

Mangan sıvamaları ve DLA modeli için sayısal bir hesaplama

Tuğba ÖZBEY*, Mehmet BAYIRLI

Balıkesir Üniversitesi, Fen Edebiyat Fakültesi, Fizik Bölümü, Çağış Kampüsü, Balıkesir

Geliş Tarihi (Received Date): 10.11.2015

Kabul Tarihi (Accepted Date): 09.02.2016

Özet

Manyezit cevher yüzeyinde çeşitli kimyasal ve jeolojik olaylar sonucu oluşan mangan sıvamaları olarak bilinen siyah kümeler bulunmaktadır. Bu çalışmada kümelerin oluşum mekanizması ve kaynağı araştırılmaktadır. Bu amaçla manyezit cevher yüzeyinden mangan sıvamaları seçilmiş ve bu sıvamaları temsil eden simüle görüntüler, difüzyon sınırlı kümeleşme (DLA) modeline uygun bir şekilde, Monte Carlo simülasyon metodu ile oluşturulmuştur. Mangan sıvamaları ve onları temsil eden simülasyon görüntülerine ait kritik üs değerleri, ölçekleme yöntemi kullanılarak, istatistiksel olarak hesaplanarak karşılaştırılmıştır. Simülasyonda, yapışma olasılığı parametresi denemeler sonucunda $t=0.80$ ve $t=0.14$ olarak belirlenmiştir. Mangan sıvamaları ve bilgisayar temsillerinden istatistiksel değerleri hesaplamak için kare örgü boyutu, $L=88$ ve $L=67$ pixel ve parçacık sayısı $N=625$ ve $N=1155$ olarak alınmıştır. Mangan sıvamaları ve onların temsil görüntüleri için fraktal boyut ve kritik üs değerleri hesaplanmıştır. Mangan sıvamaları için fraktal boyut $1.39-1.65$ arasında ve bu kümelere ait simülasyonun fraktal boyut değeri $1.47-1.63$ olarak hesaplanmıştır. Mangan sıvamaları için sırasıyla istatistiksel dağılımı belirleyen rms (root mean square) kalınlığa ait kritik üs α ve β değerleri, $2.80-2.32$ ve $0.36-0.32$ ve onların temsili simülasyon görüntüsü için $2.64-2.39$ ve 0.35 olarak hesaplanmıştır. Bu sonuçlar, mangan sıvamalarının yapısal karakterinin difüzyon sınırlı kümeleşme işlemini oluşturduğunu doğrulamaktadır. Ayrıca, bu değerlerin doğal ve temsillerini kümeleri karşılaştırmaya yardımcı olabileceği düşünülmektedir. Ancak kimyasal yapısını belirlemek için ek teknikler kullanılmalıdır.

Anahtar Kelimeler: Manyezit cevheri, kritik üsler, difüzyon sınırlı kümeleşme (DLA).

* Tuğba ÖZBEY, ozbey15@msn.com.

A statistically analyzing for manganese deposits and DLA model

Abstract

On the surface of the magnesite ores, there are black deposits being the result of various chemical and geological events. The formation mechanism and the origin of the deposits are researched in this study. In this case, manganese deposits are formed by using Monte Carlo simulation according to the diffusion limited aggregation (DLA). The critical exponents for the manganese deposits and the simulated images representing them are statistically calculated and compared by using scaling method. In this simulation, the sticking probability parameter $t=0.8$ and $t=0.14$, the values obtained from the images transferring to computer, for the square lattice size $L=88$ and $L=67$, for the particle number $N=625$ and $N=1155$ are assumed. The fractal dimension and the critical exponent values for manganese deposits and the simulated images representing them are computed. The fractal dimension is calculated as 1.39 and 1.65 for the manganese deposits and 1.57 and 1.59 for their simulated images. The critical exponent α and β is computed as 2.85-2.32 and 0.36-0.32 respectively for the manganese deposits. The critical exponent α and β is computed as 2.64-2.39 and 0.35 the simulated image representing them. These results confirm that the structural character of the manganese deposits form the diffusion limited aggregation process and can be help to compare the natural and their simulated aggregations.

Keywords: Magnesite ore, critical exponents, diffusion limited aggregation (DLA).

1. Giriş

Doğal jeolojik yapıların yüzeyleri karmaşık morfolojiye özellikli olup, bir doku oluşturur. Dokunun genel yapısı yüzey üzerinde rastgele dağılım olabileceği gibi birbirinden bağımsız sıvama (depozit) şeklinde de olabilir [1]. Yüzey morfolojinin oluşumu tamamen ortamdaki etkin maddenin temel özelliklerine ve türüne bağlıdır. Bunların istatistiksel parametrelerinin belirlenmesi, özellikle maden yataklarının belirlenmesi ve temel özelliklerini çalışan bilim insanları için önemlidir [2, 3].

Jeomorfolojik yapılardan biri manyezit cevheri (Mc) yüzeyinde doğal jeomorfolojik çevre koşullarında oluşmuş mangan sıvamalarıdır. Genel bir değerlendirme ile mangan sıvamaları, hollandit (baryum ve mangan manganat), todorokit (kalsiyum, baryum, potasyum, sodyum ve magnezyumdan oluşan mangan oksit minerali), birnisite (mangan oksit içeren akıcı bir mineral), götit (sulu demir oksit minerali), amorf Fe-hiroksit, smektit, illit ve CaSO_4 içeren demir oksit (Fe_2O_3) ve mangan oksitlerdir (MnO_2 ve Mn_2O_3) gibi minerallerden oluşmaktadır. Bu yapılar, görüntüleri birbirine benzer gibi gözlenmesine rağmen, her biri farklı ana mangan fazlarıdır [4-6]. Makroskobik büyüklüğü bir boyutta 0.5 cm ile 20 cm'ye kadar değişen (ya da bulunduğu ortamların yapısına göre daha büyük ve daha küçük) değerlerde bulunabilir. İki boyutta ise anlamlı bir değer ile tanımlamak olası olmayıp her bir değeri referansa göre değişmektedir. Üç boyutta ise mangan sıvamaları kuvars içindeki çatlaklarda gelişebilir [7].

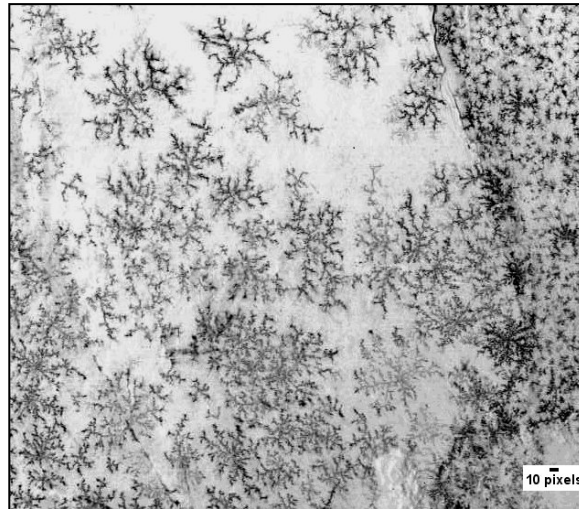
Mangan sıvamalarının oluşum ve büyüme mekanizması hala net olarak bilinmemekte ve tanımlanması ile ilgili tartışmalar günümüze kadar sürmektedir. Mangan

sıvamalarının Monte Carlo (MC) yöntemi ve Witten ve Sander tarafından önerilen DLA (difüzyonla sınırlı kümeleşme) algoritması kullanılarak bilgisayarda temsillerini üretmek mümkündür [8- 10]. Ayrıca ağaç benzeri mangan sıvamaları RDA (reaksiyon-difüzyon kümeleşme) algoritması kullanılarak bilgisayar temsilleri oluşturulmuştur [11]. Ancak her iki yaklaşım sıvamalarını kimyasal olarak tanımlanmasından çok çok uzaktır. Ayrıca mangan sıvamalarının oluşum mekanizmalarını açıklamak için deneysel ve ölçekleme teorisi kullanılarak nümerik çalışmalar yapılmıştır [2, 4, 8, 11, 12]. Fakat DLA modeli üretilen desenler, mangan sıvamaları ile karşılaştırılmamıştır.

Bu çalışmada, mangan sıvamalarının bilgisayar temsilleri ile reel yapıların istatistiksel parametreleri hesaplanarak, karşılaştırılması amaçlanmıştır. Bu amaçla, DLA algoritmasında yapışma olasılığı parametresi, t , kullanılarak farklı morfolojideki mangan sıvama temsilleri üretilmiş ve reel yapıları ile eşleştirilmiştir. Bunların istatistiksel fraktal boyut, karekök ortalama kalınlığı (root mean square, RMS) ve bunlara ait kritik üs değerleri hesaplanmıştır. Bu çalışmada kullanılan yöntem ve elde edilen sonuçların deneysel yolla üretilen malzemelerdeki sıvamalar ile doğal oluşumlardaki sıvamaları tanımlamada kullanılabileceği düşünülmektedir.

2. Materyal ve yöntem

Mangan sıvama desenlerinin bulunduğu Mc yüzeyi, tarayıcı (Epson Stylus DX485) ile taranmıştır. Dendrit formundan, bütün bir yapı haline gelerek değişen morfolojileri içeren mangan sıvama desenleri, manyezit cevherinin yüzeyinde gelişigüzel dağılımlı olduğu gözlenmiş ve tipik bir görüntüsü Şekil 1'de sunulmuştur. Şekil 1'de yüksek çözünürlük ve karşıtlıkla mangan dendritleri siyah, manyezit cevheri ise beyaz renkte gözlenmektedir. Bu görüntü, nümerik analiz amacıyla bilgisayar ortamına aktarılmıştır. Görüntülerdeki tüm yüzeyler için, Gaussian blur $\sigma = 2$ alınarak filtrelenerek resim BMP (bit map- (siyah-beyaz)) resim formatına dönüştürülmüştür. 216144 altı dijital sayı içeren böyle görüntüler, yoğun tipteki görüntü olarak kabul edilmektedir. Bilgisayar kullanarak siyah-beyaz renkte görüntü kapalı kare örgü üzerine taşınarak tüm yüzey lineer bir şekilde ölçeklendirilmiştir. Daha sonra yüzeydeki dolu siyah gözler için parçacık yoğunluğu bir, diğer gözler için sıfır alınarak hesaplamalar yapılmıştır.



Şekil 1. Tipik bir manyezit cevher yüzeyi.

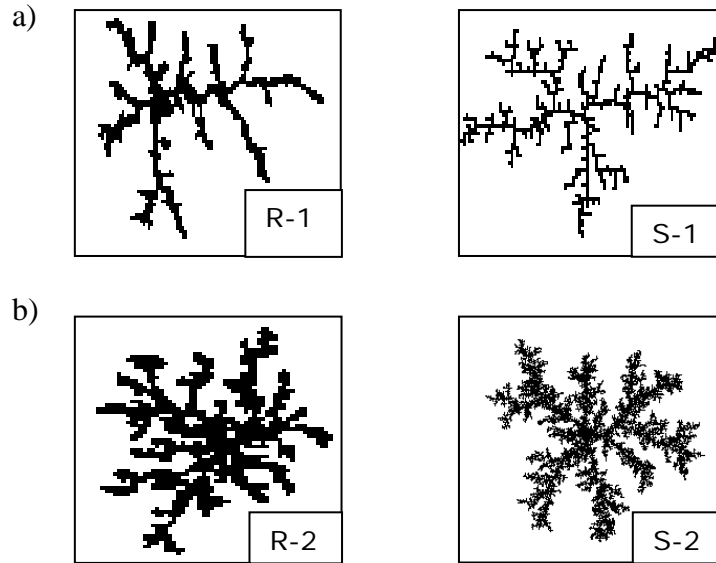
Şekil 1’de verilmiş olan resimdeki mangan dendritlerinden farklı dağılıma sahip iki küme seçilmiş olup, bu dendritleri temsil eden simülasyon görüntüleri elde etmek için genelleştirilmiş difüzyon sınırlı kümeleşme modeli kullanılmıştır. Üretilen temsiller MC simülasyon tekniği ve DLA algoritması kullanılarak, 2-boyutlu kapalı kare örgüde oluşturulmaktadır: Buna göre, kapalı örgünün merkezine bir çekirdek tanecik yerleştirilir ve ikinci tanecik merkezden uzakta bulunan herhangi bir kenar örgü gözünden bırakılarak rastgele hareket ettirilir. Bu tanecik çekirdeğin etrafındaki herhangi bir komşu göze ulaştığında kümenin elemanı olur. Daha sonraki tanecikler için aynı algoritma tekrarlanır. Eğer tanecik rastgele hareketi esnasında kapalı örgünün dışına çıkarsa o tanecik iptal edilir, aynı işlem yeni ve farklı tanecikler için uygulanır [9]. Morfolojik değişimi elde etmek için sistem parametresi olarak taneciklerin yapışma olasılığı, P , değeri ile küme çevresinde aktif boş gözlere yerleşerek kümenin elemanı olur. Yapışma olasılığı;

$$P = t^{3-B} \quad (1)$$

bağıntısı ile verilir. Denklem 1’de, t , yapışma olasılığı parametresi olup $0 < t \leq 1$ değerleri alabilir. Küme çevresindeki herhangi bir taneciğin çevresindeki aktif üç boş gözün dolma olasılığı $B=1$ değerinden daha fazladır [9, 10].

3. Bulgular

Çalışmanın birinci adımında, Mc yüzeyindeki sıvamalarda dendritik yapıda iki farklı küme seçilmiştir. İkinci adımında ise MC simülasyon tekniği ve DLA algoritması kullanılarak seçilen dendritlerin benzer temsilleri yapışma olasılığına göre üretilmiştir. Seçilen reel küme (R-1, R-2) ve simülasyon sonucu elde edilen küme temsilleri (S-1, S-2) Şekil 2’de gösterilmiştir. Üçüncü adımda ise ölçekleme yöntemi kullanılarak fraktal boyut ve rms (root mean square) kalınlığa ait kritik üs değerleri hesaplanmıştır.



Şekil 2. Tipik MC yüzeyinden seçilen mangan dendritleri ve onları temsil eden simülasyon görüntüleri.

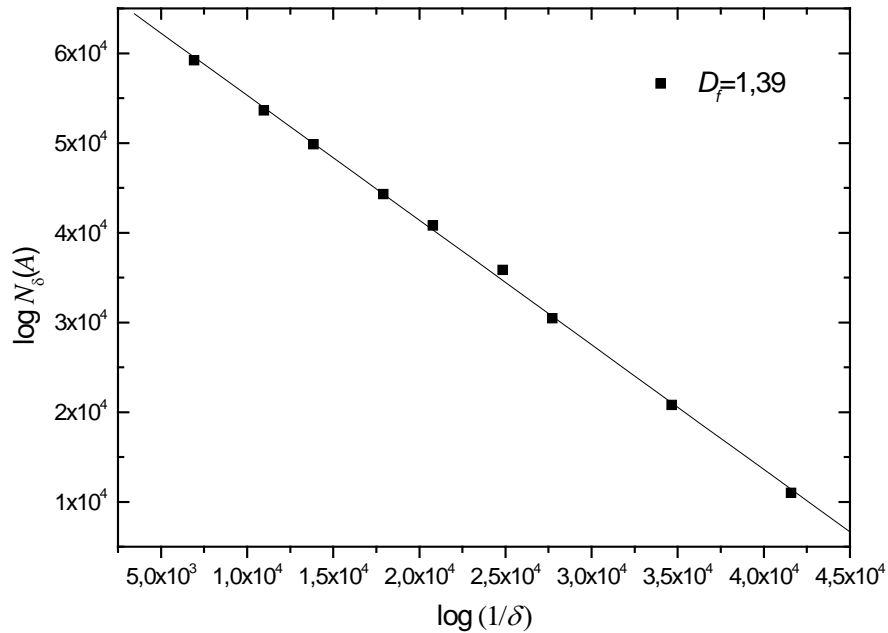
Mangan dendritleri gibi, DLA ile oluşturulan kümelerde yoğunluk korelasyonu nümerik olarak azalmakta ve belli düzgün bir şekli olmayan ve fraktal özellik gösteren bu tip kümelerin boyutu fraktal boyut ile açıklanmaktadır. Fraktal boyut, doğada ya da deneysel ortamda üretilen yapıların karakteristiğini ve geometrik karmaşıklığını açıklamak için kullanılmaktadır. Yapıların fraktal boyutunu hesaplamak için kullanılan en yaygın metod Hausdorff boyutu, kutu sayma boyutu (box-counting dimension), kendine benzerlik boyutu ve korelasyon boyutudur. Resim yüzeyleri incelendiğinde kutu-sayma, kolay uygulanabilirliği ve resmin yüzeyindeki karmaşıklığı göstermedeki başarısı nedeniyle geniş bir şekilde kullanılır.

Cevher yüzeyindeki yapıların içinde bulunduğu uzayın boyutu d Öklid boyutu olarak tanımlanır. Bir morfolojik yapının Öklid boyut değeri $d=1, 2, 3, \dots$ gibi tam sayı değerleri alabilir. Ancak Öklid boyutunun tersine fraktal boyut D_f değeri kesirli bir sayı ile ifade edilir [2, 8].

Mangan dendritlerinin fraktal boyutu değerleri, kutu sayma (box-counting) metodu kullanılarak hesaplanmıştır. Kare örgü yüzeyinde bazı bağlı alt mangan dendrit desenlerinin alanı A olmak üzere, desenlerin çaplarının toplamı, $N(\delta)$ ' dir ve minimum lineer boyutu $\delta > 0$ 'dır. Bu örgüde bir sınır olduğunda, δ , A alanının bir değeri, $N_\delta(A)$ desenlerin en küçük sayısı olmak üzere A alanın kutucuk boyutu D_f aşağıdaki bağıntıyla verilir,

$$D_f = \lim_{\delta \rightarrow 0} \frac{\log N_\delta(A)}{\log(1/\delta)} \quad (2)$$

Denklem 2'de $N_\delta(A)$, kümelerdeki toplam kutu sayısının kutu boyutuna bağlı değişiminin $1/\delta$ logaritmalarının grafiğinin en küçük kareler yöntemi kullanılarak hesaplanan eğimi fraktal boyut değeridir [2, 8]. Kutucuk boyutu, bir yapının eşit büyüklükteki küçük kutularla nasıl iyi bir şekilde kaplandığını gösteren ölçüdür [13].



Şekil 3. R-1 için fraktal boyut değerinin çizilerek belirlendiği $\log N_\delta(A) - \log 1/\delta$ grafiği. Fraktal boyut değeri 1.39'dur.

Manyezit cevherinin yüzeyinden seçilen mangan dendritleri için hesaplanan fraktal boyut değerleri 1.39-1.65 ve bu her bir dendriti temsil eden simülasyonların fraktal boyut ortalama değeri 1.47-1.63 sınır aralıklarında olarak hesaplanmıştır. Bu değerler, R-1, R-2 ve S-1, S-2 görüntülerinin her biri için $\log N_\delta(A) - \log 1/\delta$ grafiği çizilerek belirlenmiştir. Şekil 3’de R-1 için fraktal boyut değerinin çizilerek belirlendiği grafik gösterilmektedir. Ng ve Teh, mangan dendritlerinin fraktal boyutunu, ortalama 1.75 olarak hesaplamıştır [7]. Chopard ve arkadaşları, bu değeri kireç taşı yüzeyindeki mangan dendritleri için 1.78 ve kuvars yüzeyindeki mangan dendritleri için 1.51 olarak belirlemiştir [11]. Merdan ve Bayirli’nın manyezit cevher yüzeyindeki mangan dendritleri için yaptıkları çalışmada fraktal boyut 1.61-1.88 arasında değerler almaktadır [13, 14]. Kısa ve kalın dallara sahip dendrit desenlerinin fraktal boyut değeri, ince ve uzun dendrit desenlerinin dallarına kıyasla genellikle daha büyük değerlere sahiptir.

Manyezit cevher yüzeyindeki seçilen bölgedeki mangan dendritlerinin ölçekleme özelliklerini [15, 16] belirlemek amacıyla, sistemlerdeki beklenen değerleri ifade eden, karekök ortalama (*rms*) kalınlığı, küme büyüklüğü ile parçacıkların sayısı arasındaki ilişkiyi tanımlayan ölçekleme metodu yardımıyla hesaplandı. 8 bit binary formatına sahip dört görüntünün *rms* kalınlığı ve bir *h* kalınlığı boyunca uzanan piksellerin sayısı aşağıdaki gibi tanımlanmaktadır,

$$T(h) = \left\langle (x_i - \langle x_i \rangle)^2 \right\rangle^{1/2} \quad (3)$$

Denklem 3’de $\langle \dots \rangle$ *h* piksel sayısı üzerinden bir ortalamayı ve x_i *i*. pikselin kalınlığını göstermektedir. Buna ek olarak, $h=1,2,3,\dots, n$ x_i olarak alınabilir ve *n* burada bir tamsayıdır. Piksel biriminde bir *h* kalınlığının içinde yer alan toplam piksel sayısı;

$$N(h) = \sum_{x_i} \rho(x_i) \quad (4)$$

Denklem 4’de $\rho(x_i)$, parçacık yoğunluğudur ve şu şekilde tanımlanmaktadır;

$$\rho(x_i) = \begin{cases} 0, & \text{eğer } x_i \text{’deki piksel aydınlık ise} \\ 1, & \text{eğer } x_i \text{’deki piksel karanlık ise} \end{cases} \quad (5)$$

Denklem 5’de, $\rho(x_i)$, x_i parlak piksel ise 0, karanlık piksel ise 1 olarak tanımlanmaktadır. $N(h)$ ile *h* arasındaki ilişki şu şekilde tanımlanır;

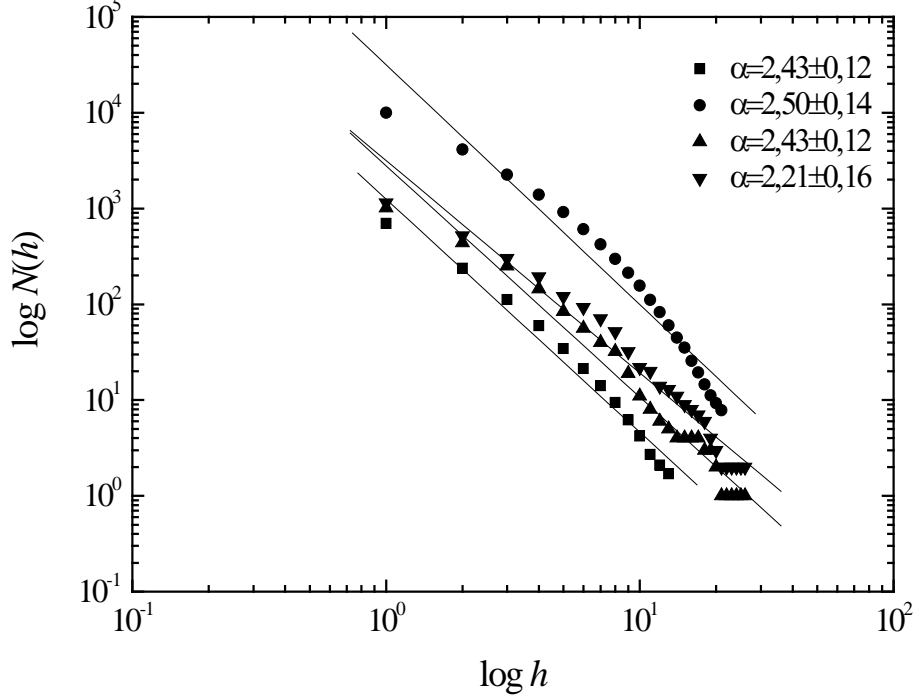
$$N(h) \sim h^{-\alpha} \quad (6)$$

ve $T(h)$ ile $N(h)$ arasındaki ilişki,

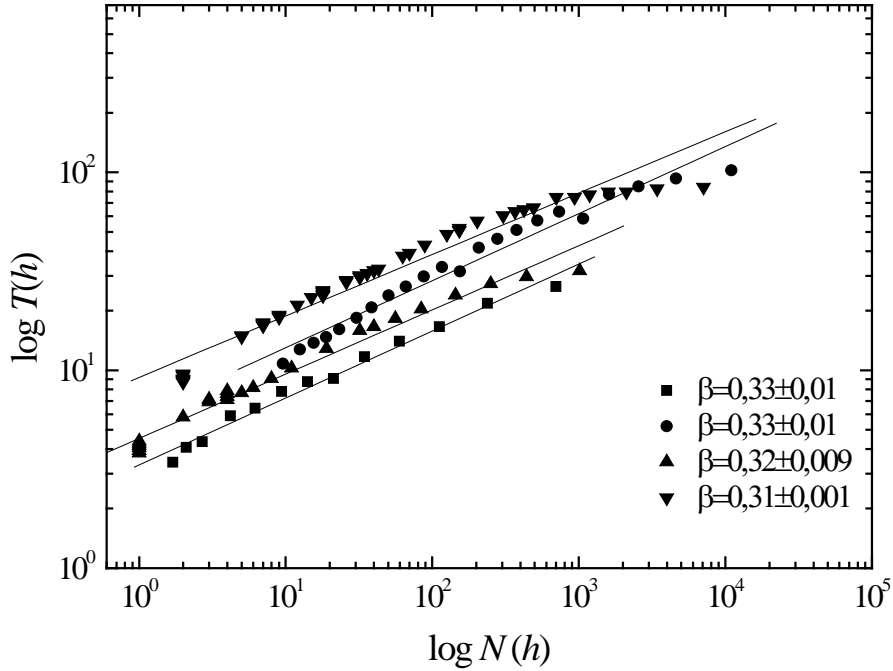
$$T(h) \sim N(h)^\beta \quad (7)$$

olarak tanımlanmaktadır. Denklem 6 ve 7’de α ve β morfolojik yapılarıdaki ölçekleme kritik üs değerleridir [17].

Seçilen bölgeden belirlenen farklı dağılıma sahip iki dendrit yapı için h ve $N(h)$ değerleri hesaplanmıştır. Bunun için iki dendriti temsil eden ayrı ayrı en az yirmi simülasyon görüntüsü elde edilmiştir. Mangan dendritleri ve onların simülasyon görüntüleri için $\log h$ ve $\log N(h)$ grafikleri Şekil 4’de çizilerek lineer regresyon metodu yardımıyla α kritik üs değeri belirlenmiştir.



Şekil 4. Seçilen mangan dendritleri ve onların simülasyon görüntüsü için $\log N(h)$ - $\log h$ grafiği.



Şekil 5. Seçilen mangan dendritleri ve onları temsil eden simülasyon görüntülerine ait $\log T(h)$ - $\log N(h)$ grafiği.

Şekil 2’de gösterilen iki dendrit ve bu dendrit kümelerini temsil eden simülasyon görüntüleri için $T(h)$ değeri hesaplanmıştır. Mangan dendritleri ve onların simülasyon görüntüleri için $\log N(h)$ ve $\log T(h)$ grafikleri Şekil 5’de çizilerek lineer regresyon metodu yardımıyla β kritik üs değerleri elde edilmiştir.

Şekil 4 ve 5’de lineer regresyon metodu kullanılarak mangan dendritlerine ait α ve β üs değerleri sırasıyla 2.85-2.32 ve 0.36-0.32 sınır değerlerinde olarak hesaplanmıştır. Bu dendritlere ait simülasyon görüntüleri için hesaplanan α ve β değerleri ise sırasıyla 2.64-2.39 ve 0.35 sınır değerindedir. Ayrıca hesaplanan sonuçlar Tablo 1’de sunulmaktadır. Şekil 4’de h artarken, $N(h)$ değeri mangan dendritleri için azalmaktadır. Bu dendritlere ait $T(h)$ değerleri $N(h)$ artarken artmaktadır. Bulgular, sıvama (depozisyon) işlemi süresince mangan dendritlerinin arttığını göstermektedir. Saitou ve Okudaira elektrodepozisyon yöntemi kullanarak ürettikleri gözenekli Ni-P filmlerinin makro içyapısı için α ve β değerlerini sırasıyla 1.15 ve 0.91 olarak hesaplanmaktadır [17]. Matsushita ve arkadaşları, elektrodepozisyon metodu ile üretilen ağaca benzeyen desenlere sahip çinko metal için β kritik üs değerini 0.72 hesaplamıştır [18].

Tablo 1. Hesaplanan fraktal boyut, kritik üs, karekök ortalama kalınlığına ait kritik üs değerleri.

	Fraktal boyut	Kare örgü boyutu	Yapışma olasılık parametresi	Kritik üs	Karekök ortalama kalınlığına ait kritik üs
	D_f	L	t	α	β
Seyrek kümeleşmeye sahip mangan dendriti (R-1)	1.39	-	-	2.85±0.25	0.36±0.02
Seyrek kümeleşmeye sahip mangan dendritine ait simülasyon görüntüsü (S-1)	1.47	88	0.80	2.64±0.14	0.35±0.01
Yoğun kümeleşmeye sahip mangan dendriti (R-2)	1.65	-	-	2.32±0.07	0.32±0.01
Yoğun kümeleşmeye sahip mangan dendritine ait simülasyon görüntüsü (S-2)	1.63	67	0.14	2.39±0.21	0.35±0.01

4. Tartışma ve sonuç

Bu çalışmanın amacı manyezit cevher yüzeyinin ölçekleme özelliklerini belirleyerek bu yüzeyi nümerik olarak analiz etmek amaçlanmıştır. Bu amaçla, manyezit cevher yüzeyinde oluşmuş mangan dendrit desenleri ve bu dendritleri temsil eden simülasyon görüntülerin fraktal boyutu ve rms (root mean square) kalınlığına ait kritik üs değerleri hesaplandı. Mangan dendritleri için fraktal boyut değeri 1.39-1.65 ve mangan dendritlerini temsil eden simülasyon görüntüler için 1.47-1.63 olarak hesaplandı. Mangan dendritleri için rms (root mean square) kalınlığına ait kritik üs değerleri α ve β değerleri sırasıyla 2.21-2.41 ve 0.31-0.32 ve temsili görüntüler için 2.43-2.50 ve 0.33 olarak belirlendi. Bu sonuçlar, dendritler ve onun simülasyon görüntülerinin fraktal boyut değerinin yaklaşık aynı değerde olduğunu göstermektedir. Kritik üs α değeri mangan dendritleri ve onun simülasyon görüntüleri için farklı değerler alırken rms kalınlığına ait β değerleri yaklaşık aynı değerler almaktadır.

Kaynakça

- [1] Barton, P. B. Jr., Ore textures: problems and oppotunities, **Minerological Magazine**, 55, 303 (1991).
- [2] Bayirli, M. and Ozbey, T., Numerical Approaches about the Morphological Description Parameters for the Manganese Deposits on the Magnesite Ore Surface, **Zeitschrift Naturforsch**, 68a, 406-411, (2013).
- [3] Swartzlow, C. R., Two Dimensional Dendrites and Their Origin, **Geology Minerological Society of America**, No: 9, 403 (September).
- [4] García-Ruiz, J. M., Otálora, F., Sanchez-Navas, A. and Higes-Rolando, F., The formation of manganese dendrites as the material record of flow structures **In Fractals and Dynamics Systems in Geosciences** Edited by Kruhl J. H., Springer Verlag, pp 307-318 (1994).
- [5] Xu, H., Chen, T. and Konishi, H., HRTEM investigation of trilling todorokite and nano-phase Mn-oxides in manganes dendrites, **American Mineralogist**, 95, 556-562, (2010).
- [6] Erdoğan, N., Atık Manyezit Cevherinin Zenginleştirilmesi: Karakterizasyon, Özellikler Ve Manyetik Ayırıcı Uygulaması, **Selçuk Üniversitesi Mühendislik ve Mimarlık Fakültesi Dergisi**, 3, 4, 58-69, (2015).
- [7] Ng, T. F. and The, G. H., Fractal and Shape Analyses of Manganese Dendrites on Vein Quartz, **Geological Society of Malaysia**, 55, 73-79, (2009).
- [8] Bayirli, M. and Kockar, H., A Numerical Application Using Diffusion – Limited Aggregation for the Manganese Dendrites, **Zeitschrift for Natuforchhung Section A-A Journal of Physical Sciences**, 65a, 777-780, (2010).
- [9] Vicsek, T. and Sander, L. M., Diffusion-Limited Aggregation, a Kinetic Phenomenon, **Physical Review Letter**, 47, 19, 1400-1403, (1981).
- [10] Witten, T. A. and Sander, L. M, Diffusion Limited Aggregation, **Physical Review B**, 27, 5686-5697, (1983).
- [11] Chopard, B., Herrmann, H. J. and Vicsek, T., Structure and Growth Mechanism of Mineral Dendrites, **Nature**, 353, 409-412, (1991).
- [12] Ozbey, T. and Bayirli, M., A Numerical Study for the Relationship between Natural Manganese Dendrites and DLA Patterns, **Zeitschrift Naturforsch**, (2016).(Basım aşamasında).
- [13] Merdan, Z. and Bayirli, M., Formation Of The Manganese Flowers on the Surface of the Manganese Ore, **Gazi University Journal of Science**, 17, 49-57, (2004).
- [14] Merdan, Z. and Bayirli, M., Computation of the Fractal Pattern in Manganese Dendrites, **Chinese Physics Letters**, 22, 2112-2115, (2005).
- [15] Mandelbrot B. B., **The Fractal Geometry of Nature**, Freeman, New York, 77 (1983).
- [16] Mandelbrot, B. B., Pasajsa, D. E. and Paullay, A. J., Fractal character of fracture surfaces of metals, **Nature**, 308, 721-722 (1984).
- [17] Saitou, M. and Okudaira, Y., Macro Internal Structure of Porous Ni-P Electrodeposited under Galvanostatic Conditions, **Journal of Electrochemical Society**, 151, 10, C674-C679, (2004).
- [18] Matsushitai, M., Hayakawa, Y. and Sawada, Y., Fractal Structures and Cluster Statistic of Zinc-Metal Trees Deposited on a Line Electrode, **Physical Review A**, 32, 3814-3816, (1985).