Buca Eğitim Fakültesi Dergisi, 2022, sayı 54, s.1461-1479

The Journal of Buca Faculty of Education, 2022, issue 54, p. 1461-1479

Araştırma Makalesi

Research Article

Üstel Fonksiyonların Öğrenimine Yönelik Bir Varsayımsal Öğrenme Yolu*

A Hypothetical Learning Trajectory for Learning Exponential Functions

Ali Özgün Özer , *Esra Bukova Güzel*[2]

[1] *Sorumlu Yazar, Doktora Öğrencisi, Matematik ve Fen Bilimleri Eğitimi Anabilim Dalı, Eğitim Bilimleri Enstitüsü, Dokuz Eylül Üniversitesi, Türkiye, ali.ozgun.ozer@gmail.com, (https://orcid.org/0000-0002-4204-9115)*

[2] *Prof. Dr., Matematik ve Fen Bilimleri Eğitimi Anabilim Dalı, Buca Eğitim Fakültesi, Dokuz Eylül Üniversitesi, Türkiye, esra.bukova@deu.edu.tr , (https://orcid.org/0000-0001-7571-1374)*

Geliş Tarihi: 24.10.2022 ***Kabul Tarihi:*** 11.12.2022

ÖZ

Bu çalışma üstel fonksiyonların kavramsal öğrenimine odaklanıldığı, öğretim sürecinde teknoloji destekli modelleme etkinlikleri kullanıldığı, etkinlikleri oluşturma ve uygulama sürecinin gerçekçi matematik eğitimi ve radikal yapılandırmacılık teorilerine dayandırıldığı bir araştırmadır. Çalışmanın amacı, bu etkinliklerin uygulamaları esnasında bir öğrencinin öğrenme yolunu ortaya çıkarmaktır. Çalışma bir öğrenci ile yürütülen ve bu öğrencinin öğrenme yolunun ortaya çıkarılmaya çalışıldığı bir öğretim deneyidir. Uygulama öncesinde üstel fonksiyonların öğrenimine yönelik varsayımlar belirlenmiştir. Bu varsayımlar doğrultusunda, gerçekçi matematik eğitimi perspektifi altında üstel fonksiyonların öğrenimine yönelik bir varsayımsal öğrenme yolu belirlenmiş ve bu öğrenme yoluna uygun bir etkinlik dizisi tasarlanmıştır. Etkinlik dizisi yaklaşık 2 saatlik 4 oturumda uygulanmış ve öğrencinin öğrenme yolu ortaya çıkarılmıştır. Öğrencinin öğrenme yolu ile varsayımsal öğrenme yolu birbirine paralellik göstermiştir. Dolayısıyla tasarlanan etkinlik dizisi ile öğrencinin varsayımsal öğrenme yolundaki bilişsel süreçlerden geçtiği ve başarılı bir şekilde hem kavramsal hem de işlemsel boyutta üstel fonksiyon kavramını öğrendiği gözlemlenmiştir. Bu doğrultuda daha fazla öğrenci veya grup çalışmaları ile bu etkinlik dizisi uygulanabilir ve öğrencilerin öğrenme yolunun varsayımsal öğrenme yoluna uygunluğu incelenebilir.

Anahtar Kelimeler: Varsayımsal öğrenme yolu, üstel fonksiyon, öğretim deneyi.

ABSTRACT

This study focuses on the conceptual learning of exponential functions, uses technology-supported modeling tasks in the teaching process. The process of creating and applying the tasks is based on realistic mathematics education and radical constructivism theories. The aim of the study is to reveal a student's learning trajectory during the implementation of these tasks. The study is a teaching experiment conducted with a student and trying to reveal the learning trajectory of this student. Before the implementation, the assumptions for the learning of the exponential functions were determined. In line with these assumptions, a hypothetical learning trajectory for the learning of exponential functions was determined under the perspective of realistic mathematics education and an task sequence suitable for this learning trajectory was designed. The series of tasks was implemented in 4 sessions of approximately 2 hours and the learning trajectory of the student was revealed. The student's learning trajectory and the

*Bu çalışma birinci yazarın ikinci yazar danışmanlığında yürüttüğü doktora tezinden üretilmiştir.

hypothetical learning trajectory were parallel to each other. Therefore, with the designed activity series, it was observed that the student went through the cognitive processes in the hypothetical learning trajectory and successfully learned the concept of exponential function in both conceptual and operational dimensions. In this direction, this series of activities can be applied with more student or group work and the compatibility of the students' learning path with the hypothetical learning path can be examined.

Keywords: Hypothetical learning trajectory, exponential function, teaching experiment.

GİRİŞ

Fonksiyonlar ortaöğretim matematik derslerinin önemli bir kısmını oluşturmaktadır. Her sınıf seviyesinde fonksiyonlar farklı başlıklar altında öğretim programında yer almaktadır. Oldukça önemli olan fonksiyon kavramının temelinde hangi matematiksel fikirlerin olduğu ve bu fikirlerin nasıl öğrencilere keşfettirileceği her zaman bir araştırma konusu olmuştur. Fonksiyon kavramının gelişimine bakıldığında 'çokluklar arasında yapılan eşleştirme', 'değişkenler arasındaki ilişki' ve 'girdileri çıktılara dönüştüren dinamik bir süreç' olarak ele alındığı görülmüştür (Bayazit ve Aksoy, 2013). Bu anlamlar birbirleri ile oldukça yakın ilişkilidir ve günümüzde kullanılan fonksiyon tanımı hepsini kapsamaktadır. Confrey, Smith, Piliero ve Rizzuti (1991) fonksiyonel ilişkileri kavramsallaştırmak için iki temel yaklaşımı ele almaktadır. Bunlar 'eşleme yaklaşımı' (correspondence) ve 'eş zamanlı değişim yaklaşımı' bir diğer değişle 'kovaryasyon' (covariation) yaklaşımıdır. Eşleme yaklaşımı tanım (A) ve görüntü (B) kümesi arasındaki ilişkiyi belirtir ve A kümesindeki her x için B kümesinde sadece bir y değeri vardır. Bu yaklaşım fonksiyonun kuralına ve x den f(x)'e doğru bir yönlülüğe vurgu yapar. Eşleme yaklaşımı bir bağıntının fonksiyon olup olmaması ile ilgili olup modern kitap tanımlarında yer alan tanım genelde eşleme yaklaşımını ele almaktadır. Kovaryasyon yaklaşımı (eş zamanlı değişim) ise bir alternatif sunar. Carlson, Jacobs, Coe, Larsen ve Hsu (2002) kovaryasyon yaklaşımını birbiriyle eş zamanlı olarak değişen iki çokluğu koordine etmek olarak tanımlar. Bu yaklaşıma göre tanım kümesindeki elemanlar toplamsal bir şekilde değişirken görüntü kümesindeki elemanlar da toplamsal olarak değişiyor ise bu fonksiyon bir doğrusal fonksiyondur ve değişkenler arasında doğrusal bir ilişki vardır (bkz. Tablo 1).

Tablo 1. Doğrusal İlişki

Tanım	Görüntü
1	3
2	6
3	9
…	
x	$f(x) = 3x$

Tanım kümesindeki elemanlar toplamsal değişirken görüntü kümesindeki elemanlar çarpımsal bir şekilde değişiyor ise bu ilişki üstel bir ilişkidir ve üstel fonksiyonlar ile açıklanır (bkz. Tablo 2). Dolayısıyla kovaryasyon yaklaşımı fonksiyonun türü hakkında bize daha çok bilgi vermektedir.

Tablo 2. Üstel İlişki

Tanım	Görüntü
1	3
2	9
3	27
…	
x	$f(x) = 3^x$

Fonksiyon kavramının tanıtımı için anlamlı bağlamsal problemler kullanılmalıdır (Confrey & Smith, 1991). Fonksiyon kavramına ilişkin anlam, bağlam etkileşimi (interaction of context), çoklu temsil formları (multiple representational forms) ve teknolojik araçlar (technological tools) vasıtasıyla yaratılır (Confrey, 1991, 1992; Rizzuti, 1991; Rizzuti ve Confrey, 1988; Smith ve Confrey, 1992; Confrey vd. 1991; Borba, 1993; Borba ve Confrey, 1992). Bağlam etkileşimi ile işlemlerden ziyade öğrencilerin yaşantılarında anlamlı olabilecek bağlamlar sunulması ve bu bağlamlar üzerinden fonksiyon kavramının inşa edilmesi önemlidir. Fonksiyonların tablo, grafik, şema, cebirsel ifadeler gibi farklı gösterim şekillerinin olması bu gösterimlerin ele alınması ve ilişkilendirilmesi fonksiyonun anlaşılmasında etkili olmaktadır. Ayrıca farklı gösterim şekilleri arası geçiş yapılması öğrencilerin fonksiyonel düşünme becerilerini geliştirebilmektedir. Farklı gösterim şekillerinin birlikte kullanımı zor olarak görülse de teknolojinin gelişimi ile bazı yazılım veya uygulamalar (Geogebra veya Desmos gibi) ile tüm gösterim şekilleri aynı anda görebilme imkanı sunmaktadırlar.

Birçok araştırma fonksiyonların ve bazı türlerinin anlaşılmasında öğrencilerin zorluk yaşadığını göstermektedir. Örneğin Confrey ve Smith (1995) ve Weber (2002a, 2002b) üstel ve logaritma fonksiyonlarındaki anlayışın oldukça sınırlı olduğunu göstermektedir. Confrey ve Smith'e (1994, 1995) göre üstel fonksiyonun kökeni tekrarlı toplamalardan (repeated addition) ziyade tekrarlı çarpma (repeated multiplication) eylemidir. Fakat bu tanım üstel ifadeler ve logaritma ile ilgili olan akıl yürütmeleri gerçekleştirmek için yetersiz kalmaktadır (Confrey & Smith, 1995). Örneğin üslü sayıları sadece tekrarlı çarpma olarak gören öğrenciler için 2^{-1} ve $2^{1/2}$ ifadeleri anlamsız gelebilir. Çünkü bir sayı kendisiyle -1 kez veya yarım kez çarpılamaz. Dolayısıyla üstel fonksiyonları sadece tekrarlı çarpma olarak görmemek gerekir. Weber (2002a) öğrencilerin üstel fonksiyon kavramını öğrenmelerinde en mantıklı yolun; ilk olarak üstel fonksiyonların tanım kümesini doğal sayılar ile sınırlamak ve ardından bu anlayışı genelleştirmek olduğunu savunmaktadır.

Yapılan çalışmalar üstel fonksiyonların öğretiminde;

- Bağlam etkileşimi, çoklu temsil formları ve teknolojik araçların (özellikle grafik hesap makinelerinin) olması (Rizzuti and Confrey, 1988; Confrey vd., 1991; Confrey, 1991, 1992; Rizzuti, 1991; Smith and Confrey, 1992; Borba and Confrey, 1992; Borba, 1993)
- Fonksiyonel ilişkileri kavramsallaştırmak için iki temel yaklaşım olan eşleme (correspondence) ve eş zamanlı değişim (covariation) yaklaşımlarının ele alınması (Confrey vd.1991)
- Eş zamanlı değişim yaklaşımının fonksiyon kavramının anlaşılmasında daha etkili olmasından dolayı bu kavramın ve bu kavrama bağlı olarak değişim oranı ve türlerinin üzerinde durulması (Confrey ve Smith, 1991; Rizzuti, 1991; Confrey vd., 1991; Smith ve Confrey, 1994; Ellis, Ozgur, Kulow, Dogan, Williams & Amidon 2013)
- Toplamsal olarak değişen bir bağımsız değişkene karşılık olarak çarpımsal olarak değişen bir bağımlı değişken olması (Confrey ve Smith, 1994, 1995; Doerr, 2006; Ellis vd., 2013)
- Üstel fonksiyon anlayışının öncelikle doğal sayılarla inşa edilip sonrasında bu anlayışın genelleştirilmesi (Weber, 2002a)
- Üstel fonksiyonların yapılandırılmasında tablo ile gösterimin olması (Rizzuti, 1991; Confrey, 1993; Confrey ve Smith, 1994, 1995; Doerr, 2006; Ellis vd., 2013)
- Grafik hesap makinesinin olumlu katkılarından dolayı kullanılması gerektiği (Confrey ve Smith, 1994, 1995; Doerr, 2006), özel olarak Geogebra (Ellis vd., 2013) ve Desmos (Koştur ve Yılmaz, 2017) uygulamalarının kullanılması,

gerektiğini ortaya koymuştur. Üstel fonksiyonların öğretimi için bu bakış açıları bütünleştirildiğinde anlamlı öğrenmelerin oluşacağı düşünülmektedir.

Bu çalışmada fonksiyon türlerinden biri olan üstel fonksiyon kavramına odaklanılarak alanyazında sunulan eş zamanlı değişim ve eşleme yaklaşımları temelinde üstel fonksiyonların öğretimi için teknoloji destekli modelleme etkinlikleri kullanılmıştır. Çalışmanın amacı bu etkinliklerin uygulamaları esnasında öğrencinin öğrenme yolunu ortaya çıkarmaktır. Bu hususta çalışma bir öğrencinin üstel fonksiyon kavramını yapılandırırken nasıl bir öğrenme süreci geçirmektedir? sorusuna yanıt aramaktadır.

1.1.Kavramsal Çerçeve

Çalışmanın kuramsal temelini Gerçekçi Matematik Eğitimi (GME) ve Radikal Yapılandırmacılık teorileri oluşturmaktadır. GME teorisi bir matematik öğretimi yaklaşımı ve matematik alanına özel bir eğitim teorisidir (Treffers, 1987). Bu teoriye göre matematik öğrenimi gerçekçi yaşam durumlarıyla ilişkili olmalıdır. GME teorisinde öğrenciler matematiksel kavramları gerçek yaşamdan problem durumlarına uyarlayıp, geliştirerek öğrenmelidirler (Van den Heuvel-Panheuizen, 1996). GME teorisinde matematiksel bir bilginin oluşum süreci "matematikleştirme" (mathematization) olarak adlandırılır (Freudenthal, 1973). Treffers (1987) matematikleştirme sürecini; "yatay matematikleştirme" ve "dikey matematikleştirme" olmak üzere iki sınıfa ayırır. Yatay matematikleştirme ile gerçek yaşam durumlarından ele alınan bir bağlamı sembollerle ifade edip matematik dünyasına geçişi; dikey matematikleştirme ile de matematiksel işlemlerin derinleştirilmesi ve matematik kavramlarının arkasında yatan fikre ulaşmayı temsil etmektedir. Üstel fonksiyonların kavramsal olarak öğrenilmesi için de radikal yapılandırmacılık teorisi (Von Glasersfeld, 1987) dikkate alınmıştır. Bu teoriye göre öğrenme bireyseldir ve her öğrenme farklıdır. Dolayısıyla öğrencilerin bu kavramları nasıl öğrendikleri ve hangi öğrenme yollarından geçtikleri önem taşımaktadır. Varsayımsal öğrenme yolları hem önemli matematiksel fikirleri kazandırmayı amaçlar hem de bu yol boyunca öğrenmeyi desteklemek ve organize etmek için kullanılabilecek özel bir araçtır (Simon 1995; Clements ve Sarama, 2004).

Çalışmada üstel fonksiyon kavramının öğretimi için GME ve radikal yapılandırmacılık teorileri temel alınarak etkinlikler oluşturulmuştur. Ayrıca gerçekleştirilen kavram analizinden sonra bu kavrama ilişkin varsayımlar belirlenmiş ve GME perspektifi altında bir varsayımsal öğrenme yolu oluşturulmuştur (bkz. Tablo 3).

Tablo 3. GME Perspektifi Altında Üstel Fonksiyona Yönelik Varsayımsal Öğrenme Yolu

1. Öğretim Bölümü - Yatay Matematikleştirme	1. Sezgisel İlişkilendirme • Verilen bağlam ile üstel büyüme arasında sezgisel ilişki kurar. 2. Gerçek yaşam durumunun bağlamsal modelini oluşturma • Verilen gerçek yaşam durumundan tekrarlı çarpma fikrini oluşturma. • Gerçek yaşam durumunun bağlamsal modelini tekrarlı çarpımın sonucu olarak 10^x veya 10^n şeklinde tanımlar. 3. Bağlamsal Modeli Detaylandırma • Bağlamsal modeldeki değişkene (x) uygun değerleri tam sayılar kümesi olarak belirler. • Bağlamsal modeli farklı temsil biçimleri (tablo ve grafik) ile gösterir. 4. Grafiksel Keşif • Tam sayılar kümesine uygun olarak ($x \in N$) grafiğin kesikli olacağını keşfeder. • Kesikli grafikte noktaları sıklaştırarak grafiğin sürekli olacağını sezgisel olarak anlar. • Reel sayılar kümesine uygun olarak ($x \in R$) grafiğin sürekli olacağını keşfeder. • Grafikte x'lerin az bir değişimine karşılık y'lerde çok büyük değişimler olduğunu keşfeder.

2. Öğretim Bölümü - Dikey Matematikleştirme	5. Bağlamsal Modeli Genelleştirme (Genel Modeli Oluşturma) • Taban için farklı sayılar verip deneyerek 10^x şeklinde olan bağlamsal modeli a^x şeklinde geneller. 6. Teknoloji Yardımıyla Yorumlama • Desmos online uygulamasında bağlamsal modelin grafiği çizer ve kendi çizimi ile ilişkilendirir. Benzerlik ve farklılıklarını belirler. • Genel modelin grafiğini bir a sürgüsü atayarak çizer ve a'nın sayısal değerlerine göre grafiğin nasıl değiştiğini yorumlar ve üstel değişim ile ilişkilendirir. • Grafiklerin artanlık ve azalanlık durumunu a ile ilişkilendirir. 7. Genel Modelden Formal Modele Geçiş • Genel modelin fonksiyon belirtip belirtemeyeceğini tartışır. • Modeli $f(x) = a^x$ şeklinde bir fonksiyon olarak tanımlar, tanım ve görüntü kümelerini $f: R \rightarrow R^+$ şeklinde belirtir. • Grafikler üzerinden ve ölçekleme bağlamı gereğince a sabitinin alamayacağı değerleri açıklar. • $f: R \rightarrow R^+$, $f(x) = a^x$, $a > 0$ ve $a \neq 1$ şeklinde üstel fonksiyonu tanımlar.

Varsayımsal öğrenme yolu iki öğretim bölümünden oluşmaktadır. İlk öğretim bölümü GME teorisinin yatay matematikleştirme aşamasına, ikinci öğretim bölümü ise dikey matematikleştirme aşamasına karşılık gelmektedir. Yatay matematikleştirme kısmında gerçek yaşam bağlamından yola çıkılarak bir bağlamsal model elde edilmektedir. Dikey matematikleştirme kısmında da bu bağlamsal modelleme genelleştirilmekte, teknoloji yardımıyla yorumlanmakta ve formal modele geçiş sağlanmaktadır.

YÖNTEM

Çalışma üstel fonksiyonların öğretimine yönelik bir dizi etkinlik uygulamasını içermektedir. Bu sebeple çalışmada öğretim deneyi kullanılmıştır. Öğretim deneyi, öğrencilerin matematik bilgilerini ve matematik öğretimi bağlamında nasıl öğrenilebileceğini araştırmak için tasarlanmış bir tekniktir (Cobb & Steffe, 1983; Hunting, 1983). Bir öğretim deneyinin temel hedefi, araştırmacının çalışmaya dahil olan öğrencilerin matematiksel bilgilerini ve bu bilgileri nasıl yapılandırdıklarını incelemesidir (Steffe, 1991). Öğretim deneyleri öğrencilerin akıl yürütmelerini ortaya çıkarmak için kullanılmaktadır ve sınıf düzeyinde, bir grupla veya bireysel olarak yürütülebilmektedir. Grup veya bireysel olarak gerçekleştirilen öğretim deneylerinde öğrencilerin bireysel bilişsel süreçleri incelenir (Steffe, 1991; Steffe & Thompson, 2000). Bu çalışmada da öğrencilerin bireysel akıl yürütmeleri ve öğrenme yol haritaları ortaya çıkarılmak istendiğinden dolayı öğretim deneyi yöntemi kullanılmıştır ve öğrencilerle bireysel olarak çalışılmıştır.

2.1.Katılımcı

Çalışmaya katılacak öğrenci seçilirken ölçüt örnekleme yöntemi kullanılmıştır. Katılımcıyı belirlemedeki ölçütler; öğrencinin fonksiyon, üslü sayı ve örüntü kavramlarını biliyor fakat üstel fonksiyon kavramını bilmiyor olması, 11. sınıf öğrencisi veya 11. sınıfı yeni bitirmiş 12. sınıf matematik derslerini herhangi bir yol ile öğrenmemiş olması (çevrimiçi ortamlar, okul, kurs, özel öğretmen gibi), çalışmaya gönüllü olarak katılması, kendisinin ve velisinin çalışma için gerekli izinleri vermesi olmuştur. Bu çalışma birinci yazarın ikinci yazar danışmanlığı ile yürüttüğü doktora tez çalışmasının pilot çalışmasıdır. Pilot çalışması 11.sınıfı yeni bitirmiş ve 12. sınıf konularına dair herhangi bir eğitim almamış bir öğrenci ile yürütülmüştür. Makalede bu öğrencinin bireysel bilişsel süreçleri incelenmiştir ve öğrenme yolu açıklanmaya çalışılmıştır.

2.2.İşlem Basamakları

Çalışmada üstel fonksiyonların kavramsal öğrenimini sağlayacak bir varsayımsal öğrenme yolu oluşturulmak amaçlandığından öncelikle kavramın kendisine odaklanılmıştır. Bu amaç doğrultusunda Thompson (2008)'ın öğrencilerin belirli bir fikri ne şekilde öğrenebileceklerini, hangi zihinsel işlemlerin gerçekleştirilmesi gerektiğini belirlemek için kullandığı kavramsal analiz tekniği uygulanmıştır. Üstel fonksiyona ilişkin alanyazın taraması yapılmış ve literatür taramasının ardından ülkemizde kullanılan üç adet ders kitabı incelenmiştir. Yazılı dokümanlar incelendikten sonra farklı lise türlerinde (Anadolu Lisesi, Sosyal Bilimler Lisesi, Fen Lisesi, Özel Lise, BİLSEM) görev yapan 5 matematik öğretmeni ile görüşme yapılmış ve üstel ve logaritmik fonksiyonlara yönelik öğretimsel bakış açıları belirlenmiştir. Bu aşamaya kadar elde edilen veriler doğrultusunda, GME ve radikal yapılandırmacılık teorilerine de dayandırılarak üstel fonksiyona ilişkin varsayımlar belirlenmiş ve bir varsayımsal öğrenme yolu oluşturulmuştur.

Varsayımsal öğrenme yolunu oluşturma ve etkinlik dizisini oluşturma aşamalarında yukarıda sözü geçen gereklilikler ve çalışmanın teorik yapısını oluşturan GME ve radikal yapılandırmacılık teorileri dikkate alınmıştır. Modelleme etkinlikleri Desmos uygulaması ile yapılandırılmıştır. Oluşturulan teknoloji destekli modelleme etkinlikleri iki uzmana gösterilmiş ve görüşleri alınmıştır. Görüşler doğrultusunda etkinlikler revize edilmiştir. Etkinlikler son hale getirildikten sonra bir öğrenci ile pilot çalışması yürütülmüştür. Pilot çalışma ön görüşme, uygulama ve değerlendirme olmak üzere üç bölümden oluşmaktadır. Ön görüşme ile öğrencinin fonksiyon, üslü sayı ve örüntü kavramlarına ilişkin ön bilgilerini ölçmek amaçlanmış olup varsa eksiklikleri giderilmeye çalışılmıştır. Uygulama aşamasında iki öğretim bölümü tasarlanmış ve etkinlikler, Desmos uygulamasının sınıf etkinliği özelliği kullanılacak şekilde planlanmıştır. İlk öğretim bölümünde gerçekçi matematik eğitimi teorisinin temel bileşenlerinden yatay matematikselleştirme yaklaşımı dikkate alınmış olup öğrencilerden gerçek yaşam durumunun modelini yani bağlamsal modeli oluşturmaları istenmiştir. İkinci öğretim bölümünde ise dikey matematikselleştirme yaklaşımı dikkate alınarak öğrencilerin bağlamsal modeli geliştirip genelleştirmeleri istenmiştir. Değerlendirme aşamasında ise farklı gerçek yaşam bağlamları içeren iki adet modelleme etkinliği kullanılmıştır. Tüm aşamalar yaklaşık iki saat sürmüştür ve bir oturum ön görüşme, iki oturum uygulama ve bir oturum değerlendirme olmak üzere toplamda dört oturum gerçekleştirilmiştir.

2.3.Veri Toplama ve Veri Analizi

Üstel fonksiyonların öğretimi için dört oturumdan oluşan bir etkinlik dizisi tasarlanmış olup her biri yaklaşık iki saatlik oturumlar video kamera ile kaydedilmiş ve transkript edilmiştir. Öğrenci uygulamayı bilgisayar destekli bir ortamda gerçekleştirmiştir ve öğrenci yanıtları Desmos uygulaması üzerinde de kayıt altına alınmıştır. Veriler video transkriptlerinden, araştırmacı gözlem notlarından ve Desmos uygulamasında öğrencinin verdiği yanıtlardan oluşmaktadır. Veriler betimsel analiz yoluyla analiz edilmiştir. Veriler Thompson'ın (2008) kavramsal analizinin tanımına uygun olarak, tanımlanmış örnekleri, öğrencilerin şemalarının ve düşünce şekillerinin hipotezlerini oluşturma çabasıyla analiz edilmiştir. Çalışmaya katılan öğrenci 'Emre' kod adı ile verilmiştir. Transkript kesitlerinde A ile araştırmacı, E ile Emre kısaltmaları kullanılmıştır.

Çalışmada kullanılan modelleme etkinliği (bkz. Şekil 1) 'Powers of Ten' adlı belgeselden yola çıkılarak oluşturulmuştur. Bu belgesel bir ailenin görseli ile başlamaktadır ve video ilerledikçe bu aileye önce uzaklaşılmakta sonra ise yakınlaşılmaktadır. Her yaklaşma ve uzaklaşma işlemleri esnasında uzaklık veya genişlik 10 katlık değişime uğramaktadır. Bu videodan ortaya çıkan temel matematiksel fikir her uzaklaşma işleminde genişliğin 10 kat büyümesi, her yaklaşma işleminde genişliğin 10 kat küçülmesinin fark edilmesi ve bu değişimin üstel bir değişim olmasıdır.

'Powers of Ten' adlı belgesel piknik yapan bir aile ile başlıyor ve video ilerledikçe ailenin görüntüsü değişiyor. Bu videoyu izlediğinde neler dikkatini çekti? Etkinlik sence hangi matematik konularıyla alakalı olabilir? Yaklaşma ve uzaklaşma işlemleri için neler söyleyebilirsin?

Şekil 1. Yaklaşma / Uzaklaşma Etkinliği

Modelleme etkinliği ile öğrencilerin gerçek yaşam bağlamının üstel değişimi içerdiği, durumun bağlamsal modelinin bir üslü sayı olduğu, yaklaşma ve uzaklaşma işlem sayısını bir değişken olarak belirlendiği, işlem sayısı ile genişliğin eş zamanlı olarak üstel bir değişime uğramasıyla bir üstel fonksiyon belirttiği fikirlerini keşfetmeleri sağlanmaktadır.

BULGULAR

Bu kısımda Emre'nin öğrenme yolunun nasıl ortaya çıktığı ayrıntılı bir şekilde verilecektir. Ardından Emre'nin öğrenme yolu ile araştırma başında oluşturulan varsayımsal öğrenme yolu arasında karşılaştırma yapılacaktır.

3.1.Emre'nin Öğrenme Yolu

Bir öğrencinin öğrenme yolunun ortaya çıkarılmaya çalışıldığı bu çalışmaya katılan Emre ile ilk olarak bir ön görüşme yapılmıştır. Ön görüşmede sorulan sorularla öğrencinin üslü sayılar, örüntü ve fonksiyon kavramları hakkındaki bilgilerinin ne düzeyde olduğu belirlenmeye çalışılmıştır. Yapılan analizler sonucunda öğrencinin ön bilgilerinin eksik olmadığı görülmüştür. Bu durumda öğrenci ile uygulama aşamasına geçilmiştir. Bu aşamada öğrencinin yatay ve dikey matematikselleştirmesini sağlayacak iki öğretim bölümü tasarlanmıştır. Birinci öğretim bölümünde gerçek yaşam durumunun bağlamsal modelini oluşturması, ikinci öğretim bölümünde de bağlamsal modeli genelleştirerek genel modeli oluşturması beklenmiştir. Birinci öğretim bölümü 'Powers of Ten' belgeselinden bir kesit izletilerek başlatılmıştır. Video izledikten sonra öğrenci etkinliğin üslü sayılar ile ilgili olduğunu fark etmiştir. Videodan sonra öğrenciye 'Yaklaşma / Uzaklaşma' isimli modelleme etkinliği sunulmuştur. Emre videoda izlediği üzere yaklaşma ve uzaklaşma bağlamlarını üslü sayılar ile ilişkilendirmeye başlamıştır. Uzaklaşma bağlamını 10'un pozitif kuvvetleri ile yaklaşma bağlamını ise 10'un negatif kuvvetleri ile ilişkilendirmiştir. Bu durumun matematiksel modelini 10^n olarak belirtmiş ve n'in tekrarlama sıklığı olduğunu ifade etmiştir.

E: Yaklaşma ve uzaklaşma işlemleri ile uzaklık arasındaki ilişkiyi açıklamam isteniyor. Iıııı. Uzaklaşırken üssü pozitif oluyor, yaklaşırken negatiflere iniyor.

A: Yaklaşma ve uzaklaşma arasındaki fark ne?

E: Yaklaşınca kuvvet eksi oluyor, çünkü üzeri eksi olunca değer küçülüyor. Yani 10^{-50} sayısı $1/10^{50}$ oluyor. 1/n de n arttıkça sayı küçülür. Bu da oldukça küçük bir sayı.

A: Bu durumu nasıl genelleyebiliriz? Matematiksel olarak nasıl ifade ederiz?

E: 10^n şeklinde yazarım. 10^n ifadesinde n sayısı arttıkça uzaklaşırız, n sayısı azaldıkça yakınlaşırız.

A: n için başka ne söyleyebiliriz?

E: n kesirli olmayacak. Tam sayı olur.

A: n neden kesirli olamaz?

E: n neden kesirli olamaz düşüneyim. Şey… n kesirli olursa köklü ifade olur. Ama eksiler kök içinde olamaz.

A: 10^n ne anlama geliyor?

E: Uzaklıklar 10 kat 10 kat değişiyor. n de kaç kere yaklaşıp uzaklaştığımız.

Öğrenci bağlamsal modeli doğru bir şekilde oluşturmuştur. Ayrıca 10^n modelindeki n değeri için sadece tam sayılar kümesinden değerler verebileceğimizi belirtmiştir. Gerçek yaşam bağlamı göz önüne alındığında bağlamsal modeldeki değişkene tam sayılar kümesinden değer verilmesi öğrencide beklenen bir sonuçtur. Öğrencinin bu sonuca ulaşmasının ardından bağlamsal modelin bir grafiği çizmesi istenmiştir. Aşağıda bu süreçten bir kesit verilmiştir.

(Emre 5 tam sayı değeri belirliyor ve bu tam sayılara karşılık gelen noktaları grafik üzerinde önce sürekli bir doğrusal çizgi ile birleştiriyor. Sonra silip noktalardan oluşan bir grafik çiziyor.)

E: Direkt nokta nokta mı çizeyim? Çünkü sadece o değerler var.

A: O ara değerler yok mu?

E: Var da benim oluşturduğum tabloda yok.

A: Grafiğin böyle olduğunu nasıl anladın?

E: Çünkü buradaki (0,1 ile 0,001) fark 0,99 kadar, buradaki (0,1 ile 1) fark 0,9 kadar. Sürekli artıyor yani.

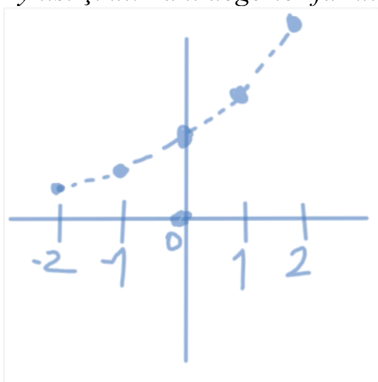
A: Yani ilk çizdiğin gibi (doğrusal) çizsek olmaz mıydı?

E: Olmazdı. 10 kat 10 kat diye artıyor zaten hep. Hep 10 artsaydı mesela doğrusal olacaktı.

Öğrenci bağlamsal modeldeki n değeri için birkaç tam sayı değeri vermiş ve bu tam sayı değerlerine karşılık gelen noktaları grafik üzerinde belirtmiştir. Bu noktaları önce sürekli bir eğri ile birleştirmiş sonrasında sürekli eğriyi silip tabloda yer alan noktalardan oluşan bir eğri çizmiştir. Bu durum öğrenciye sorulduğunda n değerinin bağlama göre tam sayılardan oluşması gerektiğini ve sayı doğrusu üzerindeki tam sayıları göstermek için de tam sayı çiftlerinden oluşan noktaları içeren bir grafik çizmesi gerektiğini söylemiştir. Emre grafiği önce doğrusal bir şekilde çizmiş, sonra da değerler arasındaki değişimi inceleyerek grafiğin doğrusal olmaması gerektiğini keşfetmiştir.

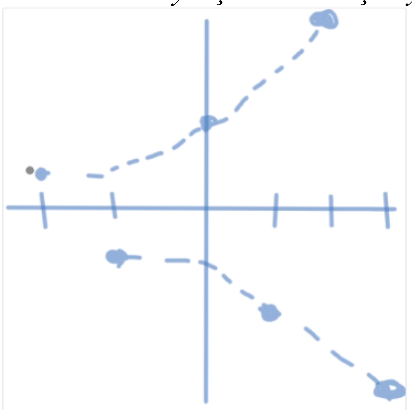
Birinci öğretim bölümünde öğrenci bağlamsal modeli oluşturmuş ve modeli açıklayabilmiştir. İkinci öğretim bölümünde ise bu bağlamsal modeli genelleştirmesi ve bir fonksiyon olarak ifade etmesi beklenmiştir. İkinci öğretim bölümünde öncelikle öğrenciden bağlamda yer alan 10'un katları şeklindeki üstel büyüme yerine başka bir sayı olsaydı üstel büyümenin nasıl olacağı sorulmuş ve farklı sayılar için tablolar oluşturup uygun grafikler çizmesi istenmiştir. Öğrenci sırayla 2,-2 ve ½ sayılarını denemiştir. Tabanın 2 olduğu durumda yani 2^n için grafiğin 10^n grafiği ile oldukça benzerlik gösterdiğini belirtmiştir.

E: 10 yerine 2'yi kullandım. Aynısı çıktı. Yani değerler farklı ama şeklen aynı gibi.



Tabanı 2 olarak belirleyip grafiğini çizen Emre çizdiği iki grafiğin birbirine çok benzediğini söylemiştir. Tabanın değerinin pozitif tam sayı olması dışında nasıl bir grafik olacağı sorulduğunda taban değeri için -2 sayısını belirlemiş ve grafiği çizmeye çalışmıştır.

A: Tamam şimdi de başka bir değer ver.
E: -2 olsun bu sefer.
A: Tamam olur bir dene hadi.
(Öğrenci noktasal olarak yerleştiriyor ve x ekseninin üstündeki noktaları çizgilerle birleştiriyor. x ekseninin altındaki noktaları da aynı şekilde birleştiriyor.)

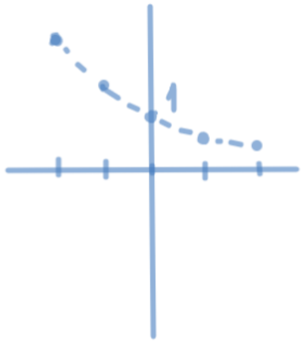


A: Grafiğin bu şekilde mi olması gerekiyor?
E: Şöyle olacaktı aslında (kesikli çizgilerin sürekli çizgi ile gösterilmesi gerektiğini gösteriyor.)
A: 2 parçalı bir şey (grafik) oldu.
E: Evet.
A: Olabilir mi böyle bir şey?
E: Olabilir. Arada boşluklar var.
A: Neden bu şekilde çizdin, açıklar mısın biraz?
E: Kıvrık olduğu belli olsun diye.
A: $(-2)^x$ in grafiği bu şekilde mi hareket eder yani? 2 parçalı halinde mi?

E: Evet, parçalı. Bir üstte bir altta. Buralar (kesikli grafikleri gösteriyor) tırtıklı. Boş.
A: Oralar boş diyorsun. Oralarda değeri yok mu yani?
E: Yok. Düz (sürekli bir grafik demek istiyor) çizseydim değeri olurdu.

Öğrenci tabanın -2 olduğu durumda grafiği tam olarak nasıl çizeceğini bilememiştir ve grafiği parçalı olarak göstermeyi seçmiştir. Öğrenci değerler arası değişimin doğrusal olmadığını fark etmesine rağmen belirlediği noktaları birleştirememiştir. Etkinliğin devamında öğrenciden pozitif ve negatif tam sayıları inceledikten sonra taban için rasyonel bir sayı seçmesi istenmiştir. Emre bunun üzerine ½ sayısını seçmiştir.

E: ½ yi seçtim.
A: Tamam hadi ½ yi deneyelim. Onu da çizer misin?



E: Evet, grafik değişiyor tam tersi oluyor.
A: Nasıl yani tersi?
E: 2^n in y eksenine göre tersi yani.

Öğrenci grafik çizimi için noktalar belirleyerek bu noktaları birleştirmiş ve tabanın 1/2 olduğu durumda yani $(½)^n$ için grafiğin 2^n grafiğinin y eksenine göre tersi (y eksenine göre simetriği) olduğunu gözlemlemiştir.

Öğrenci bağlamsal model olarak oluşturduğu 10^n modelinde 10 yerine sırayla 2, -2 ve ½ değerlerini atamış ve grafiklerinin nasıl değişeceğine dair çıkarımlar yapmıştır. Sonrasında öğrenciden 'Bu ifadeyi daha genel bir şekilde yazabilir miyiz?' sorusu ile bağlamsal modeli genelleştirmesi istenmiştir.

A:10^n modelinde 10'dan farklı sayılar için denedin. Peki bu ifadeyi daha genel bir şekilde yazabilir miyiz?
E: Yazabiliriz bence.
A: Matematiksel ifade nasıl olurdu? Değişir miydi?
E: Değişirdi. Burada aslında bir sayı üzeri n oluyor. a^n yani.
A: Neden a^n dedin?
E: Çünkü a değişince grafikler de değişir. Sonuç değişir. a değişince hem grafik hem de sonuç bundan etkilenir. Bu yüzden a diye bir ifade tanımladım. Çünkü a'nın negatif, kesirli vb. olması grafiğin genel hatlarını değiştirir.

Bu aşamaya kadar öğrenci gerçek yaşam durumundan hareketle 10^n bağlamsal modelini oluşturmuş ve genelleştirerek genel modeli a^n şeklinde belirtmiştir. Öğrenci Desmos programına 10^n yazdığında Desmos'un n değeri için bir sürgü oluşturduğunu ve belirlediği n değeri için sonucu gösterip, bir grafik oluşturmadığını gözlemlemiştir. Öğrenci bunu keşfettikten sonra n yerine x değişkeni atayarak 10^x yazmayı denemiş ve grafiği inceleyebilmiştir. Ardından sırayla 2^x, $(1/2)^x$, $(-2)^x$ grafiklerini Desmos yardımıyla çizmiştir. Öğrencinin Desmos'da yaptığı bu çizimler boyunca düşünceleri aşağıdaki kesitte verilmiştir.

E: 10^x ve 2^x grafikleri benzer oldu. Iıııı, $(1/2)^x$ i çizdim. Buna (2^x i kastederek) zıt oldu. Çarpmaya göre tersi olursa işte y eksenine göre simetriği olur. $(-2)^x$ i göremedim ama.

A: $(-2)^x$ i göremedik. Neden göremedik sence?

E: Düşüneyim. Kesirli bir sayı olursa x olmuyor (tanımsız oluyor demek istedi).

A: Peki biz bunun grafiğini çizebiliyor muyuz? Desmos'da ne oldu?

E: Bazı yerler boş oluyor. Grafik çıkmıyor. Burada çizmedi çünkü x için bütün değerleri alıyor.

A: Niye arada tanımlı olduğu noktaları vermedi o zaman?

E: Belki de tanımsız diye hiçbirini çizmedi.

Desmos sayesinde 10^x ve 2^x in grafiklerinin benzer olduğunu; 2^x ile $(1/2)^x$ grafiklerinin y eksenine göre simetrik olduğunu ve $(-2)^x$ in grafiğinin çizilemeyeceğini gözlemlemiştir. Bağlamsal modelin ve farklı tabanlardaki üstel fonksiyonların grafiklerini çizdikten sonra genel modelin de grafiğini Desmos ile çizmiştir. Desmos a^x girdisi yazılınca otomatik olarak a sürgüsünü atamaktadır. Öğrenci bu a sürgüsünü hareket ettirerek a^x in grafiği hakkında yorumlar yapmıştır. Sürgünün hareketi sayesinde a sayısının değişimine göre grafiğin durumları değişmiş ve bu değişimler ortaya çıkmıştır.

A: En son elde ettiğin genel modelin neydi?

E: a^x. Desmos bir sürgü oluşturdu.

A: Sağa sola sürgüyü hareket ettir bakalım ne oluyor.

E: 0'da sadece pozitif tarafta oldu. Eksileri almadı.

A: Sağa doğru biraz daha kaydır bakalım. Neler oluyor?

E: Bir yerde grafik dönüyor.

A: Nerde dönüyor ve neden dönüyor acaba?

E: 1'den küçükken.

A: 1'den küçükken. Neden peki?

E: 1'den küçükken üs büyüdükçe sayı küçülüyor.

A: Peki 1'den büyükse ne oluyor?

E: Grafik y eksenine yaklaşıyor.

A: O zaman grafikte hangi durumlarla karşılaştık?

E: Negatif olması var, 0 olması var, 1den küçük olması ve 1den büyük olması var. -1 ile 0 arasında bir değişim var mı acaba? (Düşünüyor ve sürgüyü hareket ettiriyor)… Ama eksiler hiç yok.

Öğrenci Desmos ile çizdiği grafiği incelemiş ve sürgüyü hareket ettirerek grafiksel keşifler yapmıştır. Bu keşifler a^x grafiğinde a'nın negatif olması, 0 olması, 0 ile 1 arasında olması ve 1'den büyük olması durumlarıdır. Öğrenci tabanın sadece -2 için değil negatif bir sayı olması durumunda grafiğin oluşmadığını keşfetmiştir. Taban değerinin 1'den büyümesi durumuna göre grafiğin y eksenine giderek daha çok yaklaştığını fark etmiştir. Öğrenci a^x in grafiksel özelliklerini keşfettikten sonra kendisine bu ifadenin bir fonksiyon belirtip belirtmediği sorulmuştur. Öğrenci hem modeli hem de grafiği inceleyerek genel modelin bir fonksiyon belirteceğini söylemiştir.

A: Genel model bir fonksiyon belirtir mi belirtmez mi?

E: (Grafikleri inceliyor) a^x fonksiyon belirtir. $f(x) = a^x$

A: Burada x'e hangi değerleri verebiliriz?

E: Herhangi bir değer verebiliriz. Yani fonksiyonun tanım kümesi reel sayılar olur.

A: Peki görüntü kümesi ne olur?

E: Görüntü kümesi a'dan a'ya değişir.

A: O zaman, a hangi değerler olabilir?

E: (Tekrar grafikleri inceliyor) a negatif olamaz.

A: Ne olabilir a?

E: 0'dan büyük olabilir. a>0 ise x'in tanım kümesi reel sayılardır ve görüntü kümesi…
A: Grafiklere dönebilirsin fikir almak için.
(Öğrenci önceki grafik sayfasına dönüyor ve a sürgüsünü hareket ettiriyor.)
E: En küçük değeri 0 olamıyor ama çok yaklaşıyor.
A: Peki 0 olur mu?
E: Olmaz. Görüntü kümesi negatif de olamaz. Yani 0'dan büyük reel sayılardır.

Birinci öğretim bölümünde (yatay matematikselleştirme kısmında) 10^n modelindeki n değişkenin tam sayılardan oluştuğunu belirtirken Desmos'da grafiğini çizdikten sonra n yerine x değişkenini vermiş ve grafiğin sürekli olduğunu ve dolayısıyla tanım kümesinin reel sayılar olması gerektiğini söylemiştir. Fonksiyonun görüntüsünün de a parametresine bağlı olarak değişeceğini belirtmiştir. Grafikleri tekrar inceleyen öğrenci a değerinin pozitif reel sayı olması gerektiğini ve görüntü kümesinin de pozitif reel sayılar olması gerektiğini keşfetmiştir. Öğrenci genel modeli bir fonksiyon olarak ifade ederek bu modeli formalleştirmiştir. Formal modeli daha önce bildiği fonksiyon türlerinden farklılık göstermiştir ve bu fonksiyonun üstel fonksiyon olarak adlandırıldığı bilgisi araştırmacı tarafından verilmiştir. Öğrenci Desmos üzerinde a^x in grafiğini çizerken 4 farklı durumla karşılaşmıştır. Bu durumları tekrar inceleyerek fonksiyonun grafiklerinin artan ve azalan olduğu aralıkları belirlemiştir. Ek olarak a=1 olması durumunda grafiğin bir sabit fonksiyon olduğunu belirtmiştir. Sabit bir fonksiyonun üstel fonksiyon olup olmayacağı üzerine tartışılmıştır. Son olarak öğrenci a'nın tüm sınırlılıklarını belirtmiştir.

A: $f(x) = a^x$ ifadesi bir fonksiyondur ve bu fonksiyona üstel fonksiyon diyeceğiz. Bu fonksiyonun reel sayılardan pozitif reel sayılara gideceğini söyledin. Peki a sayısı ne söyleyebiliriz?
E: Negatif olamaz, 0 da olamaz.
A: Başka her değeri alabilir mi?
E: Alabilir.
A: Başka bir istisnai durum var mı? Grafikleri bir düşün.
E: Grafikte…
A: Fonksiyonun kuralında a değeri değiştiğinde fonksiyonun grafiği nasıl değişiyor?
E: a, 0 ile 1 arasında iken fonksiyon sürekli azalan bir fonksiyondur. a 1'den büyükken sürekli artan bir fonksiyondur. a = 1 iken de sabit fonksiyondur.
A: Sence sabit fonksiyon bir üstel fonksiyon mudur?
E: Kesişim noktaları olabilir.
A: Peki üstel fonksiyonu nasıl tanımlarsın bana?
E: a^x derim.
A: Peki sözel olarak nasıl tanımlarsın? Bizim gerçek yaşam bağlamını düşün mesela yaklaşma ve uzaklaşma durumunu.
E: Hep aynı oranda yaklaşıyor ya da uzaklaşıyor.
A: Fonksiyondaki x ler ve y ler nasıl değişiyor?
E: (Çizdiği tablolara bakıyor) x ler 1er 1er artıyor, y ler de 10 kat 10 kat artıyor.
A: Şimdi sabit fonksiyonu düşün tekrar, bu söylediklerine uyuyor mu? Ya da benzer mi?
E: Uymuyor. Çünkü hiç değişmiyor. O zaman 1 olunca üstel olmuyormuş. Yani sonuç olarak a pozitif olmalı ama 1 olmamalı. 1 olmamasının nedeni ise üstel fonksiyonlarda x'in değişimi ile y'nin değişimi arasında bir uçurum olmasıdır. Yani x + ile değişim gösterirken y, x *(çarpı işareti) ile değişim gösterir. Bu da çok hızlı bir artış olmasını sağlar. Ancak a 1 olursa fonksiyon sabit fonksiyon olur yani değişim olmaz. O yüzden a=1 olamaz.*

Öğrenci verilen modelleme etkinliğindeki gerçek yaşam durumundan hareketle üstel fonksiyonu tanımlayabilmiştir. Üstel fonksiyonun tanım ve görüntü kümeleri ve sınırlılıkları doğru bir şekilde keşfedilmiştir. Ek olarak bu fonksiyonunun bir üstel değişimi ifade ettiğini ve değişkenlerinin eş zamanlı olarak değiştiğini anlamlandırabilmiştir. Öğrenci bu sayede a=1 olması durumunda herhangi bir değişim olmadığını kavrayabilmiştir.

Uygulama aşaması öğrencinin üstel fonksiyonun anlamını, kuralını, tanım ve görüntü kümelerini ve sınırlılıklarını keşfettikten sonra tamamlanmıştır. Bir sonraki oturumda 2 adet modelleme etkinliği kullanılarak değerlendirme yapılmıştır. İlk modelleme etkinliğinde bir su bitkisinin büyümesi ile kapladığı alanı ilişkilendiren bir bağlam; ikinci etkinlikte ise bir kaktüsün zamana bağlı olarak büyümesi ve boy uzunluğu bağlamı ele alınmıştır. İki etkinlikte de öğrenci değişkenleri doğru bir şekilde belirleyebilmiş, değişimleri yorumlayabilmiş ve değişkenler arasındaki ilişkinin birer üstel değişim olduğunu fark edebilmiştir. Bu üstel değişimleri doğru bir şekilde üstel fonksiyon ile ifade etmiştir. Dolayısıyla öğrencinin üstel fonksiyonları kavramış ve değerlendirme aşamasını tamamlamıştır. Öğrencinin izlediği adımlar dikkate alınarak öğrencinin öğrenme yolu (ÖÖY) Tablo 4'deki gibi oluşturulmuştur.

Tablo 4. Öğrencinin Üstel Fonksiyonlara Yönelik Öğrenme Yolu

1. Öğretim Bölümü	1. Bağlamı sezgisel olarak üslü sayılar ile ilişkilendiriyor. 2. Uzaklaşma bağlamını 10'un pozitif kuvvetleri ile, yaklaşma bağlamını 10'un negatif kuvvetleri ile ilişkilendiriyor. 3. Bağlamsal modeli 10^n şeklinde tanımlıyor. 4. Bağlamsal modeldeki n değişkenini tam sayılar kümesi ile tanımlıyor. 5. 10^n modeline göre kesikli bir grafik çiziyor.
2. Öğretim Bölümü	6. Bağlamsal modelde yer alan üslü ifadenin tabanı için farklı değerler vererek denemeler yapıyor ve grafiklerin nasıl değişeceğine dair çıkarımlar yapıyor. 7. Negatif değerlerde grafiğin nasıl çizileceğini kestiremiyor. 8. Bağlamsal modeli genelleştiriyor ve genel modeli a^n şeklinde tanımlıyor. 9. Teknolojik ortamda (Desmos) çizilen grafikler ile kendi çizdiği grafiklerin benzerlik ve farklılıklarını belirliyor. 10. Teknolojik ortamda çizebilmek için a^n notasyonu yerine a^x notasyonunu benimsiyor. 11. Teknolojik ortamda bir a sürgüsü atıyor ve a'nın değerlerine göre grafiğin alabileceği durumları belirliyor. 12. Genel modelden formal modele geçiş yapıyor ve formal modeli bir fonksiyon olarak belirtiyor ($f(x) = a^x$). 13. Fonksiyonun tanım kümesini reel sayılar değer kümesini ise pozitif reel sayılar olarak belirtiyor. 14. a^xin $a \leq 0$ için tanımsız, $0 < a < 1$ için azalan, $a > 1$ için artan olduğunu keşfediyor. 15. Değişim oranlarından yola çıkarak üstel fonksiyonu tanımlıyor. 16. $a = 1$ durumunda fonksiyonun üstel olmayacağını gerekçeleriyle açıklıyor.

Öğrenci üstel fonksiyonu yapılandırırken birinci öğretim bölümünde ilk olarak sezgisel olarak gerçek yaşam bağlamını üslü sayılar ile ilişkilendirmiştir. Bu ilişkiyi tam sayılarla betimlemiş ve ilişkinin bağlamsal modelini 10^n şeklinde tanımlamıştır. Bu tanımdaki n değerinin tam sayı olduğunu belirtmiş ve grafiğini doğru bir şekilde çizebilmiştir. İkinci öğretim bölümünde gerçek yaşam bağlamı çeşitlendirilerek farklı durumlarda ilişkiyi yorumlamış ve matematiksel olarak ifade edebilmiştir. Elde ettiği bağlamsal modelleri Desmos ile çizerek grafiklerin özelliklerini keşfetmiştir. Desmos'un atadığı a sürgüsü ile a değerinin değişimini ve buna eş zamanlı olarak değişen fonksiyonun tanım ve değer kümelerini doğru bir şekilde belirtmiştir. Öğrenci üstel fonksiyonların tüm kural ve özelliklerini belirttikten sonra a değerinin neden 1 olamayacağını gerekçeleriyle açıklayabilmiştir. Süreç incelendiğinde öğrencinin üstel fonksiyonları ilk olarak tam sayılarda tanımladığı sonrasında reel sayılara genellediği ve tüm süreç boyunca eş zamanlı değişim yaklaşımını kullandığı görülmüştür.

3.2.Varsayımsal Öğrenme Yolu (VÖY) ile Emre'nin Öğrenme Yolunun (EÖY) Karşılaştırılması

Araştırmacı tarafından oluşturulan varsayımsal öğrenme yolunda (bkz. Tablo 3) 7 temel basamak; öğrencinin öğrenme yolunda (bkz. Tablo 4) ise 16 basamak olduğu göze çarpmaktadır. Bu basamaklar karşılaştırıldığında (bkz. Tablo 5) öğrencinin öğrenme yolu ile varsayımsal öğrenme yolunun paralellik gösterdiği söylenebilir. Öğrencinin bilişsel eylemleri varsayımsal öğrenme yoluna uygun olarak ilerlemiştir.

Tablo 5. Varsayımsal Öğrenme Yolu ile Öğrencinin Öğrenme Yolunun Karşılaştırılması

	EÖY	VÖY
1. Öğretim Bölümü	1. Bağlamı sezgisel olarak üslü sayılar ile ilişkilendiriyor.	1. Sezgisel İlişkilendirme
	2. Uzaklaşma bağlamını 10'un pozitif kuvvetleri ile, yaklaşma bağlamını 10'un negatif kuvvetleri ile ilişkilendiriyor.	1. Sezgisel İlişkilendirme
	1. Bağlamsal modeli 10^n şeklinde tanımlıyor.	2. Gerçek yaşam durumunun bağlamsal modelini oluşturma
	2. Bağlamsal modeldeki n değişkenini tam sayılar kümesi ile tanımlıyor.	3. Bağlamsal Modeli Detaylandırma
	3. 10^n modeline göre kesikli bir grafik çiziyor.	4. Grafiksel Keşif
2. Öğretim Bölümü	4. Bağlamsal modelde yer alan üslü ifadenin tabanı için farklı değerler vererek denemeler yapıyor ve grafiklerin nasıl değişeceğine dair çıkarımlar yapıyor.	5.Bağlamsal Modeli Genelleştirme (Genel Modeli Oluşturma)
	5. Negatif değerlerde grafiğin nasıl çizileceğini kestiremiyor.	5. Bağlamsal Modeli Genelleştirme (Genel Modeli Oluşturma)
	6. Bağlamsal modeli genelleştiriyor ve genel modeli a^n şeklinde tanımlıyor.	5. Bağlamsal Modeli Genelleştirme (Genel Modeli Oluşturma)
	7. Teknolojik ortamda (Desmos) çizilen grafikler ile kendi çizdiği grafiklerin benzerlik ve farklılıklarını belirliyor.	6. Teknoloji Yardımıyla Yorumlama
	8. Teknolojik ortamda çizebilmek için a^n notasyonu yerine a^x notasyonunu benimsiyor.	6. Teknoloji Yardımıyla Yorumlama
	9. Teknolojik ortamda bir a sürgüsü atıyor ve a'nın değerlerine göre grafiğin alabileceği durumları belirliyor.	6. Teknoloji Yardımıyla Yorumlama
	10. Genel modelden formal modele geçiş yapıyor ve formal modeli bir fonksiyon olarak belirtiyor ($f(x) = a^x$).	7. Genel Modelden Formal Modele Geçiş
	11. Fonksiyonun tanım kümesini reel sayılar değer kümesini ise pozitif reel sayılar olarak belirtiyor.	7. Genel Modelden Formal Modele Geçiş
	12. a^x in $a \leq 0$ için tanımsız, $0 < a < 1$ için azalan, $a > 1$ için artan olduğunu keşfediyor.	7. Genel Modelden Formal Modele Geçiş
	13. Değişim oranlarından yola çıkarak üstel fonksiyonu tanımlıyor.	7. Genel Modelden Formal Modele Geçiş
	14. $a = 1$ durumunda fonksiyonun üstel olmayacağını gerekçeleriyle açıklıyor.	7. Genel Modelden Formal Modele Geçiş

Öğrencinin öğrenme yolu incelendiğinde her bir basamağın varsayımsal öğrenme yolunda karşılığı olduğu görülmektedir. Öğrenci varsayımsal öğrenme yolunun basamaklarına uygun bir şekilde ilerlemiştir. Öğrenci bağlamsal modeli oluşturuncaya kadar daha az bilişsel ve zihinsel eylemlerde bulunmuştur. Bağlamsal modelden (10^x) genel modele (a^x) geçiş, genel modelden (a^x) formal modele ($f(x)= a^x$) geçiş aşamalarında teknolojinin de yardımıyla daha çok akıl yürütmüştür.

Aşağıdaki tabloda ise (bkz. Tablo 6) bu iki öğrenme yolu arasında karşılaştırma şeması verilmiştir. Tablonun yatay ekseninde öğrencinin öğrenme yolu, dikey ekseninde varsayımsal öğrenme yolu yer almaktadır. Tablodaki her X işareti öğrenme yollarının kesiştiği anlamına gelmektedir. Örneğin öğrenci öğrenme yolundaki 1.madde varsayımsal öğrenme yolundaki 1.maddeye karşılık gelmektedir. Tablo incelendiğinde basamak sayılarında farklılık gözlemlense de öğrencinin öğrenme yolu, araştırmacının oluşturduğu varsayımsal öğrenme yoluna paralellik göstermektedir.

Tablo 6. Varsayımsal Öğrenme Yolu ile Emre'nin Öğrenme Yolunun Karşılaştırma Şeması

Varsayımsal Öğrenme Yolu	7												X	X	X	X	X
	6									X	X	X					
	5						X	X	X								
	4					X											
	3				X												
	2			X													
	1	X	X														
		1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16
		Emre'nin Öğrenme Yolu															

Gerçekleştirilen uygulama ile öğrencinin üstel fonksiyon kavramını varsayılan öğrenme yoluna benzer bir rota izleyerek anlamlandırdığı gözlemlenmiştir.

TARTIŞMA, SONUÇ VE ÖNERİLER

Üstel fonksiyon kavramını yapılandırırken bir öğrencinin öğrenme yolunun ortaya çıkarılması amacıyla gerçekleştirilen bu çalışmada öğrenci üstel fonksiyonu anlamlı olarak kavramıştır. Öğrencinin başta ön bilgilerinin tam olduğu ve üstel fonksiyona ilişkin bilgisinin olmadığı belirlenmiştir. Uygulama aşamasında üstel fonksiyonun kavramsal olarak öğrenilmesi sağlanmıştır. Değerlendirme aşamasında da verilen bağlamlarda öğrenci doğru ilişkilendirmeler yaparak üstel fonksiyon modellerine ulaşmıştır. Geliştirilen etkinliklerin üstel fonksiyon kavramında öğrenmeyi sağladığı görülmüştür. Öğrencinin süreç içerisinde geçtiği zihinsel aşamalara bakacak olursak en başta varsayılan varsayımsal öğrenme yoluna paralel bir yol izlediği belirlenmiştir.

Toplamsal değişim oranı ile çarpımsal değişim oranının eş zamanlı değişiminin incelenmesi aracılığıyla üstel fonksiyonlara geçiş fikri (Confrey ve Smith 1994; Doerr 2006; Ellis vd. 2013) çalışmamızda da üstel fonksiyonların anlaşılmasında önemli olmuştur. Bu sayede öğrenci değişimin gözlemlenmediği durumlarda üstel fonksiyon kurallarının sağlanmadığını ve dolayısıyla $f(x)= a^x$ üstel fonksiyonunda a parametresinin 1 olamayacağını gerekçeleriyle anlamlandırabilmiştir. Bu eş zamanlı değişimi incelerken modelleme etkinliğindeki gerçek yaşam bağlamı öğrencilere değişkenleri belirleme, değişimlerini inceleme ve yorumlama anlamında katkı sağlamıştır. Modelleme etkinliğinin esnek yapısı sayesinde bağlamın değiştirilerek farklı durumlarda yorumlanabilmesi için uygun bir öğrenme ortamı hazırlamıştır.

Üstel fonksiyonların öğretiminde Desmos uygulaması kullanılmıştır. Desmos aracının sürgü ataması, grafiği anında göstermesi, interaktif yapısı ve kullanım kolaylığı ile çalışmaya katkı sağlamış ve öğrenci öğrenmesini pozitif anlamda etkilemiştir. Öğrenci Desmos yardımıyla bir örüntünün genel terimi ifade edilirken kullanılan n notasyonu ile (Örneğin 10^n modeli) örüntünün istenilen bir adımının bulunacağı ve tek bir sonuç bulunacağını; grafik çizmek istediğinde ise 2 farklı değişken olduğunu ve bu değişkenlerin x ve y notasyonları ile yazılması gerektiğini kendisi keşfetmiştir. Öğrenci x ve y değişkenleri için tablo oluşturmuş ve bu tablonun değerlerini grafik ekranında gözlemlemiştir. Bu sayede hem tablo ile hem de grafik ile temsilleri eş zamanlı olarak görebilmiş ve aralarında ilişki kurabilmiştir. Desmos'un bu özellikleri Geogebra gibi benzer grafik hesap makineleriyle de gerçekleştirilebilmektedir. Desmos gibi grafik hesap makinelerinin kullanımı Doerr, (2006) ve Koştur ve Yılmaz, (2017) çalışmalarında olduğu gibi bu çalışmada da kavramsal anlamayı desteklemiştir.

Weber (2002a) üniversite öğrencileri ile yürüttüğü çalışmasında öğrencilerin üstel fonksiyona ilişkin yetersiz düzeyde anlayışa sahip olduklarını belirtirken bu çalışmadaki öğrencinin anlayışının tasarlanan etkinlik dizisi sayesinde yeterli seviyede olduğu görülmüştür. Bu aşamada modelleme etkinlikleri ve bu etkinlikler esnasında teknolojik araçların kullanımı önem taşımıştır. Modelleme etkinliklerinin gerçek yaşam kaynaklı bağlamı ve üzerinde farklı versiyonlarıyla çalışma imkanı sunması öğrenciye büyük kolaylık sağlamıştır.

Oluşturulan varsayımsal öğrenme yolu öğrencinin öğrenme yolu ile paralellik göstermiştir. Bu paralellik bir öğrenci ile sınırlıdır. Aynı etkinlik dizisinin daha fazla öğrenciye uygulanması ile paralellik durumu test edilebilir. Grup veya sınıf uygulamaları gerçekleştirilerek varsayımsal öğrenme yolu revize edilebilir veya genelleştirilebilir.

KAYNAKÇA

Bayazit, İ., & Aksoy, Y. (2013). Fonksiyon kavramı: epistemolojisi, algı türleri ve zihinsel gelişimi. *Erciyes Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü Fen Bilimleri Dergisi*, *29*(1), 1-9.

Borba, M. (1993). *Students' understanding of transformations of functions using multi-representational software*, (Unpublished doctoral dissertation), Cornell University.

Borba, M. & Confrey, J. (1992). 'Transformations of functions using multi-representational software Visualization and discrete points', a paper presented at the Sixteenth Annual Meeting of Psychology of Mathematics Education-NA, Durham,

Carlson, M., Jacobs, S., Coe, E., Larsen, S. & Hsu, E. (2002). Applying covariational reasoning while modeling dynamic events: a framework and a study. *Journal for Research in Mathematics Education,* 33(5), 352–378.

Clements D. H. & Sarama, J. (2004). Learning trajectories in mathematics education, *Mathematical Thinking and Learning,* 6:2, 81-89, DOI: 10.1207/ s15327833mtl0602_

Cobb, P., & Steffe, L. P. (1983). The constructivist researcher as teacher and model builder. *Journal for Research in Mathematics Education*, 14(2), 83-94.

Confrey, J. (1991). 'The concept of exponential functions: A student's perspective', in L. Steffe (ed.), *Epistemological Foundations of Mathematical Experience*, New York, pp. 124-159.

Confrey, J. (1992). Using computers to promote students' inventions on the function concept. In S. Malcom, L. Roberts and K. Sheingold (eds.), *This Year in School Science 1991: Technology for Teaching and Learning,* Washington, DC, pp. 141-174.

Confrey, J. & Smith, E. (1991). A framework for functions: Prototypes, multiple representations, and transformations. In R. Underhill & C. Brown (eds.), *Proceedings of* *the Thirteenth An- nual Meeting of the North American Chapter of the International Group for the Psychology of Mathematics Education* (pp. 57-63). Blacksburg, VA: Virginia Polytechnic Institute & State University.

Confrey, J. & Smith, E. (1994). Exponential functions, rates of change, and the multiplicative unit. *Educational Studies in Mathematics,* 26(2-3), 135-164.

Confrey, J. & Smith, E. (1995). Splitting, covariation, and their role in the development of expo- nential functions. *Journal for research in mathematics education*, 26(1), 66-86.

Confrey, J., Smith, E., Piliero, S. and Rizzuti, J. (1991). 'The use of contextual problems and multi- representational software to teach the concept of functions', Final Project Report to the National Science Foundation (MDR-8652160) and Apple Computer, Inc.

Doerr, H. M. (2006). Teachers' ways of listening and responding to students' emerging mathematical models. *ZDM*, *38*(3), 255-268.

Ellis, A. B., Ozgur, Z., Kulow, T., Dogan, M. F., Williams, C., & Amidon, J. (2013). Correspondence and covariation: Quantities changing together. In M. Martinez, & A. Superfine (Eds.), Proceedings of the 34th annual meeting of the North American chapter of the International Group for the Psychology of Mathematics Education (pp. 119–126). Chicago, IL: University of Illinois at Chicago.

Freudenthal, H. (1973). *Mathematics as an educational task*. Dordrecht: Reidel Publishing Company.

Hunting, R. P. (1997). Clinical Interview Methods in Mathematics Education Research and Practice. *The Journal of Mathematical Behavior*, 16(2), 145-165.

Koştur, M. & Yılmaz, A. (2017). Technology support for learning exponential and logarithmic functions. *Ihlara Eğitim Araştırmaları Dergisi*, *2*(2), 50-68.

Rizzuti, J. (1991). *High school students' uses of multiple representations in the conceptualization of linear and exponential functions,* (Unpublished doctoral dissertation), Cornell University.

Rizzuti, J. & Confrey, J. (1988). A construction of the concept of exponential functions. In M. Behr, C. LaCompagne and M. Wheeler (eds.), *Proceedings of the Tenth Annual Meeting of the North American Chapter of the International Group for the Psychology of Mathematics Education,* Dekalb, pp. 259-268.

Simon, M. (1995). Reconstructing Mathematics Pedagogy from a Constructivist Perspective. *Journal for Research in Mathematics Education,* 26,114-145.

Smith, E. & Confrey, J. (1994). Multiplicative structures and the development of logarithms: What was lost by the invention of function. In G. Harel & J. Confrey (Eds.), The development ofmultiplica- tive reasoning in the learning of mathematics (pp. 333-364). Albany, NY: State University of New York Press.

Smith, E. and Confrey, J. (1992). 'Using a dynamic software tool to teach transformations of functions', in L. Lum (ed.), a paper presented at the Fifth Annual International Conference on Technology in Collegiate Mathematics, Reading.

Steffe, L. P. (1991). The Constructivist Teaching Experiment: Implication and Illustrations. E. von Glasersfeld (Ed.), *Radical Constructivism in Mathematics Education* (s. 177-194). Dordercht, Hollanda: Kluver.

Steffe, L. P. & Thompson, P. W. (2000). Teaching Experiment Methodology: Underlying Principles and Essential Elements. R. Lesh & A. E. Kelly (Ed.), *Research Design in Mathematics and Science Education* (s. 267-307). Hillsdale, NJ: Erlbaum.

Thompson, P. W. (2008). Conceptual analysis of Mathematical Ideas: Some Padework at the Foundation of Mathematics Education. Plenary Paper Delivered at the 32nd Annual Meeting of the International Group for the Psychology of Mathematics Education. O. Figueras, J. L. Cortina, S. Alatorre, T. Rojano & A. SÈpulveda (Ed.), *Proceedings of the Annual Meeting of the International Group for the Psychology of Mathematics Education,* (Cilt 1, s. 45-64). MorÈlia, Mexico: PME.

Treffers, A. (1987). *Three dimensions (a model of goal and theory description ın mathematics ınstruction – the wiskobas project).* Holland: Kluwer Academic Publishers Group.

Van den Heuvel-Panhuizen, M. (1996). *Assessment and Realistic Mathematics Education*, CD-ß Press Utrecht University, Utrecht, The Netherlands.

Von Glasersfeld, E. (1987). Learning as a constructive activity. In C. Janvier (Ed.), Problems of representation in the teaching and learning of mathematics (pp. 3-17). Hillsdale, NJ: Lawrence Erlbaum Associates

Weber, K. (2002a). Students' understanding of exponential and logarithmic functions. *Second International Conference on the Teaching of Mathematics* (pp. 1-10). Crete, Greece: University of Crete.

Weber, K. (2002b). Developing students' understanding of exponents and logarithms. In D. S. Mewborn, P. Sztayn, D. Y. White, H. G. Wiegel, R. L. Bryant & K. Nooney (Eds), *Proceedings of the International Group for the Psychology of Mathematics Education, North American Chapter* (Vol. 2, pp. 1019–1027). Athens, GA.

EXTENDED ABSTRACT

Introduction

The concept of function has an important place in high school mathematics subjects. In this study, focusing on the concept of exponential function, which is one of the function types. For teaching exponential functions, covariation approach and correspondence approach were discussed.

The aim of the study is to reveal the learning trajectory of the student during the implementation of these activities. In this regard, what kind of learning process does a student go through while constructing the concept of exponential function? seeks an answer to the question.

The study is based on radical constructivism and realistic mathematics education (RME) theories. Activities were designed and used in the light of these theories. Technology-assisted modeling activities were used to teach exponential functions.

Methods

In this study, since it was desired to reveal the individual reasoning and learning trajectory of students, the teaching experiment method was used and the students were studied individually. A teaching experiment is a technique designed to explore students' knowledge of mathematics and how it can be learned in the context of mathematics teaching (Cobb & Steffe, 1983; Hunting, 1983). The criterion sampling method was used when selecting the student to participate in the study. The criteria for determining the participant are that the student knows the concepts of function, exponent and pattern, but does not know the concept of exponential function, 12th grader who has not learned the 12th grade mathematics lessons by any means (online environments, school, course, private teacher). Student participated in the study voluntarily and he and his parents gave the necessary permissions for the study.

A conceptual analysis has been made for the concept of exponential function. After this conceptual analysis, assumptions regarding this concept were determined and a hypothetical learning trajectory was created under the perspective of RME.

An activity series consisting of four sessions was designed for teaching exponential functions. Sessions lasted approximately two hours each and they were video-recorded and transcribed. The student carried out the implementation in a computer-aided environment and the student responses were also recorded on the Desmos application. The data consists of video transcripts, researcher observation notes, and student responses in the Desmos application. The data were analyzed in accordance with the definition of Thompson's (2008) conceptual analysis, in an effort to formulate hypotheses of defined examples, students' schemas and ways of thinking.

The modeling activity used in the study was created based on the documentary called 'Powers of Ten'. This documentary starts with the image of a family, and as the video progresses, this family first moves away and then gets closer. During zoom in and zoom out operations, the distance or width undergoes a 10-fold change. The basic mathematical idea that emerges from this video is that the width increases 10 times with each zoom out move, and the width decreases 10 times with each zoom in move. This covariation is important for the exponential change. Students are provided to explore the ideas that the real-life context includes exponential change, the contextual model of the situation is an exponent.

Results

While structuring the exponential function, the student first intuitively associated the real-life context with exponential numbers in the first teaching episode. He described this relationship with integers and defined the contextual model of the relationship as 10^n. He stated that the value of n in this definition was an integer and he was able to draw its graph correctly. In the second teaching episode, the real life context was diversified, and he was able to interpret the relationship in different situations and express it mathematically. He discovered the properties of graphics by drawing the contextual model with Desmos. Then the conceptual model (10^n) became a^n and a^x. He correctly stated the change of 'a' value with the 'a' slider assigned by Desmos. The student was able to define the exponential function based on the real-life situation in the given modeling activity. The definition and image sets of the exponential function and its limitations have been correctly discovered. In addition, he was able to understand that this function expresses an exponential change and that its variables change covariationally. In this way, the student was able to understand that if $a = 1$, there is no change. When the process was examined, it was seen that the student first defined the exponential functions in integers, then generalized them to real numbers and used the covariation approach throughout the whole process.

Discussion and Conclusion

It was determined that the student had complete prior knowledge and did not have knowledge about the exponential function. In the teaching episode, the exponential function was learned conceptually. In the evaluation phase, the student reached exponential function models by making correct associations in the given contexts. It has been seen that the developed activities provide learning in the concept of the exponential function. If we look at the mental stages that the student went through in the process, it was determined that he followed a path parallel to the hypothetical learning trajectory at first.

Desmos application was used in teaching exponential functions. The Desmos tool contributed to the study with its slider assignment, instant display of the graph, its interactive structure and ease of use, and it positively affected student learning.