ISSN No: 1303-6319 Cilt: 05 Sayı: 01 Sayfa: 58-64 ISBN No: 978-975-19-4105-3 Volume: 05 Number: 01 Page: 58-64

BÜYÜME EĞRİLERİNİN EŞİTLİĞİNDE PERMÜTASYON TESTİ

Ufuk EKİZ* **Müslim EKNİ****

ÖZET

Tesadüfi değişkenin dağılımının ne olduğuna ilişkin herhangi bir varsayım gerektirmeyen permütasyon testi, özellikle gözlem sayısı arttıkça çok fazla işlem yapmayı gerektirmektedir. Ancak parametrik olmayan bu yöntemin, son yıllarda bilgisayar teknolojisindeki ilerlemelere paralel olarak kullanımı yaygınlaşmaktadır. Bu çalışmada tarafımızdan yazılmış olan bilgisayar programı kullanılarak, Büyüme Eğrisi Modelinde (Growth Curve Model) ortalamaların eşitliği hipotezinin permütasyon testi ile, test edilmesi incelenmiştir. Uygulamada Büyüme Eğrisi Modeline uyan gerçek veri seti kullanılmıştır.

Anahtar Kelimeler: Büyüme Eğrisi Modeli, Permütasyon Testi.

1. GİRİŞ

Büyüme Eğrisi Modeli ekonomi, biyoloji ve tıp gibi alanlarda kısa zaman serileri üzerinden büyüme problemlerinin analizinde sıkça kullanılan, genelleştirilmiş çok değişkenli bir varyans analizi modelidir. Ayrıca uzun-kesit (longitudinal) verilerin (özellikle ilişkili tekrarlı ölçümlerde) analizinde kullanılan temel bir araçtır.

Büyüme problemi ile ilgili ilk temel çalışmalar arasında Wishart (1938), Box (1950) ve Rao (1958) yer almaktadır. Bu problemin, modellenmesine ilişkin ilk kapsamlı girişim ve isimlendirme ise Pothoff ve Roy (1964) tarafından yapılmıştır.

Büyüme Eğrisi Modeli,

$$\mathbf{Y_{pxn} = X_{pxm}B_{mxr}Z_{rxn} + e_{pxn}} \qquad (1)$$

şeklinde tanımlanmaktadır. Burada X ve Z rankları sırasıyla m<p, r<n olarak bilinen tasarım matrisleri ve B'de bilinmeyen regresyon katsayıları matrisidir. Ayrıca hata matrisi ε'nun kolonları bağımsız p-değişkenli ortalaması sıfır ve bilinmeyen kovaryans matrisi $\Sigma > 0$ olan normal dağılımdır. Bir başka ifade ile $Y \sim N_{n,p}(XBZ, \Sigma, I_n)$'dir. p, n birimden her biri için gözlem alınan zaman noktalarının sayısını, (m-1) zamana bağlı polinomun derecesini ve r'de n birimin sınıflandırılabileceği grup sayısını ifade etmektedir (Jian-Xin ve Kai-Tai, 2000).

Farklı özelliklerinden dolayı, r gruba ayrılmış n birimden n_j tanesi, j. grupta yer alsın. Her bir grupta yer alan birimlerin, bağımlı değişken değerleri aynı zaman noktalarında ölçülmektedir ve aynı kovaryans matrisi Σ'ya sahip oldukları varsayılmaktadır. j. gruba ilişkin büyüme eğrisi,

$$\mathbf{b_{0j} + b_{1j}t + \ldots + b_{m-1}t^{m-1}} \qquad (2)$$

* Yrd. Doç. Dr., Gazi Üniversitesi Fen Edb. Fak. İstatistik Bölümü, e-mail: ufukekiz@gazi.edu.tr
** Prof. Dr., Gazi Üniversitesi Fen Edb. Fak. İstatistik Bölümü, e-mail: mekni@gazi.edu.tr

şeklinde tanımlanmaktadır. Bu büyüme eğrisi Eşitlik (1)'de yer alan modelin kullanılmasıyla da ifade edilebilir. Eşitlik (1)'deki modelde Z , r tane satırdan meydana gelmektedir ve n tane kolonun n_1 tanesinde $(1,0,...,0)'$, n_2 tanesinde $(0,1,...,0)'$, ... , n_r tanesinde de $(0,...,0,1)'$ vektörleri yer alacak şekilde oluşturulmaktadır ($n_1 + n_2 + ... + n_r = n$). B matrisinin (j, c). elemanı da $b_{j-1,c}$ ile ifade edilmektedir. X matrisi ise j. satırı ve c. kolonu t_j^{c-1} ile ifade edilen matristir. X, B ve Z matrislerinin gösterimi aşağıdaki gibidir.

$$X = \begin{bmatrix} 1 & t_1 & t_1^2 & . & . & . & t_1^{m-1} \\ 1 & t_2 & t_2^2 & . & . & . & t_2^{m-1} \\ . & . & . & . & . & . & . \\ . & . & . & . & . & . & . \\ . & . & . & . & . & . & . \\ 1 & t_p & t_p^2 & . & . & . & t_p^{m-1} \end{bmatrix} , \quad B = \begin{bmatrix} b_{01} & b_{02} & . & . & . & b_{0r} \\ b_{11} & b_{12} & . & . & . & b_{1r} \\ . & . & . & . & . & . \\ . & . & . & . & . & . \\ . & . & . & . & . & . \\ b_{(m-1)1} & b_{(m-1)2} & . & . & . & b_{(m-1)r} \end{bmatrix}$$

$$Z = \begin{bmatrix} 1 & 1 & . & . & . & 1 & 0 & 0 & . & . & . & 0 & . & . & . & 0 & 0 & . & . & . & 0 \\ 0 & 0 & . & . & . & 0 & 1 & 1 & . & . & . & 1 & . & . & . & 0 & 0 & . & . & . & 0 \\ . & . & . & . & . & . & . & . & . & . & . & . & . & . & . & . & . & . & . & . & . \\ . & . & . & . & . & . & . & . & . & . & . & . & . & . & . & . & . & . & . & . & . \\ . & . & . & . & . & . & . & . & . & . & . & . & . & . & . & . & . & . & . & . & . \\ 0 & 0 & . & . & . & 0 & 0 & 0 & . & . & . & 0 & . & . & . & 1 & 1 & . & . & . & 1 \end{bmatrix}$$

Literatürde, Büyüme Eğrisi Model parametreleri B ve Σ 'nın tahminine yönelik pek çok yöntem yer almaktadır. Bunlar arasında en çok kullanılanları; En Küçük Kareler (EKK) ve En Çok Olabilirlik (EÇOB) yöntemleridir. Tek ya da çok değişkenli regresyon analizinde EÇOB ve EKK yöntemlerine dayalı parametre tahminleri tamamen aynılık göstermektedir. Ancak Büyüme Eğrisi Modelinde, bu durum sağlanmamaktadır. Çünkü EKK tahmini bağımlı Y değişkeninin doğrusal bir fonksiyonu olarak elde edilirken, EÇOB tahmini bağımlı Y değişkeninin doğrusal olmayan bir fonksiyonu olarak elde edilmektedir.

2. BÜYÜME EĞRİSİ MODEL PARAMETRELERİNİN EÇOB VE EKK TAHMİNLERİ

EKK yönteminde, regresyon katsayılarının ve kovaryans matrisinin tahminleri hata kareler toplamları matrisinin izinin (trace) en küçüklenmesi sonucu,

$$\hat{\mathbf{B}}_{\mathbf{EKK}} = \left(\mathbf{X'X}\right)^{-1} \mathbf{X'YZ'}\left(\mathbf{ZZ'}\right)^{-1} \tag{3}$$

$$\hat{\boldsymbol{\Sigma}}_{\mathbf{EKK}} = \frac{\mathbf{1}}{\mathbf{n}}\left(\mathbf{Y - X\hat{B}Z}\right)\left(\mathbf{Y - X\hat{B}Z}\right)'$$

olarak elde edilmektedir (Jian-Xin ve Kai-Tai, 2000). Regresyon katsayıları tahminleri, yanıt değişkeni Y'nin doğrusal bir fonksiyonu formundadır. Eşitlik (1)'de ifade edilen model için B ve Σ parametrelerinin bir fonksiyonu olan EÇOB fonksiyonu,

$$\mathbf{L}(\mathbf{B},\boldsymbol{\Sigma}) = (2\pi)^{-np/2}\left[\det(\boldsymbol{\Sigma})\right]^{-n/2} \exp\left\{-\frac{1}{2}\mathrm{tr}\left(\boldsymbol{\Sigma}^{-1}(\mathbf{Y}-\mathbf{XBZ})(\mathbf{Y}-\mathbf{XBZ})'\right)\right\} \tag{4}$$

şeklinde ifade edilir. B ve Σ parametrelerinin EÇOB tahminleri olan $\hat{B}_{EÇOB}$ ve $\hat{\Sigma}_{EÇOB}$ aşağıdaki teoremde yer almaktadır (Jian-Xin ve Kai-Tai, 2000) .

Teorem: Eşitlik (1)'de ifade edilen Büyüme Eğrisi Modelinde, eğer $n > p + r$ ve açıklayıcı tasarım matrisleri X ve Z tam ranklı ise, Eşitlik (4)'te yer alan EÇOB fonksiyonunu en büyükleyen $\hat{B}_{EÇOB}$ ve $\hat{\Sigma}_{EÇOB}$ tahmin edicileri sırasıyla,

$$\hat{\mathbf{B}}_{\mathbf{EÇOB}} = \left(\mathbf{X'S^{-1}X}\right)^{-1}\mathbf{X'S^{-1}YZ'}\left(\mathbf{ZZ'}\right)^{-1} \tag{5}$$

ve

$$\hat{\boldsymbol{\Sigma}}_{\mathbf{EÇOB}} = \frac{1}{n}\left(\mathbf{Y}-\mathbf{X\hat{B}Z}\right)\left(\mathbf{Y}-\mathbf{X\hat{B}Z}\right)'$$

elde edilir. Burada $S = Y(I_n - P_{Z'})Y'$, $P_{Z'} = Z'(ZZ')^{-1}Z$ ve I_n'de n boyutlu birim matrisi ifade etmektedir.

Hata terimlerinin bağımsız ve aynı çok değişkenli normal dağılıma sahip oldukları varsayımına ek olarak, tüm birimlerin aynı zamanlarda gözlenmiş olması ve tüm birimlere ilişkin ölçümlerin aynı dereceden polinomlarla ifade edilmiş olması varsayımları da sağlanıyor ise, r tane gruba ait ortalama büyüme eğrilerinin eşitliği hipotezini test etmek için uygulanabilecek çeşitli çalışmalar literatürde yer almaktadır (Rao, 1959, 1965; Potthoff ve Roy, 1964; Grizzle ve Allen, 1969; Krishnaiah, 1980). Yukarıdaki varsayımlardan sapmaların olması durumunda, gruplara ait Büyüme Eğrilerinin karşılaştırılması için, Zerbe ve Walker (1977), permütasyon testine (Box ve Anderson, 1955) dayalı bir yaklaşım önermişlerdir. Bu yaklaşım aşağıda kısaca özetlenmektedir.

3. GRUPLARA İLİŞKİN ORTALAMA BÜYÜME EĞRİLERİNİN EŞİTLİĞİNDE PERMÜTASYON TESTİ

Araştırmacı tarafından belirlenen (t_1, t_2) zaman aralığı üzerinde, grup ortalama eğrilerinin eşitliğini test etmek için Tablo 1'de verilen büyüklükler göz önünde bulundurulmalıdır. (t_1, t_2) zaman aralığı üzerinde, $c_1(t)$ ve $c_2(t)$ gibi iki eğri arasındaki uzaklık

$$\mathbf{d}(\mathbf{c}_1,\mathbf{c}_2) = \left[\int_{t_1}^{t_2}\left\{\mathbf{c}_1(\mathbf{t})-\mathbf{c}_2(\mathbf{t})\right\}^2 \mathbf{dt}\right]^{1/2} \tag{6}$$

genel kareler toplamı (T) olarak ifade edilmektedir. T, gruplar arasındaki uzaklıkların kareleri toplamı olan Q ve her bir gruptaki birimler arasındaki uzaklıkların kareleri toplamı olan W'nın toplamı olarak yazılabilmektedir. Bu yapı tek yönlü varyans analizi ile tamamen benzerlik göstermektedir.

Tablo 1. $\left(\mathbf{t_1,t_2}\right)$ **zaman aralığında büyüme eğrilerine ilişkin varyans analizi tablosu**

Kaynak	*Kareler Toplamları*	*Serbestlik Derecesi*
Gruplar İçi	$Q=\sum_{j}^{r} n_j \int_{t_1}^{t_2}\left(\bar{y}_{.j}(t)-\bar{y}_{..}(t)\right)^2 dt$	r-1
Gruplar Arası	$W=\sum_{j=1}^{r}\sum_{i=1}^{n_i}\int_{t_1}^{t_2}\left(\hat{y}_{ij}(t)-\bar{y}_{.j}(t)\right)^2 dt$	n-r
Genel	$T=\sum_{j=1}^{r}\sum_{i=1}^{n_i}\int_{t_1}^{t_2}\left(\hat{y}_{ij}(t)-\bar{y}_{..}(t)\right)^2 dt$	n-1

$$\mathbf{\bar{y}_{.j}(t)=\frac{1}{n_j}\sum_{i=1}^{n_j}\hat{y}_{ij}(t), \quad \bar{y}_{..}(t)=\frac{1}{n}\sum_{j}\sum_{i}\hat{y}_{ij}(t), \quad \mu(t)=\frac{1}{n}\,n\,\mu\,(t)}$$

Gruplara ait ortalama büyüme eğrilerinin eşitliği hipotezini, en az bir grubun ortalama eğrisi $\left(t_1,t_2\right)$ zaman aralığında diğer grupların ortalama eğrilerinden farklıdır hipotezine karşı testi,

$$\mathbf{H_0:\ \mu_1(t)=\mu_2(t)=...=\mu_r(t)}, \qquad t\in\left(t_1,t_2\right) \text{ için}$$
$$\mathbf{H_1:\ \mu_j(t)\neq\mu_k(t)} \qquad t\in\left(t_1,t_2\right) \text{ aralığında } k\neq j \text{ için}$$

ile ifade edilir. H_1'e karşı, H_0 hipotezini test etmekte kullanılacak test istatistiği,

$$\mathbf{F=\left[Q/(r-1)\right]/\left[W/(n-r)\right]} \tag{7}$$

olarak ileri sürülmektedir Zerbe ve Walker(1977). Teste ilişkin kesin P-değeri (exact P-value) r gruba ait n tane gözleme ilişkin, $R=n!\Big/\prod_{j=1}^{r}n_j!$ adet mümkün permütasyondan her biri için, Eşitlik (7)'de F değerinin hesaplanması ile belirlenir. Eğer hesaplanan R adet F değerinden, m tanesi F_0 tablo değerinden büyük ise, bu durumda kesin P-değeri

$$\mathbf{P=\frac{m}{R}} \tag{8}$$

olarak elde edilir. Eğer elde edilen kesin P-değeri öngörülen anlamlılık düzeyinden küçük ise, H_0 hipotezi reddedilir.

4. UYGULAMA

Doğumdan altı aylık oluncaya kadarki süre zarfında kız ve erkek bebeklerin ortalama baş çevresi eğrilerinin eşitliği hipotezini permütasyon testi ile test etmek üzere; Gazi Üniversitesi Tıp Fakültesi Çocuk Hastalıkları Anabilim Dalından alınmış 8 kız ve 8 erkek bebeğe ait doğum, 2. ay, 4. ay ve 6. ay baş çevresi verileri Tablo 2'de yer almaktadır.

Tablo 2. Gazi Üniversitesi Tıp Fakültesi çocuk hastalıkları anabilim dalından 8 kız ve 8 erkek çocuğun 0, 2, 4 ve 6. aylardaki baş çevrelerine ilişkin alınmış ölçümler (cm cinsinden)

Cinsiyet	*Doğum*	*2. Ay*	*4. Ay*	*6. Ay*
Kız	34	39	41	44
	37	43	44	46
	36	40	41	43
	37	40	41	44
	38	39.5	42,5	45
	33	35	37	39
	33	40	40	42
	36	38,5	41,5	43
Erkek	36	40	43	45.5
	37	40	42.5	44
	34	38	42	44
	35.5	40	41	43
	34	38	40	42
	36	40	41	44
	35.5	42	42	44.5
	35	37	42	44

Eşitlik (1) ile verilen modelde kullanılan, X ve Z tasarım matrisleri bu uygulama için,

$$X = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 2 \\ 1 & 4 \\ 1 & 6 \end{bmatrix}, \quad Z = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

olarak belirlenmiştir. Buna göre Eşitlik (3) ve Eşitlik (5)'den, B parametresinin EKK ve EÇOB tahminleri sırasıyla,

$$\hat{B}_{EKK} = \begin{bmatrix} 30.625 & 29.062 \\ 1.2500 & 1.3906 \end{bmatrix}, \quad \hat{B}_{EÇOB} = \begin{bmatrix} 33.732 & 34.848 \\ 1.1840 & 1.2987 \end{bmatrix}$$

olarak elde edilmiştir. 8 kız ve 8 erkek bebeğin yer aldığı iki grup için oluşturulacak permütasyonların sayısı R=12870'dir. Doğum ve altı ay arasında herhangi bir (t_1, t_2) zaman aralığında bu iki gruba ilişkin ortalama baş çevresi büyüme eğrilerinin eşitliği testinde (7) nolu eşitlikten, 12870 adet F değeri hesaplanmış, bunlardan $F_{r-1,n-2,0.95} = F_{1,14,0.95} = 4.60011$ değerinden büyük olanlarının sayısı belirlenmiş ve Eşitlik (8)'den kesin P-değerleri elde edilmiştir. Doğum ve altı ay arasında belirlenmiş çeşitli aralıklar için test sonuçları Tablo 3'te yer almaktadır. Bu tabloda verilen sonuçlar Matlab (7.0)'da yazılmış olan program ile elde edilmiştir.

Tablo 3. Permütasyon testi sonuçları

	Zaman Aralığı	*F>4.60011*	*Kesin P-değeri*
1	(Doğum-2. ay)	620	0.04817
2	(2. ay-4. ay)	494	0.03838
3	(4. ay-6. ay)	454	0.03527
4	(Doğum-6. ay)	448	0.03481

Tablo 3'te yer alan tüm zaman aralıklarında, kesin P-değerleri $\alpha = 0.05$ değerinden daha küçük çıktığı için H_0 hipotezleri reddedilmiştir. 1. zaman aralığında elde edilen, kesin P-değeri, α'ya oldukça yakın çıkmıştır. 1., 2. ve 3. zaman aralıklarında, kesin P-değeri azalma göstermektedir. Bu sonuca göre kız ve erkek çocukların baş çevrelerine ilişkin ortalama büyüme eğrileri arasında fark vardır ve bu farklılık, doğumdan 6 aylık oluncaya kadar ki ikişer aylık periyotlarda artarak devam etmektedir. Ölçümlerin alındığı tüm zaman aralığı olan 4. zaman aralığında da H_0 hipotezi reddedilmiştir.

5. TARTIŞMA VE SONUÇ

r tane gruba ait ortalama büyüme eğrilerinin eşitliği hipotezini test etmek için, parametrik testler yerine parametrik olmayan permütasyon testinin kullanılmasındaki başlıca sebep, gözlem sayısının azlığıdır. Gözlem sayısının az olması parametrik testlerde varsayımların sağlanıyor olmasında problem yaratmasına karşın, permütasyon testinin uygulanabilirliği bakımından kolaylık sağlamaktadır. Ayrıca parametrik testler r tane gruba ait ortalama büyüme eğrilerinin eşitliği hipotezini, ölçümlerin yapıldığı tüm zaman aralığı üzerinden test etmektedir. Buna karşın permütasyon testi ile ölçümlerin yapıldığı tüm zaman aralığı içerisinde olmak kaydıyla herhangi bir zaman aralığında, r gruba ait ortalama büyüme eğrilerinin eşitliği hipotezi test edilebilmektedir.

Uygulamada kullanılan veri için, parametrik testlerle ancak altı aylık zaman periyodunda ortalama büyüme eğrilerinin eşitliği hipotezi test edilebilir. Yazılan program aracılığıyla, istenilen herhangi bir zaman aralığında ilgili hipotezin permütasyon testi ile test edilebileceği gösterilmiştir.

6. KAYNAKLAR

Box, G.E.P., 1950. Problems in the Analysis of Growth and Wear Curves. Biometrics, 6, 362-89.

Box, G.E.P., Anderson, S.L., 1955. Permutation Theory in the Derivation of Robust Criteria and the Study of Departures from Assumption. Journal of the Royal Statistical Society. Series B, Vol.xvıı, No 1.

Grizzle, J.E., Allen, D.M., 1969. Analysis of Growth and Response Curves. Biometrics, 25, 375-381.

Jian-Xin P., Kai-Tai F., 2000. Growth Curve Models and Statistical Diagnostics. New York, Springer-Verlag.

Krishnaiah, P.R., 1980. Handbook of Statistics 1. Amsterdam, North-Holland Publishing Company.

Pothoff, F.R., Roy, S.N., 1964. A Generalized Multivariate Analysis of Variance Model Useful Especially for Growth Curve Problems. Biometrika, 51, 3 ve 4, p.313.

Rao, C.R., 1958. Some Statistical Methods for Comparison of Growth Curves. Biometrics, 14, 1-17.

Rao, C.R., 1959. Some Problems Involving Linear Hypothesis in Multivariate Analysis. Biometrika, 46, 49-58.

Rao, C.R., 1965. Theory of Least Squares where the Parameters are Stochastic and its Application to the Analysis of Growth Curves. Biometrika, 52, 447-458.

Wishart, J., 1938. Growth-Rate Determination in Nutrition Studies with the Bacon pig, and their Analysis. Biometrika, 30, 16-28.

Zerbe, G.O., Walker, S.H., 1977. A Randomization Test for Comparison of Growth Curves with Different Polynomial Design Matrices. Biometrics, 33, 653-657.

PERMUTATION TEST FOR THE EQUALITY OF GROWTH CURVE

ABSTRACT

Permutation test, which doesn't require any assumption for the distribution of the random variable, needs to make a lot of calculations, especially when the number of observations increase. However, the use of these non-parametric method is being extended by the developing of the computer technology. In this paper, we considered the testing of the hypothesis of equal means with the permutation test in the Growth Curve Model, by using the computer program written by us. A real data set, fitting the Growth Curve Model, is used for the program.

Key Words: Growth Curve Model, Permutation Test.