? Considering the $K \subset R$ part of the case $Q \subset K \subset R$, the set K contains all rational numbers, as well as at least one number x that is both non-rational and real (real numbers are the union set of rational and irrational numbers, which are two disjoint sets), so x is an irrational number. In other words, assuming $K \subset R$, the set K contains some irrational numbers and some does not. A set with this property can only be a special set, for example K = Q U {x∈R+| x2 is an integer}. In this example, $\sqrt{2} \in K$, and again it cannot be written as a ratio of two integers. Also, although this set contains Q, it cannot provide the algebraic properties of Q in itself. When $\sqrt{2}$ and $\sqrt{2} \in K$, the result of any of the addition, subtraction or division operations with these numbers will not be an element of K. Similar contradictions are obtained in the case of $Q \subset R \subset K$. All these contradictions arise from the two different definitions of D1 and D2, which are made on the grounds of fraction-rational number distinction. As a result, assuming that the set defined by D1 is the set of fractions K, the set K is not a number system like N, Z, Q, and R number systems structured in a hierarchical order. Therefore, the set Q (rational number) defined by D1, which does not contain the "being co-prime" condition, is a number system that conforms to the hierarchical structure.

Finally, the claims in the section called “Other Reasons” will be responded . It was mentioned in Balcı (2006) that the "being co-prime" condition may have been added to exclude the case of Q set containing infinitely many equivalent fractions. Whereas, each infinitely many equivalent fraction set in Q is a rational number, and this number is represented by an arbitrary fraction chosen from the aforementioned set of equivalent fractions. For every nonzero integer c, the set of equivalence classes formed by the infinitely many equivalent fractions ca/cb is a rational number. The choice of the fraction ca/cb for any value of c represents this rational number. The arbitrary choice for co-prime numbers a, b, and c=1 is generalized in mathematical notations (due to preference for simplicity). Hıdıroğlu (2019) also states that the fractions equivalent to each other are represented by a point on the number line and that point is represented by the simplest form of fractions. However, the author states that this approach (simple representative choice) is important in many proofs such as the infinity of rational numbers (infinity implies that Q contains infinitely many equal elements), countability, and this is an example of the difference and relationship between fractions and rational numbers. In the countability of Q, counting elements are usually equivalence classes, and counting occurs by making one-to-one correspondence between N with the simplest a/b choices representing classes (a, b co-prime). However, also algorithms show the countability of Q defined by D1, regardless of equivalence (Baki, 2018). Therefore, the condition of "being co-prime" is not a necessary condition for counting either.

Characteristics of mathematical definition of rational numbers

The criteria for being a definition discussed in detail in the introduction will be evaluated here for D1 and D2. Criterion of hierarchy and criterion of existence are provided for D1 within the scope of structuring rational numbers in the appendix. Even if the set given with D2 has been constructed, it is seen in the explanations given in the findings part that it is not suitable for the hierarchical concept structure. The number system classified by hierarchical structure is a subset of the next set of numbers (For example, $N \subset Z \subset Q \subset R$). The place of the set given by D2 in the subset relation is unclear. If the definitions are analyzed in terms of the necessary and sufficient conditions, it is sufficient for both D1 and D2 that a and b are co-prime to ensure that a/b is a rational number. However, while the case “a and b are co-prime numbers” is a necessity for a/b to be rational number in D2, this necessity is not seen in D1. That is, D1 does not require that a and b be co-prime to each other for a/b to be rational. According to the criterion of equivalence, if there are two different definitions expressing the same concept, it should be possible to prove the other by logical inferences from one. Since D1 and D2 do not represent the same set, they cannot be equivalent. Therefore, only one definition is correct for the concept of rational number. Being economical, as one of the definition criteria, is valid for equivalent definitions, and it is not meaningful to interpret D1 and D2 according to this criterion.

Discussion, Conclusion and Recommendations

Identification and classification are fundamental elements in mathematics. In mathematical processes, first, the mathematical concepts of interest must be defined clearly and precisely. Only in this way can common scientific conclusions be reached (Mariotti & Fishbein, 1997). Additionally, the definition is not only to reveal the mathematical concept; it is also used to determine the relationship or difference of the concept with other concepts and to make a correct classification by separating the elements of the set formed by the definition from other elements (Poincare, 2003). Defining a concept correctly is important in terms of mathematical processes as well as in terms of being able to teach correctly. Correct definitions allow students to correctly classify mathematical concepts and construct mathematical structures (Vinner, 1991). In this study, the correct and clear definition of mathematical concepts has been examined in the literature, specifically for the concept of rational number.

When the relevant national and international literature is examined, two different definitions in the sources for defining rational numbers are as follows:

Definition 1: $Q = \{a/b : a \text{ and } b \text{ integers}, b \neq 0\}$

Definition 2: $Q = \{a/b : a \text{ ve } b \text{ integers}, b \neq 0, a \text{ and } b \text{ co-prime}\}$

The difference between D1 and D2 is the "being co-prime" condition in D2. With this condition, it is an important contradiction that the sets of Q (rational number) expressed by D1 and D2 are not the same. To eliminate this and similar contradictions that may occur, firstly, the reasons that may cause the inclusion of this condition in the definition of D2 have been determined by examining the sources in the literature in detail. These justifications are categorized as proving some mathematical propositions, rational number-fraction difference and other reasons.

A reason presented in the literature for using D2 as the definition of rational numbers is that it is used in the proof of some mathematical propositions. The example given in the sources is the proof that $\sqrt{2}$ is not rational using the definition of D2. In the sub-title of "Proving Propositions" of the findings section, it is emphasized that this proof can be shown with the definition of D1 without the need for the "being co-prime" condition by using D2, and therefore the additional condition in D2 is not necessary.

Another reason for using D2 is to emphasize the rational number-fraction difference. There are many studies on this difference in the literature on mathematics education. However, the researchers of this study focused on the meaning of the concepts rather than the rational number-fraction difference and questioned whether the "being co-prime" condition in D2 on which this difference is based is necessary, with mathematical content knowledge. Thanks to the summary information (for structuring rational numbers on integers with equivalence relations) compiled in the appendix, it is seen that each rational number is actually an equivalence class (i.e., a set) and every element in this equivalence class is a fraction. Therefore, since a concept to be compared is a set and the other is a member of this set, it is emphasized that this comparison is not correct. The statement "rational number is the simplest of fractions" stated by the authors who defended the definition of D2 was supported by the condition of "being co-prime" added to D2. However, the condition added to D2 is not necessary, given the fact that any element of this class (i.e., fractions) can be chosen arbitrarily to represent a rational number, which is an equivalence class.

Also, thanks to the arbitrary selection mentioned, it is indispensable that an operation between equivalence classes is well defined (a set is closed according to the given operation). It is a well-known fact that the set of rational numbers is closed according to four known operations. Whereas, according to any of the four operations, it is very easy to show that the set defined by D2 is not closed. This contradiction explained with examples, is due to the additional condition in D2. However, contradictory situations have been obtained because it is accepted that the set of rational numbers Q is defined by D2 and that the set defined by D2 is a subset of D1.

In terms of grade level, perhaps the effort to distinguish the concepts of rational numbers and fractions from each other can be aimed at facilitating the learning process. However, introducing D1 as a fraction and D2 as a rational number may lead students to the conclusion that the inferences made from the definitions contradict the known truths in later years. Students may turn to the idea of looking for a place for fractions within the $N \subset Z \subset Q \subset R$ subset relation they encounter during the construction of numbers. Conducting detailed studies that will clarify this objectionable situation that may lead students to various learning difficulties and misconceptions will contribute to the literature.

Other reasons observed in studies using D2 are the countability of rational numbers, the existence of infinitely many equivalent fractions in the set of rational numbers and their representation with a point on the number line, etc. Such issues are seen as a problem by some authors and that the D2 definition should be used to overcome them. Actually, one-to-one correspondence in countability can be performed by more than one method. The set of infinitely many fractions equivalent to each other is actually a single rational number (equivalence class), and the arbitrary choice of the simplest fraction could represent the equivalence class. As a result of the evaluation made with mathematics content knowledge, it was emphasized that the assumed problems were not actually problems and therefore, the use of D2 was not necessary.

D1 and D2 definitions were also evaluated in terms of characteristics of a mathematical definition. It has been argued that these two different definitions that are not equivalent do not represent the same set. There is no need for the "being co-prime" condition to be added to D2, and also D1 is a sufficient and correct definition to define rational numbers, that it does not create contradictions like the definition of D2, and that it meets the definition criteria.

It is necessary to underline two important situations observed during this research process. The first is the misattribution encountered in the process of reviewing rational number definitions. Although D1 was used in the main source, studies that were shown as D2 were encountered in the cited source. This situation should be approached carefully because it may cause a conceptual confusion in the literature. Another situation that should be underlined is the academic articles that do not contain any definition of the concept of rational numbers, although the research subject is rational numbers. It will be beneficial and effective for the authors of the article to clearly reveal their understanding of the concept studied in the manuscript, and to draw a framework that includes the definition of the concept, for the reader to perceive the concept correctly.

When the publishing dates of the studies reached within the scope of the research are examined, it has been seen that the use of D2 has increased since 2006 and it has been used until today. Researchers working on rational numbers refer to the sources where D2 is used, causing the definition of rational numbers to become widespread incorrectly. Another aim of this study is to prevent the spread of this error that has developed in the last 15 years. Therefore, the present study will contribute to the literature. and therefore to teachers, teacher candidates and researchers in this sense.

Another remarkable result in the literature review is that the definitions of rational numbers differ according to the types of sources and grade levels. While D1 is generally used in national/international mathematics (calculus) and international mathematics education books, it is seen that D2 is used in some national basic/general mathematics textbooks and some mathematics education books used in our country. First, the absence of a source using D2 in the international literature and the absence of a confusion like D1 and D2 suggest that this is a problem at the national level. It is possible that the use of mathematics and mathematics education books that include D2 as a rational number definition in teaching will negatively affect the learning process of students at secondary and/or high school levels through teachers who have graduated from faculties of education. The spiral structure of the mathematics curriculum in our country (MEB, 2018) allows for constructing new knowledge by repeating the subjects learned at the previous-grade level. Students first encounter the concept of rational number in the 7th grade of secondary school, and then again in the 9th grade under the title of "Number Sets." However, when we look at the 7th grade mathematics textbooks, it is seen that D1 is used, while there are a few textbooks that use D2 at the 9th grade level. The contradiction of rational number definitions taught in the 7th and 9th grades can be interpreted as a problematic situation that will drag the students who are constructing the knowledge about the concept to learning difficulties and various misconceptions. As a matter of fact, Tall and Vinner (1981) argued that the definition of a concept and the way this definition is presented is an important part of students' structuring of knowledge, and stated that concept definitions affect the thinking process of learners.

Since mathematics is a field that consists of relationships by its nature, the only meaningful way to learn is to establish meaningful relationships between concepts. Regardless of their level, students should learn concepts with definitions that will not hinder their further learning and allow them to establish necessary relationships (Hiebert & Carpenter, 1992). This situation should also be considered in teaching the concept of rational number, which is the focus of this study. Teachers and reseachers should use the definition appropriate to the concept of rational number, and avoid different definitions that are mathematically incorrect and lead students to misconceptions.

Ankara Üniversitesi Eğitim Bilimleri Fakültesi Dergisi
Yıl: 2023, Cilt: 56, Sayı: 2, 879-927
DOI: 10.30964/auebfd.1150640, E-ISSN: 2458-8342, P-ISSN:1301-3718

Alanyazında Kullanılan Farklı Rasyonel Sayı Tanımlarının Analizi

MAKALE TÜRÜ	Başvuru Tarihi	Kabul Tarihi	Yayım Tarihi
Derleme Makalesi	29.07.2022	07.12.2022	04.05.2023

Çiğdem Alkaş Ulusoy [1]
TED Üniversitesi

Yeter Şahiner [2]
Hacettepe Üniversitesi

Öz

Alanyazında yapılan kapsamlı bir tarama sonucunda iki farklı rasyonel sayı tanımı olduğu görülmektedir: Tanım 1 (T1) $Q = \{a/b : a$ ve b tamsayı, $b \neq 0\}$ ve Tanım 2 (T2) $Q = \{a/b : a$ ve b tamsayı, $b \neq 0$, a ve b aralarında asal$\}$. T1 ve T2 nin ifade ettiği Q (rasyonel sayı) kümelerinin aynı küme olmamaları önemli bir çelişkidir ve söz konusu çelişki bu çalışmanın güdülenme (motivasyon) kaynağıdır. Bu makalenin amacı, eşdeğer olmayan T1 ve T2 tanımlarını, rasyonel sayıların inşaası ve özellikleri çerçevesinde, irdeleyerek hangi tanımın doğru olduğunu çözümlemek ve dolayısıyla yanlış olan tanımın kullanımının yaygınlaşmasını önlemektir. Bu araştırma nitel veri analizi yöntemlerinden doküman analizi kullanılarak gerçekleştirilmiştir. Veri toplama aracı olarak, T1 ve(ya) T2 tanımlarını içeren Milli Eğitim Bakanlığı (MEB) Talim ve Terbiye Kurulu'ndan onaylı ders kitapları, ulusal-uluslararası üniversite matematik ve matematik eğitimi kitapları ve akademik makalelerden oluşan (37 kitap ve 15 makale) dokümanlar kullanılmıştır. Verilerin analiziyle, tanımları birbirinden farklı kılan "aralarında asal olma" koşuluna hangi gerekçelerle gereksinim duyulduğu saptanmıştır. Elde edilen bulgular, gerekçelerine göre sınıflandırılmış ve herbir gerekçenin geçersiz olduğu matematik alan bilgisiyle ayrıntılı biçimde örneklerle açıklanmıştır. Sonuçta, T2'ye eklenen "aralarında asal olma" koşuluna gerek olmadığı ve dolayısıyla rasyonel sayıları tanımlamak için T1'in yeterli ve doğru bir tanım olduğu, T2 tanımı gibi çelişkiler oluşturmadığı savunulmuştur. Ayrıca, tanımlar, tanım olma ölçütlerine göre değerlendirildiğinde, T1'in ölçütlere uygun olduğu sonucuna varılmıştır.

Anahtar sözcükler: Matematiksel tanım, rasyonel sayı, kesir, tanımda eşdeğerlik, aralarında asal

[1]*Sorumlu Yazar*: Dr. Öğr. Üyesi, Eğitim Fakültesi, Matematik ve Fen Bilimleri Eğitimi Bölümü, Matematik Eğitimi Anabilim Dalı, E-posta: cigdem.ulusoy@tedu.edu.tr, https://orcid.org/ 0000-0002-0763-4044
[2]Prof. Dr., Eğitim Fakültesi, Matematik ve Fen Bilimleri Eğitimi Bölümü, Matematik Eğitimi Anabilim Dalı, E-posta: ysahiner@hacettepe.edu.tr, https://orcid.org/0000-0002-6696-4190

Tanım sözcüğü en genel anlamıyla, bir kavramın niteliklerini eksiksiz olarak belirtme veya açıklama, olarak belirtilebilir (Türk Dil Kurumu, 2011). Öyle ki tanımda verilen niteliklere sahip olma durumu, herhangi bir nesneyi söz konusu kavrama ilişkin olan kümenin içine dahil eder ya da dışarda bırakır. Dolayısıyla bir kavramın doğru niteliklerle tanımlanması, o kavramın diğer kavramlardan ayrılabilir ve kesin olması yönünden son derece önemlidir.

Tanımlar, birçok disiplinde olduğu gibi matematik alanı için de son derece önemli yapı taşlarıdır. Matematiksel yapıların inşa edilmesinde ve matematiksel düşüncelerin aktarılmasında en temel öğe, matematiksel kavramlara ait tanımlardır. Matematiksel iletişim söz konusu olduğunda, kavramı belirten ile kavramı anlamlandırmaya çalışan kişilerin zihinleri arasındaki en sağlam köprü yalnızca kavramın her iki taraf için de net bir biçimde tanımlanması ile kurulabilir. Ancak böylelikle matematiksel iletişimde doğru bir aktarım gerçekleşir. Aksi takdirde tarafların matematiksel iletişiminde bir takım karmaşalar yaşanır, aynı kavram üzerinden ortak bir noktaya bakmaları güç duruma gelir.

Matematiksel Tanım Ölçütleri

Bir matematiksel kavram için yapılan tanımın kabul edilebilmesi için tanımın bazı ölçütleri sağlaması gerekir. İlgili alanyazında bu ölçütlere; sıradizinsel (hiyerarşik) kavram yapısına uygun olma (Winicki-Landman ve Leikin, 2000), tanımı yapılacak olgunun var olması ya da olabilmesi, bir kavramın birden fazla tanımı yapıldığında her birinin denk olduğunun gösterilebilmesi (eşdeğerlik), gerekli ve yeterli koşulların belirtilmesi, ekonomik olması (Van Dormolen ve Zaslavsky, 2003) şeklinde değinilmiştir. Bu ölçütleri ayrıntılandırmak gerekirse, sıradizinsel (hiyerarşik) kavram yapısına uygun olmaktan kasıt, her kavramın kendisinden daha geniş bir kavramın özel durumu olarak tanımlanmasıdır. Matematikte kavramlar birbiri üzerine inşa edilirler. Örneğin, rasyonel sayıları tanımlamak için önce tamsayıların tanımlanmış olması gereklidir. Bu sayede tamsayılar kendisini kapsayan rasyonel sayıların özel bir durumuna örnek oluşturur. Van Dormolen ve Zaslavsky (2003, s. 94), tanımı yapılacak olgunun ya da kavramın var olabilmesi ölçütünü açıklarken "tanımı yapılacak kavramın varlığı gösterilebilmeli, tanımdan yola çıkılarak o kavram inşa edilebilmelidir" ifadesini kullanmışlardır. Bu ölçüt aksiyomatik yapı üzerinden örneklendirilirse, doğal sayılar kümesinin oluşturulması ve ardından önce tamsayıların, daha sonra rasyonel sayıların inşa edilmesiyle rasyonel sayı kavramı var edilmiş olur. Eşdeğerlik ölçütü, aynı kavramın birden fazla tanımının yapıldığı durumlarda önemli olur. Bu durumda, içlerinden seçilen herhangi bir tanım ve bu tanımdan elde edilebilecek mantıksal çıkarımlar sayesinde bir diğerine ulaşılabilmesi gerekir. Örnek olarak, asal sayı tanımı için verilen,

AS1: Sadece iki pozitif tam sayı böleni olan doğal sayılardır.

AS2: Sadece kendine ve 1 sayısına kalansız bölünebilen birden büyük pozitif tam sayılardır.

tanımları birbirine eşdeğer tanımlardır (Vinner, 1991). Tanım olma ölçütlerinden belki de en önemlisi tanımı belirleyecek özelliklerden gerekli ve yeterli olanların saptanması ve belirtilmesidir. Bir kavramı tanımlamak için birkaç özelliğin var olması gerektiğini düşünelim. Bu özelliklerden sadece birinin tanım olarak verilmesi o kavram tanımı için gerek koşulu sağlamış olabilir. Fakat o kavramı tanımlamak için yeter koşul sağlanmadığından kavram tanımı eksik ve dolayısıyla hatalı olacaktır. Örneğin, asal sayı tanımı için AS1 ele alınırsa bir sayının asal olması için gerek koşul o sayının bir doğal sayı olmasıdır. Yeter koşul ise bu sayının sadece iki pozitif tam sayı böleni olmasıdır. Bir kavramın tanımlanmasında aranan bir diğer ölçüt de yapılacak tanımın ekonomik olmasıdır. Burada ekonomik olmaktan kasıt, bir kavram o kavramı oluşturan niteliklerden daha azı ile tanımlanabilirken, daha fazlasına gereksinim olmadığıdır. Dolayısıyla o kavramı tanımlarken daha yalın, sadece kavramı tanımlamaya yetecek kadar niteliklerin içerilmesi ile tanım daha ekonomik olacaktır. Örneğin, asal sayı tanımı için kullanılan AS2'de "pozitif" kelimesini kaldırarak (birden büyük her tamsayı zaten pozitiftir) AS2 tanımı daha ekonomik yazılabilir.

Ölçüt olmasa da, matematiksel tanımlarda aranan özelliklerden biri de yapılan tanımın zarif ya da estetik oluşudur. Tanımın sade olması, yaratıcı olması ve okuyucuyu düşünmeye yönlendirmesi açısından diğerine oranla daha çok tercih edilir (Çakıroğlu, 2013). Örnek olarak, AS1 tanımı AS2 tanımına göre daha estetiktir.

Amaç ve Problem Durumu

Tanıma yönelik ölçütler ve nitelikler düşünüldüğünde ders materyalleri ve yazılı kaynaklarda tanım olarak verilen ifadelerin gerçekten matematiksel kavramları tanımlayıp tanımlamadıkları bu çalışmanın araştırmacılarında merak uyandırmıştır. Genelde tüm matematiksel kavramlara ilişkin oluşan bu merak, özelde "rasyonel sayı" kavramına yoğunlaşmıştır. Kapsamlı bir alanyazın taramasıyla, rasyonel sayı tanımına ilişkin araştırma makaleleri, matematik eğitimi kitapları, matematik alan kitapları, lise ve ortaokul ders kitapları incelendiğinde, aşağıdaki iki tanımın ele alındığı görülmüştür;

Tanım 1: $Q = \{a/b : a \text{ ve } b \text{ tamsayı}, b \neq 0\}$

Tanım 2: $Q = \{a/b : a \text{ ve } b \text{ tamsayı}, b \neq 0, a \text{ ve } b \text{ aralarında asal}\}$

(Makalenin geri kalanında Tanım 1, T1 şeklinde Tanım 2 ise T2 şeklinde kısaltılarak kullanılacaktır. Her bir tanımın hangi kaynakta ne şekilde ele alındığı bulgular kısmında ayrıntısıyla aktarılacaktır.)

Alanyazında görülen bu iki farklı tanımın belirttiği Q (rasyonel sayı) kümelerinin aynı olmamaları, ortaokul ve lise öğrencileri, öğretmen adayları, öğretmenler ve akademisyenler için rasyonel sayılara ilişkin bilgi karmaşasına ve kavram yanılgılarına yol açmaktadır. Dolayısıyla, yaşanan bu soruna dikkat çekerek, rasyonel sayı tanımı için ikinci bir tanımın ortaya çıkış nedenlerinin saptanması ve matematik alan bilgisiyle bu iki farklı tanımın irdelenmesi yönünde yapılacak çalışmalar, bu karmaşayı ortadan kaldırarak, alanyazına önemli bir katkı sağlayacaktır. Alanyazında bu karmaşaya yönelik çalışmaların bulunmaması, bu makalenin güdülenme (motivasyon) kaynağıdır. Bu makalenin amacı, eşdeğer olmayan T1 ve T2 tanımlarını, matematiksel tanım ölçütleri, rasyonel sayıların inşaası ve özellikleri çerçevesinde, irdeleyerek hangi tanımın doğru olduğunu çözümlemek ve dolayısıyla yanlış olan tanımın yaygınlaşmasını önlemektir. Bu amaçlar doğrultusunda aşağıdaki sorulara yanıt aranmıştır:

Rasyonel sayılara ilişkin farklı tanımlamalar hangi tür kaynaklarda ne şekilde bulunmaktadır?

Rasyonel sayıları tanımlamak için kullanılan tanımlar arasındaki fark nedir ve bu farka neden gereksinim duyulmuştur?

Rasyonel sayıları tanımlamak için kullanılan hangi tanım matematiksel anlamda doğrudur?

Rasyonel sayıları tanımlamak için kullanılan tanımlar, tanım olma ölçütlerini sağlamakta mıdır?

Yöntem

Bu bölümde araştırma modeli, veri toplama araçları, verilerin analizine yer verilmektedir.

Araştırma Modeli

Bu araştırmanın problemlerine çözüm aramak için nitel bir yaklaşım kullanılmış ve veri analizi yöntemlerinden doküman analizinden yararlanılmıştır. Doküman analizi, yazılı belgelerin içeriğini özenle ve sistematik olarak analiz etmek için kullanılan bir nitel araştırma yöntemidir (Wach, 2013). Bilindiği üzere doküman incelemelerinde hangi dokümanların önemli olduğu ve veri kaynağı olarak kullanılabileceği araştırma problemi ile yakından ilgilidir. Bogdan ve Biklen (2007), eğitime ilişkin çalışmalarda ders kitaplarının sıklıkla incelendiğini belirtmişlerdir. Bu çalışmada ders kitaplarına ek olarak, araştırma probleminde rasyonel sayıları konu alan akademik makaleler de çalışma kapsamına alınmıştır.

Veri Toplama Araçları

Araştırma problemlerine yanıt aramak amacıyla yapılan doküman incelemesinde, rasyonel sayılar konusunu içeren Milli Eğitim Bakanlığı Talim ve Terbiye Kurulu tarafından ders kitabı olarak onaylanan ortaokul ve lise matematik ders kitapları (matematik öğretim programında rasyonel sayılara 7. ve 9. sınıf düzeyinde yer verilmesi nedeniyle bu düzeylerdeki matematik ders kitapları incelenmiştir), ulusal-uluslararası matematik ve matematik eğitimi kitapları ile yine ulusal-uluslararası akademik makaleler veri toplama aracı olarak kullanılmıştır.

Verilerin Analizi

Doküman incelemesi yaparken bir dizi aşamanın tamamlanması gerekir. Forster’e (1994) göre bu aşamalar: (1) dokümanlara ulaşma, (2) özgünlüğü (orjinalliği) kontrol etme, (3) dokümanları anlama, (4) veriyi analiz etme ve (5) veriyi kullanma şeklindedir. Bu çalışmada verilen çerçeveye uygun olarak öncelikle ders kitapları için üniversite kütüphaneleri taranmıştır. Makaleler için ise elektronik kaynaklara ve veritabanlarına erişimi arttırmak için üniversitenin proxy sunucusu üzerinden akademik yayınları içeren veri tabanları taranmış ve rasyonel sayı tanımları ile ilgili kitaplara (37 kitap) ve araştırma makalelerine (15 makale) ulaşılmıştır. Taranan kaynaklarda sadece iki farklı tanım görüldüğünden dokümana ulaşma aşaması ulaşılan 37 kitap ve 15 makale ile sınırlandırılmıştır. Bu çalışmanın amacı ulaşılan kaynakların sayısal olarak betimlenmesinden öte kullanılan tanımları irdelemek olduğundan, (farklı tanımların yer aldığı kaynakların yeterli olduğu düşüncesiyle) sözü edilen sınırlama uygun görülmüştür. Özgünlüğün kontrolü aşaması için her bir kitapta/makalede yer alan rasyonel sayı tanımlarının alıntılandığı kaynaklara da ulaşılarak alıntılanan tanımın alıntıyı yapan kaynak ile tutarlı olup olmadığı kontrol edilmiştir. Dokümanları anlama aşamasnda, ulaşılan her bir doküman kullandığı rasyonel sayı tanımının belirlenmesiyle incelenmiştir. Veriyi analiz etme aşaması için dokümanlarda kullanılan tanımların kullanılma gerekçeleri analiz edilmiş, dokümanlar bu şekilde düzenlenmiştir. Araştırmanın sonucunda tanımların kullanılma gerekçelerinden oluşan veriler incelenerek tanımlar irdelenmiş, hangi tanımın rasyonel sayı kümesini tanımlamak için uygun olduğu matematiksel anlamda savunulmuştur. Ayrıca kullanılan tanımların tanım olma ölçütlerini karşılama durumu da incelenmiştir. Böylelikle veriyi kullanma aşaması da tamamlanmıştır.

Geçerlik ve Güvenirlik

Nitel araştırmalarda geçerlik, araştırmacının araştırdığı olguyu, olduğu biçimiyle ve olabildiğince yansız gözlemlemesi anlamına gelmektedir (Yıldırım ve Şimşek, 2008). Araştırma verilerine ne şekilde ulaşıldığı, hangi ölçütlerin kullanıldığı, sonuçların nasıl yorumlandığı gibi durumların ayrıntılı olarak açıklanması nitel bir araştırmada geçerliğin önemli ölçütleri arasında yer almaktadır. Bu çalışmanın verilerini ders kitapları ve makaleler oluşturmaktadır. Hangi kitap ve makalelerin, ne çeşit ölçütlerle veri setine dahil edildiği ayrıntılarıyla ve gerekçeleriyle açıklanmıştır. Bunun dışında verilerin analizi aşamasında problem durumuna konu olan kullanılan rasyonel sayı tanımının kullanılma gerekçesinin belirlenmesi sırasında, incelenen dokümanda bu durum açıkça belirtilmediyse doküman yazarından gerek e-posta ve gerekse yüz yüze görüşme sağlanarak teyit alınmıştır.

Güvenirlik kavramı, araştırmanın başka araştırmacılar tarafından tekrar edilebilirliği ile ilgilidir. Bu araştırmada güvenirliğin sağlanmasına ilişkin alınan önlemler şu şekilde özetenebilir: Araştırmada kullanılan veri kaynakları açıkça belirtilmiştir. Kullanılan dokümanlar hakemli dergilerde yayınlanan makeleler ve ders kitabı statüsündeki kaynaklar olduğundan verilerin güvenilir olduğu söylenebilir. Ayrıca dokümanlarda referans olarak kullanılan asıl kaynaklara da ulaşılmış, doğru bir aktarımın sağlanmadığı durumlar da araştırmada belirtilmiştir. Bunun dışında araştırma süreci bütün ayrıntısıyla rapor edilmiştir. Araştırma verileri, çalışmayı yürüten iki araştırmacı tarafından ayrı ayrı ve aralıklı olarak birkaç kez incelenmiş ve sonuçlar konusunda uzlaşma sağlanmıştır. Buna ek olarak araştırma sonuçları farklı üç alan uzmanı ile paylaşılmış ve verilerin yorumlanması konusundaki fikirleri alınmıştır.

Sak ve diğ. (2021), doküman analizi yönteminde geçerlik ve güvenirliği sağlamak için dokümanları yalnızca incelemek yerine, dokümanları kaynağı ve oluşma biçimiyle birlikte yorumlamaya çalışmanın ve dokümanlardan çıkarılan sonuçları farklı kaynaklardan doğrulamanın anlamlı olacağını belirtmişlerdir. Bu çalışmada da rasyonel sayı kavramına ilişkin kullanılan tanımlar bu bakış açısı ile incelenmiş, farklı tanımlama durumları incelenen dokümanların sunduğu gerekçelerle açıklanmış ve hangi tanımlamanın rasyonel sayılar için uygun olduğu farklı kaynaklardan doğrulanarak ortaya konmuştur.

Bulgular

Bu bölümde her bir araştırma problemine ilişkin bulgulara ayrı başlıklarda yer verilecektir.

Rasyonel Sayıların Farklı Tanımlarının Kullanıldığı Kaynaklar

Bu kısımda alanyazında kullanılan farklı rasyonel sayı tanımlarının hangi kaynaklarda, hangi gerekçelerle kullanıldığı bulgusuna yer verilmiştir.

Alanyazında T1

T1: $Q = \{a/b : a \text{ ve } b \text{ tamsayı}, b \neq 0\}$

Öğrenciler, rasyonel sayı kavramı ile ilk kez ortaokul yedinci sınıf düzeyinde karşılaşmaktadırlar. Son yıllarda okutulan yedinci sınıf matematik ders kitaplarına (Altıntaş ve Keskin, 2019, s. 40; Erenkuş ve Eren Savaşkan, 2018, s. 52; Keskin Oğan ve Öztürk, 2019, s. 62) ve lise düzeyindeki ders kitaplarına (Çetiner ve diğ., 2001, s. 148; Gündoğdu, 1999, s. 188; Maviş ve diğ., 2019, s. 81; MEB, 2013, s. 135) bakıldığında rasyonel sayıları tanımlamak için T1'in kullanıldığı görülür.

Ulusal matematik eğitimi kitaplarından rasyonel sayı tanımını T1 olarak veren kaynaklar oldukça azdır (Argün ve diğ., 2020; Baki, 2018; Baykul, 2009). Bu kaynaklardan biri olan Baki (2018, s. 36), kitabının "Öğreteceğimiz Matematiği Tanıyor muyuz?" bölümünde sayıların inşasına yer verilmiş ve sonuçta rasyonel sayıları T1 şeklinde tanımlamıştır. Matematik eğitiminde çok iyi bilinen yazarların, yaygın olarak kullanılan uluslararası kitaplarında da (Musser ve diğ., 2008, s. 382; Van de Walle ve diğ., 2015, s. 626;) rasyonel sayı tanımı yine T1 şeklindedir. Diğer taraftan az sayıda Temel/Genel Matematik kitaplarında (Esin ve Ağlı, 1977; Kaçar, 2006; Koçak, 1989; Sulak, 2007) ve çok sayıda ulusal ya da uluslararası lisans düzeyindeki Analiz (Calculus) kitaplarında da T1'in verildiği görülür (Adams, 2003; Çelik ve Çelik, 2010; Karaçay, 2009; Silverman, 1985; Stewart, 1998; Thomas ve diğ., 2010).

Kitapların yanısıra ulusal ve uluslararası alanyazında rasyonel sayıları konu alan birçok makale de bulunmaktadır. Bunlar içinde bazı uluslararası eğitim makalelerinde de T1'in kullanıldığı gözlenmiştir (Obersteiner ve diğ., 2016; Omoruan ve Osadebe, 2020; Pinto ve Tall, 1996; Vamvakoussi, 2015). Ulusal düzeyde de rasyonel sayıları tanımlarken T1 kullanan makaleler vardır (Çetin, 2020).

Alanyazında T2

T2: Q = {a/b : a ve b tamsayı, b≠0, a ve b aralarında asal}

Ortaokul matematik ders kitaplarında T2'ye rastlanmazken, bazı 9. sınıf lise matematik ders kitaplarında (Aytar, 2018, s. 94; Uçak ve diğ., 2019, s. 93.) T2'ye yer verilmiştir. Bazı ulusal matematik eğitimi alanındaki kitaplarda da rasyonel sayı tanımı T2 şeklindedir (Hıdıroğlu, 2019, s. 78; Olkun ve Yeşildere, 2007, s. 64; Tuna ve Biber, s. 141, 2019; Yanık, 2013, s. 95). Hıdıroğlu (2019) kaynağında, gerekçelerini açıkladıktan sonra T2'yi kullanmıştır. Tuna ve Biber (2019) bu tanımı Balcı (1999), Kadıoğlu ve Kamalı (2009) ve Moss (2000) kaynaklarından alıntıladıklarını belirtmektedirler. Yanık'ın (2013) ise Çelik (2006) ve Başkan ve diğ. (2006) kaynaklarından alıntı yaptığını belirterek T2'yi kullandığı görülmektedir. Alıntı yapılan yayın yazarlarının diğer Temel/Genel Matematik kitaplarında da T2 kullanılmıştır (Bizim ve diğ., 2011; Çelik, 2010). Alanyazında T2'yi kullanan herhangi bir uluslararası makaleye rastlanmazken, ulusal düzeyde Aktaş ve Cansız Aktaş (2012) ile Cansız Aktaş ve diğ. (2014)' nin makalelerinde, Milli Eğitim Bakanlığı'nın 2007 ve 2011 yıllarında yayınladığı 9. sınıf matematik ders kitapları referans verilerek T2'nin kullanıldığı gözlenmiştir.

Taranan kaynakların ve referanslarının bilgilerine göre, T2 tanımıyla ilk olarak 1999 yılında karşılaşılmıştır. Sonrasında özellikle 2006-2007 yıllarında, sadece bir 9. sınıf matematik ders kitabı ve genellikle Temel/Genel Matematik ders kitapları aracılığıyla T2 kullanımı artmaya başlamış ve sonraki yıllarda da yaygınlaşmıştır.

Alanyazındaki Tanımlara ve Atıflara Yönelik Diğer Saptamalar

Bu kısımda incelenen kitap ve makalelerde T1 ve(ya) T2'yi kullanmak dışında gözlenen diğer bazı durumlar aktarılacaktır.

Yanlış Atıflama

Tuna ve Biber'in (2019) kaynağında yollama (atıf) yapılan Moss (2000), Kadıoğlu ve Kamalı (2009) kaynakları incelendiğinde, söz konusu kaynaklarda rasyonel sayı tanımının T2 olarak değil, T1 şeklinde verildiği görülmektedir. Bu nedenle Tuna ve Biber (2019) kaynağında yapılan yanlış yollamanın (atıfın) koşullu bir kabul ile rasyonel sayı tanımının T2 şeklinde yapıldığı düşünülmektedir. Ancak bu duruma (alıntılanan kaynakların içeriğinde farklı tanım verilmiş gibi atıflanması) bilginin özgünlüğünün korunmaması ve alanyazında tanımla ilgili bilgi karmaşası oluşturabileceği nedeniyle dikkatle yaklaşılmalıdır.

T1 ve T2 yi Birlikte İçeren/İçermeyen Çalışmalar

Türkçe olarak yayımlanan rasyonel sayı kavramına yönelik makalelerin çoğunda, öğrencilerin bilgi düzeyini belirlemek üzere seçilen soruların öğrenci cevaplarına göre veri analizi yapılmış olup, rasyonel sayı kavramını irdeleyen soruların cevapları ve benimsedikleri tanım yazarlarca verilmediğinden hangi tanımı referans aldıkları net bir şekilde anlaşılamamaktadır (Birgin ve Gürbüz, 2009; Çevikbaş ve Argün; 2017; Ercire ve diğ., 2016; Gürbüz ve Birgin, 2008). Rasyonel sayıları konu alan uluslararası alanyazında da benimsenen tanımın net bir şekilde paylaşılmadığı makalelere rastlanmıştır (Behr ve diğ., 1997; Hurst ve Cordes, 2018). Matematiksel kavramların öğrenilmesi/öğretilmesine yönelik makalelerde yazarların savundukları tanımı paylaşmaları, sundukları çalışmanın tam içerikli olması ve dolayısıyla okurun bilgilenmesi ve verilerin neye göre yorumlandığının değerlendirilebilmesi açısından oldukça önemlidir. Bunlardan farklı olarak Macit ve Nacar (2019) ile Doruk (2020) alanyazında geçen rasyonel sayı tanımını alıntılayarak makalelerinde hem T1'e hem de T2'ye yer vermişlerdir. Ancak yine yapılan uygulamadan elde ettikleri verileri hangi tanıma göre değerlendirdiklerinden söz etmemişlerdir.

Temel Matematik Kavramları Künyesi (Argün ve diğ., 2020, s. 435) kitabında rasyonel sayı tanımı T1 şeklinde yapılmıştır. Daha sonra, öğretmen olarak T1'in farkında olunmasının ve rasyonel sayıların bir "denklik sınıfı" olduğunu bilmenin önemi vurgulanarak, öğretim düzeylerine göre, öğrencilerin bu kavramı zihinlerinde daha açık ve net bir şekilde yapılandırmalarını sağlamak ve rasyonel sayı kavramını kesir kavramından ayırmak için rasyonel sayı tanımının sembolik olarak T2 şeklinde ifade edilebileceğinden söz edilmiştir. Diğer bir kaynakta da (Balcı, 2006, s. 5) T1'in verilmesine karşın tanımdaki tamsayıların aralarında asal olma kabulünün yapılması gerektiğini belirterek aslında T2'ye işaret etmektedir.

Rasyonel Sayıları Tanımlamak İçin Kullanılan Tanımlar Arasındaki Fark

Alanyazında yer alan rasyonel sayı tanımlarına bakıldığında, bazı lise, ulusal matematik eğitimi ve Temel/Genel matematik kitaplarında rasyonel sayı tanımı T2 şeklinde verilirken, ulusal/uluslararası matematik analiz kitaplarında T2'nin kullanılmadığı görülmektedir. Ayrıca, rasyonel sayı tanımı yapılırken uluslararası yayınlarda tanımın yalnızca T1 şeklinde olması ve T1-T2 karmaşasının görülmemesi de oldukça dikkat çekicidir.

Giriş kısmında söz edilen tanım ölçütlerinden birisi olan eşdeğerliği gözeterek, matematiksel bir kavram olan rasyonel sayı tanımları farklı ifade edilse dahi tariflenen kümenin aynı olması gerektiği ve yazarlara göre tanımların değişemeyeceğini vurgulamak yerinde olacaktır.

Dikkat edilirse tanımlar arasındaki fark, T2'deki "aralarında asal olma" koşuludur. Bu koşul ile T1 ve T2'nin ifade ettiği kümelerin aynı küme olamayacağı açıktır. Dolayısıyla T1 ve T2 eşdeğer tanımlar değildir. Örneğin, 2/4 sayısı T1'e göre bir rasyonel sayı iken T2'ye göre değildir. Bu, üzerinde durulması gereken önemli çelişkilerden sadece biridir. Bu ve diğer çelişkilerin giderilmesi için, öncelikle, bu koşulun eklenmesine neden gereksinim duyulduğu ve bu koşulun gerekli olup olmadığı tartışılmalıdır.

Sözü edilen kaynaklar incelendiğinde, T2'deki "aralarında asal olma" koşulunun esas olarak iki temel nedenden eklendiği anlaşılmaktadır. Bu nedenlerden ilkinin, bazı matematiksel önermeleri ispatlamak, diğerinin de kesir-rasyonel sayı farkını açıklamak olduğu görülür. Bunların yanısıra, Q kümesinde birbirine eşit sonsuz çoklukta eleman bulunması, Q'nun sayılabilirliği, vb gibi "diğer nedenler"den dolayı bu koşulun eklenmesine gereksinim duyulduğu anlaşılmaktadır. Bu gerekçelerin bütünü bu bölümde sırasıyla incelenecek ve bir sonraki bölümde de irdelenecektir.

Matematiksel Önermeleri İspatlamak

T2'yi birbirlerinden alıntılayarak paylaşan yayınlardan (Başkan ve diğ., 2006; Bizim ve diğ., 2011; Çelik, 2006; Çelik, 2010; Yanık, 2013) bazıları rasyonel sayılar kümesi tanımlanırken, "aralarında asal olma" koşulunun gerekliliğinin çoğu kaynakta açıkça belirtilmediğini ancak bu koşulun ispatlarda kullanıldığını ve oldukça önemli olduğunu, aynı cümlelerle belirtmişlerdir. Çelik (2010, s. 31), bu gerekliliği desteklemek için örnek olarak √2 sayısının rasyonel olmadığının ispatını T2'yi kullanarak aşağıdaki gibi vermiştir:

"Tersine √2 sayısının rasyonel olduğunu varsayalım. Tanım gereği √2 = p/q yazılabilecek şekilde p ve q (q≠0) tamsayıları vardır. Buradan p = √2 q yazılarak iki tarafın karesi alınırsa p2=2q^2 bulunur. O halde 2 ile bölünebilen p^2 sayısı çift bir sayıdır. Bu da ancak p nin çift olması ile mümkündür. Bu yüzden m bir tam sayı olmak üzere p = 2m şeklinde belirtilebilir. Bu sonuç son eşitlikte yerine konulduğunda (2m)2 = 4m2 = 2q2 ve buradan 2m2 = q2 elde edilir. Bu da yukarıdaki gibi q2'nin ve dolayısıyla da q'un çift olduğu anlamına gelir. Sonuç olarak aralarında asal olduklarını varsaydığımız p ve q sayılarının ikisinin de çift oluşu, varsayımımızla çelişir. Dolayısıyla √2 rasyonel bir sayı değildir ve tanım gereği irrasyoneldir"

Rasyonel Sayı-Kesir Farkı

Alanyazına bakıldığında, T2'deki ek koşula gereksinim duyulmasının diğer bir nedeninin de rasyonel sayı ile kesir arasındaki farkı ortaya koyma gereksinimi olduğu görülür. Kimi yazarlara göre ise böyle bir fark bulunmamaktadır. Rasyonel sayı-kesir ilişkisini incelemek bu makalenin amaçları arasında değildir. Bu çalışmanın amacı T1 ve T2 arasındaki farkı yaratan "aralarında asal olma" koşulunun gerekliğini irdelemek ve rasyonel sayı kavramı için hangi tanımın uygun olduğunu savunmakla sınırlı tutulmuştur.

Bizim ve diğ. (2011), Çelik (2006), Çelik (2010) ve Yanık (2013) kaynaklarında aktarılan görüşlere göre "rasyonel sayılar kesirlerin en sade halidir". Burada ek koşul kullanılarak, kesir ve rasyonel sayı farkına vurgu yapılmış ve T1 kesir, T2 de rasyonel sayı tanımı için verilmiştir. Bu tanımlara göre ...8/12=6/9=4/6=2/3 sayılarının tümü aynı denklik sınıfına ait kesirleri göstermekle birlikte bunlardan sadece 2/3'ün bir rasyonel sayı olduğu belirtilmiştir. Benzer olarak, Tuna ve Biber (2019) ile Hıdıroğlu (2019) kaynaklarında anlatım bütünlüğüne bakıldığında tanımda bulunan "aralarında asal olma" kabulüne, rasyonel sayı ve kesir farkını ortaya koymak için gereksinim duyulduğu düşünülmektedir.

Argün ve diğerleri (2020) rasyonel sayı tanımını T1 şeklinde vermelerine karşın, öğretim düzeylerine göre öğrencilerin bu kavramı zihinlerinde daha açık ve net bir şekilde yapılandırmaları gerekliğini matematik eğitiminde yapılan araştırmaların ortaya koyduğunu belirterek, eğitimbilimsel (pedagojik) anlamda rasyonel sayı kavramını kesir kavramından ayırmak için, rasyonel sayılar kümesini sembolik olarak T2 şeklinde tanıtılmasını önermişlerdir.

Diğer Gerekçeler

Balcı (2006, s. 5) kaynağında T1'i vermesine karşın işaret ettiği T2 için "c sıfırdan farklı bir tamsayı olmak üzere, a/b=ca/cb olduğundan yukarıdaki sayı (a/b) aralarında asal kabul edilecektir" açıklamasından sonra "Aksi takdirde Q kümesinde birbirine eşit sonsuz çoklukta eleman bulunur" ifadesiyle, Q kümesinin sonsuz çokluktaki denk kesirleri içerme durumunu hariç tutmak amacıyla "aralarında asal olma" koşuluna gereksinim duyduğu anlaşılmaktadır.

Hıdıroğlu (2019) kaynağında, birbiri ile denk olan kesirlerin sayı doğrusunda bir nokta ile temsili ve o noktanın da kesirlerin en sade biçimi ile gösterildiği belirtilmektedir. Bu yaklaşımın rasyonel sayıların sonsuzluğu, sayılabilirliği gibi birçok ispatta önemli olduğunu, bunun da kesir ve rasyonel sayı arasındaki farkı ve ilişkiyi gösteren bir örnek olduğunu belirtmesinin ardından T2'yi vermiştir. Burada da yazarın, sonsuz çokluktaki denk kesirlerin sayı doğrusunda temsili, rasyonel sayılar kümesinin sonsuzluğu (sonsuz çoklukta denk kesirleri içermesi) ve rasyonel sayıların sayılabilirliğinin ispatına yönelik sorunların "aralarında asal olmak" koşulu ile üstesinden gelindiğini düşündüğü söylenebilir.

Rasyonel Sayıları Tanımlamak İçin Kullanılan Tanımların Matematiksel Analizi

Bu kısımda rasyonel sayı tanımı için T1'in matematiksel anlamda doğru olduğu savunulmaktadır.

Çelik (2010) kaynağının T2'yi esas alarak, $\sqrt{2}$ sayısının rasyonel olmadığının ispatına yukarıda yer verilmişti. Oysa ki bu ispat "p ve q aralarında asal" koşulu olmadan da T1 esas alınarak yapılabilir:

$\sqrt{2}$'nin rasyonel olduğunu kabul edelim. O halde T1'e göre a ve b ($b \neq 0$) tamsayı olmak üzere $\sqrt{2} = a/b$ şeklinde yazılabilir. Obeb (a,b) = 1 ise a ve b aralarında asal demektir ve ispat yukarıdaki gibi çelişki elde edilerek tamamlanır. Obeb (a,b) = k, k bir tamsayı ve $k \neq 1$ durumunda (yani a ve b aralarında asal değilken) ise öyle p ve q tamsayıları vardır ki a=kp ve b=kq şeklinde yazılabilirler. Ayrıca k sayısı a ve b'nin ortak bölenlerinin en büyüğü olduğundan obeb (p,q) = 1 olur. Başka bir deyişle p ve q aralarında asaldır ve $\sqrt{2} = a/b = kp/kq = p/q$, $k \neq 0$ elde edilir. Bundan sonrasında "Matematiksel Önermeleri İspatlamak" bölümünde yer alan ispattaki gibi a ve b yerine p ve q kullanılarak yapılan aynı işlemlerle p ve q nun birer çift sayı olduğu görülür ve bu da p ve q'nun aralarında asal olma gerçeğiyle çelişir. Sonuç olarak, a ve b aralarında asal olsun ya da olmasın elde edilen çelişki ile yapılan "√2'nin rasyonel olduğu" kabulünün yanlış olduğu kanısına varılır. Yani √2 sayısı, a ve b ($b\neq 0$) tamsayı olmak üzere, a/b şeklinde yazılamadığından √2 rasyonel bir sayı değildir. Görüldüğü üzere, Çelik (2010) kaynağında bölüm yazarının gerekçe olarak gösterdiği önermeyi ispatlamak için T1 yeterlidir ve "a,b aralarında asal" koşulunu eklemenin gerekli olmadığını burada vurgulamak yerinde olur.

"Rasyonel Sayı-Kesir Farkı" ve "Diğer Nedenler" bölümlerinde sözü edilen gerekçelere temel oluşturan "aralarında asal olma" koşulunun neden gerekli olmadığının anlaşılabilmesi için okurun öncelikle Ek'te yer alan (kısmen Karaçay ve Eş (t.y.) kaynağından derlenen) rasyonel sayıların inşaasına ilişkin özetlenmiş bilgiyi okuması önerilir.

$Z^* = Z\setminus\{0\}$ olmak üzere, Q, $Z\mathrm{x}Z^*$ üzerinde tanımlı bir denklik bağıntısının denklik sınıfları kümesidir. Diğer bir deyişle, her bir denklik sınıfından seçilen birer temsilci ile oluşturulan temsilciler sınıfına rasyonel sayılar kümesi denir. Örneğin, {2/3, 4/6, 6/9, 8/12,...} kümesi bir denklik sınıfıdır, yani bu küme bir rasyonel sayıdır. Bu sınıfı oluşturan denk kesirlerden sadece biri bu rasyonel sayıyı temsil eder ve temsil için yapılan seçim keyfidir. Yani, {2/3, 4/6, 6/9, 8/12,...} = [2/3] ya da {2/3, 4/6, 6/9, 8/12,...} = [8/12] temsil seçimlerini yapmak olanaklıdır. Temsilci seçimi için bir kural ya da bir zorunluluk yoktur. Diğer yandan, matematiğin estetiği sadeliktir, dili de evrenseldir. Bu nedenle, temsilci seçiminde herkesçe kabul gören sadelik tercih edilir. 2/3, 8/12'nin sade(leşmiş) biçimi olduğu için, {2/3, 4/6, 6/9, 8/12,...} denklik sınıfının temsilcisi olarak 2/3 tercih edilir. Bu tercih ile herhangi bir denklik sınıfının temsilcisi olarak, a ve b aralarında asal olacak şekilde, a/b kesrinin şeçimi oldukça doğaldır. Burada vurgulanması gereken en önemli şeylerden bir diğeri de iki farklı türde olan kavramların karşılaştırılmasıdır. Kesir denklik sınıfının bir elemanıyken rasyonel sayı denklik sınıfı kümesinin tamamıdır.

Yukarıdaki açıklamalardan sonra, "Rasyonel Sayı-Kesir Farkı" bölümünde geçen "rasyonel sayılar kesirlerin en sade halidir" ifadesinin, aslında temsilciler için yapılan doğal seçimin bir kural ya da zorunluluk gibi algılanmasından kaynaklanmış olabileceği düşünülmektedir. Bu algının sonucunda rasyonel sayının ve kesrin birbirinden farklı tanımları olması gerektiği düşüncesiyle, T1 kesir, T2 de rasyonel sayı için verilmiş olabilir.

Denklik sınıfları üzerinde tanımlı bir işlemin, denklik sınıflarını temsil etmek üzere seçilecek öğelere bağlı olup olmadığı uygulamada önem taşır. Denklik sınıfları üzerinde işlem yaparken denklik sınıflarından hangi temsilcileri seçersek seçelim, hep aynı sonuca ulaşmalıyız. Bu özellik işlemin iyi tanımlı (Denklik sınıfları kümesinde tanımlı bir işlem, denklik sınıfını temsil etmek üzere seçilen temsilciye bağlı değilse, o işlem iyi tanımlıdır) olduğu anlamına gelir. Değilse, işlem yapan kişiler farklı temsilciler seçebileceğinden, işlemin sonucu farklı çıkar. Böyle bir durum istenmez.

Rasyonel sayıların farklı yazılışlarıyla (farklı temsilci seçimiyle) işlem yaparken hep aynı sonuca ulaşırız. Örneğin, 1/2 ve 3/4 ya da 3/6 ve 12/16 ikilileri ile yapılan toplama işlemi

(E1) 1/2+3/4=5/4

(E2) 3/6+12/16=120/96

aynı sonucu verir (Karaçay ve Eş, t.y.). Bu örnekte {1/2, 2/4,3/6,...} denklik sınıfını (rasyonel sayıyı) temsilen (E1)'de 1/2, (E2)'de de 3/6 ve benzer olarak {3/4, 6/8, 9/12, 12/16,...} denklik sınıfını (rasyonel sayıyı) temsilen (E1)'de 3/4, (E2)'de de 12/16 seçimleri yapılmıştır. Bu seçimlerle elde edilen sonuçlar 5/4 ve 120/96, {5/4, 10/8,...,120/96,...} denklik sınıfının farklı temsilcileri olup, aynı rasyonel sayının farklı yazılışlarıdır. Denklik sınıfları kümesi olan rasyonel sayılar üzerinde tanımlı toplama işlemi iyi tanımlıdır, yani rasyonel sayılar üzerinde toplama yaparken denklik sınıflarından hangi temsilcileri seçersek seçelim, toplam hep aynı sonucu verir. Bu nedenle (E1) ve (E2) işlemleri sonucu olan 5/4 ve 120/96 aynı rasyonel sayıdırlar. Bu örnekler (toplama işleminde olduğu gibi) çıkarma, çarpma ve bölme işlemleri için de türetilebilirler.

Ek olarak, küme üzerinde tanımlı bir işlemin iyi tanımlı olması, aslında o kümenin işleme göre kapalı olması anlamına gelir. Rasyonel sayılar, dört işleme göre kapalıdır (işleme alınan iki rasyonel sayının sonucunun da rasyonel sayı olması). Rasyonel sayı tanımının T2 şeklinde olduğu kabul edilirse, bu tanıma göre 1/8 ve 3/8 rasyonel sayıdır. Toplama işlemi sonucunda elde edilen sayı (1/8+3/8=4/8) T2'ye göre rasyonel bir sayı değildir, çünkü 4 ve 8 aralarında asal değildir. Diğer yandan, rasyonel sayılar toplama işlemine göre kapalıdır. Dolayısıyla toplamın, yani 4/8'in de, rasyonel olması gerekirdi. Elde edilen bu çelişki ile tanım için yapılan kabulün doğru olmadığı sonucuna varılır. Bahsi geçen çelişkinin T2'de yer alan "aralarında asal olma" koşulundan kaynaklandığı açıktır. Rasyonel sayılar tanımı, bu koşulu içermeyen T1 şeklinde yapılsaydı böyle bir çelişki oluşmayacaktı. Sonuç olarak, rasyonel sayıların T2 şeklinde tanımlanamayacağı görülür.

Bazı yayınlarda, rasyonel sayının ve kesrin birbirinden farklı tanımları olması gerekliliği düşüncesiyle, T1'in kesir, T2'nin de rasyonel sayı için verilmiş olabileceğinden söz edilmişti. Yazarların iddialarının doğru olduğunu varsayarak T1 ile tanımlanan kesirler kümesi K, T2 ile tanımlanan rasyonel sayılar kümesi Q ile sembolize edilsin. "Her rasyonel sayı bir kesirdir ancak her kesir bir rasyonel sayı değildir" iddiasıyla yapılmış bu tanımlardan şu sonuç ortaya çıkar; iddia edilen rasyonel sayılar kümesi Q, iddia edilen kesirler kümesi K'nin bir altkümesidir. Bu doğru ise, gözetilmesi gereken iki durum vardır: Birincisi, $Q \subset K$ olduğundan, kesirli sayılar kümesi K'de olup Q'da olmayan en az bir x elemanı vardır. $x \notin Q$ olduğundan, yani rasyonel olmadığından, x bir irrasyonel sayı olmalıdır. $x \in K$ olması da K kümesinin irrasyonel bir sayı içerdiği anlamına gelir. Dolayısıyla, irrasyonel bir sayı olan x'in, $x \in K$ olduğu için, K kümesinin tanımına uygun bir şekilde, yani iki tamsayının bölümü şeklinde yazılabilmesi gerekirdi, ancak bilindiği üzere bu mümkün değildir. Bu çelişki, rasyonel sayılar kümesi Q'nun tanımının T2 şeklinde yapılması ve dolayısıyla T1 ile belirtilen kümece kapsanmasından kaynaklanmaktadır. Kesir-rasyonel sayı farkını ortaya koymak için yapılan tanımlardan oluşan bu çelişkinin, rasyonel sayılar kümesi Q'nun aslında T1 şeklinde yapılmasıyla ortadan kalkacağı açıktır. Üzerinde durulması gereken ikinci durum ise yine sayı kümeleri arasında altküme olma ilişkisine yöneliktir. Yapılan tanımlara göre Q, kesirler kümesi K'nın bir altkümesi idi. Q'nun reel sayılar R'nin de bir altkümesi olduğu bilindiğine göre, şu soru sorulabilir: K ve R kümeleri arasındaki altküme ilişkisi nedir? Her iki küme de Q kümesini kapsadığından, hangi ilişki doğrudur; $Q \subset K \subset R$ ilişkisi mi yoksa $Q \subset R \subset K$ ilişkisi mi? $Q \subset K \subset R$ durumunun $K \subset R$ kısmı düşünüldüğünde, K kümesinin tüm rasyonel sayıları içermesinin yanısıra en azından öyle bir x sayısı içerir ki bu sayı hem rasyonel değildir hem de reeldir (reel sayılar iki ayrık küme olan rasyonel ve irrasyonel sayıların birleşim kümesidir), yani x irrasyonel bir sayıdır. Diğer bir deyişle, $K \subset R$ kabulü ile, K kümesi bazı irrasyonel sayıları içerir bazılarını da içermez. Bu özelliğe sahip bir küme ancak özel bir küme olabilir, örneğin $K = Q \cup \{x \in R+ | \ x2 \text{ bir tamsayı}\}$. Bu örnekte $\sqrt{2} \in K$ olur ve yine iki tam sayının oranı şeklinde yazılamaz. Ayrıca bu küme Q'yu içermesine rağmen, Q'nun sağladığı cebirsel özellikleri kendi içinde sağlayamaz. $\sqrt{2}$ ve $3 \in K$ iken bu sayılarla yapılan toplama, çıkarma veya bölme işlemlerinden herhangi birinin sonucu K'nin bir elemanı olmaz. $Q \subset R \subset K$ durumunda da benzer çelişkiler elde edilir. Bütün bu çelişkiler kesir-rasyonel sayı ayrımı gerekçesiyle yapılan iki farklı T1 ve T2 tanımlarından kaynaklanmaktadır. Sonuç olarak T1'in tanımladığı kümenin, iddia eden kaynaklara göre, K kesirler kümesi olduğu varsayıldığında, K kümesinin sıradizinsel (hiyerarşik) bir düzende yapılandırılmış N, Z, Q ve R sayı sistemleri gibi bir sayı sistemi olmadığı açıktır. Dolayısıyla "aralarında asal" koşulunu içermeyen T1 ile tanımlanan Q (rasyonel sayı) kümesi sıradizinsel (hiyerarşik) yapıya uygun olan bir sayı sistemidir.

Son olarak, "Diğer Nedenler" olarak adlandırılan bölümdeki iddialara yanıt verilecektir. Balcı'da (2006) "aralarında asal olma" koşulunun, Q kümesinin sonsuz çokluktaki denk kesirleri içerme durumunu dışlamak amacıyla eklenmiş olabileceğinden söz edilmişti. Oysa ki, Q'nun içerdiği birbirine denk sonsuz çokluktaki kesirler kümesinin herbiri bir rasyonel sayıdır ve daha önce de vurgulandığı üzere, bu sayı sözü edilen denk kesirler kümesinden seçilen keyfi bir kesir ile temsil edilir. Sıfırdan farklı her c tamsayısı için, sonsuz çokluktaki ca/cb denk kesirlerinin oluşturduğu denklik sınıfları kümesi bir rasyonel sayıdır. Herhangi bir c değeri için ca/cb kesrinin seçimi, bu rasyonel sayıyı temsil eder. Aralarında asal a,b ve c=1 ile yapılan keyfi seçim, matematiksel yazımlarda (sadeliğin tercih edilmesinden ötürü) genelleştirilmiştir. Hıdıroğlu (2019) da birbiri ile denk olan kesirlerin sayı doğrusunda bir nokta ile temsil edildiğini ve o noktanın da kesirlerin en sade hali ile gösterildiğini belirtmektedir. Ancak yazar bu yaklaşımın (sade temsilci seçiminin) rasyonel sayıların sonsuzluğu (buradaki sonsuzluk ile, yine Q'nun sonsuz çoklukta birbirine eşit elemanları içermesi kastedildiği düşünülmekte), sayılabilirliği gibi birçok ispatta önemli olduğunu, bunun da kesir ve rasyonel sayı arasındaki farkı ve ilişkiyi gösteren bir örnek olduğunu belirtmesinin ardından T2 yi vermiştir. Q'nun sayılabilirliğinde, sayılanlar genellikle denklik sınıflarıdır ve sınıfları temsilen (a, b aralarında asal) en sade a/b seçimleriyle N arasında birebir eşlemenin yapılabilmesiyle sayma işlemi gerçekleşir. Ancak denklik sınıfları gözetilmeden, T1 ile tanımlanan Q'nun sayılabilirliğini gösteren algoritmalar da vardır (Baki, 2018). Dolayısıyla, "aralarında asal olma" koşulu sayma işlemi için de gerekli bir koşul değildir.

Rasyonel Sayıları Tanımlamak İçin Kullanılan Tanımların Tanım Olma Ölçütleri

Giriş kısmında ayrıntılı olarak ele alınan tanım olma ölçütleri burada T1 ve T2 için değerlendirilecektir. Sıradizinsel (hiyerarşik) kavram yapısına uygun olma ve tanımı yapılacak kavramın var olması ölçütleri ek bölümde rasyonel sayıların yapılandırılmasına yönelik özel bilgi kapsamında T1 için sağlanmaktadır. T2 ile verilen kümenin var edilmiş olması kabul edilse dahi sıradizinsel (hiyerarşik) kavram yapısına uygun olmadığı üçüncü bölümde verilen açıklamalarda görülmektedir. Sıradizinsel (hiyerarşik) yapı ile sınıflandırılan sayı sistemi bir sonraki sayı kümesinin bir alt kümesidir (Örneğin, $N \subset Z \subset Q \subset R$). T2 ile verilen kümenin alt küme sıralamasındaki yeri belli değildir. Tanımlar gerek ve yeter koşul anlamında incelenirse, a ve b'nin aralarında asal olması a/b nin rasyonel olması için hem T1 hem de T2 için yeterlidir. Diğer yandan a/b'nin rasyonel olması, T2 de, a ve b'nin aralarında asal olması için bir gereklilik koşulu iken T1 de bu gereklilik aranmaz. Yani T1, a/b'nin rasyonel olması için a ve b'nin aralarında asal olmalarını gerektirmez. Eşdeğerlik ilkesine göre aynı kavramı belirten iki farklı tanım varsa birinden elde edilen mantıksal çıkarımlar sayesinde diğerinin ispatlanması olanaklı olmalıdır. T1 ve T2 aynı kümeyi ifade etmedikleri için eşdeğer olamazlar. Dolayısıyla rasyonel sayı kavramı için tanımlardan sadece biri doğrudur. Tanım olma ölçütlerinden ekonomik olma durumu birbirine eşdeğer tanımlar için geçerli olup, T1 ve T2'yi bu ölçüte göre yorumlamak anlamlı değildir.

Tartışma, Sonuç ve Öneriler

Tanımlama ve sınıflandırma, matematik alanındaki temel öğelerdir. Matematiksel süreçlerde, öncelikle ilgilenilen matematiksel kavramların açık ve net bir biçimde tanımlanması gerekir. Ancak bu şekilde ortak bilimsel sonuçlara ulaşılabilir (Mariotti ve Fishbein, 1997). Ayrıca, yapılan tanım sadece matematiksel kavramı ortaya koymak için değil; kavramın diğer kavramlarla olan ilişkisini ya da farkını belirlemek, tanımın oluşturduğu kümenin elemanlarını diğer elemanlardan ayırarak doğru bir sınıflama yapmak amacıyla da kullanılır (Poincare, 2003). Bir kavramın doğru tanımlanması, matematiksel süreçler açısından önemli olduğu kadar doğru bir öğretim yapabilmek açısından da önemlidir. Doğru tanımlar, öğrencilerin matematiksel kavramları doğru sınıflandırmasına ve matematiksel yapıları doğru kurmalarına olanak verir (Vinner, 1991). Bu çalışmada, matematiksel kavramların doğru ve net olarak tanımlanması durumu rasyonel sayı kavramı özelinde alanyazında taranmış, incelenmiş ve irdelenmiştir.

İlgili ulusal ve uluslararası alanyazın incelendiğinde, rasyonel sayıları tanımlamak için kaynaklarda yer alan birbirinden farklı iki tanım şu şekildedir:

Tanım 1: Q = {a/b : a ve b tamsayı, b≠0}

Tanım 2: Q = {a/b : a ve b tamsayı, b≠0, a ve b aralarında asal}

T1 ve T2 arasındaki fark, T2'de yer alan "aralarında asal olma" koşuludur. Bu koşul ile T1 ve T2'nin ifade ettiği Q (rasyonel sayı) kümelerinin aynı olmamaları önemli bir çelişki oluşturur. Bu ve oluşabilecek benzeri çelişkilerin giderilmesi için öncelikle bu koşulun T2 tanımına eklenmesine neden oluşturabilecek gerekçeler, alanyazındaki kaynakların ayrıntılı olarak incelenmesiyle saptanmıştır. Bu gerekçeler bazı matematiksel önermeleri ispatlamak, rasyonel sayı-kesir farkı ve diğer nedenler şeklinde sınıflandırılmış olup bu katagorilerin gerekçelerinin doğru kabul edilemeyeceği "Aralarında asal olma koşulu neden gerekli değildir?" başlığında ayrıntılı biçimde açıklanmıştır.

Alanyazında rasyonel sayıların tanımı olarak T2'nin kullanılmasında sunulan gerekçelerden biri bazı matematiksel önermelerin ispatında kullanılması durumudur. Kaynaklarda verilen örnek, T2 tanımı kullanılarak √2'nin rasyonel olmadığının ispatıdır. Bulgular bölümünün "Önermeleri ispatlamak" altbaşlığında, T2 kullanılarak bu ispatın "aralarında asallık" koşuluna gereksinim duyulmaksızın T1 tanımıyla da yapılabileceği ve dolayısıyla T2'deki ek koşulun gerekli olmadığı vurgulanmıştır.

T2'nin kullanılma gerekçelerinden bir diğeri de tanımın içerdiği "aralarında asallık" koşulu sayesinde rasyonel sayı-kesir farkını vurgulamaktır. Matematik eğitimi alanyazınında bu farka yönelik birçok çalışma bulunmaktadır. Ancak bu çalışmanın araştırmacıları, rasyonel sayı-kesir farkından çok, kavramların anlamı üzerine yoğunlaşarak bu farkın temellendirildiği, T2'de yer alan "aralarında asallık" koşulunun gerekli olup olmadığını matematik alan bilgisiyle sorgulamayı amaçlamışlardır. Ek bölümde derlenmiş olan (rasyonel sayıların tamsayılar üzerinde denklik bağıntısı ile yapılandırılmasına yönelik) özet bilgi sayesinde, her bir rasyonel sayının aslında bir denklik sınıfı (yani bir küme) olduğu ve bu denklik sınıfındaki her elemanın da bir kesir olduğu görülmektedir. Dolayısıyla karşılaştırılmak istenen kavramlardan biri küme, diğeri de bu kümenin bir elemanı olduğundan, bu karşılaştırmanın doğru olmadığı üzerinde durulmuştur. T2 tanımını savunan yazarlarca belirtilen "rasyonel sayı kesirlerin en sade halidir" ifadesi T2'ye eklenen "aralarında asal olma" koşulu ile desteklenmiştir. Oysa bir denklik sınıfı olan rasyonel sayıyı temsilen bu sınıfın elemanlarından (yani kesirlerden) herhangi biri keyfi olarak seçilebileceği gerçeğiyle, T2'ye eklenen koşulun gerekli olmadığına ayrıntılı biçimde yer verilmiştir.

Ayrıca, sözü edilen keyfi seçim sayesinde denklik sınıfları arasında yapılan bir işlemin iyi tanımlı olması (bir kümenin verilen işleme göre kapalı olması) vazgeçilmez bir önem gösterir. Rasyonel sayılar kümesinin bilinen dört işleme göre kapalı olduğu herkesçe bilinen bir gerçektir. Oysa, dört işlemden herhangi birine göre, T2'nin tanımladığı kümenin kapalı olmadığını göstermek çok kolaydır. Örneklerle açıklanan bu çelişkinin T2'deki ek koşul nedeniyle oluştuğu açıktır. Diğer yandan, rasyonel sayılar Q kümesinin T2 ile tanımlandığının kabul edilmesi ve T2 ile tanımlanan kümenin T1 kümesinin altkümesi olması nedeniyle de çelişkili durumlar elde edilmiştir.

Öğretim açısından eğitimbilimsel (pedagojik) düzey anlamında bakıldığında belki de rasyonel sayı ve kesir kavramlarını birbirlerinden ayırt etme çabası, öğrenme sürecinin kolaylaştırılması amacına yönelik olabilir. Ancak, öncelikle T1'i kesir, T2'yi rasyonel sayı olarak tanıtmak, daha sonraki yıllarda öğrencileri, tanımlardan yapılan çıkarımların bilinen doğrularla çelişmesi sonucuna götürebilir. Öğrenciler sayıların inşaası sürecinde karşılaştıkları $N \subset Z \subset Q \subset R$ altküme ilişkisi içinde kesirlere yer aramak gibi bir düşünceye yönelebilirler. Öğrencileri çeşitli öğrenme güçlükleri ve kavram yanılgılarına sevk edebilecek bu sakıncalı duruma açıklık getirecek ayrıntılı çalışmaların yapılması alanyazına katkı sağlayacaktır.

T2'yi kullanan çalışmalarda gözlenen diğer gerekçeler ile, rasyonel sayıların sayılabilirliği, rasyonel sayılar kümesinde birbirine denk sonsuz çokluktaki kesirlerin bulunması ve sayı doğrusunda bir nokta ile temsil edilişi vb. gibi konuların bazı yazarlarca problem olarak görüldüğü ve üstesinden gelebilmek için T2 tanımının kullanılması gerektiği anlaşılmaktadır. Varsayılan bu problemlere, sayılabilirlilikte yapılan birebir eşlemenin birden çok yöntemle yapılabildiği, birbirine denk sonsuz çokluktaki kesirlerden oluşan kümenin aslında bir tek rasyonel sayı (denklik sınıfı) olduğu ve denklik sınıfını temsilen en sade kesrin keyfi seçimi ile birbirine denk sonsuz çokluktaki kesirlerin sayı doğrusunda bu temsil ile konumlandırıldığını belirterek cevap verilmiştir. Matematik alan bilgisiyle yapılan değerlendirme sonucunda, varsayılan problemlerin aslında problem olmadıkları ve dolayısıyla T2 kullanımının gerekli olmadığı vurgulanmıştır.

T1 ve T2 tanımları tanım olma ölçütleri anlamında da değerlendirilmiştir. Eşdeğer olmayan bu iki farklı tanımın aynı kümeyi temsil etmediği, T2'ye eklenen "aralarında asallık" koşuluna gerek olmadığı ve dolayısıyla rasyonel sayıları tanımlamak için T1'in yeterli ve doğru bir tanım olduğu, T2 tanımı gibi çelişkiler oluşturmadığı ve tanım olma ölçütlerine uygun olduğu savunulmuştur.

Bu araştırma sürecinde gözlenen iki önemli durumun da altının çizilmesi gerekliliği hissedilmiştir. Bunlardan ilki, rasyonel sayı tanımlarının taranması sürecinde karşılaşılan yanlış yollamadır (atıflamadır). Ana kaynakta T1 kullanılmasına karşın, aktaran kaynakta T2 verilmiş gibi gösterilen çalışmalarla karşılaşılmıştır. Alanyazında bir kavram karmaşasına neden olabileceği gerekçesiyle bu duruma dikkatle yaklaşılmalıdır. Altı çizilmesi gereken bir diğer durum da, araştırma alanı rasyonel sayılar olmasına karşın, rasyonel sayı kavramına ilişkin herhangi bir tanım içermeyen akademik makalelerdir. Makale yazarlarının, makale metni içerisinde çalışılan kavrama ilişkin anlayışlarını net bir şekilde ortaya koymaları, kavramla ilgili tanımı da içeren bir çerçeve çizmeleri, okur için kavramın doğru algılanması yönünde yararlı ve etkili olacaktır.

Araştırma kapsamında ulaşılan çalışmaların tarihleri incelendiğinde, T2'nin 2006 yılından itibaren kullanımının arttığı görülmüş ve günümüze kadar kullanılmaya devam edilmiştir. Rasyonel sayılar konusunda çalışan araştırmacılar T2'nin kullanıldığı kaynakları referans göstererek rasyonel sayılar için yapılan yanlış bir tanımın yaygınlaşmasına neden olmaktadırlar. Bu çalışmanın bir amacı da son 15 yıldır gelişen bu hatanın yaygınlaşmasını önlemektir. Çalışmanın, alanyazına ve dolayısıyla öğretmen, öğretmen adayı ve araştırmacılara bu anlamda katkı sağlayacağı düşünülmektedir.

Alanyazın taramasında dikkat çeken bir diğer sonuç, rasyonel sayılara ilişkin kullanılan tanımların yer aldığı kaynakların türleri ve öğrenim düzeylerine göre farklılaşmasıdır. Genelde ulusal/uluslararası matematik alan (analiz kitapları) kitaplarında ve uluslararası matematik eğitimi kitaplarında T1'in kullanıldığı görülürken, ülkemizde kullanılan bazı temel/genel matematik ders kitaplarında ve bazı matematik eğitimi kitaplarında T2'nin kullanıldığı görülür. Öncelikle, uluslarası alanyazında T2'yi kullanan bir kaynağa rastlanmaması, T1 ve T2 gibi bir karmaşanın varolmaması, bu durumun ulusal düzeyde bir sorun olduğunu düşündürmektedir. T2'yi rasyonel sayı tanımı olarak içeren matematik ve matematik eğitimi kitaplarının öğretimde kullanılması, eğitim fakültelerinden mezun öğretmenler aracılığı ile ortaokul ve(ya) lise düzeylerindeki öğrencilerin kavrama yönelik öğrenme sürecine olumsuz etki etmesi olasıdır. Ülkemizde matematik öğretim programının sarmal bir yapıda olması (MEB, 2018) her sınıf düzeyinde bir önceki sınıf düzeyinde öğrenilen konuların tekrar edilerek üzerine yeni bilgiler inşa edilmesine olanak sağlar. Öğrenciler, rasyonel sayı kavramı ile ilk olarak ortaokul 7. sınıfta, sonrasında da 9. sınıfta "Sayı Kümeleri" başlığı altında tekrar karşılaşmaktadırlar. Ancak, 7. sınıf düzeyindeki matematik ders kitaplarına bakıldığında T1'in kullanıldığı görülürken 9. sınıf düzeyinde T2'yi kullanan az sayıda olan ders kitaplarına da rastlanmıştır. 7. ve 9. sınıfta öğretilen rasyonel sayı tanımlarının çelişmesi, kavrama yönelik bilginin yapılandırma sürecinde olan öğrencileri, öğrenme güçlüklerine ve çeşitli kavram yanılgılarına sürükleyecek olumsuz bir durum olarak yorumlanabilir. Nitekim Tall ve Vinner (1981), bir kavram tanımının ve bu tanımın sunulma biçiminin öğrencilerin bilgiyi yapılandırmasının önemli bir parçası olduğunu savunarak, kavram tanımlarının öğrenenlerin düşünme sürecini etkilediğini belirtmişlerdir.

Matematik, yapısı gereği ilişkilerden oluşan bir alan olduğu için anlamlı öğrenmenin tek yolu kavramlar arasında anlamlı ilişkiler kurulmasıdır. Öğrencilerin hangi düzeyde olurlarsa olsunlar kavramları daha sonraki öğrenmelerine engel oluşturmayacak ve gerekli ilişkileri kurmaya fırsat tanıyacak tanımlarla öğrenmeleri gerekir (Hiebert ve Carpenter, 1992). Bu çalışmanın odağında olan rasyonel sayı kavramının öğretilmesinde de bu duruma dikkat edilmelidir. Öğrencilerin öğretim sürecinden sorumlu olan öğretmenler, öğretmen adayları ve onlara kaynak sağlamak için çalışmalar yürüten araştırmacılar rasyonel sayı kavramı için uygun olan tanımı kullanmalı, matematiksel olarak doğru olmayan ve öğrencileri yanılgılara sürükleyecek farklı tanımlardan kaçınmalıdırlar.

References

Adams R. A. (2003). *A Complete course: Calculus, 5th Edition.* Addison-Wesley Longman.

Aktaş, D. Y. ve Cansız Aktaş, M. (2012). Öğrencilerin rasyonel sayılar kümesinin yoğunluğunu anlamaları [Students' understanding of the density of the set of rational numbers]. *Eğitim ve Öğretim Araştırmaları Dergisi*, *1*(1), 103-110. http://www.jret.org/FileUpload/ks281142/File/11c.aktas.pdf

Altıntaş, Ş. ve Keskin, C. (2019). *Ortaokul ve imam hatip ortaokulu matematik 7 ders kitabı [Secondary school and imam hatip secondary school mathematics 7 textbooks.]*. Ekoyay Yayıncılık.

Argün, Z., Arıkan, A., Bulut, S. ve Halıcıoğlu, S. (2020). *Temel matematik kavramların künyesi [Imprint of basic mathematical concepts]*. Palme Yayınevi.

Aytar, H. (2018). *Ortaöğretim matematik 9 ders kitabı [Secondary school mathematics textbook 9]*. Eksen Yayıncılık.

Baki, A. (2018). *Matematiği öğretme bilgisi [Knowledge of teaching mathematics]*. Pegem Akademi Yayıncılık.

Balcı, M. (1999). *Matematik analiz [Mathematics calculus]*. Balcı Yayınları.

Balcı, M. (2006). *Genel matematik [Basic mathematics]* (3. baskı). Balcı Yayınları.

Başkan, T., Bizim, O. ve Cangül, İ. N. (2006). *Metrik uzaylar ve genel topolojiye giriş [Introduction to metric spaces and general topology]*. Nobel Yayınevi.

Baykul, Y. (2009). *Ortaokulda matematik öğretimi [Teaching mathematics in secondary school]*. Pegem Akademi Yayıncılık.

Behr, M., Khoury, H., Harel, G. Post, T., & Lesh, R. (1997). Conceptual units analysis of preservice elementary school teachers' strategies on a rational-number-as-operator tasks. *Journal for Research in Mathematics Education*, *28*(1), 48-69. https://doi.org/10.2307/749663

Birgin, O. ve Gürbüz, R. (2009). İlköğretim II. kademe öğrencilerinin rasyonel sayılar konusundaki işlemsel ve kavramsal bilgi düzeylerinin incelenmesi [Examining the procedural and conceptual knowledge levels of secondary school students on rational numbers]. *Uludağ Üniversitesi Eğitim Fakültesi Dergisi, 22*(2), 529-550. https://dergipark.org.tr/tr/pub/uefad/issue/16690/173458

Bizim, O., Tekcan, A. ve Gezer, B. (2011). *Genel matematik-I [Basic mathematics-I]* (3. baskı). Dora Basım-Yayın Dağıtım Ltd. Şti.

Bogdan, R. C., & Biklen, S. K. (2007). *Qualitative research for education: An introduction to theories and methods.* Boston: Pearson.

Cansız Aktaş, M., Apaydın, Z. ve Aktaş, D. Y. (2014). 9. sınıf öğrencilerinin rasyonel sayılar kümesinin yoğunluğunu anlama düzeyleri [9th Grade Students' Understanding Levels of Density in the Set of Rational Numbers]. *Eğitim ve Bilim*, *39*(171), 286-303. http://egitimvebilim.ted.org.tr/index.php/EB/article/view/2338/641

Çakıroğlu, E. (2013). Matematik kavramlarının tanımlanması [Definition of mathematical concepts] içinde İ. Ö. Zembat, M. F. Özmantar, E. Bingölbali, H. Şandır & A. Delice (Ed.), *Tanımları ve tarihsel gelişimleriyle matematiksel kavramlar* (pp. 1-13). Pegem Akademi.

Çelik, B. (2006). *Temel matematik [Fundamentals of mathematics]*. Nobel Yayınevi.

Çelik, B. (Ed). (2010). *Temel matematik [Fundamentals of mathematics]* (5th ed.). Dora Yayınları.

Çelik, S. ve Çelik, S. A. (2010). *Matematik analiz 1[Mathematics calculus 1]*. Birsen Yayınevi

Çevikbaş, M. ve Argün, Z. (2017). Geleceğin matematik öğretmenlerinin rasyonel ve irrasyonel sayı kavramları konusundaki bilgileri [Future mathematics teachers' knowledge of rational and irrational number concepts] *Uludağ Üniversitesi Eğitim Fakültesi Dergisi, 30*(2), 551-581. https://doi.org/10.19171/uefad.368968

Çetin, H. (2020). İlköğretim matematik öğretmen adaylarının kesir kavramına ilişkin tanımlarının incelenmesi [Investigation of the definitions of pre-service elementary mathematics teachers on fraction concept]. *Eurasian Journal of Teacher Education, 1*(3), 172-185. https://dergipark.org.tr/tr/download/article-file/1292590

Çetiner Z., Kavcar M. ve Yıldız Y. (2001). *Lise matematik 1 ders kitabı [High school mathematics 1 textbook]* (4. baskı). Devlet Kitapları.

Doruk, M. (2020). Matematik öğretmenlerinin rasyonel sayılar konusunda öğrencilerin yaşadıkları öğrenme güçlüklerine sundukları öneriler [The suggestions of mathematics teachers regarding students' learning difficulties in rational numbers]. *Manisa Celal Bayar Üniversitesi Sosyal Bilimler Dergisi, 18*(3), 153-168. https://doi.org/10.18026/cbayarsos.638607

Ercire, Y. E., Narlı S. ve Aksoy, E. (2016). İrrasyonel sayı kümesinin rasyonel ve gerçek sayı kümeleriyle olan ilişkisine yönelik öğrenme güçlükleri [Learning difficulties about the relationship between irrational number set with rational or real number sets]. *Turkish Journal of Computer and Mathematics Education, 7*(2), 417-439. http://doi.org/10.16949/turcomat.47225

Erenkuş, M. A. ve Eren Savaşkan, D. (2018). *Ortaokul ve imamhatip ortaokulu matematik 7. sınıf ders kitabı [Secondary school and imamhatip secondary school mathematics 7th grade textbook]*. Koza Yayıncılık.

Forster, N. (1994). The analysis of company documentation. In C. Cassell & G. Symon (Eds.), *Qualitative methods in organizational research, a practical guide* (pp. 147-166). SAGE publication.

Esin, A. ve Ağlı, E. (1977). *Genel matematik [Basic mathematics]* Kalite Matbaası.

Gündoğdu, M. (1999). *Matematik lise 1 ders kitabı [Mathematics high school 1 textbook]*. Akdeniz Yayıncılık.

Gürbüz, R. ve Birgin, O. (2008). Farklı öğrenim seviyesindeki öğrencilerin rasyonel sayıların farklı gösterim şekilleriyle işlem yapma becerilerinin karşılaştırılması [Comparison of the ability of students at different grade levels to perform operations with different representations of rational numbers]. *Pamukkale Eğitim Fakültesi Dergisi*, *23*, 85-95. https://dergipark.org.tr/tr/download/article-file/114698

Hıdıroğlu, Ç. (2019). Sayılar ve işlemler: Doğal, tam ve rasyonel sayılar [Numbers and operations: Natural numbers, integers and rational numbers]. In K. Tarım & G. Hacıömeroğlu (Eds.), *Matematik öğretiminin temelleri ortaokul* (s. 27-118). Anı Yayıncılık.

Hiebert, J., & Carpenter, T.P. (1992). Learning and teaching with understanding. In D. A. Grouws (Ed.), *Handbook of research on mathematics teaching and learning* (pp. 65-97). Macmillan.

Hurst, M., & Cordes, S. (2018). A systematic investigation of the link between rational number processing and algebra ability. *British Journal of Psychology*, *109*, 99-117. https://doi.org/10.1111/bjop.12244

Kaçar, A. (2006). *Temel matematik I-II [Fundamentals of mathematics I-II]*. Pegem Akademi.

Kadıoğlu, E. ve Kamalı, M. (2009). *Genel matematik [Basic mathematics]* (4. baskı). Kültür Eğitim Vakfı Yayınevi.

Karaçay T. (2009). *Soyut matematiğe giriş [Introduction to discrete mathematics]* (2. baskı). Kuban Matbaacılık Yayıncılık.

Karaçay, T., ve Eş, H. (t.y.). *Calculus.* Seçkin Yayıncılık. Retrieved, November 11, 2020 from http://mail.baskent.edu.tr/~tkaracay/etudio/ders/math/calculus/kitap/02/02index.html

Keskin Oğan, A. ve Öztürk, S. (2019). *Ortaokul ve imam hatip ortaokulu matematik 7 ders kitabı [Secondary school and imam hatip secondary school mathematics 7 textbooks]*. Milli Eğitim Bakanlığı Yayınları.

Koçak, Ş. (1989). Sayılar. In R. Kaya (Ed), *Genel matematik 1[Basic mathematics]* (s. 13-27). Eskişehir: Anadolu Üniversitesi Yayınları.

Macit, E. ve Nacar, S. (2019). İlköğretim matematik öğretmenliği öğrencilerinin rasyonel sayı ve kesir kavram imajları [Concept images for rational number and fraction of the students at the elementary mathematics education department]. *İnönü Üniversitesi Eğitim Bilimleri Enstitüsü Dergisi, 6*(11), 51-62. https://doi.org/10.29129/inujgse.547277

Mariotti, M.A., & Fishbein, E. (1997). Defining in classroom activities. *Educational Studies in Mathematics*, *34*, 219-248. https://doi.org/10.1023/A:1002985109323

Maviş, M., Gül, G., Solaklıoğlu, H., Tarku, H., Bulut, F. ve Gökşen, M. (2019). *Ortaöğretim matematik 9 ders kitabı[Secondary Mathematics 9 Textbooks]*. Milli Eğitim Bakanlığı Yayınları.

Milli Eğitim Bakanlığı (MEB) (2007). *Ortaöğretim matematik 9. sınıf ders kitabı [Secondary Mathematics 9 Textbooks]* (2. baskı). Devlet Kitapları.

Milli Eğitim Bakanlığı (MEB) (2013). *Ortaöğretim matematik 9. sınıf ders kitabı 1. Kitap. [Secondary Mathematics 9 Textbooks]* Milli Eğitim Bakanlığı Yayınları.

Milli Eğitim Bakanlığı (MEB) (2018). Matematik dersi öğretim programı [Mathematics Curriculum for grades 1,2,3,4,5,6,7 and 8] (1, 2, 3, 4, 5, 6, 7 ve 8. Sınıflar) [Mathematics Curriculum for grades 1,2,3,4,5,6,7 and 8]. Retrieved November 20, 2020 from http://mufredat.meb.gov.tr/Dosyalar/201813017165445-MATEMAT%C4%B0K%20%C3%96%C4%9ERET%C4%B0M%20PROGRAMI%202018v.pdf

Moss, J. (2000). *Deepening children's understanding of rational numbers: A DevelopmentaI model and two experimental studies.* [Doctoral Dissertation, University of Toronto]. https://tspace.library.utoronto.ca/bitstream/1807/13802/1/NQ49900.pdf

Musser, G. L., Burger, W. F., & Peterson, B. E. (2008). *Mathematics for elementary teachers: A contemporary approach.* Wiley.

Obersteiner, A., Van Hoof, J., Verschaffel, L., & Van Dooren, W. (2016). Who can escape the natural number bias in rational number tasks? A study involving students and experts. *British Journal of Psychology*, *107*, 537-555. https://doi.org/10.1111/bjop.12161

Olkun, S. ve Yeşildere, S. (2007). *Temel matematik 1 [Fundamentals of mathematics 1]*. Maya Akademi.

Omoruan, B. E., & Osadebe, B. U. (2020). Models connecting points on pupils' achievement in rational numbers. *Journal of Educational and Social Research, 10*(4), 1-10. 10.36941/jesr-2020-0059

Pinto, M., & Tall, D. (1996). Student Teachers' Conceptions of the Rational Numbers. Published in *Proceedings of PME 20* (Valencia), *4*, 139-146.

https://homepages.warwick.ac.uk/staff/David.Tall/pdfs/dot1996h-pinto-pme.pdf

Poincare, H. (2003). *Science and method*. Dover Publications, Inc.

Sak, R., Şahin Sak, İ. T., Öneren Şendil, Ç. ve Nas, E. (2021). Bir araştırma yöntemi olarak doküman analizi [Document analysis as a research method]. *Kocaeli Üniversitesi Eğitim Dergisi*, *4*(1), 227-250. https://dergipark.org.tr/tr/download/article-file/1456954

Silverman R.A. (1985). *Calculus with analytic geometry*. Prentice-Hall Publications.

Stewart, J. (1998). *Calculus: Concepts and contexts* (3rd ed.). Brooks/Cole Publishing Company.

Sulak, H. (2007). *Temel matematik [Fundamentals of mathematics]*. Nobel Yayın Dağıtım.

Tall, D., & Vinner, S. (1981). Concept image and concept definition in mathematics-With particular reference to limits and continuity. *Educational Studies in Mathematics, 12*, 151-169. https://doi.org/10.1007/BF00305619

Thomas, G., Weir, M., & Hass, J. (2010). *Thomas' Calculus*. Pearson Publications.

Tuna, A. ve Biber, A. Ç. (2019). Kesirlerin öğretimi [Teaching Fractions]. In K. Tarım & G. Hacıömeroğlu (Eds.), *Matematik öğretiminin temelleri* (pp. 141-165). Anı Yayıncılık.

Türk Dil Kurumu. (2011). *Büyük Türkçe sözlüğü [Turkish dictionary]*. https://sozluk.gov.tr/

Uçak, A., Emir, E., Uçkun Kelek, F., Kutlu, G., & Kahraman, S. (2019). *Ortaöğretim fen lisesi matematik 9 ders kitabı [High school mathematics 9 textbook]*. MEB Yayınları.

Vamvakoussi, X. (2015). The development of rational number knowledge: Old topic, new insights. *Learning and Instruction*, *37*, 50-55. https://doi.org/10.1016/j.learninstruc.2015.01.002

Van de Walle, J. A., Karp, K. S., & Bay-Williams J. M. (2015). *Elementary and middle school mathematics: Teaching developmentally* (9th ed.). Pearson.

Van Dormolen, J., & Zaslavsky, O. (2003). The many facets of a definition: The case of periodicity. *Journal of Mathematical Behavior*, *22*(1), 91-106. 10.1016/S0732-3123(03)00006-3

Vinner, S. (1991). The role of definitions in the teaching and learning of mathematics. In D. Tall (Ed.), *Advanced mathematical thinking* (pp. 65-81). Kluwer Academic Publishers.

Wach, E. (2013). Learning about qualitative document analysis. *IDS Practice Papers, August-2013*, 1-10. https://www.researchgate.net/publication/259828893_Learning_about_Qualitative_Document_Analysis#fullTextFileContent

Winicki-Landman, G., & Leikin, R. (2000). On equivalent and nonequivalent definitions: Part I. *For the Learning of Mathematics*, *20*(1), 17-21. https://flm-journal.org/Articles/2F441EA45617F5B5BCAB5F0949C5D.pdf

Yanık, H. B. (2013). Rasyonel sayılar [Rational numbers]. In İ. Ö Zembat, M. F. Özmantar, E. Bingölbali, H. Şandır & A. Delice (Ed.), *Tanımları ve tarihsel gelişimleriyle matematiksel kavramlar* (pp. 95-110). Pegem Akademi.

Yıldırım, A. ve Şimşek, H. (2008). *Sosyal bilimlerde nitel araştırma yöntemleri [Qualitative research methods in the social sciences]* (6. Ed.). Seçkin Yayıncılık.

Ethical Declaration and Committee Approval

In this research, the principles of scientific research and publication ethics were followed.

Since this study included document analysis and did not involve any intervention, an ethics committee document was not needed.

Bu çalışma doküman analizini kapsadığından ve herhangi bir müdahale içermediğinden etik kurul belgesine ihtiyaç duyulmamıştır.

Proportion of Author's Contribution

All authors have sufficiently contributed to the study, and agreed with the results and conclusions. The first author contributed 50% and the second author contributed 50%.

Appendices

Summary Information on the Construction of Rational Numbers

Equivalence Relation

The Cartesian product of non-empty sets A and B AxB={(a,b) | is the set a∈A and b∈B }. Every subset of a cartesian product is a relation. The cartesian product of a non-empty set A with itself is denoted by AxA. If β∈AxA, β is a relation on the set A. If (x,y) ∈ β, β is a rule that shows the relationship between x and y elements. An equivalence relation is a type of binary relation that should be reflexive, symmetric and transitive. β is an equivalence relation on the set A and (x,y)∈β is said to be equivalent according to the relation x and y β and is written as x≡y. According to the equivalence relation B, the set consisting of all elements that are equivalent to x is called the equivalence class of the element x, and this class is denoted by the symbol [x]. [x]={y | (x,y) ∈β}. The following properties are valid for the equivalence classes of set A:

1) Two equivalence classes are either equal or disjoint.

2) Each element of set A belongs to one and only one equivalence class.

3) The union of the equivalence classes is equal to the set A.

Binary Operations

For A≠∅ and A ⊂ B, a given binary operation * on A is a function defined by * : AxA→B. So, the operation * is expressed as *: (x,y)→ z= x*y, with each ordered pair (x,y)∈AxA matching a single element z in set B. For example, if the operation * is taken as + (addition) operation and A=B=N is selected, then the + operation is a binary operation on A=N. The result of the +:NxN→N operation becomes m+n∈N for (m,n) ∈NxN (closure property of the operation). However, subtraction is not a binary operation on the set N because the result of the operation defined by - : NxN→N, that is - :(m,n)→m-n becomes m-n ∉ N when m<n. In other words, the set N is not closed under the - operation.

Integers

The set of natural numbers N can be constructed by set theory or Peano axioms, and since the set N is closed under addition + and multiplication *, an arithmetic on N is developed using these two operations. However, for every a,b ∈ N, in the case of a<b, since the equation b+x=a has no solution in the set N, it is necessary to find a set containing N, where this equation has a single solution. To configure the set of integers Z on NxN, we can follow reasoning like; let the number a-b, which is the solution of the equation, be represented by the ordered pair (a,b). So let's define a-b=(a,b). For example, the equation -2=(3,5) means that the solution of equation 5+x=3 is the number -2. Only one point should be noted here, -2 is the solution not only of equation 5+x=3, but also of many different equations such as 6+x=4, 7+x=5, so all these solutions must be equal to each other. In this case, the ordered pairs (3,5), (4,6), (5,7) are the solutions of the given equations and each of them is equal to the number

-2 according to the definition made. However, ordered pairs (3,5), (4,6), (5,7) are not equal to each other. To make this representation meaningful, we want the ordered pairs (3,5), (4,6), (5,7) to be equivalent. To find the relation that will provide this equivalence, first, it is necessary to know what the relationship between the pairs is. Simply, if the relationship between the pairs (3,5) and (4,6) is considered, the sought relationship is easily obtained from the equation 3-5=4-6. By generalizing, this relation is expressed as $(a,b) \equiv (c,d) \Leftrightarrow a-b=c-d$ as (a,b) and $(c,d) \in N \times N$. However, since the subtraction operation is not defined on the set N, this relation (expressing in terms of the addition operation in which N provides the closure property) can be rewritten in the form of

$(a,b) \equiv (c,d) \Leftrightarrow a+d=c+b$ (Bz)

It is easily shown that this is an equivalence relation on N × N. Therefore, ordered pairs (0,2), (1,3),(3,5), (4,6),...(n,n+2)... represented by -2 are equivalent. Now, owing to the (Bz) equivalence relation, the structure required to define the set of integers Z is formed.

The set of equivalence classes of the (Bz) relation is called the set of integers and is denoted by Z.

That is, integers are a set of equivalence classes, established with the equivalence relation (Bz) on N×N, and

$[a, b] = \{(x, y) \in N \times N : (a, b) \equiv (x, y)\} = \{(x, y) \in N \times N: a+y=x+b\}$ (Dz)

The equality of equivalence classes for $a,b,c,d \in N$ is in the form of

$[a,b]=[c,d] \Leftrightarrow (a,b) \equiv (c,d) \Leftrightarrow a+d=c+b$. For example,

$...=[4,6]=[3,5]=[2,4]=[1,3]=[0,2]=\{(x,y) \in N \times N: y=x+2\}=\{(0,2), (1,3), (2,4), ...,(n,n+2),...\}$

$...=[4,4]=[3,3]=[2,2]=[1,1]=[0,0]=\{(x,y) \in N \times N: y=x\}=\{(0,0), (1,1), (2,2), ...(n. n),...\}$

$...=[6,4]=[5,3]=[4,2]=[3,1]=[2,0]=\{(x,y) \in N \times N: y+2=x\}=\{(2,0), (3,1), (4,2), ...(n+2,n),...\}$.

Considering the equations here, for example, each equivalence class [2,0], [3,1], [4,2], ... are the same integer and represent the set {(2,0),(3.1), (4,2),...(n+2,n),...}. Since $(a,b) \in [a,b]$, actually each element of the equivalence class {(2,0),(3,1), (4,2),. . ....(n+2,n),. . ....} represents this (integer) set. Considering that the ordered pair (a,b) was defined by the numbers a-b before, the above equations

$-2=0-2=[0,2]=\{(0,2), (1,3), (2,4),...,(n,n+2),...\}$

$0=0-0=[0,0]=\{(0,0), (1.1), (2.2),...(n. n),...\}$

can be rewritten as 2=2-0=[2,0]={(2,0), (3,1), (4,2),...(n+2,n),...}. Here, even though the element (2,0) is chosen to represent the set {(2,0), (3,1), (4,2),...(n+2,n),...}, the representatives (3,1) or (4,2) could be chosen.

With the equivalence relation (Bz) on NxN, the set Z is defined as Z={[a,b]:(a,b) ∈ NxN} and the elements of Z are called integers.

DEFINITION: An operation defined in the set of equivalence classes is well-defined if it does not depend on the representative chosen to represent the equivalence class.

The addition and multiplication (binary) operations defined for Z are well defined in Z. To explain this through the addition operation, for the integers α=[(a,b)], α'=[(a',b')], γ=[(c,d)] and γ'=[(c',d')], when $\alpha=\alpha'$ and $\gamma = \gamma'$, it is $\alpha + \gamma = \alpha' + \gamma'$. That is, the result of the addition with representatives chosen from the classes is independent of the representative choice, it does not change.

The presence and uniqueness of the inverse element is an important feature of the addition on Z. For each $\alpha \in Z$, there is only one α' that satisfies the equation $\alpha + \alpha' = \alpha' + \alpha = [0,0]$. If α = [c,d], then α' = [d,c]. Because of this property, the inverse of the element α is written as $-\alpha$ and this element is called the additive inverse of α. So the inverse of [c,d] is [d,c], and -[c,d] = [d,c]. Thus, subtraction in Z, [a,b] -[c,d] = [a,b] + [d,c], is easily defined by addition and Z is closed under subtraction.

By matching each integer [a,b] equivalence class (with a suitable embedding function) to the number a-b, we can set the set Z, which includes N, to the usual {.....,-2,-1,0,1,2, ...} representation is obtained.

Rational Numbers

Integers can be added, subtracted and multiplied, but division cannot be performed. Considering the integers and the properties of operations defined in integers, we will define the set of rational numbers that are closed under division. Let's define a/b, which is not in integers, as a, b ∈ Z, for now (a, b). Then, since 2/3 = 4/6 it must be (2,3) = (4,6), which we know is not true. To make this representation meaningful, we want the ordered pairs (2,3) and (4,6) to be equivalent. It is necessary to find the relation that will provide this equivalence by considering the relationship between the pairs. It is easy to see what the relation between the pairs (2,3) and (4,6) can be from the equation 2.6 = 3.4. By generalizing, for Z*=Z\{0} and (a,b) and (c,d) ∈ ZxZ*, this relation can be expressed in the format,

$(a,b) \equiv (c,d) \Leftrightarrow a.\ d=b.\ c$ (BQ)

It is easily shown that this is an equivalence relation on ZxZ*. Therefore, ordered pairs (2,3),(4,6), (6,9), ..., (2n,3n),... represented by 2/3 or 4/6, are equivalent.

Definition: The set of equivalence classes of the relation (BQ) is called the set of rational numbers and this set is denoted by Q.

That is, rational numbers are a set of equivalence classes constructed with the equivalence relation (BQ) on $Z \times Z^*$, and represented by

$[a, b] = \{(x, y) \in Z \times Z^*: (a, b) \equiv (x, y)\} = \{(x, y) \in Z \times Z^*: a.\ y = b.\ x\}$ (DQ)

For $a, c \in Z$ and $b, d \in Z^*$, $[a,b]=[c,d] \leftrightarrow (a,b) \equiv (c,d) \Leftrightarrow a.\ d=b.\ c$

For example,

$...[-6,-10]=[6,10]=[-3,-5]=[3,5]=\{(x,y)\quad Z \times Z^*: 3y=5x\} = \{(3,5), (-3,-5), (6,10),...,(3n,5n),...\}$

$...[-10,-6]=[10,6]=[-5,-3]=[5,3]=\{(x,y) \in Z \times Z^*: 5y=3x\} = \{(5,3), (-5,-3), (10,6),...,(5n,3n),...\}$.

Reminding that (a,b) is defined with a/b, $3/5=[3,5] = \{(3,5), (-3,-5), (6,10),...,(3n, 5n),...\}$ can be written as a rational number. Here, for the representation of the set $\{(3,5), (-3,-5), (6,10),...,(3n,5n),...\}$, it could be chosen the ordered pair (-6,-10) instead of the ordered pair (3,5).

We define the equivalence relation (BQ) on $Z \times Z^*$ as the set $Q=\{[a,b]:(a,b) \in Z \times Z^*\}$ and call the elements of R as rational numbers.

The addition, multiplication, and subtraction (binary) operations defined for Q are well defined in Q. To explain this through multiplication, for the integers $\alpha = [(a,b)]$, $\alpha' = [(a',b')]$, $\gamma = [(c,d)]$ and $\gamma' = [(c',d')$, while $\alpha = \alpha'$ and $\gamma = \gamma'$, it is $\alpha.\gamma = \alpha.'\gamma.'$ That is, the result of multiplication with the representatives chosen from the classes is independent of the representative selection, it does not change.

The presence and uniqueness of the inverse element from the properties of the multiplication on Q is an important feature. For each $\alpha \in Q\backslash[0,1]$, there is only one α' that satisfies the equation $\alpha' = \alpha'\ \alpha.= [1,1]$. If $\alpha = [c,d]$, then $\alpha'=[d,c]$. Because of this property, the inverse of $\alpha \in Q$ is written as α-1 and this element is called the multiplicative inverse of α. So the inverse of [c,d] is [d,c], and [c,d]-1 = [(d,c)]. Thus, division in Q, [a,b]/[c,d]=[a,b].[c,d]-1=[a,b].[d,c], is easily defined by multiplication. Except for the equivalence class [0,1], every rational number has a multiplicative inverse.

By matching each rational number [a,b] with the number a. b-1=a/b (with the help of a suitable embedding function) of the equivalence classes, the set $Q=\{a/b: a,b \in Z, b \neq 0\}$ containing the set Z is structured.

Ek

Rasyonel Sayıların Yapılandırılmasına Yönelik Özet Bilgi

Denklik Bağıntısı

Boş olmayan A ve B kümelerinin kartezyen çarpımı AxB={(a,b) | a∈A ve b∈B ┤} kümesidir. Bir kartezyen çarpımının her altkümesi bir bağıntıdır. Boş olmayan bir A kümesinin kendisiyle kartezyen çarpımı AxA ile gösterilir. β∈AxA ise , β A kümesi üzerinde bir bağıntıdır denir. (x,y) ∈ β ise, β bağıntısı x ile y elemanları arasındaki ilişkiyi gösteren bir kuraldır. Bir küme üzerinde yansıma, simetri ve geçişme özelliklerine sahip bağıntılara, denklik bağıntıları denir. β, A kümesi üzerinde bir denklik bağıntısı ve (x,y)∈β ise x ile y β bağıntısına göre denktir (eşdeğerdir) denir ve x≡y şeklinde yazılır. B denklik bağıntısına göre, x'e denk olan bütün öğelerden oluşan kümeye x öğesinin denklik sınıfı denir ve bu sınıf [x] simgesiyle gösterilir. [x]={y | (x,y) ∈β}. A kümesinin denklik sınıfları için aşağıdaki özellikler geçerlidir:

D1) İki denklik sınıfı ya birbirine eşittir ya da ayrıktırlar.

D2) A kümesinin her öğesi bir ve yalnızca bir denklik sınıfına aittir.

D3) Denklik sınıflarının birleşimi A kümesine eşittir.

İkili İşlemler

A≠∅ ve A ⊂ B için, A üzerinde verilen bir * ikili işlemi * : AxA→B ile verilen tanımlı bir fonksiyondur. Öyleyse, * işlemi, her (x,y)∈AxA sıralı ikilisinin B kümesindeki bir tek z elemanı ile eşleşmesi ile, *: (x,y)→ z= x*y, biçiminde ifade edilir. Örneğin * işlemi + (toplama) işlemi olarak alınırsa ve A=B=N seçilirse, + işlemi A=N üzerinde bir ikili işlemdir. +:NxN→N işlemi sonucu (m,n) ∈NxN için m+n∈N olur (işlemin kapalılık özelliği). Diğer taraftan çıkarma işlemi N kümesi üzerinde bir ikili işlem değildir çünkü - : NxN→N, yani - :(m,n)→m-n ile tanımlı olan işlem sonucu m<n iken m-n ∉ N olur. Diğer bir deyişle, N kümesi – işlemine göre kapalı değildir.

Tam Sayılar

Doğalsayılar kümesi N, kümeler kuramı ile ya da Peano aksiyomlarıyla yapılandırılarak kurulabilir ve N kümesi toplama + ve çarpma * işlemine göre kapalı olduğundan, bu iki işlem kullanılarak N üzerine bir aritmetik geliştirilir. Ancak her a,b ∈ N için, a<b durumunda b+x=a denkleminin N kümesinde bir çözümü olmadığından, bu denklemin çözümünün var ve tek olduğu, N yi kapsayan, bir küme bulmaya gereksinim duyulur. NxN üzerinde tamsayılar kümesi Z yi yapılandırmak için şu şekilde akıl yürütebiliriz; denklemin çözümü olan a-b sayısı (a,b) sıralı ikilisi ile temsil edilsin. Yani a-b=(a,b) tanımını yapalım. Örneğin -2=(3,5) eşitliğinin anlamı, 5+x=3 denkleminin çözümünün -2 sayısı olduğudur. Yalnız burada bir noktaya dikkat etmek gerekir. -2 sadece 5+x=3 denkleminin değil, ayrıca 6+x=4, 7+x=5 gibi farklı birçok denklemin de çözümüdür, yani tüm bu çözümler birbirine eşit olmalıdır. Bu durumda (3,5), (4,6), (5,7) sıralı ikilileri, verilen denklemlerin

çözümleridir ve yapılan tanıma göre herbiri -2 sayısına eşittir. Diğer taraftan (3,5), (4,6), (5,7) sıralı ikilileri birbirine eşit değildir. Bu temsili anlamlı kılmak için (3,5), (4,6), (5,7) sıralı ikililerinin birbirine denk (eşdeğer) olmalarını isteyeceğiz. Bu denkliği sağlayacak bağıntıyı bulmak için, öncelikle ikililer arasındaki ilişkinin ne olduğunu bilmek gerekir. Basitçe (3,5) ve (4,6) ikilileri arasındaki ilişki gözetilirse, 3-5=4-6 eşitliğinden aranan ilişki (bağıntı) kolayca elde edilir. Genelleme yapılarak bu bağıntı, (a,b) ve (c,d) ∈ N xN olmak üzere, (a,b) ≡ (c,d)⇔a-b=c-d biçiminde ifade edilir. Ancak, N kümesi üzerinde çıkarma işlemi tanımlı olmadığından, bu bağıntı (N nin kapalılık özelliğini sağladığı toplama işlemi cinsinden ifade ederek)

(a,b) ≡ (c,d) ⇔a+d=c+b (Bz)

bağıntısı biçiminde yeniden yazılabilir. Bunun N × N üzerinde bir denklik bağıntısı olduğu kolayca gösterilir. Bu sebeple -2 ile temsil edilen (0,2),(1,3),(3,5), (4,6),...(n,n+2)... sıralı ikilileri birbirine denktirler. Artık (Bz) denklik bağıntısı sayesinde Z tamsayılar kümesini tanımlamak için gereken altyapı oluşmuştur.

Tanım: (Bz) bağıntısının denklik sınıfları kümesine tamsayılar kümesi denir ve Z ile gösterilir.

Yani tamsayılar, N×N üzerinde (BZ) denklik bağıntısı ile kurulan,

[a, b] = {(x, y) ∈ NxN : (a, b) ≡ (x, y)} = {(x, y) ∈NxN: a+y=x+b} (Dz)

ile tanımlanan denklik sınıflarının oluşturduğu bir kümedir. a,b,c,d ∈ N için denklik sınıflarının eşitliği

[a,b]=[c,d] ⇔ (a,b) ≡ (c,d) ⇔a+d=c+b şeklindedir. Örneğin,

...=[4,6]=[3,5]=[2,4]=[1,3]=[0,2]={(x,y) ∈ NxN: y=x+2}={(0,2), (1,3), (2,4), ...,(n,n+2),...}

...=[4,4]=[3,3]=[2,2]=[1,1]=[0,0]={(x,y) ∈NxN: y=x}={(0,0), (1,1), (2,2), ...(n.n),...}

...=[6,4]=[5,3]=[4,2]=[3,1]=[2,0]={(x,y) ∈ NxN: y+2=x}={(2,0), (3,1), (4,2), ...(n+2,n),...}.

Buradaki eşitlikler gözetildiğinde, örneğin birbirine eşit olan [2,0], [3,1], [4,2], ... denklik sınıflarının her biri aynı tamsayıdır ve {(2,0),(3,1), (4,2),...(n+2,n),...} kümesini temsil ederler. (a,b) ∈ [a,b] olduğundan aslında {(2,0),(3,1), (4,2),...(n+2,n),...} denklik sınıfının elemanlarından her biri bu (tamsayı) kümenin birer temsilcileridir. Daha önce (a,b) sıralı ikilisinin a-b sayısıyla tanımlandığı gözetilerek, yukarıdaki eşitlikler

-2=0-2=[0,2]={(0,2), (1,3), (2,4),...,(n,n+2),...}

0=0-0=[0,0]={(0,0), (1,1), (2,2),...(n.n),...}

2=2-0=[2,0]={(2,0), (3,1), (4,2),...(n+2,n),...} biçiminde tekrar yazılabilir. Burada 2 tam sayısı olan {(2,0), (3,1), (4,2),...(n+2,n),...} kümesini temsilen (2,0) elemanı seçilse de 2 tamsayısı için (3,1) ya da (4,2) temsilci şeçimleri yapılabilir.

NxN üzerindeki (Bz) denklik bağıntısı ile Z kümesi Z={[a,b]:(a,b) ∈ NxN} olarak tanımlanır ve Z nin elemanlarına tamsayı adı verilir.

TANIM: Denklik sınıfları kümesinde tanımlı bir işlem, denklik sınıfını temsil etmek üzere seçilen temsilciye bağlı değilse, o işlem iyi tanımlıdır.

Z için tanımlanan toplama ve çarpma (ikili) işlemleri Z içinde iyi tanımlanmıştır. Toplama işlemi üzerinden açıklamak gerekirse, Z kümesinden seçilen α=[(a,b)], α'=[(a',b')], γ=[(c,d)] ve γ'=[(c',d')] tam sayıları için α=α' ve γ= γ' iken α + γ = α'+ γ' olur. Yani, sınıflardan seçilen temsilcilerle yapılan (sınıflar arası) toplama işleminin sonucu, temsilci seçiminden bağımsızdır, değişmez.

Z üzerindeki toplamanın özelliklerinden ters elemanın varlığı ve tekliği önemli bir özelliktir. Her bir α ∈Z için, α + α'= α '+ α = [0,0] eşitliğini sağlayan bir tek α' vardır. α =[c,d] ise α'=[d,c] olur. Bu özellikten dolayı, α elemanının tersi - α olarak yazılıp bu elemana α nın toplamsal tersi adı verilir. Yani [c,d] elemanının tersi [d,c] dir ve -[c,d]=[d,c] olur. Böylece Z de çıkarma işlemi, [a,b]-[c,d]=[a,b]+[d,c], toplama işlemi sayesinde kolaylıkla tanımlanmış olur ve Z çıkarma işlemine göre kapalıdır.

Tam sayı olan her bir [a,b] denklik sınıfının (uygun bir gömme fonksiyonu ile) a-b sayısı ile eşleştirilmesiyle, N kümesini kapsayan Z kümesinin alışık olduğumuz {.....,-2,-1,0,1,2,...} gösterimi elde edilir.

Rasyonel Sayılar

Tamsayılarda toplama,çıkarma ve çarpma işlemleri yapılabilir ama bölme işlemi yapılamaz. Tamsayıları ve tamsayılarda tanımlanmış işlemlerin özelliklerini bilerek bölme işlemine göre kapalı olan rasyonel sayılar kümesini tanımlayacağız. Tamsayılarda olmayan a/b yi a,b ∈Z olmak üzere şimdilik (a,b) ikilisi olarak tanımlayalım. O zaman 2/3=4/6 olduğundan (2,3)=(4,6) olmalı, ki bu son eşitliğin doğru olmadığını biliyoruz. Bu temsili anlamlı kılmak için (2,3) ve (4,6) sıralı ikililerinin birbirine denk (eşdeğer) olmalarını isteyeceğiz. İkililer arasında nasıl bir ilişki olduğunu gözeterek bu denkliği sağlayacak bağıntıyı bulmak gerekir. (2,3) ve (4,6) ikilileri arasındaki bağıntının 2.6=3.4 eşitliğinden ne olabileceği kolayca görülür. Genelleme yapılarak, Z*=Z\{0} ve (a,b) ve (c,d) ∈ ZxZ* olmak üzere, bu bağıntı

$$(a,b) \equiv (c,d) \Leftrightarrow a.d=b.c \qquad \text{(BQ)}$$

biçiminde ifade edilir. Bunun ZxZ* üzerinde bir denklik bağıntısı olduğu kolayca gösterilir. Bu sebeple 2/3 ya da 4/6 ile temsil edilen (2,3),(4,6), (6,9), ..., (2n,3n),... sıralı ikilileri birbirine denktirler.

Tanım: (BQ) bağıntısının denklik sınıfları kümesine rasyonel sayılar kümesi denir ve bu küme Q ile gösterilir.

Yani rasyonel sayılar, $Z \times Z^*$ üzerinde (BQ) denklik bağıntısı ile kurulan,

$[a, b] = \{(x, y) \in Z \times Z^*: (a, b) \equiv (x, y)\} = \{(x, y) \in Z \times Z^*: a.y=b.x\}$ (DQ)

ile gösterilen denklik sınıflarının oluşturduğu bir kümedir. $a,c \in Z$ ve $b,d \in Z^*$ için

$[a,b]=[c,d] \leftrightarrow (a,b) \equiv (c,d) \Leftrightarrow a.d=b.c$ olur. Örneğin,

$...[-6,-10]=[6,10]=[-3,-5]=[3,5]=\{(x,y) \quad Z \times Z^*: 3y=5x\} = \{(3,5), (-3,-5), (6,10),...,(3n,5n),...\}$

$...[-10,-6]=[10,6]=[-5,-3]=[5,3]=\{(x,y) \in Z \times Z^*: 5y=3x\} = \{(5,3), (-5,-3), (10,6),...,(5n,3n),...\}$.

(a,b) ikilisinin a/b ile tanımlandığını hatırlatarak $3/5=[3,5]= \{(3,5), (-3,-5), (6,10),...,(3n,5n),...\}$ rasyonel sayısı olarak yazılabilir. Burada $\{(3,5), (-3,-5), (6,10),...,(3n,5n),...\}$ kümesini temsilen (3,5) sıralı ikilisi yerine (-6,-10) sıralı ikilisi de seçilebilirdi.

$Z \times Z^*$ üzerindeki (BQ) denklik bağıntısı ile $Q=\{[a,b]:(a,b) \in Z \times Z^*\}$ kümesi olarak tanımlıyor ve R nin elemanlarına rasyonel sayı adını veriyoruz.

Q için tanımlanan toplama , çarpma ve çıkarma (ikili) işlemleri Q içinde iyi tanımlanmıştır. Çarpma işlemi üzerinden açıklamak gerekirse, $\alpha=[(a,b)]$, $\alpha'=[(a',b')]$, $\gamma=[(c,d)]$ ve $\gamma'=[(c',d')]$ rasyonel sayıları için $\alpha=\alpha'$ ve $\gamma=\gamma'$ iken $\alpha.\gamma = \alpha'.\gamma'$ olur. Yani, sınıflardan seçilen temsilcilerle yapılan (sınıflar arası) çarpma işleminin sonucu, temsilci seçiminden bağımsızdır, değişmez.

Q üzerindeki çarpmanın özelliklerinden ters elemanın varlığı ve tekliği önemli bir özelliktir. Her bir $\alpha \in Q \setminus [0,1]$ için, $\alpha.\,\alpha'= \alpha'\,\alpha.=[1,1]$ eşitliğini sağlayan bir tek α' vardır. $\alpha =[c,d]$ ise $\alpha'=[d,c]$ olur. Bu özellikten dolayı, $\alpha \in Q$ elemanının tersi α-1 olarak yazılıp bu elemana α nın çarpımsal tersi adı verilir. Yani [c,d] elemanının tersi [d,c] dir ve [c,d]-1=[(d,c)] olur. Böylece Q'da bölme işlemi, [a,b]/[c,d]=[a,b].[c,d]-1=[a,b].[d,c], çarpma işlemi sayesinde kolaylıkla tanımlanmış olur. [0,1] denklik sınıfı dışında her rasyonel sayının çarpımsal tersi vardır.

Rasyonel sayı olan herbir [a,b] denklik sınıflarının (uygun bir gömme fonksiyonu yardımıyla) a.b-1=a/b sayısıyla eşleştirilmesiyle Z kümesini kapsayan Q kümesinin alışık olduğumuz $Q=\{a/b: a,b \in Z, b \neq 0\}$ gösterimi elde edilir.