Bilecik Şeyh Edebali Üniversitesi Fen Bilimleri Dergisi
Bilecik Seyh Edebali University Journal of Science
10(1), 236-253, 2023
DOİ: 10.35193/bseufbd.1190411
e-ISSN: 2458-7575 (https://dergipark.org.tr/tr/pub/bseufbd)

Derleme Makalesi - Review Article

Bazı İterasyon Yöntemleri için Cesàro Ortalamasının Kuvvetli ve Zayıf Yakınsaklığı

Strong and Weak Convergence of Cesàro Mean for Some Iteration Methods

Lale Cona[1*], Çiğdem Kaygusuz[2]

Geliş / Received: 17/10/2022 ***Revize / Revised: 11/01/2023*** ***Kabul / Accepted: 16/01/2023***

ÖZ

Bu makalede, ilk olarak toplanabilme teknikleri ve iterasyon yöntemleri araştırılmıştır. Ayrıca, bazı iterasyon yöntemleri için Cesàro anlamında toplanabilme tekniğine bağlı olarak ergodik teori üzerine yapılan çalışmalar incelenmiştir. Son olarak asimptotik genişlemeyen dönüşümler için Halpren iterasyonu ile Cesàro ortalamasının güçlü yakınsaklığı üzerine yapılan bir çalışma irdelenmiştir.

Anahtar Kelimeler- Cesàro Toplanabilme, Ergodik Teori, İterasyon Yöntemleri, Kuvvetli Yakınsaklık, Sabit Nokta Yaklaşımları

ABSTRACT

In this article, firstly, summability techniques and iteration methods are investigated. In addition, studies on ergodic theory which are related to the Cesàro mean summability technique are examined for some iteration methods. Finally, a study on the strong convergence the Cesàro mean with the Halpren iteration for asymptotic non-expanding transformations is discussed.

Keywords- Cesàro Summability, Ergodic Theory, Iteration Methods, Strong Convergence, Fixed Point Approaches

[1]*Sorumlu yazar iletişim: lalecona@gumushane.edu.tr (https://orcid.org/0000-0002-2744-1960)
Matematik Mühendisliği, Gümüşhane Üniversitesi, Mühendislik ve Doğa Bilimleri Fakültesi, Türkiye
[2]İletişim: cigdem.kaygusuz61@gmail.com (https://orcid.org/0000-0003-1420-7443)
Lisansüstü Eğitim Enstitüsü, Gümüşhane Üniversitesi, Türkiye

I. GİRİŞ

Seriler, ıraksak ve yakınsak olarak iki gruba ayrılırlar. Bir serinin kısmi toplamlar dizisi bir limit değerine sahip ise bu seri yakınsaktır. Kısmi toplamlar dizisinin limiti yoksa bu seri ıraksak bir seridir. Literatür incelendiğinde 17. yüzyıl öncesinde ıraksak seriler ile ilgili çalışmalar yapıldığı görülmüştür, ancak ıraksak serileri ilk kullanan araştırmacılar Newton ve Leibnitz'dir. 17. yüzyılın sonlarında Grandi seriler hakkındaki ilk tartışmayı

$$1-1+1-1+1-1+\cdots$$

serisi ile başlatmıştır. Grandi, 1703 yılındaki çalışmasında;

$$\frac{1}{1+x}=1-x+x^2-x^3+x^4$$

serisinde $x=1$ yazarak $\frac{1}{2}$ sonucunu bulmuştur [1]. Yine 17. yüzyılda Bernoulli sezgisel argümanları kullanarak ıraksak serilere değer bulmaya çalışmıştır. 18. yüzyılda matematikçiler ıraksak serilerin tam değerinin olamayacağını belirterek daha çok yakınsak sonsuz seriler üzerinde çalışmışlardır. Cauchy, 1821 yılında serilerin yakınsaklığını formülize etmiştir ve Algebric Analysis kitabında bunlara yer vermiştir [2].

Cesàro, 1890 yılında Hardy'nin Divergent Series adlı kitabında ıraksak serileri toplayabilmenin temelini atan ilk matematikçi olmuştur [3]. Cesàro, $\sum a_n$ serisinin kısmı toplamlar dizisi (s_n) olmak üzere; "(s_n) kısmi toplamlar dizisinin aritmetik ortalama dizisi bir s değerine yakınsar ise $\sum a_n$ serisi de aynı s değerine yakınsar" şeklinde ifade eder. Bu ifadeye Cesàro toplanabilirlik denir ve $(C,1)$ şeklinde gösterir [3].

Flett, 1957 yılında α ıncı mertebeden Cesàro toplanabilmeyi tanımlamıştır [4]. 1969 yılında ise mutlak toplanabilme tanımını vermiştir [5]. Toplanabilme çarpanını Kishore ve Hotta tanımlamışlardır [6]. $|A|_k$ toplanabilme tanımını alt üçgensel matrislerden yararlanarak Tanovic-Miller yapmıştır [7].

Gelişen literatürde Cesàro toplanabilmenin yanı sıra daha genel olan Riesz, Nörlund, Borel, Euler matris metotlarını tanımlanmışlardır [8]. Bu metotların dışında yine Hausdorf, Abel ve Tauber gibi bazı toplanabilme metotları da mevcuttur [9]. Ancak genel olarak bir toplanabilme metodunun kabul görmesi için bazı sağlaması gereken özellikler vardır:

- Regülerlik: Toplanabilme metodu sonunda bulunan değer, serinin yakınsadığı değerle aynı olmalıdır.
- Genişletme: Belirsiz ıraksak serilerin en az birini toplayabilen bir toplama metodu olmalıdır.
- Tutarlılık: Farklı iki toplanabilme metodu bir ıraksak seriye uygulandığında aynı sonuç bulunmalıdır.

Galileo "Doğanın muazzam kitabının dili matematiktir" cümlesini kullanmıştır. Tarih boyunca bilimsel bilgi Kimya, Fizik, Tıp, Bilgisayar ve Ekonomi gibi değişik isimlerle karşımıza çıkmıştır. Bu bilimsel bilgiler kendi içlerinde ya da birinin diğeri ile ilişkisi sonucunda soyut veya pratik birçok problem kapsamaktadır. Bu tür problemlerin matematiksel modellerinin çözümünde bilinmeyenleri belirlemek için cebirsel, fonksiyonel, diferansiyel ve integral denklemlerin kullanıldığı birçok yöntem mevcuttur. Galileo'nun yukarıdaki sözü bize matematiğin günlük hayattaki önemini bir kez daha hatırlatmıştır. Toplanabilme teorisi ise analiz ve uygulamalı matematikte sıkça kullanılmaktadır.

Sabit nokta teorisi, diferansiyel denklemler, integral denklemler, dinamik programlama ve kısmi diferansiyel denklemler ve sistem analizine ait birçok problemin çözümü ile ilgili araştırmalarda oldukça kullanışlı bir yöntemdir. Sabit nokta teorisi, yaklaşım teorisi, oyun teorisi, matematiksel ekonomiler ve uygulamalı bilimlerdeki problemlere de uygulanabilir. Ayrıca, optimizasyon, hesaplama algoritmaları, ekonomi, fizik, denge problemleri gibi birçok bilimsel alanda kullanılan önemli bir teoridir [10-15]. Sabit noktanın, bir tek ve kesin hesaplama ile elde edilebilir olması büyük yarar sağlamış olsa da, dönüşümün daralma olma koşulu teoremin uygulamalarında önemli zorluklar getirmiştir. Bu nedenle birçok bilim insanı, bu teoremde uzayın yapısını genelleştirerek veya yeni dönüşüm sınıfları tanımlayarak, bu teoremin farklı genelleştirmelerini elde etmişlerdir [16, 17]. Bu konuda yapılan çalışmalara ayrıntılı olarak ikinci bölümde yer verilecektir.

İterasyon dizisi yakınsak olması durumunda dizinin limit noktası dönüşümün sabit noktasıdır. Mann, Cesàro matrisini kullanarak elde edilen iterasyon dizisinin klasik anlamda yakınsak olduğunu göstermiştir. Böylece ıraksak iterasyon dizilerinin yakınsaklığını hesaplamak için toplanabilme yöntemini ortaya koymuştur [17]. Daha sonra birçok araştırmacı farklı iterasyonlarla Cesàro anlamında güçlü ve zayıf yakınsaklık üzerine çalışmalar yapmışlardır [18-21]. Literatürde Ergodik teori olarak bilinen ve oldukça geniş uygulama alanına sahip olan bu konuda yapılan birçok çalışmaya ayrıntılı olarak üçüncü bölümde yer verilecektir.

II. TEMEL KAVRAMLAR

Bu bölümde sırasıyla fonksiyonel analiz, toplanabilme, sabit nokta ve iterasyon yöntemleri ile ilgili bazı temel kavramlara yer verilmiştir.

A. Fonksiyonel Analizin Temel Kavramları

Tanım 1: L boş olmayan bir küme ve $\mathbb{F}$ bir cisim olsun. $\forall x, y \in L$ ve $\lambda \in \mathbb{F}$ için;

$+ : L \times L \to L$

$(x, y) \to x + y$

$\cdot : \mathbb{F} \times L \to L$

$(\lambda, y) \to \lambda y$

fonksiyonları tanımlansın. $\forall x, y, z \in L$ ve $\lambda, \beta \in \mathbb{F}$ için;

(L1) $x + y = y + x$

(L2) $(x + y) + z = x + (y + z)$

(L3) Her $x \in L$ için $x + \theta = \theta + x = x$ olacak şekilde bir $\theta \in L$ vardır.

(L4) Her $x \in L$ için $x + (-x) = (-x) + x = \theta$ olacak şekilde bir $(-x) \in L$ vardır.

(L5) $(\lambda + \beta)x = \lambda x + \beta x$

(L6) $\lambda(x + y) = \lambda x + \lambda y$

(L7) $(\lambda\beta)x = \lambda(\beta x)$

(L8) $1x = x$

sağlanıyorsa L kümesine, $\mathbb{F}$ cismi üzerinde bir lineer uzay denir [22].

Tanım 2: L, $\mathbb{F}$ cismi üzerinde bir lineer uzay ve M, L nin bir alt kümesi olsun. Eğer her $x, y \in M$ ve her $\alpha, \beta \in \mathbb{F}$ için $\alpha x + y\beta \in M$ ise, M ye L nin bir lineer alt uzayı denir. Kısaca alt uzay da denir [22].

Tanım 3: L ve M, $\mathbb{F}$ cismi üzerinde iki lineer uzay olmak üzere her $x, y \in L$ ve $\alpha \in \mathbb{F}$ için,

$T(\alpha x + \beta y) = \alpha T(x) + \beta T(y)$

eşitliği var ise, $T: L \to M$ fonksiyonuna bir lineer dönüşüm denir [23].

Tanım 4: L, $\mathbb{F}$ cismi üzerinde bir lineer uzay olmak üzere;

$\|\cdot\| : L \to \mathbb{R}^+$

fonksiyonu, $\forall x, y \in L$ ve $\alpha \in \mathbb{F}$ için,

(N_1) $\|x\| \geq 0$,

(N_2) $\|x\| = 0 \Leftrightarrow x = \theta$,

(N_3) $\|\alpha x\| = |\alpha|\|x\|$,

(N_4) $\|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|$,

koşullarını sağlıyorsa, $\|\cdot\|$ fonksiyonuna L üzerinde bir norm ve $(L, \|\cdot\|)$ ikilisine de normlu uzay (normlu lineer uzay) adı verilir [22].

Tanım 5: $(L, \|\cdot\|)$ normlu uzayında bir dizi (x_n) olsun. Her $\varepsilon > 0$ için $n > n_0(\varepsilon)$ olduğunda $\|x_n - x\| < \varepsilon$ olacak şekilde bir $n_0(\varepsilon) \in \mathbb{N}$ doğal sayısı mevcutsa, (x_n) dizisine L de yakınsak dizi denir. $\lim_n x_n = x$ veya $(x_n) \to x, n \to \infty$ şeklinde gösterilir [26].

Tanım 6: (x_n), $(L, \|\cdot\|)$ normlu uzayında bir dizi olmak üzere, her $\varepsilon > 0$ için $m, n > n_0(\varepsilon)$ olduğunda $\|x_m - x_n\| < \varepsilon$ olacak şekilde bir $n_0(\varepsilon) \in \mathbb{N}$ doğal sayısı mevcutsa, (x_n) dizisine bir Cauchy dizisi denir [23].

Tanım 7: $(L, \|\cdot\|)$ normlu uzayında her Cauchy dizisi L deki bir noktaya yakınsak oluyorsa, bu durumda $(L, \|\cdot\|)$ normlu uzayına tam normlu uzay denir [22].

Örnek 1: $\mathbb{R}$ alışılmış norma göre tamdır.

Örnek 2: $\mathbb{C}$ alışılmış norma göre tamdır.

Tanım 8: $(L, \|\cdot\|)$ normlu lineer uzayı olsun. L, $d(x, y) = \|x - y\|$ norm metriğine göre tam uzay ise, bu uzaya Banach uzay adı verilir [26].

Tanım 9: L, $\mathbb{F}$ cismi üzerinde bir lineer uzay olmak üzere, $f: L \to \mathbb{F}$ lineer dönüşümüne lineer fonksiyonel denir. Buradan anlaşılacağı gibi lineer fonksiyonel, kompleks ya da reel değerli lineer bir dönüşüm olur [24].

Tanım 10: L, $\mathbb{F}$ cismi üzerinde bir normlu uzay olmak üzere L üzerinde tanımlı tüm sınırlı lineer fonksiyonellerden oluşan Banach uzayına, L nin normlu duali denir. L' şeklinde ifade edilir [24].

Tanım 11: L' Banach uzayının normlu duali $L'' = (L')'$ uzayına, L nin ikinci duali denir. İkinci dual uzay da bir Banach uzaydır [24].

Tanım 12: L, $\mathbb{F}$ cismi üzerinde bir normlu uzay olsun. Eğer $L = L''$ ise L uzayına yansımalı (reflektif) uzay denir [24].

Tanım 13: $(L, \|\cdot\|)$ normlu uzayında bir dizi (x_n) olsun. Eğer,

$$\lim_{n\to\infty} x_n = x$$

olan $x \in L$ varsa, (x_n) dizisi x e kuvvetli yakınsaktır denir. Kısaca $(x_n) \overset{k}{\to} x,\ n \to \infty$ ile gösterilir [22].

Tanım 14: $(L, \|\cdot\|)$ normlu uzayında bir dizi (x_n) olsun. Eğer her $f \in L'$ için

$$\lim_{n\to\infty} f(x_n) = f(x_0)$$

olmak üzere bir $x_0 \in L$ elemanı varsa (x_n) dizisi x_0 a zayıf yakınsaktır denir [22].

Tanım 15: Bir E Banach uzayının birim yuvarı $B_x(E) \coloneqq \{x \in E : \|x\| = 1\}$ olarak tanımlansın. Eğer $x \in B_x$ için;

$$\frac{d}{dt}(\|x + ty\|)|_{t=0} = \lim_{t\to 0}\frac{\|x + ty\| - \|x\|}{t}$$

limiti var ise, bu durumda L uzayının normu $x \in B_x$ noktasında Gateaux diferansiyellenebilir olarak ifade edilir. B_x in her bir noktasında Gateaux diferansiyellenebilir ise bu durumda L ye Gateaux diferansiyellenebilirdir denir. Her $y \in B_x$ için $\lim_{t\to 0}\frac{\|x+ty\|-\|x\|}{t}$ limiti $x \in B_x$ den bağımsız olarak mevcut ise, L ye düzgün Gateaux diferansiyellenebilirdir denir [25].

B. Toplanabilme ile İlgili Temel Kavramlar

Bu kesimde toplanabilme ile ilgili temel kavramlara yer verilmiştir.

Tanım 1: $\mathbb{F} = (\mathbb{R}$ veya $\mathbb{C})$ bir cismi ve (s_n), $\sum a_n$ serisinin kısmi toplamlar dizisi olsun. $n, k = 1,2,\ldots$ için $a_{nk} \in \mathbb{F}$ olmak şartı ile $A = (a_{nk})$ sonsuz matrisi verilsin. Öte yandan, (s_n) dizisinden (E_n) dizisine bir dönüşüm;

$$E_n = \sum_{k=0}^{\infty} a_{nk}\, s_k$$

şeklinde tanımlansın. Bu taktirde (E_n) dizisine, (s_n) kısmi toplamlar dizisinin $A -$ dönüşüm dizisi, A ya ise diziden diziye bir dönüşüm adı verilir [22].

Tanım 2: Herhangi bir $A = (a_{nk})\,;\ n, k = 1,2,\ldots$ matrisi verilsin. A matrisi ile oluşturulan dönüşüm yakınsak olan her diziyi yine yakınsak olan bir diziye dönüştürüyor ve aynı zamanda limiti de koruyorsa, A matrisine regülerdir denir. Regüler matrislerin sınıfı $(c, c)_{reg}$ ile gösterilir [9].

Şimdi yukarıdaki regülerlik tanımını karakterize eden ve Silverman–Toeplitz Teoremi olarak bilinen teoremi ifade edelim [9].

Teorem 1: Bir $A = (a_{nk})\ n, k = 1,2,\ldots$ matrisi regülerdir, ancak ve ancak

i) $\forall k$ için $\lim_{n\to\infty} a_{nk} = 0$
ii) $\lim_{n\to\infty} \sum_{k=0}^{\infty} a_{nk} = 1$
iii) $\forall n$ için $\sum_{k=0}^{\infty} |a_{nk}| < \infty$.

Tanım 3: Kısmi toplamlar dizisi (s_n) olan bir $\sum a_n$ serisi verilsin. $A = (a_{nk})$ matrisi yardımıyla (s_n) kısmi toplamlar dizisinin (E_n) dönüşüm dizisi

$$E_n = \sum_{k=0}^{\infty} a_{nk} s_k$$

şeklinde tanımlansın. Eğer $\lim_{n\to\infty} E_n = s$ ise $\sum a_n$ serisine (yani (s_n) dizisine) s değerine A toplanabilirdir denir [27].

Tanım 4: Kısmi toplamlar dizisi (s_n) olan bir $\sum a_n$ serisi verilsin. (s_n) kısmi toplamlar dizisinin matris elemanları

$$a_{nv} = \begin{cases} \dfrac{1}{n+1} & , \quad v \le n \quad için \\ 0 & , \quad v > n \quad için \end{cases}$$

ile verilen A matrisi ile oluşturulan (b_n) dönüşüm dizisi;

$$b_n = \frac{1}{n+1} \sum_{v=0}^{n} s_v$$

olarak tanımlanırsa, buna Cesàro ortalama denir ve $(C, 1)$ ile gösterilir;

$$\lim_{n\to\infty} b_n = s$$

ise $\sum a_n$ serisi s değerine $(C, 1)$ toplanabilirdir denir [27].

Tanım 5:

$$b_n = \frac{1}{n+1} \sum_{v=0}^{n} s_v$$

şeklinde tanımlansın. Eğer,

$$\sum_{n=1}^{\infty} |b_n - b_{n-1}| < \infty$$

ise $\sum a_n$ serisi $|C, 1|$ toplanabilirdir denir [28].

Tanım 6: (p_n) ,

$$P_n = \sum_{v=0}^{n} p_v \ \rightarrow \ \infty \ , \quad n \rightarrow \infty$$

şartını sağlayan pozitif sayıların bir dizisi olacak şekilde (s_n) dizisinden (r_n) dizisine

$$r_n = \frac{1}{P_n} \sum_{v=0}^{n} p_v s_v$$

olarak tanımlanan (r_n) dizisine Riesz ortalaması veya Riesz dönüşümü denir ve (R, p_n) şeklinde gösterilir [29].

Tanım 7: Kısmi toplamlar dizisi $s = (s_n)$ olan $\sum a_n$ serisi verilsin.

$$P_n = p_0 + p_1 + p_2 + \cdots + p_n \neq 0 \quad (n = 0,1,2, \dots)$$

ve

$$r_n = \frac{p_n s_0 + p_{n-1} s_1 + \cdots + p_0 s_n}{P_n} = \frac{1}{P_n} \sum_{v=0}^{n} p_{n-v} s_v$$

olmak üzere

$$\lim_{n\to\infty} r_n = s$$

ise (s_n) dizisi s değerine $(N, P_n) -$ limitlenebilir veya N_P limitlenebilir (Nörlund limitlenebilir) denir [27].

C. Sabit Nokta ve İterasyon Yöntemleri

Banach'ın 1922 de ortaya koyduğu sabit nokta teoremi (Banach daralma prensibi), özellikle 20. yüzyılın ikinci yarısında birçok araştırmacının geliştirdiği iterasyon yöntemleri, daralma dönüşümleri ve farklı uzay seçimleri ile birçok sabit nokta teoremlerinin tanımlanmasına olanak sağlamıştır. Zamanla bu gelişmeler konunun literatüre sabit nokta teorisi olarak yerleşmesine neden olmuştur [16, 20, 21].

Lineer olmayan problemlerin çözümünde, iterasyon yöntemleri oldukça yaygın kullanılan çok faydalı matematiksel bir yöntemlerdir. İterasyon yöntemi Liouville tarafından tanıtılmış ve Cauchy tarafından kullanılmıştır [2, 16]. Banach'ın sabit nokta teoreminde kullandığı ve başlangıç değer problemlerinin varlık ve teklik ispatında kullanılan bu yöntem, ilk olarak Picard tarafından sistematik olarak geliştirildi [30]. Literatüre bakıldığında hem sabit nokta teorisi hem de iterasyon yöntemleri üzerine yapılan çalışmalara paralel olarak birçok iterasyon yönteminin geliştirildiği görülmektedir.

Şimdi sabit nokta teorisi ile ilgili tanım, teorem ve sık kullanılan dönüşüm sınıfları ile çeşitli iterasyon yöntemleri verilecektir.

Tanım 1: $X \neq \emptyset$ bir küme ve $T: X \to X$ dönüşümü verilsin. Bu taktirde,

$$Tx = x$$

şartını sağlayan bir $x \in X$ varsa, bu x noktasına T nin sabit noktası (fixed point) denir. T dönüşümünün sabit noktalarının kümesi F_T, $F(T)$ ya da $Fix(T)$ şeklinde gösterilir [31]. Bu çalışma boyunca F_T gösterimi kullanılacaktır.

Örnek 1: $X = [0,1]$ ve $T: X \to X$, $Tx = x^2$ ise $F_T = \{0,1\}$ olur.

Tanım 2: (X, d) bir metrik uzay ve $T: X \to X$ bir dönüşüm olsun. $\forall x, y \in X$ için;

$$d(Tx, Ty) \leq \lambda d(x, y)$$

olacak şekilde bir $\lambda > 0$ sayısı mevcut ise T ye bir Lipschitz dönüşümü denir [31].

Tanım 3: (X, d) bir metrik uzay ve $T: X \to X$ bir Lipschitz dönüşümü olmak üzere $\forall x, y \in X$ için,

$$d(Tx, Ty) \leq d(x, y)$$

ise T ye bir genişlemeyen (nonexpansive) dönüşüm denir [31].

Tanım 4: (X, d) bir metrik uzay ve $T: X \to X$ bir dönüşüm olmak üzere $x, y \in X$ ve $x \neq y$ için,

$$d(Tx, Ty) < d(x, y)$$

ise T ye kesin daralma (strict contraction) dönüşümü denir [31].

Tanım 5: (X, d) bir metrik uzay ve $T: X \to X$ bir Lipschitz dönüşümü olmak üzere, $\forall x, y \in X$ için,

$$d(Tx, Ty) \leq \lambda d(x, y)$$

koşulunu sağlayan en az bir $\lambda \in [0,1)$ sayısı varsa, T daralma (contraction) dönüşümü olarak adlandırılır [31].

Yukarıda tanımlanan dönüşümler arasında,

Daralma $\Longrightarrow$ Kesin Daralma $\Longrightarrow$ Genişlemeyen $\Rightarrow$ Lipschitz

şeklinde bir bağıntı vardır.

Aşağıda bir iterasyon yönteminin en genel şekildeki tanımı verilerek, en yaygın kullanılan bazı iterasyon yöntemleri tanıtılacaktır.

(X, d) bir metrik uzay ve $T: X \to X$ bir dönüşüm olsun, en genel şekli ile bir sabit nokta iterasyon yöntemi, f bir fonksiyon olmak üzere

$$\begin{cases} x_0 \in X, \\ x_{n+1} = f(T, x_n), \quad n = 0,1,2, \dots \end{cases} \tag{1}$$

olarak tanımlanır.

Tanım 6: (1) ile verilen ifade de her $n \in \mathbb{N}$ için Picard iterasyonu (ardışık yaklaşıklar dizisi)

$$x_{n+1} = f(T, x_n) = Tx_n$$

şeklinde tanımlanır [30].

Picard iterasyon yöntemi, başlangıç değer problemleri ve integral denklemlerinin çözümü için oldukça kullanışlı bir yöntemdir. Picard iterasyonunun genişlemeyen (nonexpansive) dönüşümlerin sabit noktasına yakınsamadaki problemi Krasnoselskii aşağıdaki iterasyon yöntemi ile ortadan kaldırmıştır [32].

Schaefer, Krasnoselskii iterasyon yöntemini genelleştirmiştir [33].

Genişlemeyen (nonexpansive) dönüşümlerin sabit noktalarına yaklaşırken kullandığımız en genel iterasyon Mann iterasyon yöntemidir. Bu yöntem Krasnoselskii iterasyonundan yaklaşık iki yıl önce bir matris formunda tanımlanmasına rağmen, şekilsel olarak Krasnoselskii iterasyonunun genelleştirilmiş bir şeklidir.

Tanım 7 (Mann İterasyon Yöntemi): $(\alpha_n) \subset [0,1]$ şartını sağlayan bir reel sayı dizisi olmak üzere (1) ile verilen ifadede $\forall n \in \mathbb{N}$ için Mann iterasyonu;

$$\begin{cases} x_0 \in X, \\ x_{n+1} = f(T, x_n) = (1-\alpha_n)x_n + \alpha_n T x_n \end{cases}$$

şeklinde tanımlanır (Mann, 1953).

Tanım 8 (Halpern İterasyon Yöntemi): $x_0 \in X, u \in X$, $(x_n) \subset [0,1]$ şartını sağlayan bir reel sayı dizisi olmak üzere (1) ile verilen ifadede $\forall n \in \mathbb{N}$ için Halpern iterasyonu;

$$x_{n+1} = \alpha_n u + (1-\alpha_n)Tx_n$$

şeklinde tanımlanır [34].

Aşağıda verilen ve sabit nokta teoriside yaygın bir şekilde kullanılan Ishikawa iterasyon yöntemi, 1974 yılında ilk olarak Shiro Ishikawa tarafından geliştirildi [35].

Tanım 9 (Ishikawa İterasyon Yöntemi): $\forall n \in \mathbb{N}$ için $(\alpha_n), (\beta_n) \subset [0,1]$ şartlarını sağlayan reel sayı dizileri olmak üzere (1) ile verilen ifadede Ishikawa iterasyonu;

$$\begin{cases} x_{n+1} = f(T, x_n) = (1-\alpha_n)x_n + \alpha_n T y_n \\ y_n = (1-\beta_n)x_n + \beta_n T x_n \end{cases}$$

şeklinde tanımlanır [35].

2000 yılında M. A. Noor tarafından üç adımlı iterasyon yöntemi tanımlanmıştır [36]. Daha sonra Agarwal S-iterasyon yöntemini [37]; Thianwan iki adımlı Mann iterasyon yöntemini [38]; Karahan ve Özdemir S^*-iterasyon yöntemini geliştirmişlerdir [39].

Ayrıca, bu iterasyon yöntemlerine dayanan çok kullanışlı birçok hibrit iterasyon yöntemi geliştirilmiştir. Picard-Mann iterasyon yöntemi; Picard–S iterasyon yöntemi; SP- İterasyon yöntemi; Abbas-Nazır iterasyon yöntemi gibi yöntemler bunlardan bazılarıdır.

Mevcut iterasyon yöntemlerinden daha sade ve hızlı olan yeni üç adımlı iterasyon yöntemi ise Karakaya ve arkadaşları tarafından aşağıdaki gibi tanımlanmıştır [40].

Tanım 10 (Yeni Üç Adımlı İterasyon Yöntemi): $\forall n \in \mathbb{N}$ için $(\alpha_n) \subset [0,1]$ şartlarını sağlayan reel sayı dizisi olmak üzere (1) ile verilen ifadede yeni üç adımlı iterasyon yöntemi

$$\begin{cases} x_{n+1} = Ty_n \\ y_n = (1-\alpha_n)z_n + \alpha_n T z_n \\ z_n = Tx_n \end{cases}$$

şeklinde tanımlanır.

Daralma dönüşümlerde X bir tam metrik uzay alınırsa, bu dönüşümün tek olan bir sabit noktası vardır. Bu teorem lineer ve lineer olmayan denklemlerin çözümünde birçok uygulamada kolaylıklar sağlamaktadır. Şimdi bu durumu karakterize eden teoremi verelim [41].

Teorem 1 (Banach Daralma Prensibi veya Banach Sabit Nokta Teoremi): X bir tam metrik uzay ve $T: X \to X$ bir daralma dönüşümü olsun. Bu halde;

i) T, X te bir tek x sabit noktasına sahiptir.
ii) Herhangi bir $x_0 \in X$ için $x_{n+1} = Tx_n \quad n = 0,1,2,\dots$ ile tanımlanan Picard iterasyonu tarafından üretilen $(x_n)_{n=0}^{\infty}$ dizisi x noktasına yakınsar.

Tam olmayan metrik uzaylar için ise kesin daralma (strict contraction) dönüşümü tanımlanır. Tam olmayan metrik uzaylarda tanımlanan kesin daralma dönüşümlerin sabit noktaları olmayabilir. Bu dönüşümlerde sabit noktalarının varlığını garanti altına almak için, çalışılan uzayı kompakt almak yeterlidir. Teorem 1 deki (i) ve (ii) şartlarını sağlayan bir dönüşüme bir Picard operatörü denir [31].

Banach daralma Prensibinde T dönüşümü sürekli olmalıdır. Bazı araştırmacılar çalışmalarında süreklilik gerektirmeyen daralma şartları tanımlayarak aşağıdaki sabit nokta teoremlerini geliştirmişlerdir.

Teorem 2 (Kannan Teoremi): (X, d) bir tam metrik uzay ve $T: X \to X$ dönüşümü verilsin. Eğer Tdönüşümü $\forall x, y \in X$ için

$$d(Tx, Ty) \leq \alpha[\, d(x, Tx) + d(y, Ty)]$$

olacak şekilde en az bir $\alpha \in \left[0, \frac{1}{2}\right)$ vardır koşulunu sağlıyorsa T bir Picard operatörüdür [42].

Teorem 3 (Chatterjea Teoremi): (X, d) bir tam metrik uzay ve $T: X \to X$ dönüşümü verilsin. Eğer Tdönüşümü $\forall x, y \in X$ için

$$d(Tx, Ty) \leq \beta[\, d(x, Ty) + d(y, Tx)]$$

olacak şekilde en az bir $\beta \in \left[0, \frac{1}{2}\right)$ vardır koşulunu sağlıyorsa T bir Picard operatörüdür [43].

Teorem 4 (Zamfirescu Teoremi): (X, d) bir tam metrik uzay ve $T: X \to X$ bir dönüşümü verilsin. $\forall x, y \in X$ için;

i) $d(Tx, Ty) \leq \lambda\, d(x, y)$
ii) $d(Tx, Ty) \leq \alpha[\, d(x, Tx) + d(y, Ty)]$
iii) $d(Tx, Ty) \leq \beta[\, d(x, Ty) + d(y, Tx)]$

şartlarından en az birisi doğru olsun. Eğer $\lambda \in [0, 1)$, $0 < \alpha$, $\beta < \frac{1}{2}$ koşullarını sağlayan λ, α ve β reel sayıları mevcut ise, bu durumda T bir Picard operatörüdür [44].

En genel daralan şartlarından biri ise aşağıdaki gibi tanımlanmıştır.

Teorem 5: (X, d) bir tam metrik uzay ve $T: X \to X$ bir dönüşümü verilsin. $\forall x, y \in X$ için;

$$d(Tx, Ty) \leq h.max\{d(x, y), d(x, Tx), d(y, Ty), d(x, Ty), d(y, Tx)\}$$

olmak üzere, bir $h \in (0,1)$ mevcut ise T dönüşümüne yarı daralma (quasi contraction) denir. Ayrıca T bir Picard operatörüdür.

Berinde, Zamfirecsu Teoremindeki (i) ve (iii) koşullarından daha genel olan ve T dönüşümünün sürekliliğini gerektirmeyen Tanım 11 de ifade edilen hemen hemen daralma dönüşümünü tanımladı ve bu daralma dönüşümüne bağlı olarak literatürdeki birçok sabit nokta teoreminin genellemesi olan Teorem 5 i elde etti [45].

Tanım 11: (X, d) bir tam metrik uzay ve $T: X \to X$ dönüşümü verilsin.$\forall x, y \in X$ için

$$d(Tx, Ty) \leq \delta\, d(x, y) + Ld(y, Tx)$$

veya

$$d(Tx, Ty) \leq \delta\, d(x, y) + Ld(x, Ty)$$

olacak şekilde bir $\delta \in (0,1)$ ve $L \geq 0$ sayıları varsa, T ye bir hemen hemen daralma dönüşümü (almost contraction) denir.

Teorem 6: (X, d) bir tam metrik uzay ve $T: X \to X$ bir dönüşüm olmak üzere, T dönüşümü;

$$d(Tx, Ty) \leq \delta\, d(x, y) + Ld(y, Tx)$$

şartını sağlayan bir hemen hemen daralma dönüşümü olduğunda,

i) $F_T = \{x \in X : Tx = x\} \neq \emptyset$;
ii) Herhangi bir $x_0 \in X$ için $x_{n+1} = Tx_n$; $n = 0,1,2, \ldots$ şeklinde verilen $(x_n)_{n=0}^{\infty}$ dizisi, bazı $x_* \in F_T$ ye yakınsar.

Teoremden de anlaşılacağı gibi hemen hemen daralma dönüşümleri tek bir sabit noktaya sahip olmak zorunda değildirler. Aşağıda verilen teorem ile bir hemen hemen daralma dönüşümünün sabit noktası tek yapılabilmektedir [45].

Teorem 7: X bir tam metrik uzay ve $T: X \to X$ bir hemen hemen daralma dönüşümü olsun. $\forall x, y \in X$ için

$$d(Tx, Ty) \leq \rho\, d(x, y) + L_1 d(x, Tx)$$

olmak üzere, $\rho \in (0,1)$ sabiti ve $L_1 \geq 0$ vardır. Bu taktirde,

i) T dönüşümünün tek bir sabit noktası vardır. Yani $F_T = \{x_*\}$ dır.
ii) Herhangi bir $x_0 \in X$ için $x_{n+1} = Tx_n \quad n = 0,1,2, \dots$ şeklinde verilen $(x_n)_{n=0}^{\infty}$ Picard iterasyonundan elde edilen dizi $x_* \in F_T$ ye yakınsar.

III. ASİMPTOTİK OLARAK GENİŞLEMEYEN DÖNÜŞÜMLER İÇİN CESÀRO ORTALAMASININ GÜÇLÜ YAKINSAKLIĞI

Fiziksel düşüncenin matematiksel bir gelişimi olan ergodik teori ilk olarak istatistiksel mekanik ile ilgili düşüncelerden ortaya çıkmıştır. Daha sonra denge problemleri, ölçü teorisi, olasılık teorisi vs. gibi bir çok alanda sıkça kullanılmıştır [46, 47].

Ergodik teori çalışmaları fonksiyonel analiz ve toplanabilme teorisi ile ilgilidir. Ergodik teori en genel şekliyle aşağıdaki gibi ifade edilebilir.

T, X Banach uzayı üzerinde lineer operatör ve $(T^n)_{n \in N}$, $T^0 = I$ ve $T^n = TT^{n-1}$ iterasyon dizisi olmak üzere,

$$\left\{ \frac{1}{n} \sum_{j=0}^{n-1} T^j \right\}$$

şeklindeki dönüşüm dizilerinin yakınsaklığını ve bununla ilgili sonuçları inceler.

Genişlemeyen dönüşümlerin önemli bir sınıfının doğal bir genellemesi olan asimptotik olarak genişlemeyen dönüşüm kavramı, Goebel ve Kirk tarafından ortaya konmuş ve bu dönüşüm sınıfı için ilk sabit nokta teoremi elde edilmiştir [48]. Bu teoremde; eğer C bir düzgün konveks Banach uzayın boş olmayan kapalı konveks ve sınırlı bir alt kümesi ise, bu taktirde C nin her asimptotik olarak genişlemeyen kendi üzerine tanımlı dönüşümü bir sabit noktaya sahiptir. Kirk vd. ne göre; eğer bir yansımalı (reflexive) E Banach uzayı (ve E nin her bir kapalı sınırlı konveks kümeleri) genişlemeyen dönüşümler için sabit nokta özelliğine sahip ise, bu taktirde ayrıca bir genişlemeyen iterasyona sahip herhangi bir asimptotik olarak genişlemeyen dönüşüm de sabit nokta özelliğine sahip olacaktır [49]. Asimptotik olarak genişlemeyen dönüşümler kullanılarak günümüze kadar ergodik teori üzerine bir çok çalışma yapılmıştır. Burada ilk olarak bu konuda literatürde yer alan bazı önemli çalışmalara yer verilecektir.

Baillon ilk olarak aşağıdaki lineer olmayan ergodik teoremi ispatlamıştır [18].

Teorem 1: E Hilbert uzayının boş olmayan kapalı konveks bir alt kümesi C ve $F_T \neq \emptyset$ olacak şekilde $T: C \to C$ bir dönüşüm olsun. Bu taktirde $\forall x \in C$ için,

$$T_n x = \frac{1}{n+1} \sum_{i=0}^{n} T^i x \tag{2}$$

Cesàro anlamında toplanabilme T dönüşümünün bir sabit noktasına zayıf yakınsar.

Bruck Frechet diferansiyellenebilen normlar ile tanımlı düzgün konveks Banach uzaylarında genişlemeyen dönüşümler için lineer olmayan ergodik teoremini ortaya koymuştur [50]. Daha sonra genişlemeyen dönüşümler için Baillon'un teoremi genişletilmiştir [51]. Birçok yazar asimptotik olarak genişlemeyen dönüşümlerin Cesàro ortalamalarının iteratif yaklaşımı üzerinde çalışmıştır [52-54].

Halpern (u = 0) ilk olarak Halperen iterasyonu olarak bilinen bir genişlemeyen T dönüşümü için aşağıdaki iterasyon şemasını ortaya koymuştur [34]:

$$u, x_0 \in C, \alpha_n \in [0,1],$$

$$x_{n+1} = \alpha_n u + (1 - \alpha_n) T x_n, \quad \forall n \geq 0 \tag{3}$$

Son kırk yıl içinde çeşitli ek koşullarla T nin yaklaşık sabit noktaları için bu şemanın güçlü yakınsaması üzerine birçok önemli araştırma yapılmıştır. Bu araştırmalarda, (3) nolu iterasyonun;

$$\alpha_n = \frac{1}{n^a}, \quad (a \in (0,1))$$

şartı ile Lions tarafından [72] çalışmasında;

i) $\lim_{n\to\infty} \alpha_n = 0$
ii) $\sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n = \infty$
iii) $\sum_{n=1}^{\infty} |\alpha_n - \alpha_{n+1}| < \infty$

şartları ile Wittmann tarafından güçlü yakınsaklığı elde edilmiştir [55]. Yine (3) nolu iterasyon, bir Hilbert uzayında [56-58]; bir düzgün Gateaux diferansiyellenebilen normu ile düzgün konveks Banach uzaylarında çalışılmıştır [52]. Ayrıca, farklı çalışmalarda bir (T_n) genişlemeyen dönüşüm dizisi için veya bir genişlemeyen dönüşüm yarı grubu için (3) ün güçlü yakınsaklığı elde edilmiştir [59-63].

Düzgün konveks ve düzgün Banach uzaylarda, Xu çalışmasında bir genişlemeyen T dönüşümü için,

$$x_{n+1} = \alpha_n u + (1-\alpha_n)\frac{1}{n+1}\sum_{j=0}^{n} T^j x_n \, , \tag{4}$$

Cesàro ortalamasının (x_n) Halpern iterasyonunun güçlü yakınsaklığını elde etmiştir [64].

Xu, $(\alpha_n) \subset [0,1]$ olmak üzere

i) $\lim_{n\to\infty} \alpha_n = 0$
ii) $\sum_{n=0}^{\infty} \alpha_n = \infty$
iii) Ya $\sum_{n=0}^{\infty} |\alpha_{n+1} - \alpha_n| < \infty$ ya da $\lim_{n\to\infty} \left(\frac{\alpha_{n+1}}{\alpha_n}\right) = 1$

şartlarını sağlayan

$$x_{n+1} = \alpha_n f(x_n) + (1-\alpha_n)Tx_n \tag{5}$$

ile verilen (x_n) viscosity iterasyon şemasını tanımlamıştır [65].

Yine Xu, (x_n) explicit iterasyonun düzgün Banach uzaylarda ki T dönüşümün bir p sabit noktasına güçlü yakınsadığını ispatlamıştır.

Song ve Chen genişlemeyen T dönüşümü için Cesàro anlamında (x_n) viscosity iterasyonunu

$$x_{n+1} = \alpha_n f(x_n) + (1-\alpha_n)\frac{1}{n+1}\sum_{i=0}^{n} T^i x_n \, , \tag{6}$$

olarak tanımlamıştır [66]. Ayrıca aynı kişiler (x_n) dizisinin bir düzgün konveks Banach uzayında tanımlı zayıf dizisel sürekli dual dönüşümlerinin bazı F_T sabit noktalarına güçlü yakınsadığını ispatlamışlardır.

Yao vd. tarafından yapılan çalışmalarda, (x_n) iterasyonunu

$$x_{n+1} = \alpha_n u + \beta_n x_n + \gamma_n T x_n \, , n \geq 0 \tag{7}$$

şeklinde tanımlanmıştır [67]. Aynı yazarlar, (x_n) dizisinin her $n \geq 0$ için

i) $\alpha_n + \beta_n + \gamma_n = 1$
ii) $\lim_{n\to\infty} \alpha_n = 0$ ve $\sum_{n=0}^{\infty} \alpha_n = \infty$
iii) $\lim_{n\to\infty} \gamma_n = 0$

olarak verilen kontrol şartları altında T nin bir sabit noktaya güçlü yakınsadığını ispatlamışlardır.

Song, aşağıda ifade edilen asimptotik genişlemeyen T dönüşümü için Cesàro anlamında Mann iterasyonunun güçlü ve zayıf yakınsaklığını elde etmiştir [21]:

E düzgün Gateaux diferansiyellenebilen normu ile verilen bir düzgün konveks Banach uzay ve C, E nin boştan farklı, kapalı, konveks alt akümesi olsun. x_0 keyfi başlangıç değeri için asimptotik genişlemeyen T dönüşümün Cesàro anlamında Mann iterasyonunu aşağıdaki gibi tanımlamıştır:

$$x_{n+1} = \alpha_n x_n + (1-\alpha_n)\frac{1}{n+1}\sum_{j=0}^{n} T^j x_n \quad , \quad n \geq 0 \, ,$$

olmak üzere

$$\sum_{n=0}^{\infty} b_n < +\infty$$

ve (α_n), $(0,1)$ açık aralığında bir reel dizi olsun. Eğer,

i) $\lim_{n\to\infty} \alpha_n = 0$
ii) $\sum_{n=0}^{\infty} \alpha_n(1-\alpha_n) = +\infty$
iii) $0 < \liminf_{n\to\infty} \alpha_n \leq \limsup_{n\to\infty} \alpha_n < 1$

şartlarından biri sağlanıyorsa (x_n) nin güçlü ve zayıf yakınsaklığı ispatlanmış olur.

Song ve Zhang tarafından yapılan bir başka çalışmada ise aşağıdaki sonuç elde edilmiştir [68].

E düzgün Gateaux diferansiyellenebilen normu ile verilen bir düzgün konveks Banach uzay ve C ise E nin boştan farklı, kapalı, konveks bir alt kümesi olsun. $T: C \to C$ asimptotik olarak genişlemeyen bir dönüşüm ve (x_n) ;

$$x_{n+1} = \alpha_n u + (1-\alpha_n)\frac{1}{n+1}\sum_{j=0}^{n} T^j x_n \quad , \quad n \geq 0 \tag{8}$$

olarak tanımlansın. Kabul edelim ki $(\alpha_n) \in (0,1)$ dizisi aşağıdaki şartları sağlasın.

i) $\lim_{n\to\infty} \alpha_n = 0,$
ii) $\sum_{n=0}^{\infty} \alpha_n = \infty,$
iii) $b_n = \frac{1}{n+1}\sum_{j=0}^{n}(k_j - 1)$ olmak üzere $\lim_{n\to\infty} \frac{b_n}{\alpha_n} = 0\,.$

Bu taktirde $n \to \infty$, (x_n) dizisi T nin bazı x_* sabit noktalarına güçlü yakınsaktır.

Zhu ve Chen, genişlemeyen dönüşümler için Cesàro anlamında

$$x_{n+1} = \alpha_n u + \beta_n x_n + \gamma_n \frac{1}{n+1}\sum_{i=0}^{n} T^i x_n \,, n \geq 0 \tag{9}$$

iterasyonunu ve

$$x_{n+1} = \alpha_n f(x_n) + \beta_n x_n + \gamma_n \frac{1}{n+1}\sum_{i=0}^{n} T^i x_n \;, \quad n \geq 0 \tag{10}$$

viscosity iterasyonunu tanımlamışlardır [19].

Şimdi Cesàro anlamında Halpren iterasyonun kuvvetli yakınsaklığını ortaya koyan Song'un çalışmasını ayrıntılı olarak inceleyelim [20].

Burada E, reel skaler cisim üzerinde tanımlı bir Banach uzay ve E' ise E nin dual uzayı olarak kullanılacaktır. E den $2^{E'}$ nin içine tanımlı J dual dönüşümü her $x \in E$ için;

$$J(x) = \{f \in E' : \langle x, f\rangle = \|x\|\|f\|\,,\ \ \|x\| = \|f\|\},$$

olarak tanımlansın.

$B_x(E) \coloneqq \{x \in E : \|x\| = 1\}$ bir E Banach uzayının birim yuvarını tanımlasın. E nin konvekslik modülü ise her $\varepsilon \in (0,2]$ için

$$\delta_E(\varepsilon) = \inf\left\{1 - \frac{\|x+y\|}{2} :\ \|x\| \leq 1, \|y\| \leq 1, \|x-y\| \geq \varepsilon\right\}$$

olarak tanımlanır.

Her $\varepsilon \in (0,2]$ için $\delta_E(\varepsilon) > 0$ ise E Banach uzayına düzgün konveks denir.

Eğer E düzgün konveks ise, bu taktirde $\|x\| \leq r$, $\|y\| \leq r$ ve $\|x-y\| \geq \varepsilon > 0$ olacak şekilde ki her $x, y \in E$ için;

$$\left\|\frac{x+y}{2}\right\| \leq r\left[1-\delta_E\left(\frac{\varepsilon}{r}\right)\right]$$

dir.

Tanım 1: $(X, \|\cdot\|)$ normlu uzay, $C \subset X$ boş olmayan bir küme ve $T: C \to C$ bir dönüşüm olsun. $\forall x, y \in C$ ve $n \in \mathbb{N}$ için;

$$\|T^n x - T^n y\| \leq L\|x-y\|$$

olacak şekilde $L > 0$ mevcut ise, T ye düzgün Lipschitz dönüşüm denir.

Tanım 2: Bir X Banach uzayının boş olmayan bir alt kümesi C olsun. $T: C \to C$ bir dönüşüm olmak üzere $\forall x, y \in C$ için,

$$\|T^n x - T^n y\| \leq k_n\|x-y\|$$

olacak şekilde, $(k_n) \to 1, n \to \infty$ koşulunu sağlayan reel sayıların bir $(k_n) \subset [1, \infty)$ dizisi var ise bu durumda T asimptotik genişlemeyen dönüşüm olarak ifade edilir [48]. Asimptotik genişlemeyen dönüşümlerin sınıfı, genişlemeyen dönüşümlerin bir genellemesi olarak kabul edilir.

Lemma 1: C, bir düzgün konveks E Banach uzayın kapalı konveks bir alt kümesi ve $F_T \neq \emptyset$ olacak şekilde $T: C \to C$ asimptotik olarak genişlemeyen bir dönüşüm olsun. Bu taktirde, $\forall r > 0$ için $B_r = \{x \in E: \|x\| \leq r\}$ olmak üzere;

$$\limsup_{n\to\infty} \limsup_{m\to\infty} \sup_{x \in C \cap B_r} \left\|\frac{1}{m+1}\sum_{j=0}^{m} T^j x - T^n\left(\frac{1}{m+1}\sum_{j=0}^{m} T^j x\right)\right\| = 0$$

dır [53].

Aşağıda yer alan Lemma 2 bazı yazarlar tarafından ispatlanmış ve kullanılmıştır. İspatın detayları için [64, 69, 70] kaynaklarına bakınız.

Lemma 2: $\sum_{n=0}^{\infty} t_n = \infty$ ve $\limsup_{n\to\infty} c_n \leq 0$ olmak üzere (a_n) dizisi;

$$a_{n+1} \leq (1-t_n)a_n + t_n c_n, \quad \forall n \geq 0$$

koşulunu sağlayan negatif olmayan reel sayıların bir dizisi olsun. Şu halde (a_n), $n \to \infty$ iken sıfıra yakınsaktır.

Düzgün konveks bir Banach uzayın geometrik özelliklerinin yardımıyla [52] nin Lemma 4'ü ve [71] in Lemma 1'i bir Hilbert uzaydan bir düzgün konveks Banach uzaya genişletebilir [20].

Lemma 3: C, bir düzgün konveks E Banach uzayının boş olmayan kapalı, konveks bir alt kümesi olsun. Ayrıca, $(k_n) \in [1, +\infty)$ olmak üzere $T: C \to C$ asimptotik genişlemeyen bir dönüşüm olsun. Kabul edelim ki C de sınırlı (x_n) dizisinin;

$$\lim_{k\to\infty}\left\|x_{n_k+1} - \frac{1}{n_k+1}\sum_{j=0}^{n_k} T^j x_{nk}\right\| = 0$$

koşulunu sağlayan bir (x_{n_k}) alt dizisi mevcut olsun. Her $z \in C$ için;

$$h(z) = \lim_{k\to\infty} sup\left\|x_{n_k+1} - z\right\|$$

olsun. Bu taktirde,

$$h(x) = \inf_{z \in C} h(z) \text{ ve } x = Tx$$

olacak şekilde bir tek $x \in C$ mevcuttur.

Teorem 2: Düzgün Gateaux diferansiyellenebilen normu ile verilen bir düzgün konveks E Banach uzayın boş olmayan kapalı, konveks bir alt kümesi C ve $T: C \to C$, (k_n) ile birlikte verilen asimptotik olarak genişlemeyen bir dönüşüm olsun. (x_n),

$$x_{n+1} = \alpha_n u + (1 - \alpha_n) \frac{1}{n+1} \sum_{j=0}^{n} T^j x_n \tag{11}$$

olarak tanımlansın. Kabul edelim ki $b_n = \frac{1}{n+1} \sum_{j=0}^{n} (k_j - 1)$ olmak üzere $\alpha_n \in (0,1)$ dizisi

i) $\lim_{n\to\infty} \alpha_n = 0$,
ii) $\sum_{n=0}^{\infty} \alpha_n = \infty$,
iii) $\lim_{n\to\infty} \frac{b_n}{\alpha_n} = 0$,

şartlarını sağlansın. Bu taktirde $n \to \infty$ iken (x_n) dizisi T nin bazı x_* sabit noktalarına kuvvetli yakınsaktır [20].

İspat: $p \in F_T$ alalım. $\lim_{n\to\infty} \frac{b_n}{\alpha_n} = 0$ olduğundan her $n \geq N$ için $N \in \mathbb{N}$ doğal sayısı vardır öyleki $\frac{b_n}{\alpha_n} \leq \frac{1}{2}$ dir.

$$\|x_N - p\| \leq M \text{ ve } \|u - p\| \leq \frac{M}{2}$$

olacak şekilde, yeterince büyük $M > 0$ sabiti seçelim.

$\forall n \geq 1$ için tümevarımı kullanarak $\|x_{n+1} - p\| \leq M$ olduğunu gösterelim. Kabul edelim ki bazı $n > 1$ için $\|x_n - p\| \leq M$ olsun. Göstermek istiyoruz ki $\|x_{n+1} - p\| \leq M$ dir. (11) iterasyonu ve T nin asimptotik olarak genişlemeyen bir dönüşüm olduğu kullanılarak gerekli düzenlemeler yapılırsa,

$$\begin{aligned} \|x_{n+1} - p\| &\leq (1 - \alpha_n) \frac{1}{n+1} \sum_{j=0}^{n} \|T^j x_n - p\| + \alpha_n \|u - p\| \\ &\leq \alpha_n \|u - p\| + (1 - \alpha_n) b_n \|x_n - p\| + (1 - \alpha_n) \|x_n - p\| \end{aligned}$$

elde edilir. Burada $\alpha_n \in (0,1)$ ve $\frac{b_n}{\alpha_n} \leq \frac{1}{2}$ olduğundan

$$\begin{aligned} &\leq \frac{M}{2} \alpha_n + \frac{\alpha_n}{2} M + (1 - \alpha_n) M \\ &= M \end{aligned}$$

olarak bulunur. Böylece, (x_n) dizisinin sınırlılığını ispatlamış oluruz.

$T_n = \frac{1}{n+1} \sum_{j=0}^{n} T^j$ olsun. Böylece $\|T_n x_n - p\| \leq (1 + b_n) \|x_n - p\|$ olduğundan $(T_n x_n)$ nin sınırlılığını elde ederiz. Öte yandan, (11) de her iki taraftan $T_n x_n$ çıkartılıp gerekli düzenlemeler yapılarak limit alınırsa;

$$\lim_{n\to\infty} \|x_{n+1} - T_n x_n\| = \lim_{n\to\infty} \alpha_n \|u - T_n x_n\| = 0 \tag{12}$$

elde edilir. $\forall z \in C$ için $h(z) = \limsup_{n\to\infty} \|x_{n+1} - z\|$ olsun. Bu taktirde Lemma 3 den;

$$h(x_*) = \inf_{z \in C} h(z) \text{ ve } x_* = T x_*$$

olacak şekilde bir tek $x_* \in C$ nın mevcut olduğu görülür. İddia ediyoruzki;

$$\limsup_{n\to\infty} \langle u - x_*, J(x_{n+1} - x_*) \rangle \leq 0 \tag{13}$$

dır. Aslında,

$$\limsup_{n\to\infty} \langle u - x_*, \ J(x_{n+1} - x_*) \rangle = \lim_{k\to\infty} \langle u - x_*, \ J(x_{n_k+1} - x_*) \rangle = c \tag{14}$$

olacak şekilde (x_{n+1}) dizisinin bir (x_{n_k+1}) alt dizisini alabiliriz. Her $z \in C$ için $f(z) = \limsup_{k\to\infty} \|x_{n_k+1} - z\|$ olsun. Bu taktirde Lemma 3 ten;

$$f(x) = \inf_{z \in C} f(z) \text{ ve } x = Tx$$

olacak şekilde bir tek $x \in C$ vardır. Şimdi $x_* = x$ olduğunu gösterelim. $p \in F_T$ için;

$$\begin{aligned} \|x_{n+1} - p\| &\leq \|x_{n+1} - T_n x_n\| + \|T_n x_n - p\| \\ &\leq \|x_{n+1} - T_n x_n\| + (1 + b_n) \|x_n - p\| \end{aligned}$$

dır. Herhangi bir $(n_k) \subset (n)$ için (12) kullanılarak;

$$\limsup_{k\to\infty} \|x_{n_k+1} - p\| \leq \limsup_{k\to\infty} \|x_{n_k} - p\| \tag{15}$$

elde edilir.

$$h(p) = \limsup_{n\to\infty} \|x_{n+1} - p\| = \lim_{j\to\infty} \left\|x_{n_j+1} - p\right\|$$

olacak şekilde (x_n) nin bir $\left(x_{n_j}\right)$ alt dizisini seçebiliriz. $n_j > n_k$ olduğu zaman (15) den;

$$\begin{aligned} h(p) = \limsup_{j\to\infty} \left\|x_{n_j+1} - p\right\| &\leq \limsup_{j\to\infty} \left\|x_{n_j} - p\right\| \\ &\leq \ \vdots \\ &\leq \limsup_{k\to\infty} \|x_{n_k+2} - p\| \\ &\leq \limsup_{k\to\infty} \|x_{n_k+1} - p\| \\ &= f(p) \end{aligned}$$

elde edilir. Açık olarak,

$$\begin{aligned} f(p) &= \limsup_{k\to\infty} \|x_{n_k+1} - p\| \\ &\leq \limsup_{n\to\infty} \|x_{n+1} - p\| \\ &= h(p) \end{aligned}$$

dır. Böylece her $p \in F_T$ için;

$$f(p) = h(p)$$

dır. $x, x_* \in F_T$ olduğundan $f(x) = h(x)$ ve $f(x_*) = h(x_*)$ elde ederiz ve böylece bir tek olarak;

$$x = x_* \text{ ve } f(x_*) = \inf_{z\in C} f(z)$$

dir. Verilen herhangi bir $t \in (0,1)$ için;

$$z_t = x_* + t(u - x_*) = (1-t)x_* + tu$$

alınır. Bu durumda $\lim_{t\to 0} z_t = x_*$ ve C konveks olduğundan $z_t \in C$ dir ve böylece $f(x_*) \leq f(z_t)$ dir.

$$x_{n_k+1} - z_t = \left(x_{n_k+1} - x_*\right) - t(u - x_*)$$

olduğundan,

$$\begin{aligned} \|x_{n_k+1} - z_t\|^2 &= \langle x_{n_k+1} - x_*,\ J(x_{n_k+1} - z_t)\rangle - t\langle u - x_*,\ J(x_{n_k+1} - z_t)\rangle \\ &\leq \frac{\|x_{n_k+1} - x_*\|^2 + \|x_{n_k+1} - z_t\|^2}{2} - t\langle u - x_*,\ J(x_{n_k+1} - z_t)\rangle \end{aligned}$$

dir. Bu taktirde,

$$\|x_{n_k+1} - z_t\|^2 \leq \|x_{n_k+1} - x_*\|^2 - 2t\langle u - x_*,\ J(x_{n_k+1} - z_t)\rangle$$

dir. Şu halde

$$\limsup_{k\to\infty} \|x_{n_k+1} - z_t\|^2 \leq \limsup_{k\to\infty} \|x_{n_k+1} - x_*\|^2 - 2t \liminf_{k\to\infty} \langle u - x_*,\ J(x_{n_k+1} - z_t)\rangle$$

olup, yani

$$\liminf_{k\to\infty} \langle u - x_*\ \ J(x_{n_k+1} - z_t)\rangle \leq \frac{f^2(x_*) - f^2(z_t)}{2t} \leq 0 \tag{16}$$

olur. Öte yandan, J sınırlı küme üzerinde düzgün sürekli ve $\lim_{t\to 0} z_t = x_*$ olduğundan herhangi bir $\varepsilon > 0$, en az bir $\delta > 0$, her $t \in (0, \delta)$ ve her k için;

$$\langle u - x_*\,,\ J\big(x_{n_k+1} - x_*\big)\rangle < \langle u - x_*\,,\ J\big(x_{n_k+1} - z_t\big)\rangle + \varepsilon$$

dır. (16) dan;

$$\liminf_{k\to\infty} \langle u - x_*\,,\ J\big(x_{n_k+1} - x_*\big)\rangle \le \liminf_{k\to\infty} \langle u - x_*\,,\ J\big(x_{n_k+1} - z_t\big)\rangle + \varepsilon \le \varepsilon$$

olduğu görülür. ε keyfi olduğu için;

$$\liminf_{k\to\infty} \langle u - x_*\,,\ J\big(x_{n_k+1} - x_*\big)\rangle \le 0$$

elde ederiz. (14) den,

$$c = \liminf_{k\to\infty} \langle u - x_*\,,\ J\big(x_{n_k+1} - x_*\big)\rangle \le 0$$

dir. Böylece (13) ispatlanmış olur. Şimdi biz $(x_n) \longrightarrow x_*$ olduğunu gösterelim. Aslında, T nin asimptotik genişlemeyen dönüşüm olduğu ve b_n nin tanımı kullanılarak gerekli düzenlemeler yapılırsa,

$$\begin{aligned}
\|T_n x_n - x_*\| &\le \frac{1}{n+1}\sum_{j=0}^{n}\|T^j x_n - x_*\| \\
&\le \frac{1}{n+1}\sum_{j=0}^{n} k_j\|x_n - x_*\| \\
&= (b_n + 1)\|x_n - x_*\|
\end{aligned}$$

olur. (11) eşitliğinden;

$$\begin{aligned}
\|x_{n+1} - x_*\|^2 &= \alpha_n\langle u - x_*\,,\ J(x_{n+1} - x_*)\rangle + (1-\alpha_n)\langle T_n x_n - x_*\,,\ J(x_{n+1} - x_*)\rangle \\
&\le \alpha_n\langle u - x_*\,,\ J(x_{n+1} - x_*)\rangle + (1-\alpha_n)\|T_n x_n - x_*\|\|x_{n+1} - x_*\| \\
&\le \alpha_n\langle u - x_*\,,\ J(x_{n+1} - x_*)\rangle + (1-\alpha_n)(b_n+1)\|x_n - x_*\|\|x_{n+1} - x_*\| \\
&\le \alpha_n\langle u - x_*\,,\ J(x_{n+1} - x_*)\rangle + (1-\alpha_n)\frac{(b_n+1)^2\|x_n - x_*\|^2 + \|x_{n+1} - x_*\|^2}{2}
\end{aligned}$$

elde edilir. Böylece,

$$\begin{aligned}
\|x_{n+1} - x_*\|^2 &\le (1-\alpha_n)\|x_n - x_*\|^2 + (1-\alpha_n)[(b_n+1)^2 - 1]\|x_n - x_*\|^2 \\
&\quad + 2\alpha_n\langle u - x_*\,,\ J(x_{n+1} - x_*)\rangle \\
&\le (1-\alpha_n)\|x_n - x_*\|^2 + b_n(b_n+2)\|x_n - x_*\|^2 \\
&\quad + 2\alpha_n\langle u - x_*\,,\ J(x_{n+1} - x_*)\rangle
\end{aligned}$$

olup, $\gamma_n = \frac{b_n}{\alpha_n}(b_n+2)\|x_n - p\|^2 + 2\langle u - x_*\,,\ J(x_{n+1} - x_*)\rangle$ olmak üzere,

$$\|x_{n+1} - x_*\|^2 \le (1-\alpha_n)\|x_n - x_*\|^2 + \gamma_n\alpha_n \tag{17}$$

dir. (13) eşitsizliği ile birlikte (x_n) dizisinin sınırlılığı ve $\lim_{n\to\infty}\frac{b_n}{\alpha_n} = 0$ koşulundan

$$\limsup_{n\to\infty} \gamma_n \le 0$$

olduğu görülür. (17) eşitsizliğine Lemma 2 uygulanarak, $(x_n) \longrightarrow x_*$ sonucunu elde ederiz. Bu ise ispatı tamamlar.

Sonuç 1: Bir düzgün Gateaux diferansiyellenebilen normu ile verilen bir düzgün konveks Banach uzayın boştan farklı kapalı konveks bir alt kümesi C olsun. $T: C \to C$ genişlemeyen bir dönüşüm ve (x_n) ise (11) de tanımlanan dizi olsun. Kabul edelim ki $\alpha_n \in (0,1)$ dizisi

i) $\lim_{n\to\infty} \alpha_n = 0$,
ii) $\sum_{n=0}^{\infty} \alpha_n = \infty$,

şartlarını sağlasın. Bu taktirde, (x_n) , $n \to \infty$ dizisi T nin bazı x_* sabit noktalarına güçlü yakınsar.

IV. SONUÇLAR

Bu çalışmada, toplanabilme, iterasyon yöntemleri ve ergodik teorinin genel bir literatür taraması yapılmıştır. Elde edilen bulgular derleme olarak sunulmuştur. Yapılan çalışma sonucunda;

Farklı tipte iterasyon yöntemleri için sabit nokta yaklaşımları yapıldığı,

İterasyon yöntemleri ve toplanabilme metodları ile ergodik teoride önemli sonuçlar elde edildiği,

Ayrıca asimptotik genişlemeyen dönüşümler için Cesàro ortalamasının güçlü ve zayıf yakınsama koşullarının ortaya konduğu,

tespit edilmiştir.

Tüm bu teorik çalışmalar ise uygulamalı matematikte denge problemi, finansal ekonomi, optimizasyon ve operatör araştırmaları v.s. gibi birçok alanda yaygın bir şekilde kullanılmaktadır.

KAYNAKLAR

[1] Grandi, G. (1703). *Quadraturo circuli et hyperbolaeper infinitas hyperbolas geometrice exhibita*, Pisa.
[2] Cauchy, A. L. (1821). *Analyse algebrique*. Chez Debure Freres, Paris, 576.
[3] Cesàro, E. (1890). Sur la multiplication des series. *Bulletin des Sciences Mathematiques*,14,114–120.
[4] Flett, T. M. (1957). On an extension of absolute summability and some theorems of Littlewood and Paley. *Proceedings of the London Mathematical Society,* (3)7, 113–141.
[5] Das, G. (1969). Tauberian theorems for absolute Nörlund summability. *Proceedings of the London Mathematical Society*, 9 (3), 357-394.
[6] Kishore, N. & Hotta, G. C. (1970). On $|\overline{N}, P_n|$ summabilitiy factors. *Acta Scientarium Mathematicarum* (SZEGED), 31, 9–12.
[7] Tanovic-Miller, N. (1979). On strong summability. *Glasnik Mathematicki*, 34 (14), 87–97.
[8] Nörlund, N. E. (1919). Sur une application des fonctiony permutables. *Lunds Universitets Arsskrift,* 2, 16, 1–10.
[9] Boos, J. (2000). *Classical and Modern Methods in Summability*. Oxford university Press, New York.
[10] Ceng, L. C., Ansari, Q. & Yao, J. C. (2011). Some iterative methods for finding fixed points and for solving constrained convex minimization problems, Nonlinear Analysis. *Theory, Methods Applications,* 74, 5286–5302.
[11] Argyros, I. K. & Hilout, S. (2013). *Computational methods in nonlinear analysis: Efficient algorithms, fixed point theory and applications.*World Scientific Publishing Company Incorporated,Hackensack, NJ.
[12] Argyros, I. (2007). *Computational theory of iterative methods*. Elsevier Science.
[13] Border, K. C. (1989). *Fixed point theorems with applications to economics and game theory*, Cambridge University press, Cambridgei UK.
[14] Borwein, J. & Sims, B. (2011). *The douglas-rachford algorithm in the absence of convexity*. H. H. Bauschke Burachik, R. S. Combettes, P. L. Elser, V. Luke, D. R. & Wolkowicz, H., ed. *Fixed-point algorithms for ınverse problems in science and engineering*. Springer New York, 93–109.
[15] Shehu, Y. (2011). Iterative methods for family of strictly pseudocontractive mappings and system of generalized mixed equilibrium problems and variational inequality problems. *Fixed Point Theory and Applications*, 852789.
[16] Liouville, J. (1837). Second memoire: Sur le developpement des fonctions ou parties de fonctions en series dont les divers termes sont assujest à satisfare à une meme équ ation différentielles dusecond membre contenant un parametre variable. *Jurnal de Mathématiques pures et appliques*, 2, 16–35.
[17] Mann, W. R. (1953). Mean value methods in iteration. *Proceedings of the American Mathematical Society*, 4, 506–510.
[18] Baillon, J. B. (1975). Un the´ore`me de type ergodique pour les contractions non line´airs dans un espaces de Hilbert. *Comptes Rendus* Academie *Sciences ParisA B*, 280, 1511–41.
[19] Zhu, Z. & Chen, R. (2014). Strong Convergence on Iterative Methods of Cesàro Meansfor Nonexpansive Mapping in Banach Space. *Hindawi Publishing Corporation Abstract and Applied Analysis*, Article ID 205875.
[20] Song, Y. (2011). Halpern iteration of Cesàro means for asymptotically nonexpansive mappings. *ScienceAsia*, 37, 145–151.
[21] Song, Y. (2010). Mann iteration of Cesàro means for asymptotically nonexpansive mappings. *Nonlinear Analysis*, 72, 176–82.
[22] Madox, I. J. (1970). *Elements of Functional Analysis*. Cambridge Univercity Press, Cambridge.
[23] Bayraktar, M. (2006). *Fonksiyonel Analiz*, Atatürk Üniversitesi Yayınları, Erzurum.
[24] Musayev, B. & Alp, M. (2000). *Fonksiyonel analiz*. Kütahya.

[25] Takahashi, W. (2000). *Nonlinear functional analysis – Fixed point theory and its applications*. Yokohama Publishers, Yokohama.
[26] Kreyszig, E. (1978). *Introductory functional analysis with applications*, John Wiley-Sons, Newyork.
[27] Petersen, G. M. (1966). *Regular matrix transformations*. Mc Graw Publishing Company Limited, London-New York-Toronto.
[28] Fekete, M. (1911). Zur theorie der divergenten reihen. *Mathematical es Termezs Ertesitö* (Budapest), 29, 719–726.
[29] Mazhar, S. M. (1966). On the Summability factors of infinite series. *Publicationes Mathematicae Debrecen*, 13, 229–236.
[30] Picard, E. (1890). Memoire sur la théoire dés équations aux dérivées partielles et la méthode des approximations successives. *Jurnal deMathématiques pures et appliquées*, 6, 145–210.
[31] Berinde, V. (2007). *Iterative approximation of fixed points*. Springer, Berlin.
[32] Krasnoselskii, M. A. (1955). Two remarks on the method of succesive approximations, *Uspekhi Matematicheskikh Nauk*, 10, 123–127.
[33] Schaefer, H. (1957). Über die Methode Sukzessiver Approximationen. *jahresbericht der Deutschen Mathematiker-Vereinigung*, 59, 131–140.
[34] Halpern, B. (1967). Fixed points of nonexpansive maps. *Bulletin of the American Mathematical Society*, 73, 957–61.
[35] Ishikawa, S. (1974). Fixed points by a new iteration method. *Proceedings of the American Mathematical Society*, 44, 147–150.
[36] Noor, M. A. (2000). New approximation schemes for general variational inequlities, *Journal of Mathematics and Applications*, 251, 217–229.
[37] Agarwal, R. P., O'Regan, D. & Sahu, D. R. (2007). Iterative construction of fixed points of nearly asymtotically nonexpansive mapping,*Journal of Nonlinear and Convex Analysis*, 8 (1), 61–79.
[38] Thianwan, S. (2009). Common fixed points of new iterations for two asymptotically nonexpansive nonself – mappings in a Banach Space. *Journal of Computational and Applied Mathematics*, 224, 688–695.
[39] Karahan, I. & Özdemir, M. (2013). A General iterative method for approximation of fixed points and their applications. *Advances in Fixed Point Theory*, 3 (3), 510–526.
[40] Karakaya, V., Atalan, Y., Doğan, K. & Bouzara, N. E. H. (2017). Some Fixed-Point Results for a New Three Steps Iteration Process in Banach Spaces.*Fixed Point Theory*, 18 (2), 625–640.
[41] Banach, S. (1922). Sur les operations dans les ensembles abstraits et leur applications aux equations integrals. *Fundamenta Mathematicae*, 3 (1), 133–181.
[42] Kannan, R. (1968). Some results on fixed points. *Bulletin of Calcutta Mathematical Society*, 60, 71–76.
[43] Chatterjea, S. K. (1972). Fixed Point Theorems, Comptes rendus de I'Academie. *Bulgare des Sciences*, 25, 727–730.
[44] Zamfirescu, T. (1972). Fix point theorems in metric spaces. *Arch*ivum Mathematicum, 23 (1972), 292–298.
[45] Berinde, V. (2004). Approximating fixedpoints of weak contractions using the picard iteration. *Nonlinear Analysis Forum*, 9, 43–53.
[46] Zhang, J. & Cui, Y. (2014). Iterative algorithms based on hybrid method and Cesàro mean of asymptotically nonexpansive mappings for equilibrium problems. *Fixed Point Theory and Applications*, 16 (2014), 1–16.
[47] Combettes, P.L. & Hirstoaga, S. A. (2005). Equilibrium programming in Hilbert spaces. Journal of *Nonlinear and Convex Analysis*, 6, 117–136.
[48] Goebel, K. & Kirk, W. A. (1972). A fixed-point theorem for asymptotically nonexpansive mappings. *Proceedings* of the *American Mathematical Society*, 35, 171–4.
[49] Kirk, W. A., Yanez, C. M. & Shin, S. S. (1998). Asymptotically nonexpansive mappings. *Nonlinear Analysis*, 33, 1–12.
[50] Bruck, R. E. (1979). A simple proof of the mean ergodic theorem for nonlinear contractions in Banach spaces. *Israel Journal of Mathematics*, 32 (2-3), 107–116.
[51] Hirano, N. & Takahashi, W. (1979). Nonlinear ergodic theorems for nonexpansive mappings in Hilbert spaces. *Kodai Mathematical Journal*, 2, 11–25.
[52] Shimizu, T. & Takahashi, W. (1996). Strong convergence theorem for asymptotically non-expansive mappings. *Nonlinear Analysis*, 26, 265–72.
[53] Shioji, N. & Takahashi, W. (1999a). A strong convergence theorem for asymptotically non-expansive mappings in Banach spaces. *Arch*ivum Mathematicum, 72, 354–9.
[54] Moore, C. & Nnoli, B. V. C. (2001). Strong convergence of averaged approximants for Lipschitz pseudocontractive maps. *Journal of Mathematical Analysis and Applications*, 260, 269–78.
[55] Wittmann, R. (1992). Approximation of fixed points of nonexpansive mappings. Arch*ivum Mathematicum*, 59, 486–91.

[56] Reich, S. (1974). Some fixed-point problems. *Atti della Accademia Nazionale dei Lincei*, 57, 194–8.
[57] Reich, S. (1983). Some problems and results in fixed point theory. *Contemporary mathematics*, 21, 179–87.
[58] Reich, S. (1994). Approximating fixed points of nonexpansive mappings. *Panamerican Mathematical Journal*, 4, 23–8.
[59] Song, Y. (2007) Iterative approximation to common fixed points of a countable family of nonexpansive mappings. *Applied analysis*, 86, 1329–37.
[60] Song, Y. (2008a). A new sufficient condition for the strong convergence of Halpern type iterations. *Applied Mathematics and Computation*, 198, 721–8.
[61] Song, Y. & Xu, Y. (2008). Strong convergence theorems for nonexpansive semigroup in Banach spaces. *Journal of Mathematical Analysis and Applications*, 338, 152–61.
[62] Song, Y. & Chen, R. (2006a). Strong convergence theorems on an iterative method for a family of finite nonexpansive mappings. *Applied Mathematics and Computation*, 180, 275–87.
[63] Song, Y. & Chen, R. (2008). Strong convergence of an iterative method for non-expansive mappings. *Mathematische Nachrichten*, 281, 1196–204.
[64] Xu, H. K. (2002). Iterative algorithms for nonlinear operators. *Journal of the London Mathematical Society*, 66, 240–56.
[65] Xu, H. K. (2004). Viscosity approximation methods for nonexpansive mappings. *Journal of Mathematical Analysis and Applications*, 298 (1), 279–291.
[66] Song, Y. & Chen, R. (2007). Viscosity approximate methods to Cesàro means for nonexpansive mappngs. *Applied Mathematics and Computation,* 186 (2), 1120–1128.
[67] Yao, Y., Liou, Y. C. & Zhou, H. (2009). Strong convergence of an iterative method for nonexpansive mappings with new control conditions, *Nonlinear Analysis*. *Theory, Methods and Applications*, 70 (6), 2332–2336.
[68] Song, G. & Zhang, H. (2011). Reproducing kernel Banach spaces with the ℓ1 norm II: Error analysis for regularized least square regression**.** *Neural computation,* 23 (10), 2713–2729.
[69] Liu, L. S. (1995). Ishikawa and Mann iteration process with errors for nonlinear strongly accretive mappings in Banach spaces. *Journal of Mathematical Analysis and Applications*, 194, 114–25.
[70] Xu, H. K. (2003). An iterative approach to quadratic optimization. *Journal* of *Optimization Theory* and *Applications*, 116, 659–78.
[71] Matsushita, S. & Kuroiwa, D. (2004). Strong convergence of averaging iterations of non-expansive nonselfmappings. *Journal of Mathematical Analysis and Applications*, 294, 206–14.
[72] Lions, P. L. (1977). Approximation de points fixes de contraction. *Comptes Rendus* Academie *Sciences Paris A B*, 284, 1357–9.