İstatistikçiler Dergisi: İstatistik & Aktüerya
Journal of Statisticians: Statistics and Actuarial Sciences
IDIA 15, 2022, 2, 34-47
Geliş/Received:11.09.2022, Kabul/Accepted: 23.12.2022
Araştırma Makalesi / Research Article

Çarpık normal dağılımlı AR(1) modeli için dayanıklı kontrol kartları

Arzu Altın Yavuz
Eskişehir Osmangazi Üniversitesi,
İstatistik Bölümü ,
26040, Eskişehir, Türkiye
aaltin@ogu.edu.tr
0000-0002-3277-740X

Hilal Akdoğan
Eskişehir Osmangazi Üniversitesi,
Fen Bilimleri Enstitüsü,
26040, Eskişehir, Türkiye
akdogannhilall@gmail.com
0000-0002-2923-4252

Özet

Literatürde hem otokorelasyon problemini hem de normal olmayan dağılımlara ilişkin süreç kontrolünü ele alan çok az çalışma mevcuttur. Bu çalışmada her iki problemi aynı anda ele alan AR(1) sürecine uygun çarpık normal dağılımlı veriler için kalite kontrol grafikleri incelenmiştir. Ele alınan tüm kontrol kartları ARL değerlerine dayalı bir simülasyon çalışması ile karşılaştırılmıştır. Sonuç olarak, sağlam S_n tahmin edicisine dayalı kontrol grafiğinin kullanılmasının yanlış alarm olasılığını azalttığı tespit edilmiştir.

Anahtar sözcükler: *Çarpık normal dağılım, Kontrol kartı, Otokorelasyon, Sağlam tahmin ediciler.*

Abstract

Robust control charts for Ar(1) model with skew normal distribution

There are very few studies in the literature that address both the autocorrelation problem and the process control of non-normal distributions. In this study, we examined quality control charts for skewed normal distribution data in accordance with the AR(1) process, which handles both problems simultaneously. We compared the considered control charts over a simulation study that is based on ARL values. As a result, we found that the use of the control chart based on the robust S_n estimator reduces the probability of false alarms.

Keywords: *Skew normal distribution, Control chart, Autocorrelation, Robust estimator.*

1.Giriş

Genel olarak kalite kontrol çalışmaları istatistiksel süreç kontrolü, kabul örneklemesi ve deney tasarımı şeklinde üç alandan oluşmaktadır. İstatistiksel süreç kontrolünde bir sürecin belirli bir çıktısının değişkenliğini ölçmek ve kontrol altında tutulmasını sağlamak amaçlanmaktadır [1]. İstatistiksel süreç kontrolünde pareto ve neden-sonuç diyagramı, tabakalama analizi, beyin fırtınası gibi çeşitli yöntemler bulunmasına rağmen, tasarımlarının ve kullanımlarının görsel olarak anlaşılmalarındaki kolaylık nedeniyle kalite kontrol grafikleri yaygın kullanıma sahiptir [2,3]. Literatürdeki ilk kontrol grafiği 1931'de Walter A. Shewhart tarafından önerilmiştir ve Shewhart grafiği olarak adlandırılmıştır [4,5]. Kalite kontrol grafikleri, sürecin önceki gözlemlerinden hareketle oluşturulan sınırlara göre sürecin şu andaki durumunu tespit etmeye yarayan grafiklerdir [6].

Geleneksel kalite kontrol grafiklerinin temel varsayımı sürecin gözlemlerinin bağımsız, aynı ortalamalı normal dağılıma sahip olmasıdır. Fakat, çoğu uygulamalarda normallik varsayımı geçerli olmayabilir. Bu durumda, çarpık anakitleleri kontrol edebilmek için üç yaklaşım önerilmektedir. Bunlardan ilki, örnek ortalamasının yaklaşık olarak normal dağılması için örnek boyutunu arttırmaktır. Ancak bu işlem genellikle pahalıdır [7]. İkincisi, temelde olan dağılımın bilindiğini ve istenen yanlış alarm oranlarını veren kesin kontrol grafiklerini oluşturduğu varsayılmaktadır. Fakat, temel dağılım bilinmiyorsa bu yöntem kullanılamaz [7]. Üçüncüsü, asimetrik kontrol sınırlarını kullanan yaklaşımlardır.

Çarpık anakitleleri kontrol edebilmek için önerilen asimetrik kontrol yöntemlerden ilki Choobineh ve Ballard (1987) tarafından tanımlanan ve Choobineh ve Branting' in (1986) yarı varyans yaklaşımına dayanan Ağırlıklı Varyans (AV) yöntemidir. Bu yöntemde, çarpık dağılımlar için örneklem ortalamalarının ve değişim aralıklarının standart sapmasına dayanarak asimetrik kontrol sınırları elde etmişlerdir. Bai ve Choi (1995) de Ağırlıklı Standart Sapmalar (ASS) yöntemini kullanarak $\bar{X}$ ve R grafiklerini oluşturmak için bir yöntem önermişlerdir. Bu yöntem, çarpık dağılımlar için $\bar{X}$, birikimli toplam ve üstel ağırlıklı hareketli ortalama kontrol grafiklerini oluşturmak ve standart sapmayı iki parçaya ayırarak kontrol limitleri elde etmek için kullanılır. Chan ve Cui (2003) tarafından $\bar{X}$ ve R grafiğini oluşturmak için önerilen ve dağılım üzerinde herhangi bir varsayım olmaksızın süreç dağılımının çarpıklık derecesi dikkate alan diğer bir yöntem ise Düzeltilmiş Çarpıklık (DÇ) yöntemidir.

Kontrol grafiklerinin dayandığı diğer bir varsayım süreç verilerinin birbirinden bağımsız olmasıdır. Ancak özellikle bağımsızlık şartı uygulamada çok gerçekçi değildir. Özellikle günümüzde sanayi 4.0 çalışmaları ile birlikte kalite kontrol için yüksek hızda, otomatik ve sık alınan numuneler nedeniyle veriler arasında otokorelasyon söz konusudur. Ayrıca, kimya endüstrisinde olduğu gibi sürecin doğası gereği otokorelasyon ile karşılaşılabilinen süreçler mevcuttur. Otokorelasyonlu bir süreç için geleneksel kalite kontrol grafikleri kullanıldığında, tahmin edilen parametre değerleri hatalı olmakta, yanlış alarm oranları yükselmekte ve süreç kaymaları geç tespit edilebilmektedir. Otokorelasyonlu veriler için EWMA, EWMAST, DFTC gibi kalite kontrol grafikleri geliştirilmiştir. Ancak artık kontrol grafikleri en eski ve kullanım kolaylığı nedeniyle en çok tercih edilen süreç kontrol yöntemidir. CUSUM ve EWMA, geçmiş verilere daha az ağırlık verdikleri için küçük kaymaları tespit etmek için uygundur. Ancak, büyük değişimlere Shewhart'a dayalı artık kontrol kartları kadar hızlı tepki veremezler [8]. Otokorelasyonlu veriler, artık kontrol grafiği oluşturularak kolayca analiz edilir ve otokorelasyon ortadan kaldırılabilir.

İlk artık kontrol çizelgesi, yani özel neden çizelgesi (special cause chart-SCC), Alwan ve Roberts tarafından 1988'de tanıtılmıştır. SCC çizelgesi, literatürde X artık çizelgesi olarak da bilinmektedir. Artık çizelgelerinde, tahmin hatalarının, yani artıkların istatistiksel olarak ilişkisiz olduğu varsayılır. Otokorelasyonlu gözlemlere uygun bir zaman serisi modeli belirlenir ve artıklar için bir kontrol grafiği çizilir. Bu nedenle, iyi bilinen tüm kontrol şemaları artık kontrol şemasına dönüştürülebilir. Artık grafiğinin temel avantajı, sürecin durağan olup olmamasına bakılmaksızın herhangi bir otokorelasyonlu veriye uygulanabilmesidir [9].

Ancak süreç verileri hem otokorelasyonlu hem de normal dağılımlı olmadığında problemin karmaşıklığı artmaktadır. Literatürde bu konuda sınırlı sayıda çalışma bulunmaktadır. Son dönemde çarpık normal dağılım, normal dağılımı da kapsaması nedeniyle kalite kontrol çalışmalarında oldukça öne çıkmaktadır. Çarpık normal dağılıma sahip süreç ortalaması için iki yeni kontrol kartı ve süreç yetenek oranları geliştirilmiştir [10,11,12,13]. Çarpık normal dağılımın bazı özellikleri kullanılarak, uygulamalarda kullanım kolaylığı sağlanmıştır. Endüstriyel süreçler incelenirken çarpık normal ve iki değişkenli normal süreçler için bazı kontrol kartları geliştirilerek performansları analiz edilmiştir [14].

Ayrıca, otokorelasyon varlığında örnek verilerin ortalamalarının farklı özellikleri incelenerek, istatistiksel süreç kontrolü için öneriler sunulmuştur. Gözlemleri atlayarak ayrılmış küçük veri gruplarının ortalamaları dikkate alınarak otokorelasyon süreçlerinin izlenmesi önerilmiştir [15]. AR(1) süreci için elde edilen bu sonuçlar kullanılarak, atlama olmadan da çok daha büyük veri setleri için iyi performans elde edilebileceği gösterilmiştir [16]. AR(1) modeli için çeşitli artık kontrol kartlarının karşılaştırması yapılmıştır [9]. Otokorelasyonun grafik performansı üzerindeki etkisini azaltmak ya da ortadan kaldırmak için bir kontrol grafiği önerilmiştir [17]. AR(1) modelinde normal dağılıma uygun olmayan veriler için kontrol grafiklerinin güç fonksiyonu üzerindeki etkisi incelenmiştir [18]. Medyan mutlak sapma tahmin edicisine (MAD) dayalı kontrol grafiğinin performansı çarpık normal dağılım için mevcut kontrol grafiklerinin performanslarıyla karşılaştırılmıştır [19].

Bu çalışmanın amacı, çarpık normal dağılımdan gelen otokorelasyonlu veri setleri için kalite kontrol kartlarının performansını karşılaştırmaktır. Bu amaçla çarpık normal dağılım için kesin kontrol sınırları ve AV, ASS, DÇ yöntemlerine ek olarak, sağlam ölçek tahmincilerine dayanan MAD, S_n, Q_n, çeyrekler arası değişim katsayısı, Gini, ölçeğin Andrews M, iki ağırlıklı orta varyans tahmin edicileri ele alınmıştır. Otokorelasyonlu süreç olarak AR(1) modelinde artık kontrol grafikleri için kontrol limitleri belirlenmiştir. Bu kontrol grafiklerinin performansları ARL ölçüsüne dayalı olarak gerçekleştirilen bir simülasyon çalışmasıyla karşılaştırılmıştır.

Çalışmanın ikinci bölümünde çarpık normal dağılım, üçüncü bölümde AR(1) modeline dayalı artık kontrol kartı tanıtılmıştır. Dördüncü ve beşinci bölümde literatürde var olan ve yeni önerilen tahmin yöntemleri tanıtılmıştır. Monte Carlo benzetim çalışmasının ardından, son bölümde önerilere yer verilmiştir.

2. Çarpık normal dağılım

Y rastgele değişkeni çarpık normal dağılıma sahip olsun. $Y \sim SN(\lambda, \delta^2, \alpha)$ olarak gösterilir ve olasılık yoğunluğu Eşitlik 1 de verildiği gibidir.

$$f(y; \lambda, \delta, \alpha) = \frac{2}{\delta}\phi\left(\frac{y-\lambda}{\delta}\right)\Phi\left(\alpha\frac{y-\lambda}{\delta}\right), \quad y \in \mathbb{R}\ (\alpha, \lambda \in R, \delta \in \mathbb{R}^+), \tag{1}$$

Burada λ konum, δ^2ölçek ve α şekil parametresini, ϕ ve Φ ise sırasıyla, standart normal dağılımın olasılık yoğunluk fonksiyonu (pdf) ve birikimli dağılım fonksiyonunu (cdf) göstermektedir. $\lambda = 0$ ve $\delta = 1$ ise, $SN(\alpha)$ ile gösterilen standart çarpık normal dağılımı elde edilir. Çarpıklık parametresi λ dağılımın şeklini kontrol etmektedir. $\lambda = 0$ olduğunda dağılım simetrik, $\lambda > 0$ olduğunda pozitif ve $\lambda < 0$ olduğunda negatif çarpık olmaktadır [14]. Çarpık normal dağılım, normal dağılımın birçok istatistiksel özelliğini korumaktadır. Çarpık normal dağılımının avantajı, çarpıklık parametresi olan λ parametresi ile geniş dağılım sınıfını temsil etmesidir. Bu dağılım sınıfı, normal dağılımın ($\lambda = 0$) dışında, farklı düzeylerde çarpıklık ve basıklık içeren modelleri içerir. Normal durumlarda bile verilerde bazı bozulma olasılığı olmakta ve çarpık normal dağılım süreç verilerini daha güvenilir bir şekilde tanımlayabilmektedir.

3. AR kontrol kartı

Bir zaman serisi modeli ile otokorelasyonlu bir süreci tanımlama fikri ilk olarak 1988 yılında Alwan ve Roberts tarafından ortaya atılmıştır [15].

Zaman serisi analizinde genellikle değişkenin gözlemlenen değerinin geçmişteki bazı değerleri ile açıklanabileceği varsayılır. Ölçümler genellikle aynı zaman aralıkları ile elde edilir. Otoregresif bir zaman serisi aşağıdaki gibi tanımlanır. Genel olarak bir AR(p) modeli,

$$X_t = c + \varphi_1 X_{t-1} + \cdots + \varphi_p X_{t-v} + \varepsilon_t$$

biçiminde yazılır ve burada φ_i modelin parametreleri, c sabit terim ve ε_t ak gürültüdür. AR(1) süreci ise özel olarak,

$$X_t = c + \varphi X_{t-1} + \varepsilon_t$$

şeklinde tanımlanır. Burada, t örnekleme zamanıdır, X_t, t zamanındaki örnek değeri, c sabit terim, φ otoregresif katsayısı (-1< φ <1) ve ε_t $N(0, \sigma_\varepsilon^2)$ dağılımlı bağımsız rastgele hata terimidir

Süreç, $|\varphi| < 1$ ise durağan, $|\varphi| = 1$ ise X_t sonsuz varyansa sahip olduğundan durağan değildir. $|\varphi| < 1$ varsayıldığında, ortalama $E(X_t)$, durağanlık sebebiyle tüm t değerleri için aynıdır.

AR(1) sürecinin ortalaması ve varyansı sırasıyla aşağıda verilmiştir.

$$\mu = \frac{c}{1-\varphi}, \ Var(X_t) = \frac{\sigma_\varepsilon^2}{1-\varphi^2}$$

X_t otokorelasyonlu gözlemler olmak üzere, artıklar aşağıda biçimde yazılabilir.

$$e_t = X_t - \widehat{X_t}$$

Burada, $\widehat{X_t}$ t zamanında X_t'nin tahmin değeridir. Shewhart artık kontrol kartı için orta çizgi, 3σ alt ve üst kontrol sınırları aşağıdaki gibidir:

$$AKL = \bar{e} - 3\sigma_e$$

$$OÇ = \bar{e}$$

$$ÜKL = \bar{e} + 3\sigma_e$$

Artan bir doğrusal eğilime sahip X_t değeri, AR(1) süreci için şu şekilde temsil edilebilir.

Bir kayma veya sıçrama değeri ile X_t:

$$Z_t = X_t + \delta$$

şeklinde yazılabilir. Burada δ ortalamanın yukarı doğru kayma büyüklüğüdür (Karaoğlan ve Bayhan, 2011).

4. Tahmin yöntemleri

Bu bölümde AR(1) sürecine sahip kalite kontrol karakteristiklerinin dağılımının çarpık normal dağılım olması durumunda kullanılabilecek çeşitli tahmin yöntemleri ele alınmıştır. Bu yöntemler iki başlık altında toplanmıştır. İlki çarpık dağılımlar için kullanılan tahmin yöntemleri, ikincisi ise dağılımsal sapmalara karşı dirençli olan sağlam tahmin yöntemleridir.

$X_1, X_2, ..., X_n$ çarpık normal dağılımından alınan rassal bir örneklem olsun. Çarpık normal dağılım için kontrol grafiğinin kesin sınırları sırasıyla,

$$AKL = \mu_x - \sigma_x(\gamma_1 z_{1-\frac{\alpha}{2}-\lambda} + \gamma_2) \qquad ÜKL = \mu_x + \sigma_x(\gamma_1 z_{1-\frac{\alpha}{2}-\lambda} - \gamma_2)$$

şeklindedir ve burada $\rho = \frac{\lambda}{\sqrt{1+\lambda^2}}$, $\alpha_1 = \sqrt{\frac{2}{\pi}}$, $\gamma_1 = \frac{1}{\sqrt{1-\alpha_1{}^2\rho^2}}$, $\gamma_2 = \frac{\alpha_1\rho}{\sqrt{1-\alpha_1{}^2\rho^2}}$ olarak belirlenir.

4.1.Ağırlıklı varyans (AV) yöntemi

Ağırlıklı varyans yönteminde, çarpık bir dağılım ortalamaya göre iki parçaya ayrılır ve her parçanın aynı ortalamaya, farklı standart sapmalara sahip yeni simetrik dağılımlar olduğu kabul edilir [7,20].

Süreç parametreleri bilindiği durumda AV yöntemine dayalı kontrol sınırları,

$$ÜKL_{\bar{X}} = \mu_x + 3\frac{\sigma_x}{\sqrt{n}}\sqrt{2P_x}$$

$$AKL_{\bar{X}} = \mu_x - 3\frac{\sigma_x}{\sqrt{n}}\sqrt{2(1-P_x)}$$

şeklindedir. Burada, P_X kalite değişkeni X' in süreç ortalaması μ_X' e eşit veya küçük olma olasılığı P_X = P (X ≤ μ) dır.

4.2.Ağırlıklı standart sapma(ASS) yöntemi

ASS yönteminde çarpık bir dağılım ortalamaya göre iki parçaya ayrılır ve her bir parça yeni simetrik dağılımlar oluşturmak için kullanılır. Yeni simetrik dağılımların standart sapmalarının toplamı σ' ya eşittir ($\sigma = \sigma_Ü + \sigma_A$) [21]. Süreç parametreleri bilindiğinde ASS yöntemine dayalı kontrol grafiğinin sınırları,

$$ÜKL_{\bar{X}} = \mu + Z_{\frac{\alpha}{2}}\frac{2\sigma_Ü{}^W}{\sqrt{n}} = \mu + Z_{\frac{\alpha}{2}}\frac{\sigma}{\sqrt{n}}2P$$

$$AKL_{\bar{X}} = \mu - Z_{\frac{\alpha}{2}}\frac{2\sigma_A{}^W}{\sqrt{n}} = \mu - Z_{\frac{\alpha}{2}}\frac{\sigma}{\sqrt{n}}2(1-P)$$

şeklindedir [21].

4.3.Düzeltilmiş çarpıklık (DÇ) yöntemi

Düzeltilmiş çarpıklık yöntemi, dağılımın çarpıklık derecesine bağlı olarak kontrol grafiklerinin oluşturulmasına dayanmaktadır. Bu yöntemde temel dağılım üzerinde herhangi bir varsayım bulunmamaktadır. Klasik Shewhart grafiğinin dağılımın çarpıklığına göre düzeltilmesiyle elde edilen kontrol sınırlarını kullanmamızı sağlamaktadır.

X, ortalama 0, standart sapma 1 ve çarpıklık κ_3 olan bir standartlaştırılmış rastgele değişken olsun. Süreç parametreleri bilindiğinde, DÇ yöntemine dayalı kontrol grafiğinin sınırları,

$$ÜKL_{\bar{X}} = \mu_x + \frac{(3 + c_4{}^*)\sigma_x}{\sqrt{n}}$$

$$MÇ_{\bar{X}} = \mu_x$$

$$AKL_{\bar{X}} = \mu_x + \frac{(-3 + c_4{}^*)\sigma_x}{\sqrt{n}}$$

şeklindedir belirlenir [22]. Burada $\kappa_3(\bar{X})$, alt grup ortalaması ($\bar{X}$) nın çarpıklığı ve

$$c_4{}^* = \frac{\frac{4}{3}\kappa_3(\bar{X})}{1 + 0.2\kappa_3{}^2(\bar{X})}$$

şeklindedir.

5. Sağlam yöntemler

Sağlam yöntemler, birçok istatistiksel yöntemde var olan temel normallik varsayımı ihlal edildiğinde en sık kullanılan yöntemlerdir. Sağlam istatistiksel yöntemler normallik varsayımından sapmalar konusunda duyarsız, aykırı değerlerin varlığına karşı dirençli tahmin yöntemleridir. Bu nedenle geleneksel yöntemlere yararlı ve uygulanabilir alternatifler sunmaktadır.

Ölçek tahmin edicileri istatistiksel uygulamalarda çok önemlidir. Ölçeğin en yaygın tahmin edicisi örnek standart sapmasıdır. Ancak örnek standart sapması normal dağılımdan az miktardaki sapmalardan, çarpıklık ve basıklık değerlerinden etkilenen bir tahmin edicidir [23]. Örnek standart sapması normal dağılıma göre basıklığı daha az ya da biraz daha fazla olan dağılımlar için etkinliğini korurken, normal dağılımdan uzaklaştıkça etkinliğini kaybetmektedir [24].

Kalite kontrol çalışmalarında verilerin normal dağılma varsayımı vardır. Ancak bu durum çoğu zaman sağlanmaz. Bu nedenle kalite kontrol çalışmalarında kontrol limitlerinin belirlenmesinde örnek standart sapmasına alternatif tahmin edicilerin kullanılması önem kazanmıştır.

5.1.Medyan mutlak sapma (MAD)

MAD örnek standart sapmasının sağlam tahmin edicilerinden biridir ve normal olmayan dağılımlarda örnek standart sapmasına göre etkinliği daha yüksektir. MAD tahmin edicisinin kırılma noktası 0.5’ dir ve etki fonksiyonu sınırlıdır [25].

$X_1, X_2, ..., X_n$ m alt gruptan alınan *n* birimlik rassal örnek olsun. Adekeye ve Azubuike (2012) MAD’a dayalı $\bar{X}$ grafiğinin kontrol limitlerini aşağıdaki gibi elde etmişlerdir.

$$\text{Ü}KL_{\bar{X}} = \mu_x + \frac{3\sigma_x}{\text{MAD}}$$

$$MÇ_{\bar{X}} = \mu_x$$

$$AKL_{\bar{X}} = \mu_x + \frac{3\sigma_x}{\text{MAD}}$$

Burada MAD tahmin edicisi,

$$MAD = \frac{median(|x_i - median(x_i)|)}{0.6745}$$

şeklinde hesaplanmaktadır.

5.2. S_n Tahmin edicisi

MAD tahmin edicisinin avantajları yanında bazı dezavantajları da vardır. MAD, dağılım üzerinde simetrik bir görüş alır, önce merkezi bir değer olan medyan tahmin edilir ve daha sonra ondan pozitif ve negatif sapmalara eşit önem verir. Aslında MAD, medyan etrafında simetrik aralığı bulmaya karşılık gelir. MAD yöntemini çok çarpık dağılımlarda kullanmak verimsiz sonuçlar verebilir.

Rousseeuw ve Croux (1993) tarafından önerilen aynı şekilde başlangıç veya yardımcı ölçek tahminleri olarak kullanılabilecek ancak daha verimli ve simetrik dağılımlara meyilli olmayan MAD alternatifler olarak tahmin ediciler geliştirilmiştir. Bunlardan ilki S_n,

$$S_n = c_n 1.1926\, median_i\{median_j |x_i - x_j|\}, \quad i,j = 1,2,\ldots,n$$

ile ifade edilir [25].

5.3. Q_n *Tahmin edicisi*

MAD ve S_n' e alternatif olan bir diğer sağlam tahmin edici Q_n tahmin edicisidir. Q_n tahmin edicisi asimetrik dağılımlar için uygundur ve kırılma noktası 0.5' dir [25].

$$Q_n = d_n 2.2219\{|x_i - x_j|; i < j\}_{(k)}\ , \quad i,j = 1,2,\ldots,n$$

Burada, $k = \binom{h}{2} \approx \binom{n}{2}/4$ ve *h* değeri $\left(\frac{n}{2} + 1\right)$ dir.

5.4.Çeyrekler arası değişim katsayısı

Bir süreçte aykırı değerler olduğunda, süreç dağılımında meydana gelen değişiklikleri izlemek için çeyrekler arası değişim katsayısına dayalı tahmin edicinin kullanılması önerilmektedir [25].

Ölçeğin sağlam bir tahmin edicisi olarak tanımlanan IQR,

$$IQR = \frac{Q_3 - Q_1}{1.34898}$$

şeklinde tanımlanır [26]. IQR tahmin edicisinin kırılma noktası 0.25' dir ve etki fonksiyonu sınırlıdır.

5.5.Gini tahmin edicisi

Ölçeğin bir diğer dayanıklı tahmin edicisi olan Gini aşağıdaki gibi tanımlanmaktadır.

$$Gini = \frac{4}{n-1}\sum_{i=1}^{n}\left(\frac{2i-n-1}{2n}\right)X_{(i)}$$

Burada $X_{(i)}$ *i*' inci sıra istatistiğini göstermektedir. Gini tahmin edicisi aykırı değerlere karşı örnek standart sapması ve değişim aralığından daha sağlam ve etkin bir tahmin edicidir [25].

5.6.Ölçeğin Andrews wave M tahmin edicisi

Ölçeğin Andrews wave M tahmin edicisi aşağıdaki gibidir.

$$S_{wa} = \frac{(cMAD)n^{1/2}\left[\sum_{|u_i|<1} sin^2(\pi u_i)\right]^{0.5}}{\pi\left|\sum_{|u_i|<1} cos(\pi u_i)\right|}$$

Burada,

$$u_i = \frac{x_i - M}{cMAD}$$

olarak hesaplanmaktadır [25].

5.7.Biweight midvariance tahmin edicisi

$Q_i = \frac{X_i - M}{K\mathrm{xMAD}}$ ve $a_i = \begin{cases} 1, & |Q_i| < 1 \\ 1, & |Q_i| \geq 1 \end{cases}$ olmak üzere, Biweight midvariance tahmin edicisinin

karekökü,

$$\hat{\xi}_{bi} = \frac{\sqrt{n}\sqrt{\sum a_i (X_i - M)^2 (1 - Q_i^2)^4}}{\left|\sum a_i (1 - Q_i^2)(1 - 5Q_i^2)\right|}$$

şeklinde elde edilir. K değeri olarak 9'un kullanımı genel kabul görmektedir. Bu tahmin edicinin kırılma noktası yaklaşık olarak 0.5'tir [25,27].

6. Monte Carlo benzetim çalışması

Bu kısımda ele alınan kontrol kartlarının performansını karşılaştırmak için bir simülasyon çalışması gerçekleştirilmiştir. AR(1) modelindeki gözlemlerin farklı çarpıklık değerlerine sahip çarpık normal dağılımdan geldiği varsayılmıştır. Çarpık normal dağılımın parametreleri $\lambda = 1.592, \delta = 0.196$ ve $\alpha = 0.66, 1.2\ ve\ 2.17$ olarak seçilmiştir. Otokorelasyon değeri literatürde 0-0.30 olduğunda düşük, 0.30-0.70 orta şiddetli ve 0.70'den büyük olduğunda yüksek şiddetli olarak adlandırılmaktadır. Bu nedenle otokorelasyon için $\phi = 0.25, 0.50, 0.75\ ve\ 0.95$ değerleri seçilmiştir. Ortalama kayma miktarları da büyüklüklerine göre küçük, orta ve büyük kaymalar olarak 3'e ayrılmaktadır. Literatürde, küçük kaymaların $\delta \leq 1.5$'ten küçük; orta kaymaların $1.5 \leq \delta \leq 2.5$ arasında ve büyük kaymaların 2.5'ten daha büyük $\delta \geq 2.5$ olduğu belirtilmektedir. Bu nedenle bu çalışmada kayma miktarı için δ=0, 0.25, 0.50, 0.75, 1.0, 1.5, 2.0, 2.5 ve 3.0 değerleri göz önünde bulundurulmuştur.

Yukarıda belirtilen parametrelere göre veriler bir AR(1) modelinden üretilmiş ve süreç parametrelerinin bilindiği varsayılarak karşılık gelen artıklar hesaplanmıştır. Kontrol kartlarının performanslarının karşılaştırılmasında ARL ölçütünden yararlanılmıştır.

Bir kontrol grafiğinin en önemli performans ölçüsü ARL' dir. ARL, kontrol dışı bir sinyal olana kadar kontrol grafiğinde beklenen alt grup sayısıdır ve sürecin davranışını değerlendirmek için kullanılır. Eğer süreç kontrol altında ise ilk kontrol grafiği sinyalinden önce beklenen alt grup sayısı, kontrol içi ortalama çalışma uzunluğu olarak adlandırılır ve ARL_0 olarak gösterilir. Eğer süreç kontrol dışında ise ilk kontrol grafiği sinyalinden önce beklenen alt grup sayısına kontrol dışı ortalama çalışma uzunluğu denir ve ARL_1 ile gösterilir. Süreç kontrol altında iken ortalama çalışma uzunluğunun büyük, süreç kontrol dışındayken ortalama çalışma uzunluğunun küçük olması istenir.

Tüm kontrol kartlarının tasarımında $\mp 3\sigma$ ya karşılık gelecek şekilde $\alpha = 0.0027$ olarak seçilmiştir. 10000 tekrarlı bir Monte Carlo simülasyon çalışması sonucunda kontrol kartlarının ARL değerleri aşağıdaki gibi hesaplanmıştır.

$$ARL = \frac{\sum_{i=1}^{10000} RL_i}{10000}$$

Elde edilen sonuçlar Çizelge 1-3' te verilmiştir.

Çizelge 1. AR(1) süreci için artık kontrol kartlarının ARL değerleri

ϕ =0.25 α=0.66											
δ	**ÇN**	**AV**	**ASS**	**ÇD**	**Qn**	**Andrew**	**MAD**	**Gini**	**Biweight**	**Sn**	**IQR**
0	377	355	361	359	387	385	390	379	381	393	378
0,25	334	300	295	297	325	327	324	331	329	321	332
0,5	210	194	187	189	176	177	173	180	178	170	184
0,75	140	134	129	131	134	136	132	139	137	129	141
1	88	93	87	89	87	88	86	90	89	81	89
1,5	30	33	30	31	29	29	28	30	30	26	30
2	14	14	12	13	11,8	11,9	11,6	12,4	12	11	13
2,5	6,7	6,4	6	6	5,9	5,9	5,8	6	5,9	5,2	6
3	3,5	3,7	3	3,4	3,2	3,3	3,1	3,4	3,2	3	3,6
ϕ =0.50 α =0.66											
δ	**ÇN**	**AV**	**ASS**	**ÇD**	**Qn**	**Andrew**	**MAD**	**Gini**	**Biweight**	**Sn**	**IQR**
0	369	360	361	358	368	366	370	363	367	373	361
0,25	345	325	323	325	322	324	320	328	326	319	330
0,5	272	240	239	241	233	234	231	236	235	229	237
0,75	193	179	176	178	173	173	171	174	173	169	175
1	136	126	120	123	119	120	117	122	121	116	124
1,5	65	64	59	61	55	56	53	57	56,6	51	58
2	29	29	25	27	24	24,4	23	25	24,8	22	25
2,5	12	12,2	11,8	12	10,8	10,8	10,2	11,2	11	10	11,4
3	5	5,2	4,8	5	4,2	4,2	4,00	4,4	4,3	4	4,6
ϕ =0.75 α =0.66											
δ	**ÇN**	**AV**	**ASS**	**ÇD**	**Qn**	**Andrew**	**MAD**	**Gini**	**Biweight**	**Sn**	**IQR**
0	354	347	350	347	359	358	361	356	357	367	355
0,25	345	340	339	341	329	331	328	335	333	324	337
0,5	320	299	295	298	280	282	279	286	283	274	287
0,75	261	241	235	240	229	231	228	235	233	225	238
1	216	199	195	198	191	193	189	195	193	187	196
1,5	114	107	100	105	97	98	96	100	99	95	100
2	50,6	55	50	54	43	43	41	44	43,6	40,4	45
2,5	14,8	14	13,2	13,8	12,6	12,8	12,3	13,2	13	12	13,6
3	3	3	3	3	2	2	2,00	2	2	2	2,8
ϕ =0.95 α=0.66											
δ	**ÇN**	**AV**	**ASS**	**ÇD**	**Qn**	**Andrew**	**MAD**	**Gini**	**Biweight**	**Sn**	**IQR**
0	393	372	375	371	453	451	457	448	450	460	441
0,25	354	358	357	359	339	340	338	345	341	334	347
0,5	345	330	330	332	312	313	310	317	314	306	321
0,75	274	271	269	270	253	254	251	258	256	247	261
1	142	164	164	165	123	125	122	127	126	120	129
1,5	14	14	14	14,2	11,2	11,6	11	12,4	11,8	10	13
2	1,47	1,47	1,47	1,57	1,37	1,37	1,37	1,47	1,47	1,37	1,47
2,5	1,00	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1
3	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1

Çizelge 2. AR(1) süreci için artık kontrol kartlarının ARL değerleri

ϕ =0.25 α=1.2											
δ	**ÇN**	**AV**	**ASS**	**ÇD**	**Qn**	**Andrew**	**MAD**	**Gini**	**Biweight**	**Sn**	**IQR**
0	371	318	317	315	391	389	394	381	385	399	378
0,25	348	240	239	241	288	290	287	295	292	285	297
0,5	251	187	187	188	194	196	193	199	197	186	201
0,75	165	149	144	147	98	99	97	104	101	96	106
1	107	104	102	105	71	73	69	78	74	67	79
1,5	44	42	42	43	31	33	29	37	35	28	38
2	20	19	19	20	15,6	16	15	17,2	17	15	18
2,5	10	9	8,7	9	7	7,4	6,8	8,3	8	6,6	9
3	4,5	4,3	4,2	4,3	3,6	3,8	3,6	4	4	3,4	4,2
ϕ =0.50 α=1.2											
δ	**ÇN**	**AV**	**ASS**	**ÇD**	**Qn**	**Andrew**	**MAD**	**Gini**	**Biweight**	**Sn**	**IQR**
0	370	318	322	319	382	379	384	373	376	391	371
0,25	360	269	268	270	323	325	321	328	326	317	330
0,5	299	251	248	250	245	246	243	248	246	231	251
0,75	228	188	186	187	185	188	182	190	189	174	192
1	167	162	159	161	103	105	100	109	107	97	111
1,5	84	79	76	78	66	67	63	70	69	60	72
2	40	39	38	39	29	30	28	33	32	25	35
2,5	18,00	19	18	19	15	15,6	14,4	16,7	16	14	17
3	7,6	7	6,8	7	7	7	7,00	7,4	7,2	6,7	7,6
ϕ =0.75 α=1.2											
δ	**ÇN**	**AV**	**ASS**	**ÇD**	**Qn**	**Andrew**	**MAD**	**Gini**	**Biweight**	**Sn**	**IQR**
0	370	322	323	321	370	368	371	365	367	375	363
0,25	368	286	285	287	325	327	321	331	329	319	333
0,5	344	239	236	238	218	219	217	223	220	215	225
0,75	293	192	190	191	179	181	178	185	183	177	187
1	241	151	149	150	143	146	141	147	145	139	148
1,5	140	88	87	89	84	85	83	87	86	81	89
2	67	43	42	43	38	39	37	40	39	36	41
2,5	23	14	14	14	13,4	14	13	15	15	12,6	15,2
3	6	4,2	4,1	4,1	4	4,1	4	4,2	4,1	4	4,2
ϕ =0.95 α=1.2											
δ	**ÇN**	**AV**	**ASS**	**ÇD**	**Qn**	**Andrew**	**MAD**	**Gini**	**Biweight**	**Sn**	**IQR**
0	372	317	321	318	390	389	393	386	387	397	384
0,25	369	301	300	302	362	362	361	366	364	356	369
0,5	361	287	286	287	321	322	320	326	325	317	327
0,75	299	283	280	282	234	235	232	238	237	230	239
1	195	172	169	170	139	140	138	143	142	136	145
1,5	20	14	13	13	11,2	11,3	11	11,6	11,5	11	11,7
2	1,5	1,5	1,35	1,4	1,5	1,5	1,15	1,5	1,5	1,5	1,6
2,5	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1
3	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1

Çizelge 3. AR(1) süreci için artık kontrol kartlarının ARL değerleri

ϕ =0.25 α =2.17											
δ	ÇN	AV	ASS	ÇD	Qn	Andrew	MAD	Gini	Biweight	Sn	IQR
0	369	282	283	281	373	371	374	367	370	376	364
0,25	366	205	204	206	279	280	278	282	281	275	187
0,5	305	132	130	132	170	171	169	173	171	167	176
0,75	197	96	92	95	99	100	98	103	101	96	106
1	131	64	61	65	63	64	62	67	65	61	71
1,5	59	32	30	31	28	28	27	30	29	26	32
2	29	15,4	15	15	14	15	14	16	15	14	17
2,5	15	7,6	7	7	7	7	7	8	7,7	7	8
3	7	4,3	4	4	3,6	3,8	3	4,3	4	3	4,7
ϕ =0.50 α=2.17											
δ	ÇN	AV	ASS	ÇD	Qn	Andrew	MAD	Gini	Biweight	Sn	IQR
0	370	270	273	271	371	368	372	363	366	374	359
0,25	360	235	233	235	312	314	310	320	317	308	324
0,5	349	196	196	197	165	167	164	170	167	161	172
0,75	265	124	121	123	111	113	109	117	114	108	119
1	198	96	94	95	92	93	89	95	94	87	97
1,5	105	50	49	50	47	48	46	49	48	44	49
2	55	33	32	33	28	29	27	30	29	26	31
2,5	31	16	15	16	12,6	13	12	14	13	12	16
3	14	10	9	9	5,6	6	5	6,6	6	5	8
ϕ =0.75 α=2.17											
δ	ÇN	AV	ASS	ÇD	Qn	Andrew	MAD	Gini	Biweight	Sn	IQR
0	390	289	289	287	429	426	431	419	423	433	409
0,25	370	244	243	244	327	329	325	337	332	321	341
0,5	365	209	209	210	240	242	238	247	245	235	250
0,75	337	188	188	189	170	171	169	177	174	166	186
1	275	167	164	168	120	123	118	134	126	115	145
1,5	189	122	119	121	89	92	87	97	94	84	100
2	111	41	40	42	38	40	37	42	41	35	45
2,5	43	17	16	16,6	13	14	13	16	15	12	17
3	12	6	5	6	4	4,6	4,00	6	5	3	7
ϕ =0.95 α=2.17											
δ	ÇN	AV	ASS	ÇD	Qn	Andrew	MAD	Gini	Biweight	Sn	IQR
0	381	305	307	304	413	410	413	403	408	415	390
0,25	372	279	278	280	342	347	341	351	349	336	359
0,5	355	257	255	256	265	270	263	276	272	267	280
0,75	343	198	198	199	177	181	176	188	184	174	197
1	265	111	107	110	120	126	117	129	126	113	132
1,5	47	19	18	19	10	12	10	15	12	9	18
2	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1
2,5	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1
3	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1

Çizelge 1' de, α = 0.66 ve ve otokorelasyon değeri $\phi = 0.25$ için ortalamadan kayma miktarı $\delta = 0$ olduğunda bir başka ifade ile süreçte herhangi bir kayma olmadığında AV, ASS ve ÇD yöntemleri için elde edilen ARL değerleri, $ARL_0 = 370$ değerinden küçük olarak tespit edilmiştir. Süreçte herhangi bir kayma olmadığında ARL değerinin büyük, kayma miktarı arttığında ise ARL değerinin düşük olması istenir. Bu nedenle süreç kontrol altında iken bu yöntemlerin yanlış alarm verme sayısı yüksektir. Herhangi bir kayma olmadığında ARL değeri en yüksek olan yöntem S_n tahmin edicisine dayalı kalite kontrol grafiğidir. Bunu izleyen kontrol grafikleri sırasıyla, MAD, Q_n, Andrew, Biweight, Gini, IQR ve ÇN' dir.

$\delta = 0.25$ olduğunda en küçük ARL değerine sahip kontrol kartının en etkin kart olduğu söylenir. Bu nedenle kayma miktarı 0.25 olduğunda en küçük ARL değerine sahip olan kontrol grafikleri ASS, ÇD, AV, Q_n şeklinde sıralanmaktadır. Kayma miktarı $\delta = 0.5$ olduğunda sağlam tahmin edicilere dayalı kontrol grafiklerinin ARL değerlerinin en düşük olduğu tespit edilmiştir. Kayma miktarı arttıkça tüm kontrol grafiklerinin ARL değerleri azalmakta, ancak en küçük ARL değerine sahip olan kontrol grafiği S_n tahmin edicisine dayalı kalite kontrol grafiğidir.

Otokorelasyon değeri $\phi = 0.5$ olduğunda süreç ortalamasında herhangi bir kayma söz konusu değilken tüm kontrol grafiklerinin ARL değerlerinin azaldığı görülmektedir. Benzer şekilde en yüksek ARL değerine sahip kontrol grafiği S_n tahmin edicisine dayalı kalite kontrol grafiğidir.

Otokorelasyon değeri $\phi = 0.75$ olduğunda da benzer sonuçlar elde edilmiştir.

Tablo 2'de, dağılımın çarpıklık parametresi α = 2.17 olduğunda kayma miktarı $\delta = 0$ iken benzer olarak AV, ASS ve ÇD kontrol grafiklerinin ARL değerleri 370 değerinden daha küçüktür. Dağılımın çarpıklık değeri arttığında kontrol grafiklerinin performansı benzer şekilde devam etmektedir.

S_n tahmin edicisine dayalı kalite kontrol grafiğinin dağılımın tüm çarpıklık parametre değerlerinde ve otokorelasyon düzeylerinde istenilen daha büyük bir kontrol içi ARL_0 değerine ve daha küçük bir kontrol dışı ARL_1 değerine sahip olduğu belirlenmiştir.

7. Öneriler

Bu çalışmada, birinci dereceden otokorelasyonlu veriler için çarpık normal dağılıma dayalı artık kontrol grafikleri için çeşitli yöntemler ele alınmıştır. Kalite kontrol çalışmalarında kullanım kolaylığı nedeniyle çokça tercih edilen kontrol kartlarının temel iki varsayımının sağlanmaması durumunda ele alınan bu kontrol grafiklerinin performansı ARL değerleri üzerinden karşılaştırılmıştır. Verilerin normal dağılıma sahip olmama durumu için alternatif olarak çarpık normal dağılım, otokorelasyonlu olması durumu için ise AR(1) süreci göz önünde bulundurulmuştur. Süreç ortalamasında herhangi bir kayma olmaması durumunda en yüksek ARL değerine sahip yöntem S_n tahmin edicisine dayalı yöntemdir. Geleneksel kullanıma sahip olan AV, ASS ve ÇD yöntemlerinin kontrol içi ARL değerleri ele alınan tüm durumlarda arzu edilen 370 değerinden oldukça küçüktür. Bu nedenle yanlış alarm değerleri yüksektir. Kontrol dışı durum için istenilen en küçük ARL değerini veren kontrol grafiği kayma miktarı 0.50 den büyük olduğunda benzer şekilde S_n tahmin edicisine dayalı kontrol grafiğidir. Bu nedenle hem otokorelasyonlu hem de çarpık dağılıma sahip süreçler için S_n tahmin edicisine dayalı kontrol grafiğinin kullanılması yanlış alarm olasılığının azalmasına neden olacaktır.

Kaynaklar

[1] Işığıçok, E. (2012). Toplam kalite yönetimi bakış açısıyla istatistiksel kalite kontrol, Bursa: Ezgi Yayınevi.
[2] Montgomery, D.C., 2009, Introduction to Statistical Process Control, John Wiley & Sons, Inc., p.13.

[3] Birgören, B., 2015, İstatistiksel kalite kontrolü. Ankara: Nobel Akademik Yayıncılık.

[4] Shewhart, W.A., 1931, Economic Control of Quality of Manufactured Product, American Society for Quality Control, p.145.

[5] Qui, P., 2013, Introduction to Statistical Process Control, Texts in Statistical Science, p.74.

[6] Öztürk, A., 2009, Kalite yönetimi ve planlaması. Bursa:Ekin Yayınları.

[7] Bai, D.S., Choi, I.S., 1995, $\overline{\mathrm{X}}$ and R control charts for skewed populations, Journal of Quality Technology, 27,2, 120-131.

[8] Karaoğlan, A. D., 2010, CONTROL CHARTS FOR AUTOCORRELATED PROCESSES: A REVIEW Engineering Sciences, 5(2), 243-25.

[9] Karaoğlan, A., Bayhan, G., 2011, Performance Comparison of Residual Control Charts for Trend Stationary First Order Autoregressive Processes, Gazi University Journal of Science, 24(2), 329-339.

[10] Tsai, Tzong-Ru., 2007, Skew normal distribution and the design of control charts for averages, International Journal of Reliability, Quality and Safety Engineering, 14,1, 49- 63.

[11] Tsai, Tzong-Ru., Chiang, Jyun-You., 2008, The design of acceptance control chart for non-normal data, Journal of The Chinese Institute of Industrial Engineers, 25:2, 127-135.

[12] Li, Chung-I., Su, Nan-Cheng., Su, Pei-Fang., Shyr, Yu., 2014, The design $\bar{X}$ of and R control charts for skew normal distributed data, Communications in Statistics - Theory and Methods, 43:23, 4908-4924.

[13] Li, C., Mukherjee, A., Su, Q., Xie, M., 2019, Some monitoring procedures related to asymmetry parameter of azzalini's skew-normal model. Revstat - Statistical Journal, 17,1, 1-24.

[14] Figueiredo, F., Gomes, M.I., 2013, The skew-normal distribution in SPC, Revstat – Statistical Journal, 11,1, 83-104.

[15] Alwan, L.C., Roberts, H.V., 1988, Time-series modeling for statistical process control, Journal of Business & Economic Statistics, 6(1), 87–95.

[16] Thomas R. Willemain, George C. Runger, 1996, Designing Control Charts Using an Empirical Reference Distribution, Journal of Quality Technology, 28:1, 31-38.

[17] Ma, X., Zhang, L., Hu, J., Palazoglu, A., 2018, A model-free shewhart individuals control chart for autocorrelated data, 10th IFAC International Symposium on Advanced Control of Chemical Processes, Chine, July 25-27.

[18] Mishra, U., Singh, J.R., 2020, Effect of first order auto-regressive model on the power function of average control charts under non-normal population, Sri Lankan Journal of Applied Statistics, 21(2), 26–37.

[19] Gorgin, V., Gildeh, B.S., 2020, MAD control chart for autoregressive models with skew-normal distribution, Stochastics and Quality Control, 35,1, 17-23.

[20] Choobineh, F., Ballard, J.L., 1987, Control-limits of QC charts for skewed distributions using weighted-variance, IEEE Transactions on Reliability, R-36,4, 473-477.

[21] Chang, Y.S., Bai, D.S., 2001, Control charts for positively-skewed populations with weighted standard deviation, Quality and Reliability Engineering International, 17, 397-406.

[22] Chan, L.K., Cui, H.J., 2003, Skewness correction $\overline{\mathrm{X}}$ and R charts for skewed distributions, Naval Research Logistics, 50, 555 – 573.

[23] Tukey, J.W., 1960, A Survey of Sampling from Contaminated Distributions. In: Oklin, I., Ed., Contributions to Probability and Statistics, Stanford University Press, Redwood City, CA.

[24] Hoaglin DC, Mosteller F, Tukey JW, eds, 2000, Understanding Robust and Exploratory Data Analysis. New York: Wiley-Interscience.

[25] Wilcox, R., 2012, Introduction to robust estimation and hypothesis testing. 3rd ed.

[26] Riaz, M., 2008, A dispersion control chart, Communications in Statistics - Simulation and Computation, 37:6, 1239-1261.

[27] Goldberg, K. M., Iglewicz, B., 1992, Bivariate Extensions of the Boxplot. *Technometrics*, *34*(3), 307–320.

[28] Rousseeuw, P.J., Croux, C., 1993, Alternatives to median absolute deviation, Journal of the American Statistical Association, 88:424, 1273 - 1283.