

Yüksek mertebe sonlu eleman modeliyle fonksiyonel derecelendirilmiş kirişlerin serbest titreşim ve statik analizi

Free vibration and static analysis of functionally graded beams with the higher-order finite element model

Muhittin TURAN*, Mahmut İler HACIOĞLU

Bayburt Üniversitesi, Mühendislik Fakültesi, İnşaat Mühendisliği Bölümü, 69010, Bayburt

• Geliş tarihi / Received: 06.10.2022

• Kabul tarihi / Accepted: 08.04.2023

Öz

Bu çalışmada, fonksiyonel derecelendirilmiş (FD) kirişlerin yüksek mertebeden kayma deformasyonlu kiriş teorisine dayalı sonlu eleman yöntemiyle serbest titreşim ve statik analizleri incelenmiştir. Sonlu elemanlar yöntemi için 5 düğümlü ve 16 serbestlikli bir sonlu eleman önerilmiştir. FD kirişin malzeme özelliği kiriş kalınlığı boyunca belli bir kuvvet kuralı fonksiyona bağlı olarak değişmektedir. Lagrange eşitliği ile denge denklemleri türetilmiştir. Farklı kuvvet fonksiyonu üst indisine (p), farklı sınır şartlarına ve farklı narinliklere (L/h) göre FD kirişin boyutsuz doğal frekansları, boyutsuz yer değiştirmeleri, boyutsuz normal ve kayma gerilmeleri elde edilmiştir. Çalışmadan elde edilen sonuçlar literatür ile karşılaştırılmış ve önerilen sonlu elemanın FD kirişler için oldukça uyumlu sonuçlar verdiği görülmüştür. Önerilen yüksek mertebeden kayma deformasyonlu kiriş elemanının bu tip problemlerin çözümünde kullanılabileceği sonucuna varılmıştır. Kuvvet fonksiyonu üst indis değerinin artmasıyla birlikte boyutsuz doğal frekanslar azalmakta, boyutsuz maksimum yer değiştirmeler ise artmaktadır.

Anahtar kelimeler: Fonksiyonel derecelendirilmiş kiriş, Serbest titreşim analizi, Statik analiz, Sonlu eleman yöntemi, Yüksek mertebeden kayma deformasyonlu kiriş teorisi

Abstract

In this study, free vibration and static analysis of functionally graded (FG) beams with the finite element method based on high-order shear deformation beam theory are investigated. A finite element with 5 nodes and 16 degrees of freedom is proposed for the finite element method. The material property of the FG beam changes depending on a specific power-law function along the beam thickness. Equilibrium equations are derived from the Lagrange's equation. Dimensionless natural frequencies, dimensionless displacements, and dimensionless normal and shear stresses of FG beam were obtained according to different power-law indexes (p), various boundary conditions, and various slenderness (L/h). The results obtained from the study were compared with the literature and it was seen that the proposed finite element gave very good results for FG beams. It is concluded that the proposed high-order shear deformation beam element can be used to solve such problems. With the power-law index value increase, the dimensionless natural frequencies decrease while the dimensionless maximum displacements increase.

Keywords: Functionally graded beam, Free vibration analysis, Static analysis, Finite element method, Higher-order shear deformation beam theory

* Muhittin TURAN; mturan@bayburt.edu.tr

1. Giriş

1. Introduction

Teknolojinin sürekli gelişme içerisinde olması malzeme biliminin de sürekli olarak gelişim ve değişim içerisinde olmasına neden olmaktadır. Malzeme biliminde meydana gelen gelişmeler uzay alanı gibi yüksek teknolojiye gereksinim duyan alanların ihtiyacını olan malzemelerin keşfedilmesine sebep olmaktadır. Uzay araçlarının atmosferden geçişi sırasında maruz kaldıkları mekanik ve ısı etkilere karşı koyabilmek için ilk olarak tabakalı kompozit malzemeler kullanılmıştır. Tabakalı kompozit malzemelerin malzeme özellikleri arasında keskin bir geçiş olduğu için gerilmeye bağlı yapısında çatlaklar meydana gelmektedir. Gerilme çatlaklarının oluşumu ortadan kaldırmak için malzeme özelliği belirli bir fonksiyona bağlı olarak değişen fonksiyonel derecelendirilmiş malzemeler (FDM) geliştirilmiştir. FDM'ler Dünyada ilk kez Japonya da uzay sanayisinde roketlerin dış yüzeylerinde hem mekanik hem de ısı etkilere karşı koymak için tasarlanmıştır. Uzay sanayisi için geliştirilen bu malzemeler gün geçtikçe endüstri, tıp, savunma, enerji ve inşaat gibi birçok alanda yaygın olarak kullanılmaya başlanmıştır. Yapı elemanlarının maruz kaldığı ısı ve mekanik etkilerin olumsuzlukları en aza indirmek için günümüzde kirişler, plaklar ve kabuklar FDM'ler ile tasarlanmaya başlamıştır. Fonksiyonel derecelendirilmiş (FD) kirişler normal betonarme kirişlere göre daha yüksek mukavemetli, hafif ve yüksek ısı dirençlere sahip oldukları için araştırmacılar tarafından oldukça ilgi görmüştür.

Literatüre göre, araştırmacılar FD kirişlerin burkulma, dinamik ve statik analizlerinde farklı kiriş teorilerine göre birçok sayısal ve analitik yöntemler kullanmışlardır. Bunları sıralayacak olursak; [Aboudi vd. \(1999\)](#), fonksiyonel derecelendirilmiş malzemeler için Kartezyen koordinat tabanlı yüksek mertebeli teori geliştirmişlerdir. [Chakraborty vd. \(2003\)](#), FD kirişlerin termoelastik davranışlarını incelemek için birinci mertebeden kayma deformasyonlu kiriş teorisine göre yeni bir sonlu eleman modeli geliştirmişlerdir. [Aydogdu ve Taskin \(2007\)](#), basit mesnetli FD kirişlerin serbest titreşim davranışlarını Navier tipi çözüm yöntemiyle incelemişlerdir. [Oyekoya vd. \(2009\)](#), sonlu elemanlar yöntemini kullanarak FD kompozit yapıların serbest titreşim ve burkulma analizleri için FD plaka kullanarak Midlin ve Reissner tipi eleman geliştirmişlerdir. [Şimşek \(2010\)](#), FD kirişlerin serbest titreşim analizleri için birbirinden farklı yüksek mertebeden kayma deformasyonlu kiriş teorilerini ve birinci mertebeden kayma deformasyonlu kiriş teorisini kullanmıştır. [Alshorbagy vd. \(2011\)](#), Euler-Bernoulli kiriş teorisini kullanarak sonlu elemanlar yöntemiyle FD kirişlerin serbest titreşim analizlerini yapmışlardır. [Thai ve Vo \(2012\)](#), FD kirişlerin eğilme ve serbest titreşim davranışlarını incelemek için çeşitli yüksek mertebeden kayma deformasyonlu kiriş teorileri geliştirmişlerdir. [Nguyen vd. \(2013\)](#), eksenel olarak yüklenmiş FD kirişlerin statik ve serbest titreşim analizlerini birinci mertebeden kayma deformasyonlu kiriş teorisi ile yapmışlardır. [Vo vd. \(2014\)](#), yüksek mertebeden kayma deformasyonlu kiriş teorisini kullanarak FD sandviç kirişlerin burkulma ve serbest titreşim davranışlarını tespit edebilmek için yeni bir sonlu eleman önermişlerdir. [Jin ve Wang \(2015\)](#), Euler-Bernoulli kiriş teorisine göre FD kirişlerin serbest titreşim analizlerini klasik kiriş teorisi ve diferansiyel kareleme yöntemini kullanarak yapmışlardır. [Filippi vd. \(2015\)](#), FD kirişlerin statik analizini bir boyutlu Carrera birleştirilmiş formülasyonu ile yapmışlardır. [Vo vd. \(2015\)](#), FD sandviç kirişlerin serbest titreşim ve burkulma analizleri için yüksek mertebeden kayma deformasyonlu kiriş teorisine göre kalınlık yönündeki gerilme ve kesme deformasyon etkilerini de dikkate alarak sonlu eleman modeli önermişlerdir. [Yarasca vd. \(2016\)](#), FD kirişlerin statik analizlerini yüksek mertebeden kayma deformasyonlu 3D hibrit kiriş teorisi kullanarak yedi serbestlik derecesine sahip sonlu eleman ile yapmışlardır. [Kahya ve Turan \(2017\)](#), FD kirişlerin burkulma ve serbest titreşim davranışlarını incelemek için birinci mertebeden kayma deformasyonlu kiriş teorisini dikkate alarak 5 düğüm noktasına ve 10 serbestlik derecesine sahip yeni bir kayma deformasyonlu eleman modeli sunmuşlardır. [Akbaş \(2017\)](#), yayılı yük altında ortotropik FD kirişlerin serbest titreşim ve statik analizlerini düzlem parçalı sürekli ortam modelini kullanarak sonlu elemanlar yöntemiyle yapmıştır. [Turan ve Kahya \(2018\)](#), Navier çözüm yöntemini kullanarak FD kirişlerin serbest titreşimlerini birinci mertebeden kayma deformasyonlu kiriş teorisine göre incelemişlerdir. [Turan \(2018\)](#), tabakalı kirişlerin serbest titreşim, burkulma ve statik analizleri için kayma deformasyon etkilerini hesaba katan bir sonlu eleman modeli geliştirmiştir. Tabakalı kompozit kirişler ve FD sandviç kirişler için ayrı ayrı analizler yaparak modelin doğruluğunu ispatlamıştır. [Kahya ve Turan \(2018\)](#), tabakalı kompozit ve sandviç kirişlerin titreşim ve burkulma davranışları için N tabakalı, $9N+7$ serbestlik derecesine sahip sonlu eleman modeli geliştirmişlerdir. [Li vd. \(2019\)](#), FD sandviç kirişlerin statik analizi için yüksek mertebeden kayma deformasyonlu kiriş teorisine göre bir sonlu eleman modeli geliştirdiler. [Reddy vd. \(2020\)](#), FD kirişlerin doğrusal olmayan analizleri için çift ağı sonlu alan yöntemini kullanarak sonlu eleman modeli geliştirdiler. [Avcar vd. \(2021\)](#), çeşitli konfigürasyonlara sahip sigmoid FD sandviç kirişlerin doğal frekanslarını yüksek mertebeden kayma deformasyonlu kiriş teorisine göre hesaplamışlardır. [Turan ve](#)

Kahya (2021), FD sandviç kirişlerin serbest titreşim ve burkulma analizlerini birinci mertebeden kayma deformasyonlu kiriş teorisini kullanarak farklı sınır şartları altında Navier tipi çözüm yöntemiyle yapmışlardır. Akbaş (2021), fonksiyonel olarak derecelendirilmiş malzemeden yapılmış bir konsol kirişin harmonik bir yük altında zorlanmış titreşim tepkilerini araştırmıştır. Koutoati vd. (2021), malzeme özelliği doğrusal olmayan FD kirişlerin serbest titreşim ve statik analizleri için Timoshenko kiriş teorisine göre ve Reddy'nin yüksek mertebeden kayma deformasyonlu kiriş teorisine göre sonlu eleman modeli önermişlerdir. Kirişin yer değiştirme alanlarını zikzak teorisine tanımlamışlardır. Yıldırım (2022), iki doğrultulu FD kirişlerin serbest titreşim analizlerinde kullanılan sonlu elemanlar yöntemine alternatif bir yöntem olarak yapay sinir ağı yaklaşımını kullanmıştır. Belarbi vd. (2022), FD sandviç kirişlerin eğilme analizi için yüksek mertebeden kayma deformasyonlu kiriş teorisi önererek sonlu elemanlar yöntemiyle çözüm yapmışlardır. Sonlu eleman modelleri iki düğüm noktasına sahiptir. Turan (2022), birinci mertebeden kayma deformasyonlu kiriş teorisini kullanarak farklı sınır şartlarına sahip iki doğrultulu FD kirişlerin eğilme analizlerini Navier tipi çözüm yöntemiyle yapmıştır.

Literatür incelendiğinde, yazarların bildiği kadarıyla FD kirişlerin serbest titreşim ve statik analizlerinin önerilen 5 düğüm noktalı 16 serbestlik dereceli sonlu eleman ile incelenmediği kanaatine varılmıştır. Bu sebeple yapılan çalışma kapsamında, etkili ve doğru sonuç veren aynı zamanda yüksek mertebeden eleman olduğundan dolayı kayma gerilmelerini doğru tahmin edebilen sonlu eleman ile FD kirişlerin serbest titreşim ve statik analizleri gerçekleştirilmiştir. Önerilen sonlu elemanın avantajlarını belirtecek olursak; elemanımız enine kayma deformasyonlarının etkisini hesaba katabilmektedir ve bu sebeple FD kirişin kalınlığı doğrultusunda kayma gerilme değerlerini doğru tahmin edebilmektedir. Bunun yanında sonlu elemanımız, kirişin malzeme özelliği değişse bile oldukça hızlı ve doğru sonuçlar elde etmemize imkân vermektedir. FD kirişin malzeme özelliği kiriş yüksekliği boyunca değişmekte ve hareket denklemleri Lagrange prensibiyle elde edilmektedir. FD kirişin statik ve serbest titreşim analizleri önerilen sonlu eleman modeliyle farklı sınır şartları, farklı kuvvet fonksiyonu üst indisi (p) ve farklı narinlik değerleri (L/h) için yapılmıştır. Analizlerden elde edilen FD kirişe ait boyutsuz doğal frekans, boyutsuz yer değiştirme, boyutsuz normal ve kayma gerilme değerleri elde edilmiştir.

2. Materyal ve metot

2. Material and method

2.1. Malzeme özellikleri

2.1. Material properties

FD kiriş olarak Şekil 1'de görülen homojen olmayan L uzunluğunda, $b \times h$ boyutlarında dikdörtgen kesitli izotropik bir kiriş kullanılmıştır. FD kiriş, alt yüzeyinde ve üst yüzeyinde sırasıyla metal ve seramik olmak üzere iki malzemeden oluşmaktadır. Ayrıca FD kirişin malzeme davranışı Hooke yasasına uymakla birlikte, malzeme özelliği kiriş kalınlığı boyunca (1)'deki gibi sürekli olarak değişmektedir.

$$P(z) = (P_s - P_m)V_s(z) + P_m \quad (1)$$

(1)'deki P_s ve P_m seramik ve metalin malzeme özelliklerini göstermektedir. Ele alınan FD kirişin seramik faza ait hacimsel seramik oran fonksiyonu V_s (2)'deki gibidir.

$$V_s(z) = \left(\frac{2z - h}{2h} \right)^p, \quad -\frac{h}{2} \leq z \leq \frac{h}{2} \quad (2)$$

Burada p , FD kirişin kalınlık boyunca malzeme dağılımını değiştiren negatif olmayan bir sayıdır. Şekil 2'de kirişin kalınlığı boyunca elastisite modülünün (E) ve öz kütlelerinin (ρ), p değerine bağlı değişimi verilmiştir.

2.2. Teori ve sonlu elemanlar metodu

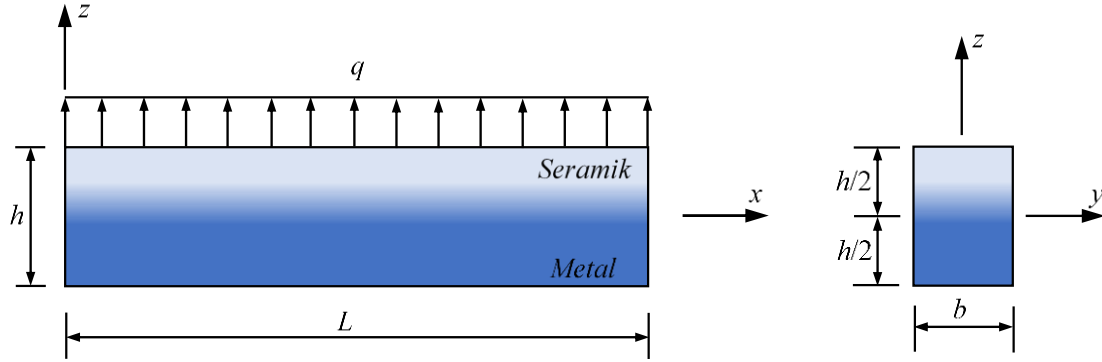
2.2. Theory and finite element method

Şekil 3'te sonlu elemanlar çözümünde kullanılan 5 düğüm noktasına ve 16 serbestlik derecesine sahip olan sonlu eleman modeli görülmektedir. L_e elemanın uzunluğunu ifade etmektedir. Çalışma kapsamında yüksek

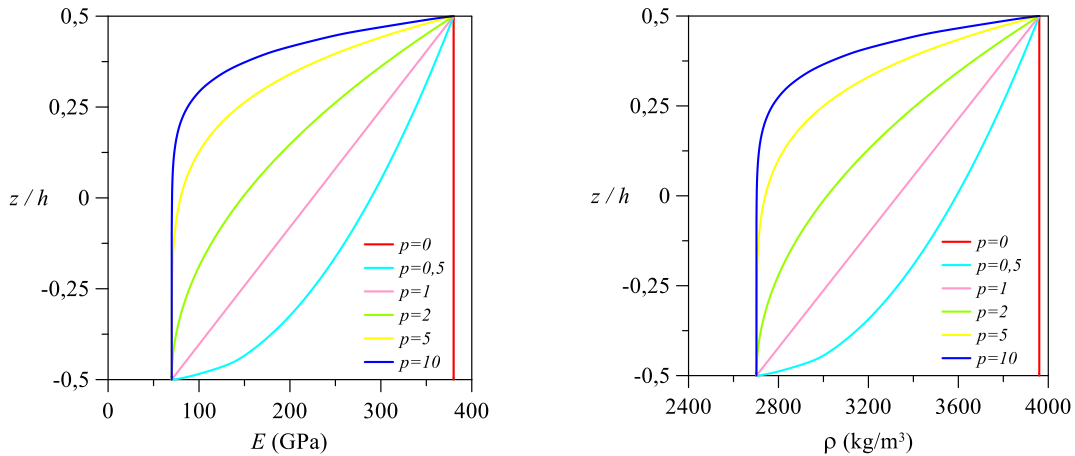
mertebeden kayma deformasyonlu kiriş teorisi kullanılarak sonlu elemanlar yöntemine göre önerilen sonlu eleman modeline ait yer değiştirme vektörü (3)'te verilmiştir.

$$\mathbf{u} = (u_i \ w_j \ \phi_i \ \beta_{1i} \ \beta_{2i}), \quad i=1, 2, 3; \quad j=1, 2, 3, 4 \quad (3)$$

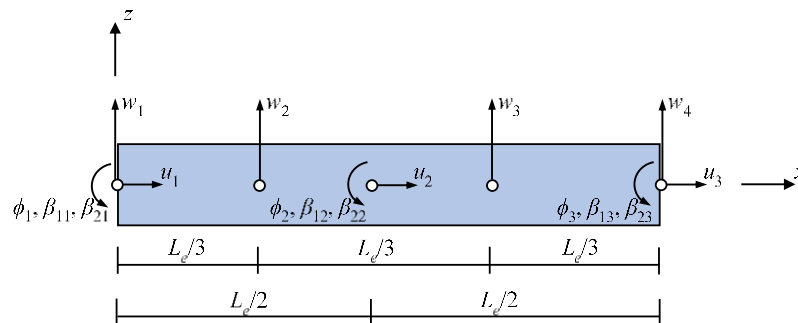
Burada sırasıyla u yatay yer değiştirmeleri, w düşey yer değiştirmeleri, ϕ ve β ise dönme terimlerini ifade etmektedir.



Şekil 1. Fonksiyonel derecelendirilmiş kirişin koordinat eksenleri ve geometrisi
Figure 1. Coordinate axes and geometry of the functionally graded beam



Şekil 2. p değerine bağlı olarak E ve ρ 'nun değişimi
Figure 2. Variation of E and ρ depending on the value of k



Şekil 3. 5 düğüm noktasına sahip 16 serbestlik dereceli sonlu kiriş elemanı
Figure 3. Finite beam element with 16 degrees of freedom with 5 nodes

Yüksek mertebeden kayma deformasyonlu kiriş teorisine göre FD kirişin herhangi bir noktasındaki U ve W yer değiştirme ifadeleri (4)'te verilmiştir.

$$U(x, z, t) = u(x, t) - z\phi(x, t) - z^2\beta_1(x, t) - z^3\beta_2(x, t),$$

$$W(x, z, t) = w(x, t) \tag{4}$$

Burada t zamanı ifade etmektedir. FD kirişin şekil değiştirme ve yer değiştirme bağıntıları sırasıyla (5)'te verilmiştir.

$$\varepsilon_{xx} = u_{,x} - z\phi_{,x} - z^2\beta_{1,x} - z^3\beta_{2,x}, \quad \gamma_{xz} = w_{,x} - \phi - 2z\beta_1 - 3z^2\beta_2 \tag{5}$$

Burada, $(\bullet)_{,x}$ ifadesi x 'e göre türevi ifade etmektedir. Kirişin normal gerilmesi σ_{xx} ve kayma gerilmesi τ_{xz} sırasıyla (6)'da verilmiştir.

$$\sigma_{xx} = E(z)\varepsilon_{xx}, \quad \tau_{xz} = G(z)\gamma_{xz} \tag{6}$$

Burada, E, G sırasıyla elastisite modülü ve kayma modülüdür. E ve G kiriş kalınlığı boyunca değişmektedir. Problemin çözümü için u, w, ϕ, β_1 ve β_2 ifadeleri (7)'de tanımlanmıştır.

$$u(x, t) = \sum_{i=1}^3 \varphi_i(x)u_i(t), \quad w(x, t) = \sum_{j=1}^4 \psi_j(x)w_j(t), \quad \phi(x, t) = \sum_{i=1}^3 \varphi_i(x)\phi_i(t),$$

$$\beta_1(x, t) = \sum_{i=1}^3 \varphi_i(x)\beta_{1i}(t), \quad \beta_2(x, t) = \sum_{i=1}^3 \varphi_i(x)\beta_{2i}(t) \tag{7}$$

(7)'deki $u_i(t), w_i(t), \phi_i(t), \beta_{1i}(t)$ ve $\beta_{2i}(t)$ genelleştirilmiş yer değiştirmeleri, $\varphi_i(x)$ ve $\psi_i(x)$ ise şekil fonksiyonlarını ifade etmektedir. FD kirişin hareket denklemleri (8)'deki Lagrange eşitliği kullanılarak elde edilmektedir.

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial \Pi}{\partial \dot{q}_i} \right) - \frac{\partial \Pi}{\partial q_i} = 0 \tag{8}$$

Denklem (8)'deki \dot{q}_i ve q_i bağımsız değişkenleri ifade etmekte olup, Lagrangian ifadesi $\Pi = T - (U + V)$ şeklinde yazılmaktadır. FD kirişin şekil değiştirme enerjisi (9)'daki gibi elde edilmektedir.

$$U = \frac{1}{2} \int_0^{L_e} \int_A (\sigma_{xx}\varepsilon_{xx} + \tau_{xz}\gamma_{xz}) dA dx = \frac{1}{2} \int_0^{L_e} \left\{ X_0 (u_{,x})^2 - 2X_1 u_{,x} \phi_{,x} + X_2 \left((\phi_{,x})^2 - 2u_{,x} \beta_{1,x} \right) + 2X_3 (\phi_{,x} \beta_{1,x} - u_{,x} \beta_{2,x}) \right.$$

$$+ X_4 (\beta_{1,x}^2 + \phi_{,x} \beta_{2,x}) + 2X_5 \beta_{1,x} \beta_{2,x} + X_6 \beta_{2,x}^2 + Y_0 \left((\phi)^2 - 2\phi w_{,x} + (w_{,x})^2 \right)$$

$$\left. + 4Y_1 \beta_1 (\phi - w_{,x}) + 2Y_2 (2\beta_1^2 + 3\phi \beta_2 - 3\beta_2 w_{,x}) + 12Y_3 \beta_1 \beta_2 + 9Y_4 \beta_2^2 \right\} dx \tag{9}$$

Burada X_k ve Y_l malzeme sabitlerini kapsayan katsayılardır. (10)'da bu katsayılar açık halde ifade edilmiştir.

$$X_k = \int_A E(z) z^k dA, \quad Y_l = \int_A G(z) z^l dA, \quad (k = 0, 1, \dots, 6; \quad l = 0, 1, \dots, 4) \tag{10}$$

FD kirişin kinetik enerjisi ise (11)'deki gibi elde edilmiştir.

$$T = \frac{1}{2} \int_0^{L_e} \int_A \rho(z) (\dot{U}^2 + \dot{W}^2) dA dx = \frac{1}{2} \int_0^{L_e} \left\{ I_0 (\dot{u})^2 - 2I_1 \dot{u} \dot{\phi} + I_2 \left((\dot{\phi})^2 - 2\dot{u} \dot{\beta}_1 \right) + 2I_3 (\dot{\phi} \dot{\beta}_1 - \dot{u} \dot{\beta}_2) \right.$$

$$\left. + I_4 (\dot{\beta}_1^2 + 2\dot{\phi} \dot{\beta}_2) + 2I_5 \dot{\beta}_1 \dot{\beta}_2 + I_6 \dot{\beta}_2^2 + I_0 (\dot{w})^2 \right\} dx \tag{11}$$

(11)'deki I_k katsayısı malzeme sabitlerine bağlı olan bir katsayıdır. Açık olarak (12)'de ifade edilmiştir.

$$I_k = \int_A \rho(z) z^k dA \quad (k = 0, 1, \dots, 6) \quad (12)$$

FD kirişe uygulanan dış yayılı yükün q yapmış olduğu iş V , (13)'teki gibidir.

$$V = \int_0^{L_e} q w dx \quad (13)$$

Denklem (9), (11) ve (13)'te tanımlanan sırasıyla yer değiştirme, şekil değiştirme ve iş-enerji denklemleri Langrange eşitliğinde yerine yazılarak tek tabakalı yüksek mertebeden FD kiriş elemanına ait hareket denklemi (14)'te elde edilmiştir.

$$\mathbf{m}\ddot{\mathbf{u}} + \mathbf{k}\mathbf{u} = \mathbf{f} \quad (14)$$

Burada \mathbf{f} yük vektörünü, \mathbf{m} , \mathbf{k} sırasıyla eleman kütle ve rijitlik matrislerini ifade etmekte olup aşağıdaki şekilde yazılabilirler. Buradaki matrislerin de açık ifadeleri Ekler bölümünde verilmiştir.

$$\mathbf{m} = \begin{bmatrix} \mathbf{m}_{11} & \mathbf{0} & \mathbf{m}_{13} & \mathbf{m}_{14} & \mathbf{m}_{15} \\ & \mathbf{m}_{22} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ & & \mathbf{m}_{33} & \mathbf{m}_{34} & \mathbf{m}_{35} \\ & & & \mathbf{m}_{44} & \mathbf{m}_{45} \\ \text{sim.} & & & & \mathbf{m}_{55} \end{bmatrix}, \quad \mathbf{k} = \begin{bmatrix} \mathbf{k}_{11} & \mathbf{0} & \mathbf{k}_{13} & \mathbf{k}_{14} & \mathbf{k}_{15} \\ & \mathbf{k}_{22} & \mathbf{k}_{23} & \mathbf{k}_{24} & \mathbf{k}_{25} \\ & & \mathbf{k}_{33} & \mathbf{k}_{34} & \mathbf{k}_{35} \\ & & & \mathbf{k}_{44} & \mathbf{k}_{45} \\ \text{sim.} & & & & \mathbf{k}_{55} \end{bmatrix}, \quad \mathbf{f} = \begin{Bmatrix} \mathbf{0} \\ \mathbf{f}_2 \\ \mathbf{0} \\ \mathbf{0} \\ \mathbf{0} \end{Bmatrix} \quad (15)$$

Boyu L olan FD kirişinin tamamının hareket denklemi sonlu elemanlar yöntemi kullanılarak (16)'teki gibi elde edilmiştir.

$$\mathbf{M}\ddot{\mathbf{X}} + \mathbf{K}\mathbf{X} = \mathbf{F} \quad (16)$$

Burada \mathbf{M} sistem kütle matrisini, \mathbf{K} sistem rijitlik matrisini, \mathbf{F} ise sistem yük vektörünü ifade etmektedir. (16)'da \mathbf{M} kütle matrisi sıfıra eşitlenir ve $\mathbf{X}=\mathbf{U}$ varsayımına göre çözüm yapılırsa kirişin statik analizinde kullanılacak olan denge denklemi (17)'de ki gibi elde edilmektedir.

$$\mathbf{K}\mathbf{U} = \mathbf{F} \quad (17)$$

FD kirişin serbest titreşim analizi için gerekli olan denge denklemini elde etmek için (16) denklemindeki $\mathbf{F}=0$ olarak kabul edilir ve çözüm için $\mathbf{X}=\mathbf{U}e^{i\omega t}$ şeklinde düşünülürse (18) denklemi elde edilir.

$$(\mathbf{K} - \omega^2\mathbf{M})\mathbf{U} = \mathbf{0} \quad (18)$$

Burada ω FD kirişin doğal frekansını göstermektedir. (18) denklemi bir özdeğer problemidir. Bu denklemin kat sayılar matrisini sıfır yapan ω değerleri FD kirişin doğal frekanslarıdır.

3. Bulgular ve tartışma

3. Results and discussion

Bu bölümde ele alınan FD kirişin önerilen sonlu eleman ile sırasıyla serbest titreşim ve statik analizlerine ilişkin bulgular yer almaktadır. Çalışma kapsamında kullanılan malzemeler Tablo 1' de verilmiştir. FD kirişin serbest titreşim ve statik analizlerinde farklı malzemeler, farklı narinlik oranları (L/h) farklı kuvvet fonksiyonu üst indisi (p) ve farklı sınır şartları dikkate alınarak önerilen sonlu elemanın doğruluğu araştırılmıştır. Farklı sınır şartları olarak basit mesnetli (B-B), iki ucu ankastre (A-A) ve konsol (A-S) kirişler kullanılmıştır. Çalışmada elde edilen doğal frekanslar, yer değiştirmeler ve gerilmeler sırasıyla (19)'da ki gibi boyutsuz olarak verilmiştir.

$$\bar{\omega} = \frac{\omega L^2}{h} \sqrt{\frac{\rho_m}{E_m}}, \quad \bar{w} = \frac{100E_m b h^3}{qL^4} w(x, 0), \quad \bar{\sigma}_{xx} = \frac{bh}{qL} \sigma_{xx}(x, z), \quad \bar{\tau}_{xz} = \frac{bh}{qL} \tau_{xz}(x, z) \quad (19)$$

Tablo1. Malzeme özellikleri
Table 1. Material properties

Metal	E_m (GPa)	ρ_m (kg/m ³)	ν	Seramik	E_s (GPa)	ρ_s (kg/m ³)	ν
Alüminyum (Al)	70	2702	0,30	Alüminyum oksit (Al ₂ O ₃)	380	3960	0,30
Çelik (SUS304)	201,04	8166	0,28	Alüminyum nitrit (Al ₂ N ₃)	310	3260	0,30

Tablo 2. Farklı sınır şartlarına sahip Al/Al₂O₃ FD kirişlerinin $L/h=5$ ve $p=1$ için boyutsuz doğal frekanslarının eleman sayısı ile değişimi

Table 2. Variation of dimensionless fundamental frequencies of Al/Al₂O₃ FG beams with different boundary conditions for $L/h=5$ and $p=1$ with number of element

Sınır Şartları	Eleman Sayısı							
	4	8	10	12	14	16	18	20
A-A	8,0190	8,0055	8,0043	8,0038	8,0035	8,0034	8,0033	8,0032
B-B	4,0504	4,0497	4,0494	4,0494	4,0494	4,0494	4,0494	4,0494
A-S	1,4742	1,4741	1,4741	1,4739	1,4741	1,4741	1,4742	1,4741

Tablo 3. Farklı sınır şartlarına sahip Al/Al₂O₃ FD kirişlerinin boyutsuz doğal frekansları

Table 3. Dimensionless fundamental frequencies of Al/Al₂O₃ FG beams with different boundary condition

Kiriş	Teori	$p = 0$	$p = 0,5$	$p = 1$	$p = 2$	$p = 5$	$p = 10$	$p \rightarrow \infty$
<i>L/h=5</i>								
A-A	Bu çalışma	10,11770	8,79850	8,0035	7,2187	6,51896	6,18612	5,25710
	Turan (2018) ⁽¹⁾	10,08647	8,75479	7,98414	7,27155	6,71481	6,37413	5,24085
	Şimşek (2010) ⁽²⁾	10,0705	8,74674	7,95034	7,17674	6,49349	6,16515	5,23254
	Vo vd. (2015a) ⁽³⁾	10,1851	8,8641	8,0770	7,3039	6,5960	6,2475	-
B-B	Bu çalışma	5,22230	4,4722	4,0494	3,6827	3,4531	3,3292	2,71342
	Turan (2018) ⁽¹⁾	5,22193	4,46926	4,04967	3,69360	3,48818	3,36434	2,71328
	Şimşek (2010) ⁽²⁾	5,15274	4,41108	3,99042	3,62643	3,40120	3,28160	2,67732
	Vo vd. (2015a) ⁽³⁾	5,1618	4,4240	4,0079	3,6442	3,4133	3,2903	-
A-S	Bu çalışma	1,9080	1,6295	1,4741	1,3430	1,2692	1,2275	0,99142
	Turan (2018) ⁽¹⁾	1,90772	1,62865	1,47394	1,34469	1,27515	1,26363	0,99124
	Şimşek (2010) ⁽²⁾	1,89523	1,61817	1,46328	1,33254	1,25916	1,21834	0,98474
	Vo vd. (2015a) ⁽³⁾	1,9055	1,6313	1,4804	1,3524	1,2763	1,2308	-
<i>L/h=20</i>								
A-A	Bu Çalışma	12,2361	10,4386	9,4420	8,6067	8,1533	7,8945	6,3578
	Turan (2018) ⁽¹⁾	12,2350	10,4357	9,4416	8,6144	8,1798	7,9213	6,3572
	Şimşek (2010) ⁽²⁾	12,2238	10,4287	9,4316	8,5975	8,1446	7,8858	-
	Vo vd. (2015a) ⁽³⁾	12,2660	10,4948	9,5277	8,7142	8,2445	7,9543	-
B-B	Bu Çalışma	5,4659	4,6559	4,2096	3,8406	3,6529	3,5431	2,8400
	Turan (2018) ⁽¹⁾	5,4659	4,6557	4,2097	3,8414	3,6555	3,5458	2,9996
	Şimşek (2010) ⁽²⁾	5,4603	4,6516	4,2050	3,8361	3,6485	3,5390	-
	Vo vd. (2015a) ⁽³⁾	5,4610	4,6659	4,2347	3,8765	3,6824	3,5590	-
A-S	Bu Çalışma	1,9504	1,6612	1,5017	1,3704	1,3041	1,2652	1,0135
	Turan (2018) ⁽¹⁾	1,9505	1,6611	1,5018	1,3704	1,3045	1,2656	1,0705
	Şimşek (2010) ⁽²⁾	1,9495	1,6605	1,5011	1,3696	1,3033	1,2645	-
	Vo vd. (2015a) ⁽³⁾	1,9527	1,6681	1,5139	1,3862	1,3176	1,2736	-

⁽¹⁾ Birinci mertebeden kayma deformasyonlu kiriş teorisi ile sonlu eleman çözümü

⁽²⁾ Parabolik kayma deformasyonu teorisi ile analitik çözüm

⁽³⁾ Üç boyutlu kiriş teorisi ile sonlu eleman metodu

3.1. Serbest titreşim analizi

3.1. Free vibration analysis

Serbest titreşim analizlerini gerçekleştirmek için öncelikle problemin çözümünde kullanılan sonlu eleman yönteminde yeterli sonlu eleman sayısını tespit etmek için yakınsama çalışması yapılmalıdır. Farklı sınır şartları altında $L/h=5$ ve $p=1$ değerlerine göre FD kirişin maksimum boyutsuz doğal frekanslarının eleman sayısına bağlı değişimleri Tablo 2’de verilmiştir. Tablodan görüleceği üzere eleman sayısı arttıkça elde edilen değerler yakınsamaktadır. Yapılan sayısal hesaplarda istenilen doğrulukta sonuç elde etmek için 14 elemanın yeterli olduğu görülmektedir. Bu sebeple, bu bölümde sayısal sonuçlar 14 elemana göre türetilmiştir.

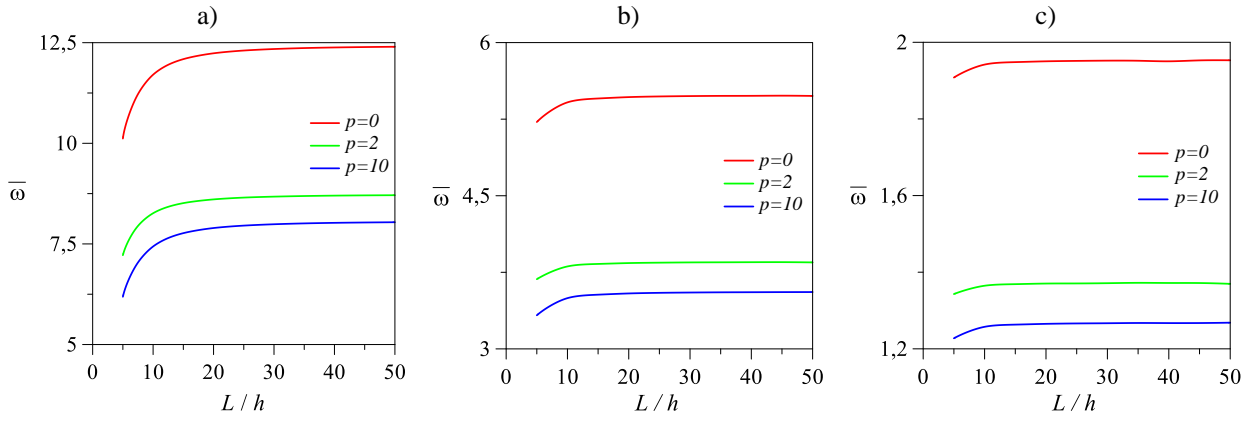
Önerilen sonlu elemanın doğruluğu ortaya koymak için metal malzeme olarak alüminyum (Al) ve seramik malzeme olarak alüminyum oksit (Al_2O_3) kullanılmış ve elde edilen sonuçların literatür ile karşılaştırılması Tablo 3’de verilmiştir. Farklı sınır şartları, farklı L/h oranı ve farklı p değerlerine göre bu çalışmanın sonuçları, birinci mertebeden kayma deformasyonlu kiriş teorisine göre sonlu elemanlar yöntemine göre çözüm yapan Turan (2018), parabolik kayma deformasyonlu kiriş teorisine göre analitik çözüm yapan Şimşek (2010) ve üç boyutlu kiriş teorisini kullanarak sonlu elemanlar yöntemine göre çözüm yapan Vo vd. (2015a) ile kıyaslanmıştır. Sonuçların oldukça uyumlu oldukları görülmektedir. Literatüre katkı sağlamak için ayrıca Al/Al_2N_3 , $SUS304/Al_2O_3$ ve $SUS304/Al_2N_3$ malzemelerine göre de analizler yapılarak Tablo 4’te sonuçlar verilmiştir. Tablolardan görüleceği üzere p değerinin artmasıyla birlikte FD kirişin hacmindeki metal malzeme özelliği artacağından kirişin rijitliği azalmaktadır. Bu sebeple kirişin boyutsuz doğal frekans değerleri de azalmaktadır. Farklı sınır şartları arasındaki kıyaslamaya bakıldığında en küçük boyutsuz doğal frekans değerleri konsol (A-S) kirişte en büyük boyutsuz doğal frekans değerleri ise iki ucu ankastre (A-A) kirişte meydana gelmektedir. Narinlik değerinin (L/h) artmasıyla boyutsuz doğal frekans değerleri artmaktadır.

Şekil 4’te çeşitli sınır şartlarına sahip FD kirişin farklı kuvvet fonksiyonu üst indisi (p) ve farklı narinlik (L/h) değerlerine göre boyutsuz doğal frekanslarının değişimleri verilmiştir. Grafiklere bakıldığında narinlik oranı arttıkça boyutsuz doğal frekans değerinin belli bir L/h değerine kadar arttığı daha sonrasında sabit kaldığı görülmektedir. p değerinin sıfır olduğu yani FD kirişin tamamının seramik fazdan oluştuğu durumlarda en büyük boyutsuz doğal frekans değerleri elde edilmiştir. Seramik fazın hacimsel oranının git gide azalmasıyla yani p değerinin artmasıyla boyutsuz doğal frekansların azaldığı bu grafiklerden de görülmektedir.

Tablo 4. L/h ve p ’ye göre farklı tip malzemeli FD kirişin boyutsuz doğal frekansları

Table 4. Dimensionless fundamental frequencies of FG beam with different types of material according to L/h and p

Malzeme	Kiriş	$p = 0$	$p = 0,5$	$p = 1$	$p = 2$	$p = 5$	$p = 10$	$p \rightarrow \infty$
$L/h=5$								
Al/Al_2N_3	A-A	10,07191	8,64779	7,85474	7,10040	6,42205	6,09196	5,25710
	B-B	5,19856	4,40258	3,98730	3,63934	3,40095	3,26069	2,71342
	A-S	1,89942	1,60449	1,45236	1,32832	1,24976	1,20075	0,99141
$SUS304/Al_2O_3$	A-A	10,37895	8,09887	7,26201	6,57611	5,98458	5,71200	5,27074
	B-B	5,35710	4,15544	3,73144	3,40244	3,12591	2,98194	2,71535
	A-S	1,95726	1,51654	1,36223	1,24386	1,14496	1,09202	0,99178
$SUS304/Al_2N_3$	A-A	10,33194	7,87131	7,05690	6,40917	5,86336	5,62168	5,27074
	B-B	5,33277	4,04655	3,63300	3,31531	3,04933	2,92093	2,71535
	A-S	1,94847	1,47737	1,32675	1,21194	1,11589	1,06870	0,99178
$L/h = 20$								
Al/Al_2N_3	A-A	12,1807	10,2802	9,3046	8,5147	8,0283	7,7187	6,3578
	B-B	5,4411	4,5859	4,1497	3,8013	3,5966	3,4619	2,8400
	A-S	1,9416	1,6361	1,4805	1,3563	1,2840	1,2361	1,0135
$SUS304/Al_2O_3$	A-A	12,5520	9,7218	8,7333	7,9779	7,3480	7,0082	6,3593
	B-B	5,6070	4,3401	3,8995	3,5647	3,2865	3,1343	2,8401
	A-S	2,0007	1,5485	1,3914	1,2721	1,1173	1,1187	1,0135
$SUS304/Al_2N_3$	A-A	12,4952	9,4718	8,5069	7,7728	7,1594	6,8561	6,3593
	B-B	5,5815	4,2293	3,7991	3,4729	3,2007	3,0647	2,8402
	A-S	1,9917	1,5091	1,3557	1,2394	1,1423	1,0937	1,0135



Şekil 4. a) İki ucu ankastre, b) basit mesnetli, c) konsol Al/Al₂O₃ FD kirişlerin L/h 'ye göre boyutsuz doğal frekanslarının değişimi

Figure 4. Variation of dimensionless fundamental frequencies of a) clamped two ends, b) simply supported, c) cantilever Al/Al₂O₃ FG beams with respect to L/h

3.2. Statik analiz

3.2. Static analysis

Bu bölümde, düzgün q yayılı yükü yüklenmiş farklı sınır şartları, farklı L/h ve farklı p değerleri için FD kirişin statik analizi yüksek mertebeden kayma deformasyonlu kiriş teorisine göre sonlu elemanlar yöntemiyle yapılmıştır. Analizler sonucunda kirişin boyutsuz yer değiştirme değerleri, boyutsuz normal ve kayma gerilme değerleri elde edilmiştir. Çalışmada, yayılı yük $q=10000\text{N/m}$, $L=2\text{m}$, $b=0,1\text{m}$ olarak alınmış ve $L/h=5$ ve 20 için analizler yapılmıştır.

Statik analizde de ilk olarak yakınsama çalışması yapılarak sonlu eleman yöntemi için yeterli sonlu eleman sayısı belirlenmektedir. Yakınsama çalışması için $L/h=5$ ve $p=1$ değerlerine göre farklı sınır şartları için boyutsuz maksimum yer değiştirme değerlerinin eleman sayısı ile değişimi Tablo 5'te verilmiştir. Tablo incelendiğinde eleman sayısı arttıkça maksimum boyutsuz yer değiştirmeler belli bir değere kadar artmış ve bu değerden itibaren sabit kalarak yakınsamıştır. Tabloya göre 14 sonlu eleman sayısının yeterli olduğu görülmektedir. Statik analizlerde bütün sayısal sonuçlar 14 eleman sayısına göre elde edilmiştir.

Önerilen sonlu elemanın doğruluğu araştırmak için metal malzeme olarak Al ve seramik malzeme olarak da Al₂O₃ kullanılmıştır. Bu çalışmadan elde edilen sayısal sonuçlar, birinci mertebeden kayma deformasyonlu kiriş teorisine göre sonlu elemanlar yöntemi ve analitik yöntem ile çözüm yapan Turan (2018), birinci ve üçüncü mertebeden kayma deformasyonlu kiriş teorilerine göre analitik çözüm yapan Vo vd. (2015b) ile karşılaştırmalı olarak Tablo 6'da verilmiştir. Tablo incelendiğinde sonuçların oldukça uyumlu olduğu görülmüştür. Literatüre katkı sağlamak amacıyla Al/Al₂N₃, SUS304/Al₂O₃ ve SUS304/Al₂N₃ malzemeleri kullanılarak elde edilen boyutsuz yer değiştirmeler Tablo 7'de verilmiştir. Tabloya göre farklı malzemelerden oluşturulan FG kirişlerin statik davranışlarının oldukça değiştiği görülmektedir. Elastisite modülü küçük malzemeler kullanıldığında kirişin rijitliği düştüğü için daha büyük yer değiştirmeler meydana gelmektedir. Ayrıca Tablo 6 ve 7'ye bakıldığında tüm sınır şartlarında geçerli olmak üzere en küçük yer değiştirme $p=0$ (kirişin tamamı seramik) durumunda, en büyük yer değiştirme ise $p \rightarrow \infty$ (kirişin tamamı metal) durumunda meydana gelmektedir.

Al/Al₂O₃ malzemesine göre basit mesnetli FD kirişin boyutsuz normal ve kayma gerilme değerleri Tablo 8'de Turan (2018) ve Vo vd. (2015b) ile karşılaştırmalı olarak verilmiştir. Tablo incelendiğinde elde edilen sonuçların literatürle oldukça uyumlu olduğu görülmüştür. Ayrıca tablodan görüldüğü üzere farklı L/h değerleri için elde edilen boyutsuz normal gerilmeler, kirişin malzeme özelliğinin seramikten metale doğru artmasıyla (yani p 'nin artırılmasıyla) artmaktadır. Buna ilave olarak L/h değerinin artmasıyla normal gerilmelerin arttığı da söylenebilmektedir. Boyutsuz kayma gerilmeleri ise malzeme özelliğinin seramikten metale doğru geçmesiyle yani p değerinin artmasıyla beraber belli bir kurala göre değişim göstermemektedir. Ancak L/h değerinin artmasıyla az da olsa artmaktadır. Tablo 9'da FD kirişte Al/Al₂N₃, SUS304/Al₂O₃ ve SUS304/Al₂N₃ malzemeleri kullanılarak elde edilen boyutsuz normal ve kayma gerilmeleri verilmiştir.

Şekil 5’te sırasıyla iki ucu ankastre, basit mesnetli ve konsol Al/Al₂O₃ malzemeli FD kirişlerin farklı kuvvet fonksiyonu üst indisine (p) göre elde edilen boyutsuz maksimum yer değiştirmelerin L/h ’ye göre değişim grafikleri verilmiştir. Grafikler incelendiğinde p değeri arttıkça boyutsuz maksimum yer değiştirme değerlerinin arttığı, ancak L/h oranının artmasıyla boyutsuz yer değiştirme değerlerinin azaldığı ve belli bir değerden sonra sabit seyrettiği görülmüştür.

Tablo 5. Farklı sınır şartlarına sahip Al/Al₂O₃ FD kirişlerin $L/h=5$ ve $p=1$ için maksimum boyutsuz yer değiştirmelerinin eleman sayısı ile değişimi

Table 5. Variation of maximum dimensionless deflections of Al/Al₂O₃ FG beams with different boundary conditions for $L/h=5$ and $p=1$ with the number of elements

Sınır Şartları	Eleman Sayısı							
	4	6	8	10	12	14	16	20
A-A	1,6289	1,6308	1,6316	1,6320	1,6322	1,6323	1,6323	1,6324
B-B	6,2608	6,2608	6,2608	6,2608	6,2608	6,2608	6,2608	6,2608
A-S	21,0680	21,0720	21,0736	21,0744	21,0748	21,0750	21,0751	21,0752

Tablo 6. Farklı sınır şartlarına sahip Al/Al₂O₃ FD kirişlerin boyutsuz maksimum yer değiştirmeleri

Table 6. Dimensionless maximum deflections of Al/Al₂O₃ FG beams with different boundary conditions

Kiriş	Teori	$p = 0$	$p = 0,5$	$p = 1$	$p = 2$	$p = 5$	$p = 10$	$p \rightarrow \infty$
<i>L/h=5</i>								
A-A	Bu Çalışma	0,8577	1,2702	1,6323	2,1396	2,8033	3,2141	4,2707
	Turan (2018) ⁽¹⁾	0,8630	1,2827	1,6403	2,1101	2,6477	3,0337	4,2817
	Turan (2018) ⁽²⁾	0,8547	1,2713	1,6262	2,0918	2,6216	3,0014	4,2384
	Vo vd. (2015b) ⁽²⁾	0,8630	-	1,6398	2,1092	2,6468	3,0331	-
	Vo vd. (2015b) ⁽³⁾	0,8501	-	1,6179	2,1151	2,7700	3,1812	-
B-B	Bu Çalışma	3,1654	4,8286	6,2608	8,0770	9,8412	10,9419	15,4480
	Turan (2018) ⁽¹⁾	3,1657	4,8349	6,2599	8,0303	9,6483	10,7194	15,4310
	Turan (2018) ⁽²⁾	3,1657	4,8349	6,2600	8,0304	9,6485	10,7196	15,4311
	Vo vd. (2015b) ⁽²⁾	3,1657	-	6,2599	8,0303	9,6483	10,7194	-
	Vo vd. (2015b) ⁽³⁾	3,1654	-	6,2594	8,0677	9,8281	10,9381	-
A-S	Bu Çalışma	28,7706	44,1677	57,3656	73,7185	88,3009	97,4906	139,7827
	Turan (2018) ⁽¹⁾	28,7811	44,2042	57,3774	73,5629	87,5977	96,6782	139,7664
	Turan (2018) ⁽²⁾	28,7473	44,1577	57,3202	73,4886	87,4922	96,5477	139,5909
	Vo vd. (2015b) ⁽²⁾	28,7811	-	57,3756	73,5593	87,5939	96,6757	-
	Vo vd. (2015b) ⁽³⁾	28,7555	-	57,3323	73,6482	88,2044	97,4151	-
<i>L/h=20</i>								
A-A	Bu Çalışma	0,5935	0,9122	1,1851	1,5220	1,8175	2,0039	2,8881
	Turan (2018) ⁽¹⁾	0,5936	0,9127	1,1852	1,5194	1,8063	1,9909	2,8806
	Turan (2018) ⁽²⁾	0,5931	0,9119	1,1843	1,5182	1,8045	1,9888	2,8778
	Vo vd. (2015b) ⁽²⁾	0,5936	-	1,1848	1,5186	1,8053	1,9903	-
	Vo vd. (2015b) ⁽³⁾	0,5933	-	1,1843	1,5203	1,8155	2,0027	-
B-B	Bu Çalışma	2,8962	4,4644	5,8049	7,4426	8,8190	9,6907	14,0307
	Turan (2018) ⁽¹⁾	2,8962	4,4648	5,8049	7,4396	8,8069	9,6767	14,0297
	Turan (2018) ⁽²⁾	2,8962	4,4648	5,8049	7,4397	8,8069	9,6767	14,0297
	Vo vd. (2015b) ⁽²⁾	2,8962	-	5,8049	7,4397	8,8069	9,6767	-
	Vo vd. (2015b) ⁽³⁾	2,8962	-	5,8049	7,4421	8,8182	9,6905	-
A-S	Bu Çalışma	27,7031	42,7223	55,5573	71,2114	84,2787	92,5611	134,1646
	Turan (2018) ⁽¹⁾	27,7034	42,7242	55,5575	71,2005	84,2320	92,5074	134,1623
	Turan (2018) ⁽²⁾	27,7008	42,7204	55,5528	71,1944	84,2237	92,4974	134,1487
	Vo vd. (2015b) ⁽²⁾	27,7034	-	55,5556	71,1968	84,2282	92,5048	-
	Vo vd. (2015b) ⁽³⁾	27,7029	-	55,5546	71,2051	84,2712	92,5571	-

⁽¹⁾ Birinci mertebeden kayma deformasyonlu kiriş teorisi ile sonlu eleman çözümü

⁽²⁾ Birinci mertebeden kayma deformasyonlu kiriş teorisi ile analitik çözümü

⁽³⁾ Üçüncü mertebe kayma deformasyonu teorisi ile analitik çözüm

Tablo 7. L/h ve p 'ye göre farklı tip malzemeli FD kirişin boyutsuz maksimum yer değiştirmeleri
Table 7. Dimensionless maximum deflections of FD beam with different types of material according to L/h and p

Malzeme	Kiriş	$p = 0$	$p = 0,5$	$p = 1$	$p = 2$	$p = 5$	$p = 10$	$p \rightarrow \infty$
$L/h=5$								
Al/Al ₂ N ₃	A-A	1,0514	1,5142	1,8931	2,3893	3,0093	3,3926	4,3471
	B-B	3,8801	5,7387	7,2151	8,9379	10,5687	11,6716	15,7936
	A-S	35,2672	52,4588	66,0217	81,4264	94,8702	104,2928	143,0525
SUS304/Al ₂ O ₃	A-A	2,4633	2,9893	3,2877	3,5916	3,9262	4,1336	4,5447
	B-B	9,0909	11,1594	12,2391	13,1931	14,1603	14,9238	16,7641
	A-S	82,6292	101,6849	111,4487	119,7705	128,0147	134,9623	152,3561
SUS304/Al ₂ N ₃	A-A	3,0196	3,4657	3,6942	3,9163	4,1567	4,3045	4,5784
	B-B	11,1437	12,8894	13,7018	14,3923	15,1179	15,6833	16,9155
	A-S	101,2874	117,3529	124,6710	130,6801	136,9447	142,1318	153,7860
$L/h = 20$								
Al/Al ₂ N ₃	A-A	0,7275	1,0833	1,3636	1,6805	1,9528	2,1448	2,9490
	B-B	3,5502	5,3003	6,6753	8,2108	9,4768	10,3855	14,3682
	A-S	33,9587	50,7189	63,8815	78,5514	90,5673	99,2188	137,4011
SUS304/Al ₂ O ₃	A-A	1,7045	2,0986	2,2998	2,4702	2,6382	2,7815	3,1428
	B-B	2,8962	4,4644	5,8050	7,4426	8,8190	9,6907	14,0307
	A-S	79,5634	98,0876	107,4571	115,2341	122,7993	129,4907	146,6921
SUS304/Al ₂ N ₃	A-A	2,0894	2,4215	2,5723	2,6952	2,8232	2,9304	3,1725
	B-B	10,1962	11,8263	12,5588	13,1468	13,7562	14,2812	15,4835
	A-S	97,5293	113,1354	120,1379	125,7429	131,5498	136,5750	148,1061

Tablo 8. Basit mesnetli Al/Al₂O₃ FD kirişin boyutsuz normal ve kayma gerilmeleri
Table 8. Dimensionless normal and shear stresses of Al/Al₂O₃ FD beam with simply supported

Kiriş	Teori	$p = 0$	$p = 0,5$	$p = 1$	$p = 2$	$p = 5$	$p = 10$	$p \rightarrow \infty$
$L/h=5$								
$\bar{\sigma}_{xx}(L/2, h/2)$	Bu Çalışma	3,8147	5,0111	5,9117	6,9334	8,1809	9,7576	17,6662
	Turan (2018) ⁽¹⁾	3,7750	4,9534	5,8345	6,8127	7,9957	9,5863	17,5253
	Turan (2018) ⁽²⁾	3,7507	4,9215	5,7969	6,7689	7,9442	9,5246	17,4125
	Vo vd. (2015b) ⁽²⁾	3,7500	-	5,7959	6,7676	7,9428	9,5228	-
	Vo vd. (2015b) ⁽³⁾	3,8020	-	5,8836	6,8826	8,1106	9,7122	-
$\bar{\tau}_{xz}(0,0)$	Bu Çalışma	0,7365	0,7530	0,7365	0,6836	0,6131	0,6639	0,7173
	Turan (2018) ⁽¹⁾	0,6000	0,6272	0,6000	0,5106	0,3930	0,4296	0,5748
	Turan (2018) ⁽²⁾	0,5827	0,6091	0,5827	0,4958	0,3816	0,4172	0,5582
	Vo vd. (2015b) ⁽²⁾	0,5976	-	0,5976	0,5085	0,3914	0,4279	-
	Vo vd. (2015b) ⁽³⁾	0,7332	-	0,7332	0,6706	0,5905	0,6467	-
$L/h=20$								
$\bar{\sigma}_{xx}(L/2, h/2)$	Bu Çalışma	15,0639	19,7678	23,2861	27,1980	31,9317	38,2711	69,9224
	Turan (2018) ⁽¹⁾	15,0099	19,8137	23,3379	27,2508	31,9828	38,3451	70,1010
	Turan (2018) ⁽²⁾	15,0027	19,6861	23,1876	27,0754	31,7769	38,0983	69,6498
	Vo vd. (2015b) ⁽²⁾	15,0000	-	23,1834	27,0704	31,7711	38,0913	-
	Vo vd. (2015b) ⁽³⁾	15,0129	-	23,2053	27,0991	31,8130	38,1385	-
$\bar{\tau}_{xz}(0,0)$	Bu Çalışma	0,7478	0,7639	0,7478	0,6962	0,6268	0,6778	0,7286
	Turan (2018) ⁽¹⁾	0,6000	0,6272	0,6000	0,5106	0,3930	0,4296	0,5748
	Turan (2018) ⁽²⁾	0,5827	0,6091	0,5827	0,4958	0,3816	0,4172	0,5582
	Vo vd. (2015b) ⁽²⁾	0,5976	-	0,5976	0,5085	0,3914	0,4279	-
	Vo vd. (2015b) ⁽³⁾	0,7451	-	0,7451	0,6824	0,6023	0,6596	-

⁽¹⁾ Birinci mertebeden kayma deformasyonlu kiriş teorisi ile sonlu eleman çözümü

⁽²⁾ Birinci mertebeden kayma deformasyonlu kiriş teorisi ile analitik çözümü

⁽³⁾ Üçüncü mertebede kayma deformasyonu teorisi ile analitik çözüm

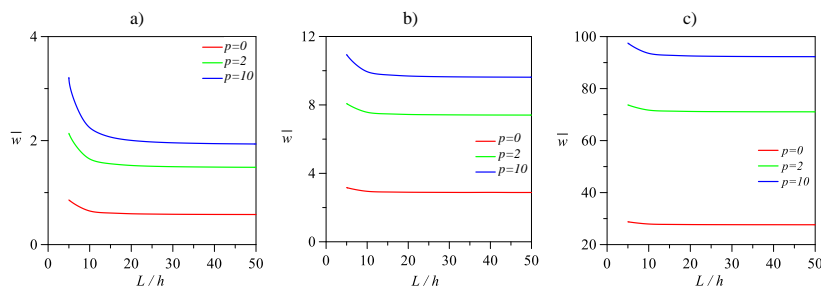
Şekil 6'da sırasıyla iki ucu ankastre, basit mesnetli ve konsol Al/Al₂O₃ malzemeli FD kirişlerin $L/h=5$ için farklı p değerlerine göre x/L boyunca boyutsuz yer değiştirmelerinin değişimi verilmektedir. Basit mesnetli ve

iki ucu ankastre mesnetli kirişte en büyük boyutsuz yer değiştirme değerleri kirişin orta kesitinde meydana gelmektedir. Konsol FD kirişte ise boyutsuz en büyük yer değiştirmeler kirişin serbest ucunda meydana gelmektedir. Ayrıca p 'nin artmasıyla boyutsuz yer değiştirme değerleri de artmaktadır.

Şekil 7a'da basit mesnetli Al/Al₂O₃ FDM kirişin farklı p değerlerine göre elde edilen sırasıyla boyutsuz normal ve kayma gerilmelerinin $L/h=5$ 'e göre değişimleri verilmiştir. Basit mesnetli kirişin boyutsuz normal gerilme değerlerine kirişin orta kesitinde, kayma gerilmesine ise sol kenarda bakılmaktadır. Mutlak değerce en büyük boyutsuz normal gerilme değerleri kiriş kesitinin üst yüzeyinde ve $p=10$ olması durumunda meydana gelmektedir. Boyutsuz kayma gerilmeleri kirişin alt ve üst yüzeylerinde beklenildiği gibi sıfır olmakta ve en büyük kayma gerilmesi $p=2$ için kesitin yaklaşık olarak $z/h=0,25$ 'lik noktasında meydana gelmektedir. Şekil 7b'de FD kirişin iki ucu ankastre mesnet sınır şartına göre boyutsuz normal ve kayma gerilmelerinin $L/h=5$ için z/h 'ye göre değişimleri verilmiştir. Gerilmelerin dağılımları basit mesnetli FD kirişe benzemektedir, fakat büyüklükleri farklıdır. Ayrıca kayma gerilmelerine $L/4$ 'de bakılmıştır. Basit mesnetli FD kiriş için yapılan yorumlara benzer yorumlar bunun içinde yapılabilir. Şekil 7c'de konsol Al/Al₂O₃ FD kirişin $L/h=5$ 'e göre boyutsuz normal ve kayma gerilmelerinin z/h ile değişimi verilmektedir. Boyutsuz normal gerilmeler için kirişin sol kenar kesitine bakılmakta, kayma gerilmeleri için $L/4$ 'deki kesite bakılmaktadır. FD kirişin çekme bölgesi kirişin alt kısmında basınç bölgesi ise kirişin üst kısmında oluşmaktadır. Kirişin alt yüzeyinden üst yüzeyine doğru çıkıldıkça mutlak değerce en büyük boyutsuz normal gerilmeler artmaktadır. Kesitin üst yüzeyinde mutlak değerce en büyük normal gerilme $p=10$ 'da, en küçük ise $p=0$ 'da oluşmaktadır.

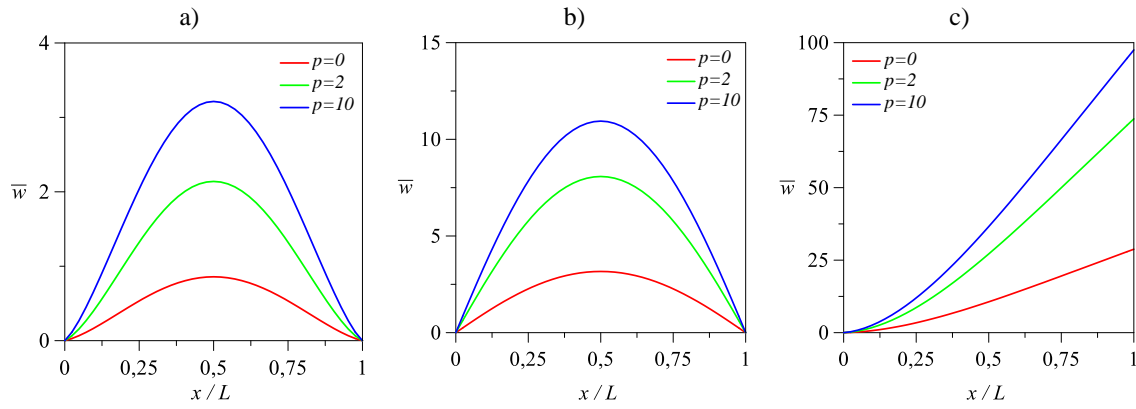
Tablo 9. Basit mesnetli FD kirişin farklı malzemelere göre boyutsuz normal ve kayma gerilmeleri
Table 9. Dimensionless normal and shear stresses of simply supported FG beam for different materials

Malzeme	Gerilme	$p = 0$	$p = 0,5$	$p = 1$	$p = 2$	$p = 5$	$p = 10$	$p \rightarrow \infty$
$L/h=5$								
Al/Al ₂ N ₃	$\bar{\sigma}_{xx}(L/2, h/2)$	3,8147	4,9118	5,6833	6,5168	7,6060	8,9797	14,9044
	$\bar{\tau}_{xz}(0,0)$	0,7365	0,7517	0,7365	0,6897	0,6339	0,6769	0,7206
SUS304/Al ₂ O ₃	$\bar{\sigma}_{xx}(L/2, h/2)$	3,8147	4,3571	4,6331	4,9098	5,3586	5,8233	6,9668
	$\bar{\tau}_{xz}(0,0)$	0,7366	0,7443	0,7366	0,7177	0,7169	0,7169	0,7317
SUS304/Al ₂ N ₃	$\bar{\sigma}_{xx}(L/2, h/2)$	3,8147	4,1935	4,3718	4,5524	4,8482	5,1329	5,7590
	$\bar{\tau}_{xz}(0,0)$	0,7366	0,7420	0,7367	0,7242	0,7158	0,7239	0,7336
$L/h=20$								
Al/Al ₂ N ₃	$\bar{\sigma}_{xx}(L/2, h/2)$	15,0639	19,3753	22,3833	25,5674	29,7415	35,2794	58,9704
	$\bar{\tau}_{xz}(0,0)$	0,7478	0,7626	0,7478	0,7021	0,6473	0,6904	0,7319
SUS304/Al ₂ O ₃	$\bar{\sigma}_{xx}(L/2, h/2)$	15,0639	17,1910	18,2604	19,3245	21,1025	22,9823	27,5339
	$\bar{\tau}_{xz}(0,0)$	0,7478	0,7553	0,7478	0,7293	0,7156	0,7286	0,7428
SUS304/Al ₂ N ₃	$\bar{\sigma}_{xx}(L/2, h/2)$	15,0639	16,5489	17,2397	17,9375	19,1150	20,2665	22,7554
	$\bar{\tau}_{xz}(0,0)$	0,7478	0,7530	0,7478	0,7356	0,7274	0,7354	0,7446



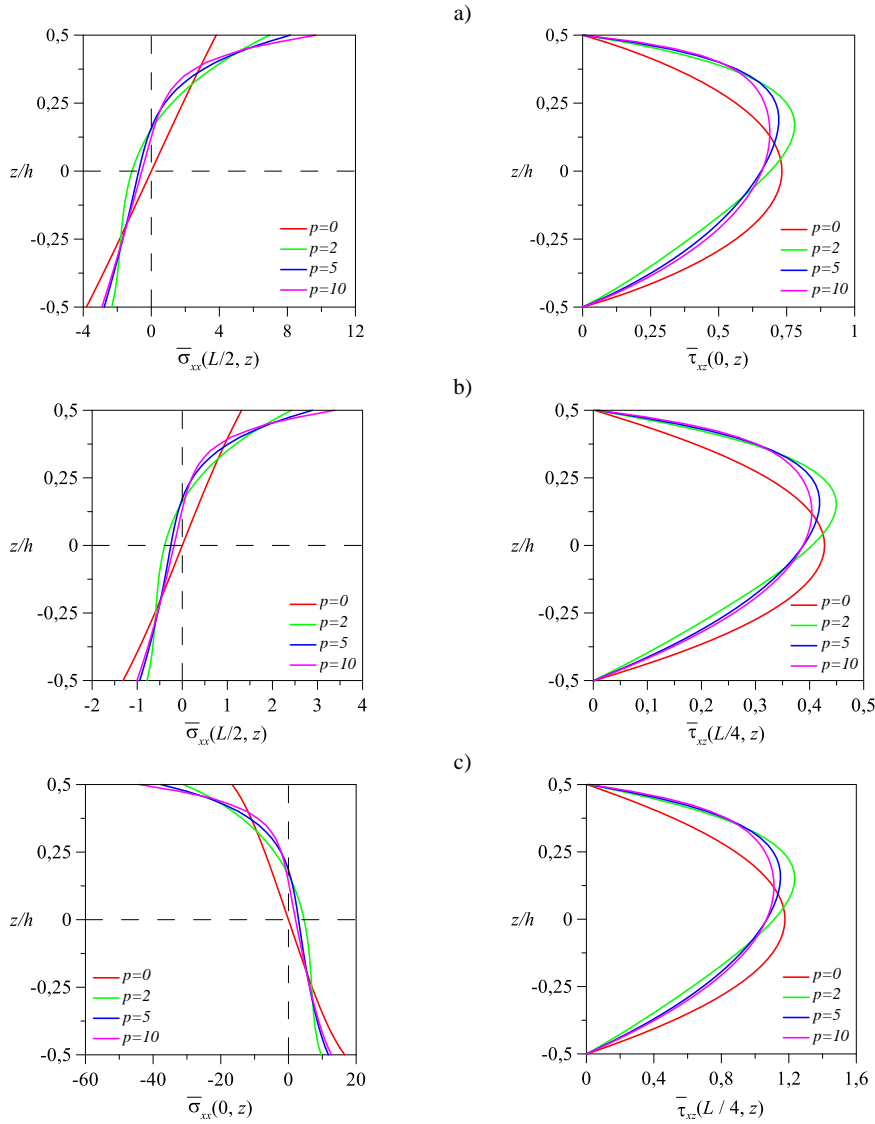
Şekil 5. a) İki ucu ankastre, b) basit mesnetli, c) konsol Al/Al₂O₃ FD kirişlerin L/h 'ye göre boyutsuz maksimum yer değiştirmelerinin değişimi

Figure 5. Variation of dimensionless maximum deflections of a) clamped two ends, b) simply supported, c) cantilever Al/Al₂O₃ FG beams with respect to L/h



Şekil 6. a) İki ucu ankastre, b) basit mesnetli, c) konsol Al/Al₂O₃ FD kirişlerin x/L 'ye göre boyutsuz yer değiştirmelerinin değişimi ($L/h=5$)

Figure 6. Variation of dimensionless deflections of a) clamped two ends, b) simply supported, c) cantilever Al/Al₂O₃ FG beams with respect to x/L ($L/h=5$)



Şekil 7. a) Basit mesnetli, b) iki ucu ankastre, c) konsol Al/Al₂O₃ FD kirişlerin z/h 'ye göre boyutsuz normal ve kayma gerilmelerinin değişimi ($L/h=5$)

Şekil 7. Variation of dimensionless normal and shear stresses of a) simply supported, b) clamped two ends, c) cantilever Al/Al₂O₃ FG beams with respect to z/h ($L/h=5$)

4. Sonuçlar

4. Conclusions

Bu çalışmada, yüksek mertebeden kayma deformasyonlu kiriş teorisine göre sonlu elemanlar modeliyle farklı malzemeli FD kirişlerin serbest titreşimi ve statik analizi incelenmiştir. Sonlu eleman yöntemi için beş düğüm noktalı ve on altı serbestlik dereceli yüksek mertebeli kiriş elemanı önerilmiştir. FD kirişin serbest titreşim ve statik analizi farklı sınır şartları, farklı p değerleri ve farklı narinlik oranlarına (L/h) göre incelenmiş ve kirişe ait boyutsuz doğal frekanslar, boyutsuz yer değiştirmeler, boyutsuz gerilmeler elde edilmiştir. Çalışmadan elde edilen sonuçlar aşağıda sıralanmıştır.

- Önerilen yüksek mertebeden kayma deformasyonlu kiriş elemanı, farklı sınır koşullarına sahip FD kirişlerin doğal frekanslarını, yer değiştirme ve gerilme değerlerini doğru şekilde tahmin edebilmektedir.
- En büyük boyutsuz doğal frekanslar iki ucu ankastre sınır şartında, en küçük doğal frekanslar ise konsol kiriş durumunda elde edilmiştir.
- p 'nin artmasıyla kiriş hacmindeki metal oranı artacağı için rijitlik azalmaktadır ve bu sebeple doğal frekanslar da azalmaktadır.
- Narinlik arttıkça boyutsuz doğal frekanslarda artmaktadır.
- p 'nin artmasıyla birlikte boyutsuz maksimum yer değiştirmeler artmaktadır.
- L/h değerinin artmasıyla boyutsuz maksimum yer değiştirmeler azalmaktadır.
- p 'nin artmasıyla bütün sınır şartları için kesitin üst yüzeyinde mutlak değerce en büyük boyutsuz normal gerilmeler artmaktadır. Kayma gerilmelerinde ise en büyük değerler kesitin ortasından üste doğru kaymaktadır.

Yazar katkısı

Author contribution

Çalışmanın tamamı yazarlar tarafından eşit katkıyla yapılmıştır.

Etik beyanı

Declaration of ethical code

Bu çalışmada, Yükseköğretim Kurumları Bilimsel Araştırma ve Yayın Etiği Yönergesi” kapsamında uyulması gerekli tüm kurallara uyulduğunu, bahsi geçen yönergenin “Bilimsel Araştırma ve Yayın Etiğine Aykırı Eylemler başlığı altında belirtilen eylemlerden hiçbirinin gerçekleştirilmediğini taahhüt ederim.

Çıkar çatışması beyanı

Conflicts of interest

Bu çalışmada herhangi bir çıkar çatışması olmadığını beyan ederim.

Kaynaklar

References

- Aboudi, J., Pindera, M. J., & Arnold, S. M. (1999). Higher-order theory for functionally graded materials. *Composites Part B: Engineering*, 30(8), 777–832. [https://doi.org/10.1016/S1359-8368\(99\)00053-0](https://doi.org/10.1016/S1359-8368(99)00053-0)
- Akbaş, Ş. D. (2017). Fonksiyonel derecelendirilmiş ortotropik bir kirişin statik ve titreşim davranışlarının incelenmesi. *Balıkesir Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü Dergisi*, 20(1), 1–14. <https://doi.org/10.25092/baunfbed.343227>
- Akbaş, Ş. D. (2021). Forced vibration responses of axially functionally graded beams by using Ritz method. *Journal of Applied and Computational Mechanics*, 7(1), 109–115. <https://doi.org/10.22055/jacm.2020.34865.2491>
- Alshorbagy, A. E., Eltaher, M. A., & Mahmoud, F. F. (2011). Free vibration characteristics of a functionally graded beam by finite element method. *Applied Mathematical Modelling*, 35(1), 412–425. <https://doi.org/10.1016/j.apm.2010.07.006>
- Avcar, M., Hadji, L., & Civalek, Ö. (2021). Natural frequency analysis of sigmoid functionally graded sandwich beams in the framework of high order shear deformation theory. *Composite Structures*, 276(June). <https://doi.org/10.1016/j.compstruct.2021.114564>

- Aydogdu, M., & Taskin, V. (2007). Free vibration analysis of functionally graded beams with simply supported edges. *Materials and Design*, 28(5), 1651–1656. <https://doi.org/10.1016/j.matdes.2006.02.007>
- Belarbi, M. O., Houari, M. S. A., Hirane, H., Daikh, A. A., & Bordas, S. P. A. (2022). On the finite element analysis of functionally graded sandwich curved beams via a new refined higher order shear deformation theory. *Composite Structures*, 279(September 2021). <https://doi.org/10.1016/j.compstruct.2021.114715>
- Chakraborty, A., Gopalakrishnan, S., & Reddy, J. N. (2003). A new beam finite element for the analysis of functionally graded materials. *International Journal of Mechanical Sciences*, 45(3), 519–539. [https://doi.org/10.1016/S0020-7403\(03\)00058-4](https://doi.org/10.1016/S0020-7403(03)00058-4)
- Filippi, M., Carrera, E., & Zenkour, A. M. (2015). Static analyses of FGM beams by various theories and finite elements. *Composites Part B: Engineering*, 72, 1–9. <https://doi.org/10.1016/j.compositesb.2014.12.004>
- Jin, C., & Wang, X. (2015). Accurate free vibration analysis of Euler functionally graded beams by the weak form quadrature element method. *Composite Structures*, 125, 41–50. <https://doi.org/10.1016/j.compstruct.2015.01.039>
- Kahya, V., & Turan, M. (2017). Finite element model for vibration and buckling of functionally graded beams based on the first-order shear deformation theory. *Composites Part B: Engineering*, 109, 108–115. <https://doi.org/10.1016/j.compositesb.2016.10.039>
- Kahya, V., & Turan, M. (2018). Vibration and buckling of laminated beams by a multi-layer finite element model. *Steel and Composite Structures*, 28(4), 415–426. <https://doi.org/10.12989/scs.2018.28.4.415>
- Koutoati, K., Mohri, F., Daya, E. M., & Carrera, E. (2021). A finite element approach for the static and vibration analyses of functionally graded material viscoelastic sandwich beams with nonlinear material behavior. *Composite Structures*, 274(February), 114315. <https://doi.org/10.1016/j.compstruct.2021.114315>
- Li, W., Ma, H., & Gao, W. (2019). A higher-order shear deformable mixed beam element model for accurate analysis of functionally graded sandwich beams. *Composite Structures*, 221(March), 110830. <https://doi.org/10.1016/j.compstruct.2019.04.002>
- Nguyen, T. K., Vo, T. P., & Thai, H. T. (2013). Static and free vibration of axially loaded functionally graded beams based on the first-order shear deformation theory. *Composites Part B: Engineering*, 55, 147–157. <https://doi.org/10.1016/j.compositesb.2013.06.011>
- Oyekoya, O. O., Mba, D. U., & El-Zafrany, A. M. (2009). Buckling and vibration analysis of functionally graded composite structures using the finite element method. *Composite Structures*, 89(1), 134–142. <https://doi.org/10.1016/j.compstruct.2008.07.022>
- Reddy, J. N., Nampally, P., & Srinivasa, A. R. (2020). Nonlinear analysis of functionally graded beams using the dual mesh finite domain method and the finite element method. *International Journal of Non-Linear Mechanics*, 127(August), 103575. <https://doi.org/10.1016/j.ijnonlinmec.2020.103575>
- Şimşek, M. (2010). Fundamental frequency analysis of functionally graded beams by using different higher-order beam theories. *Nuclear Engineering and Design*, 240(4), 697–705. <https://doi.org/10.1016/j.nucengdes.2009.12.013>
- Thai, H. T., & Vo, T. P. (2012). Bending and free vibration of functionally graded beams using various higher-order shear deformation beam theories. *International Journal of Mechanical Sciences*, 62(1), 57–66. <https://doi.org/10.1016/j.ijmecsci.2012.05.014>
- Turan, M. (2018). *Tabakalı kirişlerin statik, serbest titreşim ve burkulma analizleri için bir sonlu eleman modeli*. [Doktora Tezi, Karadeniz Teknik Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü].
- Turan, M., & Kahya, V. (2018). Fonksiyonel derecelendirilmiş kirişlerin Navier methodu ile serbest titreşim analizi. *Karadeniz Fen Bilimleri Dergisi*, 8(2), 119–130. <https://doi.org/10.31466/kfbd.453833>
- Turan, M., & Kahya, V. (2021). Free vibration and buckling analysis of functionally graded sandwich beams by Navier's method. *Journal of the Faculty of Engineering and Architecture of Gazi University*, 36(2), 743–757. <https://doi.org/10.17341/gazimmfd.599928>
- Turan, M. (2022). Bending analysis of two-directional functionally graded beams using trigonometric series functions. *Archive of Applied Mechanics*, 92(6), 1841–1858. <https://doi.org/10.1007/s00419-022-02152-y>
- Vo, T. P., Thai, H. T., Nguyen, T. K., Maheri, A., & Lee, J. (2014). Finite element model for vibration and buckling of

functionally graded sandwich beams based on a refined shear deformation theory. *Engineering Structures*, 64, 12–22. <https://doi.org/10.1016/j.engstruct.2014.01.029>

Vo, T. P., Thai, H. T., Nguyen, T. K., Inam, F., & Lee, J. (2015a). A quasi-3D theory for vibration and buckling of functionally graded sandwich beams. *Composite Structures*, 119, 1–12. <https://doi.org/10.1016/j.compstruct.2014.08.006>

Vo, T. P., Thai, H. T., Nguyen, T. K., Inam, F., & Lee, J. (2015b). Static behaviour of functionally graded sandwich beams using a quasi-3D theory. *Composites Part B: Engineering*, 68, 59–74. <https://doi.org/10.1016/j.compositesb.2014.08.030>

Yarasca, J., Mantari, J. L., & Arciniega, R. A. (2016). Hermite-Lagrangian finite element formulation to study functionally graded sandwich beams. *Composite Structures*, 140, 567–581. <https://doi.org/10.1016/j.compstruct.2016.01.015>

Yildirim, S. (2022). Free vibration of axially or transversely graded beams using finite-element and artificial intelligence. *Alexandria Engineering Journal*, 61(3), 2220–2229. <https://doi.org/10.1016/j.aej.2021.07.004>

Ekler

Appendices

$$\mathbf{m}_{11} = \begin{bmatrix} 224\gamma_0 & 112\gamma_0 & -56\gamma_0 \\ 112\gamma_0 & 896\gamma_0 & 112\gamma_0 \\ -56\gamma_0 & 112\gamma_0 & 224\gamma_0 \end{bmatrix}, \mathbf{m}_{13} = \begin{bmatrix} -224\gamma_1 & -112\gamma_1 & 56\gamma_1 \\ -112\gamma_1 & -896\gamma_1 & -112\gamma_1 \\ 56\gamma_1 & -112\gamma_1 & -224\gamma_1 \end{bmatrix}, \mathbf{m}_{14} = \begin{bmatrix} -224\gamma_2 & -112\gamma_2 & 56\gamma_2 \\ -112\gamma_2 & -896\gamma_2 & -112\gamma_2 \\ 56\gamma_2 & -112\gamma_2 & -224\gamma_2 \end{bmatrix},$$

$$\mathbf{m}_{15} = \begin{bmatrix} -224\gamma_3 & -112\gamma_3 & 56\gamma_3 \\ -112\gamma_3 & -896\gamma_3 & -112\gamma_3 \\ 56\gamma_3 & -112\gamma_3 & -224\gamma_3 \end{bmatrix}, \mathbf{m}_{22} = \begin{bmatrix} 128\gamma_0 & 99\gamma_0 & -36\gamma_0 & 19\gamma_0 \\ 99\gamma_0 & 648\gamma_0 & -81\gamma_0 & -36\gamma_0 \\ -36\gamma_0 & -81\gamma_0 & 648\gamma_0 & 99\gamma_0 \\ 19\gamma_0 & -36\gamma_0 & 99\gamma_0 & 128\gamma_0 \end{bmatrix},$$

$$\mathbf{m}_{33} = \begin{bmatrix} 224\gamma_2 & 112\gamma_2 & -56\gamma_2 \\ 112\gamma_2 & 896\gamma_2 & 112\gamma_2 \\ -56\gamma_2 & 112\gamma_2 & 224\gamma_2 \end{bmatrix}, \mathbf{m}_{34} = \begin{bmatrix} 224\gamma_3 & 112\gamma_3 & -56\gamma_3 \\ 112\gamma_3 & 896\gamma_3 & 112\gamma_3 \\ -56\gamma_3 & 112\gamma_3 & 224\gamma_3 \end{bmatrix}, \mathbf{m}_{35} = \mathbf{m}_{44} = \begin{bmatrix} 224\gamma_4 & 112\gamma_4 & -56\gamma_4 \\ 112\gamma_4 & 896\gamma_4 & 112\gamma_4 \\ -56\gamma_4 & 112\gamma_4 & 224\gamma_4 \end{bmatrix},$$

$$\mathbf{m}_{45} = \begin{bmatrix} 224\gamma_5 & 112\gamma_5 & -56\gamma_5 \\ 112\gamma_5 & 896\gamma_5 & 112\gamma_5 \\ -56\gamma_5 & 112\gamma_5 & 224\gamma_5 \end{bmatrix}, \mathbf{m}_{55} = \begin{bmatrix} 224\gamma_6 & 112\gamma_6 & -56\gamma_6 \\ 112\gamma_6 & 896\gamma_6 & 112\gamma_6 \\ -56\gamma_6 & 112\gamma_6 & 224\gamma_6 \end{bmatrix}, \mathbf{k}_{11} = \begin{bmatrix} 7\alpha_0 & -8\alpha_0 & \alpha_0 \\ -8\alpha_0 & 16\alpha_0 & -8\alpha_0 \\ \alpha_0 & -8\alpha_0 & 7\alpha_0 \end{bmatrix},$$

$$\mathbf{k}_{13} = \begin{bmatrix} -7\alpha_1 & 8\alpha_1 & -\alpha_1 \\ 8\alpha_1 & -16\alpha_1 & 8\alpha_1 \\ -\alpha_1 & 8\alpha_1 & -7\alpha_1 \end{bmatrix}, \mathbf{k}_{14} = \begin{bmatrix} -7\alpha_2 & 8\alpha_2 & -\alpha_2 \\ 8\alpha_2 & -16\alpha_2 & 8\alpha_2 \\ -\alpha_2 & 8\alpha_2 & -7\alpha_2 \end{bmatrix}, \mathbf{k}_{15} = \begin{bmatrix} -7\alpha_3 & 8\alpha_3 & -\alpha_3 \\ 8\alpha_3 & -16\alpha_3 & 8\alpha_3 \\ -\alpha_3 & 8\alpha_3 & -7\alpha_3 \end{bmatrix},$$

$$\mathbf{k}_{22} = \begin{bmatrix} 444\beta_0 & -567\beta_0 & 162\beta_0 & -39\beta_0 \\ -567\beta_0 & 1296\beta_0 & -891\beta_0 & 162\beta_0 \\ 162\beta_0 & -891\beta_0 & 1296\beta_0 & -567\beta_0 \\ -39\beta_0 & 162\beta_0 & -567\beta_0 & 444\beta_0 \end{bmatrix}, \mathbf{k}_{23} = \begin{bmatrix} 83L_e\beta_0 & 44L_e\beta_0 & -7L_e\beta_0 \\ -99L_e\beta_0 & 108L_e\beta_0 & -9L_e\beta_0 \\ 9L_e\beta_0 & -108L_e\beta_0 & 99L_e\beta_0 \\ 7L_e\beta_0 & -44L_e\beta_0 & -83L_e\beta_0 \end{bmatrix},$$

$$\mathbf{k}_{24} = \begin{bmatrix} 166L_e\beta_1 & 88L_e\beta_1 & -14L_e\beta_1 \\ -198L_e\beta_1 & 216L_e\beta_1 & -18L_e\beta_1 \\ 18L_e\beta_1 & -216L_e\beta_1 & 198L_e\beta_1 \\ 14L_e\beta_1 & -88L_e\beta_1 & -166L_e\beta_1 \end{bmatrix}, \mathbf{k}_{25} = \begin{bmatrix} 249L_e\beta_2 & 132L_e\beta_2 & -21L_e\beta_2 \\ -297L_e\beta_2 & 324L_e\beta_2 & -27L_e\beta_2 \\ 27L_e\beta_2 & -324L_e\beta_2 & 297L_e\beta_2 \\ 21L_e\beta_2 & -132L_e\beta_2 & -249L_e\beta_2 \end{bmatrix},$$

$$\mathbf{k}_{33} = \begin{bmatrix} 7\alpha_2 + 16L_e^2\beta_0 & -8\alpha_2 + 8L_e^2\beta_0 & \alpha_2 - 4L_e^2\beta_0 \\ -8\alpha_2 + 8L_e^2\beta_0 & 16\alpha_2 + 64L_e^2\beta_0 & -8\alpha_2 + 8L_e^2\beta_0 \\ \alpha_2 - 4L_e^2\beta_0 & -8\alpha_2 + 8L_e^2\beta_0 & 7\alpha_2 + 16L_e^2\beta_0 \end{bmatrix},$$

$$\mathbf{k}_{34} = \begin{bmatrix} 7\alpha_3 + 32L_e^2\beta_1 & -8\alpha_3 + 16L_e^2\beta_1 & \alpha_3 - 8L_e^2\beta_1 \\ -8\alpha_3 + 16L_e^2\beta_1 & 16\alpha_3 + 128L_e^2\beta_1 & -8\alpha_3 + 16L_e^2\beta_1 \\ \alpha_3 - 8L_e^2\beta_1 & -8\alpha_3 + 16L_e^2\beta_1 & 7\alpha_3 + 32L_e^2\beta_1 \end{bmatrix},$$

$$\mathbf{k}_{35} = \begin{bmatrix} 7\alpha_4 + 48L_e^2\beta_2 & -8\alpha_4 + 24L_e^2\beta_2 & \alpha_4 - 12L_e^2\beta_2 \\ -8\alpha_4 + 24L_e^2\beta_2 & 16\alpha_4 + 192L_e^2\beta_2 & -8\alpha_4 + 24L_e^2\beta_2 \\ \alpha_4 - 12L_e^2\beta_2 & -8\alpha_4 + 24L_e^2\beta_2 & \alpha_4 + 48L_e^2\beta_2 \end{bmatrix},$$

$$\mathbf{k}_{44} = \begin{bmatrix} 7\alpha_4 + 64L_e^2\beta_2 & -8\alpha_4 + 32L_e^2\beta_2 & \alpha_4 - 16L_e^2\beta_2 \\ -8\alpha_4 + 32L_e^2\beta_2 & 16\alpha_4 - 256L_e^2\beta_2 & -8\alpha_4 + 32L_e^2\beta_2 \\ \alpha_4 - 16L_e^2\beta_2 & -8\alpha_4 + 32L_e^2\beta_2 & 7\alpha_4 + 64L_e^2\beta_2 \end{bmatrix},$$

$$\mathbf{k}_{45} = \begin{bmatrix} 7\alpha_5 + 96L_e^2\beta_3 & -8\alpha_5 + 48L_e^2\beta_3 & \alpha_5 - 24L_e^2\beta_3 \\ -8\alpha_5 + 48L_e^2\beta_3 & 16\alpha_5 - 384L_e^2\beta_3 & -8\alpha_5 + 48L_e^2\beta_3 \\ \alpha_5 - 24L_e^2\beta_3 & -8\alpha_5 + 48L_e^2\beta_3 & 7\alpha_5 + 96L_e^2\beta_3 \end{bmatrix},$$

$$\mathbf{k}_{55} = \begin{bmatrix} 7\alpha_6 + 144L_e^2\beta_4 & -8\alpha_6 + 72L_e^2\beta_4 & \alpha_6 - 36L_e^2\beta_4 \\ -8\alpha_6 + 72L_e^2\beta_4 & 16\alpha_6 + 576L_e^2\beta_4 & -8\alpha_6 + 72L_e^2\beta_4 \\ \alpha_6 - 36L_e^2\beta_4 & -8\alpha_6 + 72L_e^2\beta_4 & 7\alpha_6 + 144L_e^2\beta_4 \end{bmatrix}, \mathbf{f}_2 = \{L_e q/8 \quad 3L_e q/8 \quad 3L_e q/8 \quad L_e q/8\}^T$$

Buradaki katsayılar $\alpha_k = \frac{X_k}{3L_e}$, $\beta_l = \frac{Y_l}{120L_e}$, $\gamma_k = \frac{L_e I_k}{1680}$, ($k = 0, 1, \dots, 6$; $l = 0, 1, \dots, 4$) şeklindedir.