



Ondokuz Mayıs Üniversitesi Eğitim Fakültesi Dergisi
Ondokuz Mayıs University Journal of Faculty of Education

e-ISSN: 2548-0278 OMU EFD, June 2023, 42(1): 33-96

Matematik Öğretmen Adaylarının Prizma ve Silindire Yönelik Kavram İmajlarının Tanımları, Çizimleri ve Gruplandırma Becerileri Kapsamında İncelenmesi

Examination of Prospective Mathematics Teachers' Concept Images of Prism and Cylinder in the Scope of Their Definitions, Drawings, and Grouping Skills

Feyza ALIUSTAOĞLU¹

¹Kastamonu Üniversitesi, Kastamonu
· fdemirci@kastamonu.edu.tr · ORCID > 0000-0001-9262-5216

Makale Bilgisi/Article Information

Makale Türü/Article Types: Araştırma Makalesi/Research Article

Geliş Tarihi/Received: 01 Kasım/November 2022

Kabul Tarihi/Accepted: 29 Mayıs/May 2023

Yıl/Year: 2023 | **Cilt-Volume:** 42 | **Sayı-Issue:** 1 | **Sayfa/Pages:** 33-96

Atıf/Cite as: Aliustaoğlu F. "Matematik Öğretmen Adaylarının Prizma ve Silindire Yönelik Kavram İmajlarının Tanımları, Çizimleri ve Gruplandırma Becerileri Kapsamında İncelenmesi-Examination of Prospective Mathematics Teachers' Concept Images of Prism and Cylinder in the Scope of Their Definitions, Drawings, and Grouping Skills"
Ondokuz Mayıs Üniversitesi Eğitim Fakültesi Dergisi, Ondokuz Mayıs University Journal of Faculty of Education, 42(1), June 2023: 33-96.

Yazar Notu/Author Note: Araştırma için Kastamonu Üniversitesi Bilimsel Araştırma ve Yayın Etiği Kurulu'ndan 25.03.2021 tarihli ve E-16498365-050.01.04-2100025489 karar sayısı ile etik kurul izni alınmıştır

MATEMATİK ÖĞRETMEN ADAYLARININ PRİZMA VE SİLİNDİRE YÖNELİK KAVRAM İMAJLARININ TANIMLARI, ÇİZİMLERİ VE GRUPLANDIRMA BECERİLERİ KAPSAMINDA İNCELENMESİ

ÖZ

Bu araştırmada ilköğretim matematik öğretmen adaylarının prizma ve silindire yönelik kavram imajlarını ortaya çıkarmak amaçlanmıştır. Bu amaç doğrultusunda öğretmen adaylarının bu geometrik cisimlere yönelik tanımları, farklı çizimleri ve verilen geometrik cisimleri gruplandırma biçimleri incelenmiştir. Araştırma durum çalışması modeline dayalı olarak yürütülmüştür. Araştırmanın çalışma grubunu Türkiye'nin kuzeyinde bulunan bir üniversitenin eğitim fakültesi ilköğretim matematik öğretmenliği bölümünde birinci sınıf düzeyinde öğrenim gören 45 öğretmen adayı oluşturmaktadır. Öncelikle uygun örnekleme yöntemi kullanılarak belirlenen öğretmen adaylarına silindir ve prizmaya yönelik tanımlama, çizim yapma ve gruplama becerilerini içeren geometrik cisimler bilgi testi uygulanmıştır. Ardından maksimum çeşitlilik örnekleme yönteminde dayalı olarak öğretmen adaylarının verdikleri cevapların incelenmesi sonucunda 6 öğretmen adayı ile görüşmeler gerçekleştirilmiştir. Bilgi testine verilen cevapların analizi içerik analizi tekniğine dayalı olarak gerçekleştirilmiştir. Görüşme verilerinin analizinde ise betimsel analiz tekniği kullanılmıştır. Araştırmadan elde edilen sonuçlar öğretmen adaylarının tanımları, çizimleri ve gruplandırma biçimleri başlıkları altında sunulmuştur. Araştırma sonucunda öğretmen adaylarının silindir ve prizma tanımlarının tam olarak yeterli olmadığı, bu geometrik cisimlere yönelik kritik özellikleri ayırt etmekte güçlük yaşadıkları bulunmuştur. Kavram imajları genellikle silindir için dairesel tabanlı ve prizma için çokgen tabanlı ve dik cisimler şeklindedir. Çizimlerinde genellikle prototip algıya dayalı çizim yapmışlar, gruplandırmada da prototip örnekleri ayırt etmekte zorlanmamışlar ancak prototip olmayan örnekleri ayırt etmekte zorlanmışlardır. Kavram imajlarının kavram tanımlarına göre daha baskın olduğu görülmüştür. Ayrıca matematiksel dili kullanmada hatalar yaptıkları ve konu ile ilgili alan bilgilerinde de eksikler olduğu tespit edilmiştir. Silindir ve prizma arasındaki hiyerarşik ilişki düşündüğünde öğretmen adaylarının genellikle bu cisimleri ayırık kümeler olarak düşünmekle birlikte farklı fikirlere sahip olduğu sonucuna ulaşılmıştır. Araştırmadan elde edilen sonuçlara dayalı olarak çeşitli öneriler getirilmiştir.

Anahtar Kelimeler: Kavram İmajı, Matematik Öğretmen Adayları, Prizma, Silindir.



EXAMINATION OF PROSPECTIVE MATHEMATICS TEACHERS' CONCEPT IMAGES OF PRISM AND CYLINDER IN THE SCOPE OF THEIR DEFINITIONS, DRAWINGS AND GROUPING SKILLS

ABSTRACT

In this study, it was aimed to reveal the concept images of prospective mathematics teachers (known hereafter as PMTs) about prisms and cylinders. For this purpose, PMTs' definitions of these geometric objects, their different drawings, and the way they grouped the given geometric objects were examined. The research was conducted based on the case study model. The study group for the research consisted of 45 prospective teachers studying at the first grade level in the department of primary education mathematics teaching at the faculty of education of a university in the north of Turkey. Firstly, the geometric objects test, which includes the skills of defining, drawing, and grouping cylinders and prisms, was applied to the PMTs. Then interviews were conducted with six PMTs. The analysis of answers to the geometric object test was carried out based on the content analysis technique. The descriptive analysis technique was used in the analysis of the interview data. The results obtained from the research were presented under the headings of the PMTs' definitions, drawings, and grouping styles. As a result of the research, it was found that the PMTs' definitions of cylinder and prism were not fully sufficient, and they had difficulty distinguishing the critical features. Concept images are based on prototype examples, usually in the form of right objects with a circular region base for a cylinder and a polygon base for a prism. It was seen that the concept images were more dominant than the concept definitions. In addition, it was determined that they made mistakes in using the mathematical language and that there were deficiencies in the content knowledge about the subject. When considering the hierarchical relationship between the cylinder and the prism, it was concluded that the PMTs generally thought of these objects as discrete sets, but had different ideas. Various suggestions were made based on the results obtained from the research.

Keywords: Cylinder, Concept İmage, Prism, Prospective Mathematics Teachers.



GİRİŞ

Geometrik cisimler konusu matematik öğretim programlarında oldukça geniş bir yere sahiptir. Ayrıca geometrik cisimler günlük hayatımızın bir parçası olup (Baykul, 2014) çevremize baktığımızda birçok yerde geometrik cisimler karşımıza çıkmaktadır (Gökbulut & Ubuz, 2013). Önemli konular olan geometrik cisimler

konusunda ortaokul öğrencilerinin, öğretmen adaylarının ve öğretmenlerin zorluklar yaşadıklarını belirten birçok çalışma mevcuttur (Accascina & Rogora, 2006; Akayüüre, 2021; Avgören, 2011; Battista & Clements, 1996; Çakmak, Konyalıoğlu & Işık, 2014; Koçak, Gökkurt Özdemir & Soylu, 2017). Geometrik cisimler içinde yer alan prizma ve silindir, güncel eğitim reformlarında tanınması, özelliklerinin farkında olunması ve ilişkilendirme becerisine sahip olunması gereken konular olarak belirtilmektedir (NCTM, 2000; NCTM, 2006). Bu konulardaki tanımlar, özellikler, genellemeler, işlemler ve bağlantılar ile ilgili çalışmaların önemli olduğu söylenmektedir (Armah, Cofie & Okpoti, 2017).

Uluslararası geometri kitaplarında ve literatürde silindir ve prizma arasında ilişkilendirme yapılmaktadır. Örneğin Van de Walle, Karp ve Bay-Williams (2014): “Tabanı çokgen olan silindirlere prizma denir” ifadesine yer vererek tüm prizmaları silindirlerin özel bir hali olarak ele almışlardır. Diğer taraftan silindir kavramının özel bir prizma olarak ele alınamayacak kadar kapsamlı bir kavram olduğu ve geometri öğretiminde önemli bir rolü olduğu belirtilmektedir (Yemen Karpuzcu & Işıksal Bostan, 2013). Geometrik cisimlerin özelliklerine göre hiyerarşik sınıflandırılma becerisinin geometri öğretim programının önemli bir parçasını oluşturduğu ve geometrik cisimler arasındaki hiyerarşik ilişkilerin anlaşılmasının, muhakeme ve sorgulama becerilerinin gelişiminde önemli olduğu vurgulanmaktadır (Clements, 2003; Fujita & Jones, 2007).

Türkiye’deki öğretim programlarında ise ortaokulda prizma konusu 8. sınıf düzeyinde dik prizma olarak ele alınmakta ve dik prizma: “Tabanları birbirine eş çokgen ve yan yüzleri taban düzlemlerine dik, aynı zamanda bir kenarı çokgenin bir kenarına eş birer dikdörtgen olan cisimler” şeklinde tanımlanmaktadır (Böge & Akıllı, 2018). 10. sınıfta da tekrar dik prizma şeklinde ele alınmakta (Maviş, Gül, Solaklıoğlu, Tarku, Bulut & Gökşen, 2021) ve ortaokul ve ortaöğretim düzeyinde genellikle bilindik çokgen tabanlı (kare, üçgen, dikdörtgen) prizmalara yer verilmiş olup daha az sayıda da olsa beşgen ve altıgen prizma çizimleri de mevcuttur. Silindir konusu ise 8. sınıf düzeyinde dik dairesel silindir olarak ele alınmakta ve dik dairesel silindir: “Üst ve alt tabanı eş dairelerden ve bu tabanların çevresindeki noktaları birleştiren doğru parçasının tabanlara dik olmasıyla oluşan geometrik cisim” olarak tanımlanmaktadır (Böge & Akıllı, 2018). Ortaöğretim düzeyinde ise 11. sınıfta geçmekte olup, öncelikle silindirik yüzey ardından da silindir tanımına yer verilmektedir (Seymen, Gazioğlu, Yıldırım & Meral, 2021). Bu tanım yapılırken tabanları daire olmayan, herhangi bir yüzey olan silindir görseline yer verilmiştir ancak ardından öğretim programında dik dairesel silindirlere yer verildiği için dik dairesel silindir üzerinden açıklamalar yapılmış ve prototip dik dairesel silindir örneklerine yer verilmiştir. Ortaokul ve ortaöğretim matematik programında prizma ve silindir arasındaki hiyerarşik ilişkiye ise doğrudan yer verilmektedir ancak 11. sınıfta prizmanın ve silindirinin hacminin anlatıldığı kısımda: “Kenar sayısını (n) artırdığınızda prizmanın tabanları çokgenden daireye; prizma,

silindire dönüşecektir.” ifadesi geçmektedir (Seymen vd., 2021). Bu da silindirlerin daha genel bir kavram olduğunun sezdirildiğini göstermektedir ancak doğrudan bir ilişkilendirme yapılmamaktadır.

Öğretmenlerin öğretmenlik görevini en iyi şekilde yerine getirmek için üç boyutlu cisimler konusunda yeterli alan ve pedagojik alan bilgisine sahip olmaları gerektiği belirtilmektedir (Akayuure, 2021). Geometride yaşanan işlemsel ve kavramsal öğrenme eksikleri (Star & Stylianides, 2013; Haapasalo & Kadıjevich, 2000) ile zayıf uzamsal algı ve hatalı tanımlar (Riastuti, Mardiyana & Pramudya, 2017) geometri öğrenmede bazı problemler olarak ifade edilmektedir. Kılıçoğlu (2020), geometrik şekil, geometrik cisim gibi kavramların öğretmen adayları tarafından tanımlanmasını ele alan çalışmasında, kavramların içeriği hakkında net bilgisi olmayan, ezbere dayalı tanım yapan, tanımlarında bazı kavramların kullanımına önem göstermeyen öğretmen adaylarının olduğunu belirtmiştir.

Literatür incelendiğinde geometrik cisimlerden prizma ve silindir ile ilgili yapılan çalışmalarda öğretmen adaylarının ve öğretmenlerin bu cisimleri tanımlanmasında ve örneklendirilmesinde kavram yanlışlarının olduğu (Alkış Küçükaydın & Gökbulut, 2013; Altaylı, Konyalıoğlu, Hızarcı & Kaplan, 2014); alan bilgilerinin prizma (Gökbulut & Ubuz 2013; Gökkurt & Soylu, 2016) ve silindir (Karakuş, 2018; Koçak vd., 2017) için yeterli olmadığı belirtilmektedir. Ayrıca öğretmen adaylarının geometrik cisimlerden silindir ve prizmayı (Gökbulut, 2010; Gökkurt, 2014; Karakuş & Erşen, 2021; Ulusoy, 2019; Zeybek Şimşek, 2019); silindiri (Ertekin, Yazıcı ve Delice, 2014; Karakuş, 2018) ve prizmayı (Bozkurt & Koç, 2012; Gökbulut & Ubuz 2013; Unlu & Horzum, 2018) uygun şekilde tanımlayamadıkları ve matematiksel tanım yapmakta zorlandıklarını gösteren çalışmalar mevcuttur. Benzer şekilde Türnüklü ve Ergin (2016) sekizinci sınıf öğrencilerinin prizmayı tanımlamakta zorlandıklarını, tanımlarını yaparken zihinlerinde oluşan imgeyi tarif etmeye çalıştıklarını; Uygun, Guner ve Şimşek (2022) de yedinci sınıf öğrencilerinin prizma ve silindiri tanımlamakta zorlandıklarını ifade etmektedir. Yine Hasanah ve Yulianti (2020) lise öğrencilerinin prizma kavramını anlamadıklarını, bu nedenle konu ile ilgili kavram yanlışlarına sahip olduklarını belirtmektedir. Man'ın (2019) çalışmasında ise matematik öğretmenlerinin prizma ve silindire ilişkin tanımları uygun şekilde yapamadıkları söylenmektedir.

Tanımlarla ilgili yaşanan sorunlardan biri de öğretmen adaylarının (Alkış Küçükaydın & Gökbulut, 2013; Ubuz & Gökbulut, 2015) ve öğretmenlerin (Gökkurt & Soylu, 2016; Tsamir, Tirosh, Levenson, Barkai & Tabach, 2015) tanıma ait kritik özellikleri ayırt etmede güçlük çekmeleridir. Yine birçok çalışmada matematik öğretmen adaylarının (Ertekin vd., 2014; Bozkurt & Koç, 2012; Gökbulut & Ubuz, 2013; Karakuş, 2018; Ulusoy, 2019; Zeybek Şimşek, 2019); matematik öğretmenlerinin (Gökkurt & Soylu, 2016) ve ortaokul öğrencilerinin (Ergin & Türnüklü, 2015; Türnüklü & Ergin, 2016) silindir ve/veya prizmaya yönelik kavram

imajlarının zayıf olduğu belirtilmektedir. Diğer taraftan öğrencilerin ve öğretmen adaylarının üç boyutlu geometrik cisimler arasındaki hiyerarşik sınıflandırmanın (Gökbulut & Ubuz, 2013; Gökkurt, Şahin, Soylu & Doğan, 2015; Işıksal Bostan & Yemen Karpuzcu, 2017; Karakuş & Erşen, 2021; Koç & Bozkurt, 2011; Uygun vd., 2022; Zeybek Şimşek, 2019) anlaşılmasında güçlük yaşadıklarını belirten çalışmalar da mevcuttur. Tüm bu çalışmalar incelendiğinde silindir ve prizma konularının birçok güçlük barındıran konular olduğu görülmektedir.

Öğrencilerin istenilen nitelikte eğitim almaları için geleceğin öğretmeni olacak öğretmen adaylarının geometri için önemli konulardan olan prizma ve silindir ile ilgili kavram imajlarını ortaya çıkarmanın, ne tür bilgiye sahip olduklarının ve zihinlerinde ne tür yapılar oluşturduklarının belirlenmesinin önemli olduğu düşünülmektedir. Ayrıca yapılan çalışmalar incelendiğinde matematik öğretmen adaylarının prizma ve silindir ile ilgili kavram imajlarını birlikte inceleyen herhangi bir çalışmaya rastlanmamıştır. Genellikle silindir ve koni; prizma ile piramit arasındaki ilişkiye ya da silindir veya prizmadan birine odaklanılmıştır. Bu çalışmada prizma ve silindir arasındaki hiyerarşik ilişki de incelenmiş olup öğretmen adaylarının bu iki geometrik cismi nasıl ele aldıklarını karşılaştırmalı olarak incelemenin alana katkı sunacağı düşünülmektedir. Bu doğrultuda çalışmanın amacını matematik öğretmen adaylarının prizma ve silindire yönelik tanımları, çizimleri ve gruplandırmalarının (örnek, örnek olmayan durumlar, herhangi bir gruba girmeyen cisimler) incelenerek kavram imajlarının ortaya çıkarılması oluşturmaktadır. Araştırmanın problemi: “Matematik öğretmen adaylarının prizma ve silindire yönelik kavram imajları nasıldır?” sorusu oluşturmakta olup araştırma soruları ise şu şekildedir:

1. Matematik öğretmen adaylarının prizma ve silindire yönelik yaptıkları tanımlar nelerdir?
2. Matematik öğretmen adaylarının prizma ve silindire yönelik yaptıkları çizimler nelerdir?
3. Matematik öğretmen adaylarının prizma ve silindire yönelik gruplandırmaları nasıldır?

Teorik Çerçeve

Kavram İmajı

Bu çalışmada matematik öğretmeni adaylarının kavram imajları Tall ve Vinner'in (1981) kavram imajı teorisine göre incelenmiş olup bu teoride kavram tanımı ve kavram imajı terimleri kullanılmaktadır. Kavram tanımı (concept definition) ilgili kavramı açıklamada kullanılan, kavramı net bir şekilde belirleyen kelimeler

bütünü; kavram imajı (concept image) ise bireyin zihninde bir kavramla ilgili var olan zihinsel şekilleri, resimleri, özellikleri ve süreçleri içeren tüm bilişsel yapıları ifade etmektedir. Matematik kavramlarının öğrencilerin zihinlerinde nasıl yapılandırıldığına incelendiği birçok çalışmada bu terimler ile karşılaşılmaktadır (Clements & Battista, 1992; Fujita & Jones, 2007; Tall & Vinner, 1981; Türnüklü & Ergin, 2016).

Kavram imajı bir zihinsel süreç içinde bilinçsiz ya da bilinçli olarak şekillenerek bireylerin bilişlerinde yer bulmakta olup dinamik bir yapıya sahiptir ve deneyimlerle değişip gelişebilmektedir (Tall & Vinner, 1981). Öğrencinin zihninde öğreneceği kavrama yönelik bir imajı yoksa öncelikle verilen tanım, açıklama ve örnekler yardımıyla kavrama ait bir imaj oluşturulmaktadır. Ancak öğrencinin zihninde kavrama yönelik bir imaj varsa bu imaj öğretmenin açıklamaları, ders kitabındaki tanım ve örneklere dayalı olarak değişip farklılaşabilmekte ya da değişmeden kalabilmektedir (Vinner, 1983). Öğrencinin kavram imajının oluşmasında öğrencinin kavramı öğrendiği ortam, öğretmenin öğretim için kullandığı yöntem, teknik ve materyaller gibi birçok faktör vardır (Karakuş, 2018).

Kavram tanımı ve kavram imajı bağımsız düşünilemeyen, birbiri ile etkileşime geçebilen yapılardır (Vinner, 1991). Tanımlar ve öğrencilere sunum şekilleri, kavram tanımı ile kavram imajı ilişkisini şekillendirmektedir (Zazkis & Leikin, 2008). Tsamir, Tirosh ve Levenson (2008) da öğrencilerin zihninde görsel sunum ve deneyimlere bağlı olarak önce kavramla ilgili kavram imajının oluştuğunu, ilerleyen süreçte kavrama ait formal tanımın öğrenenin zihninde yer edindiğini belirtmektedir. Yeni bir kavram öğretirken kavramın tanımı net olarak verilse bile formal tanıma hemen ulaşamayabilir. Vinner (2011) da kavram imajı ile kavram tanımının her zaman paralel olmadığını ve karar vermede genellikle kavram imajının baskın olduğunu savunmaktadır. Kişinin kavrama ait kavram imajı yanlış ise yapacağı kavram tanımı da doğru olmayacaktır (Olkun & Toluk Uçar, 2007). Diğer taraftan bir kavramın sadece tanımının bilinmesi kavramın doğru anlaşıldığını kesin olarak göstermemektedir (de Villiers, 1998). Kavram imajlarının doğru şekilde oluşmasını sağlayan faktörlerden biri kavram imajı oluşturulduğu farkında olarak seçilen örneklerdir. Tanımlarla birlikte örnekler ve karşıt örneklerin de matematiksel bir kavramın zihinde oluşturulması sürecinde rolü vardır (Monaghan, 2000; Wilson, 1990) ve geometri öğretiminde kavrama örnek olan durumlar yanında örnek olmayan durumlara da örnekler verilmesi önerilmektedir (Oberdorf & Taylor-Cox, 1999; Tsamir vd., 2008).

Örneklerin ve Kritik Özelliklerin Kavram İmajındaki Rolü

Örnekler, genellikle ilk akla gelen ve gruplandırırken karşılaştırmanın temeli olarak alınan örnekler (prototip örnekler), bunlara ek örnekler ve tersine örnekler (non-examples) olarak üç gruba ayrılmaktadır (Attneave, 1957; Reed, 1972; Rosch,

1973). Prototip örnekleri dikkate alarak kavrama ait kritik olan ve olmayan özelliklerin iyi ayırt edilememesi ve gruplamaların bu örneklere dayalı olarak yapılması kavram oluşumunda engel teşkil edebilmektedir (Hershkowitz, 1989; Tsamir vd., 2008). Bu tip örnekler çoğunlukla kavramla özdeşleşmekte ve kavram için farklı biçimler düşünülmemektedir (Avgören, 2011). Öğrencilerin kavram imajlarının oluşumunda prototip örneklerin rolü büyük olup (Levenson, Tirosh & Tsamir, 2011) prototip örneklerin öğrencilerin kavram yanlışlığı oluşturmalarına (Hershkowitz, 1989) ve kavramla ilgili sınırlı algılar oluşturarak kavramla ilgili hatalı yapılar oluşturmalarına neden olabileceği (Fujita & Jones, 2007) belirtilmektedir. Örneğin Gökkurt ve Soylu'nun (2016) çalışmasında prizma için kare dik prizma ve üçgen dik prizma gibi örneklerin verilmesinin eğik prizma ya da ongen prizmayı prizma olarak düşünmemeye neden olabileceği söylenmektedir. Bu sınırlı algıların önüne geçebilmek için kavram tanımları (Monaghan, 2000) ve çeşitli örnekler (Hershkowitz, 1989) üzerinden kavrama ait kritik özelliklerin vurgulanması önerilmektedir.

Kavrama ait kritik özellikler kavramların gerek ve yeter koşullar altında tanımlanmasını ve kavramın örneklerini içeren kümede yer almasını sağlamaktadır (Hershkowitz, 1989; Tall & Vinner, 1981). Hershkowitz'e (1989) göre ders kitaplarında yer alan tanıma ait ifadeler kritik özellikleri içermelidir ve tanımlarda yer alan bu özellikler kişilerin karar vermelerinde temel oluşturabilmektedir. Kritik olmayan özellikler ise genellikle kişilerin sahip oldukları prototip kavram imajlarına dayalı oluşan özelliklerdir (Sarfaty & Patkin, 2013). Bu nedenle tanım yaparken kritik ve kritik olmayan özelliklerin iyi belirlenmesi gerekmekte olup (Hershkowitz, 1989) aksi takdirde kavram yanlışlıkları ile karşılaşılabilir (Gökbulut & Ubuz, 2013). Örneğin, Gökkurt ve Soylu (2016) prizmanın kritik özelliklerini: "Tabanlarının çokgen olması, tabanlarının eşit ve paralel olması ve yanal yüzeylerinin paralel olması, iki paralel taban ile sınırlandırılan prizmatik bölge olması" şeklinde belirtmektedir. "Tabanı köşeli olan cisimler prizmadır" şeklindeki tanım ise tabanların çokgen olması kritik özelliğini içermekte ancak diğer kritik özellikleri içermemekte ve piramitlerin de prizma olabileceği gibi bir kavram yanlışlığına sebep olmaktadır (Gökbulut & Ubuz, 2013). Diğer taraftan iyi bir tanımın önemli kriterlerinden bir diğerinin hiyerarşik olma olduğu (Van Dormolen & Zaslavsky, 2003) ve geometrik cisimler arasındaki hiyerarşik ilişkinin anlaşılması için de kavramlara yönelik yapılan tanımların hiyerarşik tanımlar olmasına dikkat edilmesi gerektiği belirtilmektedir (Zeybek Şimşek, 2019).

Öğretmenin alan bilgisi, öğrenme ve öğretme sürecinin niteliği üzerinde doğrudan etkili olup (Baki, 2013) istenilen öğrenme ortamlarının oluşturulmasında öğretmenlerin bilgi düzeyi önemli role sahiptir (Putnam, Heaton, Prawat & Remillard, 1992). Öğretmenler, öğrencilerin kavram imajlarının gelişimini etkileyen önemli faktörler arasında yer almaktadır (Tsamir vd., 2015). Öğretmenlerin verdikleri örneklerin doğru, açık, dikkat çekici ve matematiksel inceliklerin açığa

kavuşturulmasına yardımcı olabilecek (Zodik & Zaslavsky, 2008) ve cismi uygun şekilde temsil edecek nitelikte olması öğrencilerin kavramları doğru şekilde anlamalarını (Zazkis & Chernoff, 2008), kavram yanlışlarına düşmemelerini (Çakmak vd., 2014) ve uygun kavram imajı oluşturmalarını sağlamaktadır (Weber, Porter & Housman, 2008). Öğretmenlerin sahip oldukları alan bilgileri, prototip örneklerle sınırlı olmamalıdır; öğretmenler, öğrencilerin zihninde doğru kavram imajı oluşturacak nitelikte örnekleri bilmelidirler (Gökkurt, 2014). Diğer taraftan geometrik kavramların tanımları tam olarak öğrenilmeli ve hangi kritik özelliklere sahip olmaları gerektiği bilinmelidir (Hershkowitz, 1989). Anlamli geometri öğrenimi, kavramların ve kavramlar arasındaki güçlü ilişkinin derinlemesine anlaşılmasını gerektirmektedir (Tall & Vinner, 1981).

YÖNTEM

Araştırma Modeli

Araştırma durum çalışması modeline dayalı olarak yürütülmüştür. Durum çalışması bir ya da daha fazla olayın, programın, ortamın, sosyal grubun ya da sistemlerin derinlemesine incelendiği yöntem olarak tanımlanmaktadır (McMillan, 2000). Bu çalışmada da öğretmen adaylarının silindir ve prizma kavramlarına ilişkin kavram imajları bir durum olarak ele alınarak inceleme yapılmıştır.

Çalışma Grubu

Araştırmanın çalışma grubunu Türkiye'nin kuzeyinde bulunan bir devlet üniversitesinin eğitim fakültesi ilköğretim matematik öğretmenliği bölümünde birinci sınıf düzeyinde öğrenim gören 45 öğretmen adayı oluşturmaktadır. Öğretmen adayları ortaokul ve lisede geometrik cisimler konusunu giriş kısmında belirtildiği şekli ile öğrenmişlerdir. Lisans düzeyinde ise birinci sınıf dersleri arasında yer alan Matematiğin Temelleri II dersi kapsamında geometrik cisimler konusu işlenmektedir ancak veri toplama süreci gerçekleştirilmeden önce bu ders kapsamında bu konu henüz işlenmemiştir. Dolayısıyla öğretmen adaylarının lisans eğitiminin başındaki bilgileri tespit edilmek için uygun durumdadır. Ayrıca öğretmen adaylarının bu düzeye gelene kadar Matematiğe özgü aldıkları dersler fonksiyonlar, limit, süreklilik ve türev konularını içeren Analiz 1; sayılar ve işlemler ile cebir öğrenme alanlarına yönelik konuları içeren Matematiğin Temelleri I ve Matematik Tarihi dersleri ile sınırlıdır. Henüz matematik eğitimine yönelik herhangi bir ders almamışlardır, eğitim ile ilgili aldıkları dersler ise Eğitime Giriş ve Eğitim Sosyolojisi ile sınırlıdır.

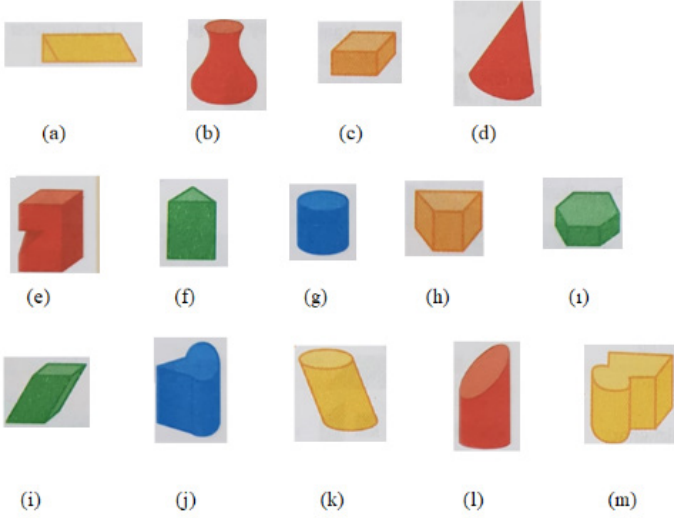
Çalışma grubunun belirlenmesinde seçkisiz olmayan örnekleme yöntemlerinden uygun örnekleme yöntemi (convenience sampling) kullanılmıştır.

Uygun örnekleme kısaca zaman, para ve işgücü açısından var olan sınırlılıklar nedeniyle örneklemin kolay ulaşılabilir ve uygulama yapılabilir birimlerden seçilmesi şeklinde tanımlanmaktadır (Cohen & Manion, 1998). Çalışma grubunda yer alan öğretmen adayları araştırmacıdan farklı bir ders almaktadırlar. Öğretmen adaylarının çalışma kapsamında gerçekleştirilen görüşmelere seçimi ise çalışma öncesinde uygulanan geometrik cisimler testinin incelemesine dayalı olarak yapılmıştır. Görüşmeler için örneklem seçim yöntemi olarak amaçlı örnekleme yöntemlerinden maksimum çeşitlilik örnekleme kullanılmıştır. Bu örnekleme metodunda amaç göreceli olarak küçük bir örneklem oluşturarak bireylerin çeşitliliğini maksimum derecede yansıtmaktır (Marshall, 1996). Görüşmeler geometrik cisimler ile ilgili farklı algıları olan altı öğretmen adayı ile yapılmıştır. Görüşme yapılan öğretmen adaylarından ÖA29 ve ÖA30 erkek; ÖA4, ÖA12, ÖA16 ve ÖA27 kadındır. Ayrıca her bir öğretmen adayı görüşme için istekli olmuşlardır.

Veri Toplama Araçları ve Verilerin Toplanması

Araştırmada veri toplama aracı olarak araştırmacı tarafından geliştirilen “Geometrik Cisimler Testi” kullanılmıştır. Bu test iki bölümden oluşmaktadır. Birinci bölümde öğretmen adaylarının prizma ve silindiri tanımlamaları ve ardından her iki geometrik cisme yönelik üç farklı çizim yapmaları istenmiştir. İkinci bölümde ise verilen 14 geometrik cisme yönelik olarak (Şekil 1): “a) Şekilde görülen cisimleri nasıl gruplandırırınız? Her bir grup için gruplandırmayı neden bu şekilde yaptığınızı açıklayınız. b) Yaptığımız sınıflamada herhangi bir gruba ait olmayan cisimler oldu mu? Eğer oldu ise bu cisimlerin neden herhangi bir gruba ait olmadığını açıklayınız.” sorusunu cevaplamaları istenmiştir. Bu cisimler belirlenirken ortaokul ve lise matematik öğretim programlarında geometrik cisimlerin ele alınış biçimlerinden (MEB, 2018a; MEB, 2018b), konu ile ilgili kaynaklardan (Van de Walle vd., 2014) ve ilgili literatürden (Ertekin vd., 2014; Karakuş, 2018; Zeybek Şimşek, 2019) yararlanılmıştır.

Hazırlanan test uygulama öncesinde iki matematik eğitimcisine, bir ölçme ve değerlendirme uzmanına ve bir dil uzmanına incelenmiştir. Uzmanlar testin ilk kısmının uygun olduğunu belirtmişlerdir. İkinci bölüm için soru kökünün düzenlenmesi ile ilgili öneride bulunmuşlardır. İkinci bölümün ilk halinde “Şekilde görülen cisimlerden hangileri silindirdir?”, “Şekilde görülen cisimlerden hangileri prizmadır?” gibi soru kökleri yer almaktadır. Ancak uzmanlar silindir, prizma vb. isimler verilmeden öğretmen adaylarının doğrudan kendilerinin gruplandırma yapmalarının daha doğru olacağını belirtmişlerdir. Bu nedenle soru kökü belirtildiği şekilde düzenlenmiştir. Ayrıca farklı bir konuda (dörtgenler) hazırlanan benzer bir test bir önceki yıl birinci sınıfta öğrenim gören öğretmen adaylarına uygulanmıştır. Bu uygulama pilot uygulama olarak düşünülerek testin uygulama sürecinde ne kadar süre verileceği planlanmış, öğretmen adaylarının testin her iki bölümünü ayrı ayrı yaklaşık 20 dakikada tamamlamaları istenmiştir.



Şekil 1. Geometrik Cisimler Testindeki Şekiller

Covid-19 salgınından dolayı öğretmen adayları bu dönemde uzaktan eğitim almakta olup uygulama Zoom programı aracılığı ile yapılmıştır. Verdikleri cevapların not olarak etkisi olmayacağı belirtilmiş, cevaplarını içtenlikle vermeleri istenmiştir. Uygulama sürecinde öğretmen adayları ile görüntülü ve sesli olarak iletişim kurulmuştur. Öğretmen adayları da herhangi bir soruları olduğunda araştırmacıya sorularını yöneltebilmişlerdir. Uygulama süreci ve görüşmeler Zoom programı ile kayıt altına alınmıştır. Öğretmen adaylarının yaptıkları tanımlardan ve çizdikleri şekillerden etkilenmemeleri için birinci bölüm teslim alındıktan sonra ikinci bölümü cevaplamaları istenmiştir. Cevaplarını kâğıtlara yazıp tarayarak verilen süreçte üniversitenin uzaktan eğitim sistemindeki ödev uygulamasına yüklemişlerdir.

Yazılı cevapları incelendikten sonra içlerinden seçilen altı öğretmen adayı ile Zoom programı aracılığı ile sesli ve görüntülü olarak görüşmeler yapılmıştır. Her bir öğretmen adayı ile yapılan görüşme yaklaşık 25 dakika sürmüştür. Yaptıkları tanımlar, çizimleri ve gruplandırmaları üzerine konuşulmuş, verdikleri cevaplardan emin olup olmadıkları, tanım yaparken nelere dikkat ettikleri, neden bu çizimleri yaptıkları, gruplandırmayı neye göre yaptıkları sorulmuştur.

Verilerin Analizi

Öğretmen adaylarının prizma ve silindire yönelik yaptıkları tanımlar içerik analizine tabi tutulmuştur. İçerik analizinde temel amaç birbirine benzer verileri belirli kavramlar çerçevesinde bir araya getirmek ve bunları okuyucunun anlaya-

bileceği şekilde düzenleyerek yorumlamaktır (Forman & Damschroder, 2008). Bu kapsamda prizma ve silindir tanımları için kategoriler ve kodlar oluşturulmuş, bu kodlara ait frekanslar tablo ile sunulmuş ve yorumlar yapılmıştır. Prizma ve silindir ile ilgili yapılan üç farklı çizim ve testin ikinci bölümünde verilen cisimlere dayalı gruplandırmalar Excel'de kodlanmıştır. Ardından bu kodlamalara dayalı Excel aracılığı ile grafikler oluşturulmuştur. Görüşme verilerinin analizinde ise betimsel analiz tekniği kullanılmıştır. Betimsel analizde görüşülen bireylerin görüşlerini çarpıcı biçimde yansıtmak amacı ile doğrudan alıntılara yer verilmekte olup amaç bulguları düzenlenmiş ve yorumlanmış şekilde okuyucuya sunmaktır (Yıldırım & Şimşek, 2016). Görüşme verilerinin analizinde betimsel analiz tekniğinin seçilme nedeni öğretmen adaylarının teste verdikleri cevapları görüşmelerden alınan doğrudan alıntılarla desteklemektir. Bu kapsamda her bir alt problemle ilgili öğretmen adaylarının görüşme kesitleri sunulmuş ve yorumlanmıştır. Görüşme transkriptleri uzun olduğu için her bir alt problemde görüşülen tüm öğretmen adaylarının görüşme diyaloglarına yer verilmemiştir. Farklı alt problemlerde öğretmen adaylarının teste verilen cevapları açıklayacağı düşünülen görüşme kesitleri sunulmuş, ayrıca tüm alt problemlere bütün olarak bakıldığında her bir öğretmen adayından verilen görüşme kesitlerinin dengeli olmasına dikkat edilmiştir.

Geçerlik, Güvenirlik ve Etik

Kodlama güvenilirliği için araştırmacı ve matematik eğitimi alanında görev yapmakta olan bir akademisyen tarafından veriler ayrı ayrı kodlanmıştır. Miles ve Huberman (1994) tarafından geliştirilen güvenilirlik formülü (Güvenirlik: Görüş Birliği / Görüş Birliği + Görüş Ayrılığı) kullanılmış olup değerlendiriciler arası uyum yüzdesi % 92 olarak bulunmuştur. Farklı kodlama yapılan kısım tanımlarla ilgili olup bu kısma yönelik kodlama tekrar gözden geçirilmiştir. Ayrıca zamanlama güvenilirliğinden de yararlanılmış, veriler ilk kodlama üzerinden 1 ay geçtikten sonra araştırmacı tarafından tekrar kodlanmıştır. Kodlamaların uyumlu olduğu görülmüştür. Verilerin nasıl analiz edildiğine yönelik bir örnek Şekil 2'de verilmiştir. Verilen örnek tanımların nasıl analiz edildiği ile ilgili olup şekilde görüldüğü gibi önce tanımlardan kodlara ulaşılmış ardından bu kodlara ait kategoriler oluşturulmuştur.

Öğretmen adayı	Tanım				
ÖA1	Alt ve üst tabanları eş şekil ve paralel olan üç boyutlu şekil				
ÖA2	Alt ve üst tabanı daire olan ve bir dikdörtgenin bir kenarı etrafında 360 derece dönmesi ile oluşan geometrik şekil				
ÖA3	Alt ve üst tabanı doğrularla birleştirilmiş kapalı şekil				
İÇERİK ANALİZİ					
		Kodlama		Frekans	
ÖA1	Alt ve üst tabanı eş			1	
	Alt ve üst tabanı paralel			1	
ÖA2	Alt ve üst tabanı daire			1	
	Dikdörtgenin bir kenarı etrafında 360 derece dönmesi sonucu oluşan			1	
ÖA3	Alt ve üst tabanı doğrularla birleştirilmiş			1	
İFADELER					
		Kodlama		Frekans	
ÖA1	Üç boyutlu			1	
	Şekil			1	
ÖA2	Geometrik şekil			1	
ÖA3	Kapalı			1	
	Şekil			1	

Şekil 2. Silindire Yönelik Tanımların Nasıl Analiz Edildiğine Bir Örnek

Etik Kurul İzin Bilgileri

Yapılan bu çalışmada “Yükseköğretim Kurumları Bilimsel Araştırma ve Yayın Etiği Yönergesi” kapsamında uyulması belirtilen tüm kurallara uyulmuştur.

Etik Değerlendirmeyi Yapan Kurul Adı: Kastamonu Üniversitesi Sosyal ve Beşeri Bilimler Araştırma ve Yayın Etiği Kurulu

Etik Değerlendirme Kararının Tarihi: 25.03.2021

Etik Değerlendirme Belgesi Sayı Numarası: E-16498365-050.01.04-2100025489

BULGULAR

Bu bölümde sırası ile öğretmen adaylarının prizma ve silindire yönelik yaptıkları tanımların, çizimlerin ve prizma-silindir gruplandırmalarının analizine yer verilmiştir. Her bir alt probleme yönelik olarak öncelikle tüm öğretmen adaylarına uygulanan teste verilen cevaplara dayalı bulgular, ardından görüşme yapılan öğretmen adaylarının bulguları sunulmuştur.

Öğretmen Adaylarının Prizma ve Silindire Yönelik Yaptıkları Tanımların Analizi

Bu bölüm öğretmen adaylarının prizma ve silindir kavramlarına yönelik yaptıkları tanımların içerik analizine dayalı bulguları içermektedir. Prizmaya yönelik analiz Tablo 1’de sunulmuştur.

Tablo 1. Prizmaya Yönelik Yapılan Tanımların İçerik Analizi

Kategori	Kod	Frekans
Alt ve Üst Tabanı	Olan	3
	Birbirine paralel	7
	Birbirine eş	6
	Çokgen	8
	Düzgün çokgen	1
	Düzgün geometrik şekil	1
	Düzlemsel şekil	1
	Doğrularla birleştirilmiş	2
	Paralel doğrularla birleştirilmiş	1
	Toplam	30
Tabanları	Birbirine eş	4
	Birbirine paralel	5
	Çokgenlerden oluşan	1
	Farklı düzlemlerde olan	3
	Düzgün çokgen olan	1
	Doğrularla birleştirilmiş	1
	Toplam	15
Tabanı ve Tavanı	Birbirine eş	2
	Geometrik şekillerden oluşan	1
	Doğru parçalarıyla birleştirilmiş	2
	Yan yüzeyle birleştirilmiş	1
	Köşelerinden birleştirilmiş	1
	Dik birleştirilmiş	1
	Sonsuz doğrularla birleştirilmiş	1
Toplam	9	
Tabanı	-na göre isimlendirilen	4
	Kare olan	1
	Ve bir tepesi olan	2
	Toplam	7

Yan Yüzleri	Dikdörtgen olan	4
	Eşit olan	1
	Dörtgen olan	1
	Daire olan	1
	Tabana dik	1
	Aynı veya farklı şekil olabilen	1
	Köşeleri birbirine değen üçgenlerden oluşan	1
	Toplam	10
Açılımı	Kapalı yüzeyler içeren	2
	Düzensiz geometrik şekiller içeren	4
	Geometrik şekiller içeren	2
	Toplam	8

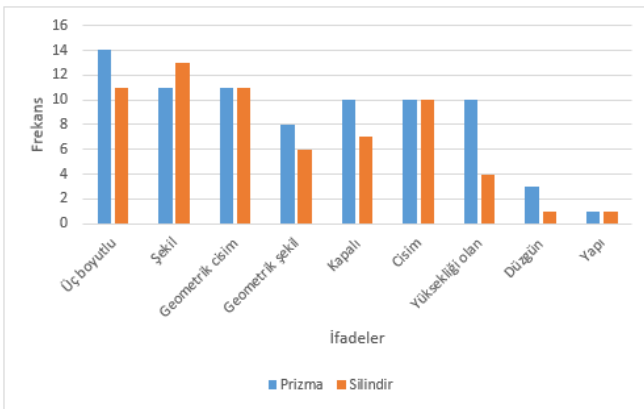
Tablo 1 incelendiğinde prizma ile ilgili yapılan tanımlarda genelde prizmada taban kavramına odaklanıldığı görülmektedir. Taban kavramının kullanıldığı tanımlarda en çok “alt ve üst tabanı” ifadesinin (f=30) geçtiği görülmektedir. “Tabanı” ifadesinin kullanıldığı tanımlardan “tabanı ve bir tepe noktası olan” ifadesi prizma için yanlış bir tanım olup piramidi ifade etmektedir. Benzer şekilde “tabanı kare olan” ifadesinin geçtiği tanımda da piramit tanımı yapıldığı görülmüştür. “Tabanları düzensiz çokgen olan” ifadesi de yanlışlık içermektedir; çünkü prizmanın tabanlarının düzensiz çokgen olma zorunluluğu yoktur. Diğer taraftan prizma ile ilgili tanımlarda “yan yüzleri” ve “açılımı” kavramlarına odaklanılan tanımlar da mevcut olup bu tanımlarda da yanlış ifadeler göze çarpmaktadır. Tablo 2’de ise silindir kavramına yönelik yapılan tanımların içerik analizine dayalı sonuçlar sunulmuştur.

Tablo 2. Silindire Yönelik Yapılan Tanımların İçerik Analizi

Kategori	Kod	Frekans
Alt ve Üst Tabanı	Eş	14
	Paralel	17
	Daire	14
	Doğrularla birleştirilmiş	7
	Çember	2
	Simetrik	1
	Aynı düzlemde	1
	-nın her noktasından birleşmesi sonucu oluşan	1
	-nın sayısız doğruyla birleşmesi sonucu oluşan	1
	Toplam	56

Tabanları	Doğru parçalarıyla birleştirilmiş	1
	Paralel doğru parçalarıyla birleştirilmiş	4
	Farklı düzlemlerde	5
	Birbirine eř	5
	Birbirine paralel	1
	Toplam	16
Yan Yüzü	Dikdörtgen	7
	Dairesel bölge	1
	Toplam	8
Açılımı	2 eř daire ve 1 dikdörtgen ya da kareden oluşan	2
	2 eř daire ve 1 dikdörtgenden oluşan	3
	Toplam	5
Bir Kenarı Etrafında	Dikdörtgenin 360° dönmesi ile oluşan	8
	Kare veya dikdörtgenin 360° dönmesi ile oluşan	1
	Toplam	9

Tablo 2 incelendiğinde silindir ile ilgili yapılan tanımlarda da prizmaya benzer olarak genellikle taban kavramına odaklanıldığı görülmektedir. Bu kavramın kullanıldığı tanımlarda “alt ve üst tabanı” ifadesi (f=56) oldukça fazla geçmektedir. Silindir ile ilgili yapılan tanımlardan “yan yüzü dairesel bölge” ifadesinin geçtiği tanım yanlış bir tanımdır. Ayrıca öğretmen adayları prizma ve silindir için yaptıkları tanımlarda ayrıt kavramına yer vermemişler, tabanların doğru parçaları ya da doğrular ile birleştirildiğini belirtmişlerdir. Yine silindirin tabanlarının daire olmasının yanında çember olduğunu belirten öğretmen adayları da vardır. Prizma ve silindir kavramlarına ilişkin tanımlarda öne çıkan ifadeler Şekil 3’te gösterilmiştir.



Şekil 3. Öğretmen Adaylarının Prizma ve Silindir Tanımlarında Öne Çıkan İfadeler

Şekil 3 incelendiğinde prizma tanımında en çok “üç boyutlu” ifadesinin ($f=14$), silindir tanımında ise en çok “şekil” ifadesinin ($f=13$) kullanıldığı görülmektedir. Silindir ve prizmanın her ikisini de tanımlarken farklı ifadelerle odaklanıldığı; bu ifadelerin bazılarının doğru bazılarının ise yanlış olduğu söylenebilir. Diğer taraftan “yüksekliği olan” şeklinde kodlanan ifade silindir tanımlarında “yüksekliği olan” şeklinde; prizma tanımlarında ise “en, boy ve yüksekliği olan” şeklinde geçmektedir.

Görüşme yapılan öğretmen adaylarının yaptıkları tanımlardan ve görüşme kesitlerinden örnekler Tablo 3’te sunulmuştur.

Tablo 3. Öğretmen Adaylarının Prizma ve Silindire Yönelik Yaptıkları Tanımlardan Ve Görüşme Kesitlerinden Örnekler

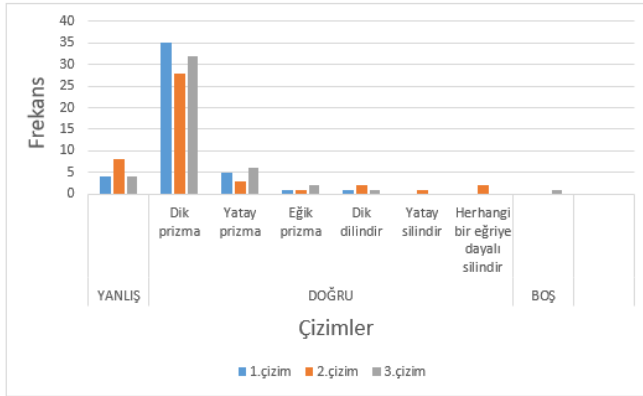
Öğretmen Adayı	Tanımlar	Görüşme Kesitleri
ÖA4	<p>Prizma: En, boy, yükseklik bulunduran 3 boyutlu kapalı cisim.</p> <p>Silindir: Alt ve üst tabanı eşit çemberlerden oluşan ve bu çemberlerin belli bir yükseklikle (uzunlukla) birleştirilmesiyle oluşan 3 boyutlu kapalı cisim.</p>	<p>A: Tanımlarını inceleyelim. Düzenlemek istediğin bir ifade var mı?</p> <p>ÖA4: Prizma için belirli bir hacme sahip olduğunu belirtmişim. Aslında tabanlarının eş olduğunu da söylesem daha iyi olurmuş.</p> <p>A: Silindir için ne söylersin?</p> <p>ÖA4: Silindir için aklımda canlanan şekil tabanlarının çember olması. Gözümün önüne ortaokulda da gördüğümüz cisim geliyor.</p>
ÖA27	<p>Prizma: Tavanı ve tabanı belli geometrik şekillerden oluşan, tabanı ve tavanı yan yüzeyle birleştirilmiş geometrik cisim.</p> <p>Silindir: Tavanı, tabanı daireden oluşan ve birbirine paralel olacak şekilde yan yüzeyi olan geometrik cisim.</p>	<p>A: Tanımlarını inceleyelim. Düzenlemek istediğin bir ifade var mı?</p> <p>ÖA27: Prizma için geometrik şekiller eksik olmuş. Sizin verdiğiniz şekillerden sonra fikrim değişti. İlla ki üçgen, dikdörtgen gibi şekiller olması gerekmiyor. Tabanları birbirine eş olsa yeterli olur.</p> <p>A: Silindir için ne söylersin?</p> <p>ÖA27: Silindir için taban ve tavan kelimelerini kullanmışım. Oysaki şimdi ben şekli ters çevirsem taban ve tavan yer değiştirecek. Tabanları daireden oluşan şekilde düzeltebilirim.</p>

ÖA29	Prizma: Tabanları birbirine paralel farklı düzlemlerde iki eşit tabanı olan ve tabanları düzgün çokgen olan geometrik cisim.	A: Tanımlarımı inceleyelim. Düzenlemek istediğin bir ifade var mı?
	Silindir: Tabanları birbirine paralel farklı düzlemlerde iki eşit tabanı olan geometrik cisim.	ÖA29: Prizmada tabanları düzgün çokgen olmalı demişim. Çokgen olması yeterli. Düzgün çokgen olmasına gerek yok.

Tablo 3 incelendiğinde öğretmen adaylarının görüşmelerde tanımlarında bazı düzenlemeler yaptıkları söylenebilir. Altı öğretmen adayı ile yapılan görüşmede yaptıkları tanımlarda genellikle zihinlerinde canlanan cisimlerin etkili olduğu, öğretmen adaylarının prizma ve silindir ile ilgili algılarının birbirinden farklılaştığı görülmüştür.

Öğretmen Adaylarının Prizma ve Silindire Yönelik Yaptıkları Çizimlerin Analizi

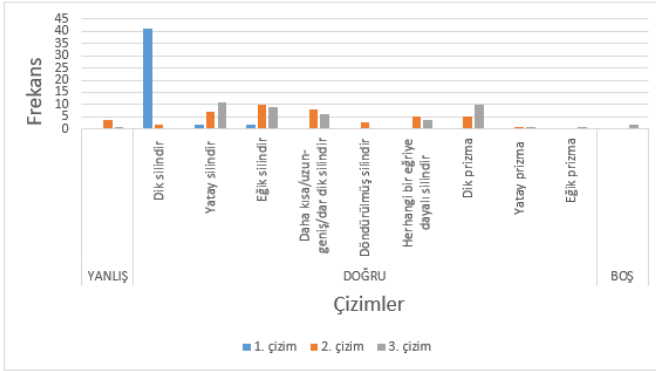
Bu bölümde öğretmen adaylarının prizma ve silindir kavramlarına yönelik yaptıkları çizimlerin analizine dayalı bulgular sunulmuştur. Prizmaya yönelik yapılan çizimlerin içerik analizi Şekil 4'te gösterilmiştir.



Şekil 4. Prizmaya Yönelik Yapılan Çizimlerin İçerik Analizi

Şekil 4 incelendiğinde toplam yanlış çizim sayısı 16 olup yanlış çizimler incelendiğinde genellikle prizma yerine piramit çizildiği ($f=9$), bunun dışında da alt ve üst tabanı eş olmayan çizimlere ($f=2$), alt ve üst tabanı ters yönlü çizimlere ($f=2$) ve koni çizimine ($f=2$) yer verildiği görülmüştür. Prizma için yapılan doğru çizimlere bakıldığında ise her üç çizimde de en çok dik prizma çizimine yer verildiği görülmektedir. Üç farklı çizim yapmaları gerektiğinde genellikle prizmanın tabanındaki çokgenin kenar sayısını değiştirme yoluna gitmişlerdir. Dikey prizmalar içinde daha çok kare prizma, küp, üçgen prizma ve dikdörtgenler prizması çizimleri yapılmıştır. Bunun dışında çok daha az olmakla birlikte sırası ile altıgen

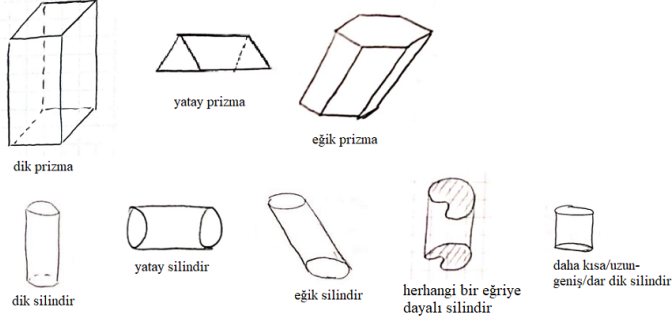
prizma, beşgen prizma, sekizgen prizma ve yamuk prizma çizimleri de mevcuttur. Prizma için yapılan doğru çizimleri dik prizmanın ardından yatay prizmalar takip etmektedir. Eğik prizma çizen çok az öğretmen adayı vardır ($f=4$). Bu çizimlerin dışında hiyerarşik ilişkiyi düşünerek prizma çizimleri istendiğinde silindir çizen az sayıda öğretmen adayı mevcuttur ($f=7$). Silindir çizimlerinin 1'i yatay silindir, 4'ü dik silindir olup tabanları çember şeklindedir ve 2'si herhangi bir eğriye dayalı dik silindir çizimidir. Silindire yönelik yapılan çizimlerin içerik analizi ise Şekil 5'te sunulmuştur.



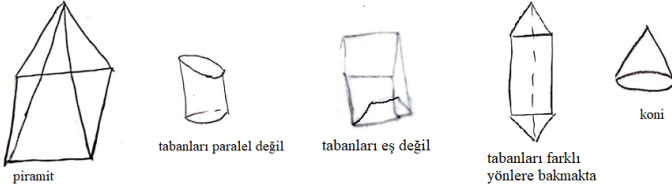
Şekil 5. Silindire Yönelik Yapılan Çizimlerin İçerik Analizi

Şekil 5 incelendiğinde toplam yanlış çizim sayısı 5 olup yanlış çizimlerde genellikle tabanları eş olmayan ya da tabanları paralel olmayan çizimlere yer verilmiştir. Doğru çizimlere bakıldığında 1. çizim için öğretmen adaylarının tamamına yakınının dik silindir çizdiği görülmektedir ($f=41$). 2. çizimlerde dik silindir olarak kodlanan öğretmen adaylarının ($f=2$) 1. çizimi eğik silindiridir. Bunun dışında 2. ve 3. çizimlerde dik silindir çizenler 1. şekildeki dik silindirin daha kısa/uzun ya da geniş/darını çizmişlerdir (sırası ile $f=8$ ve $f=6$). Dik silindir çizimlerini yatay silindir ve eğik silindir çizimleri takip etmektedir. Çok az sayıda öğretmen adayı ($f=3$) ise ikinci çizimlerinde dik silindiri çapraz döndürerek çizmişlerdir, bu durum döndürülmüş silindir olarak kodlanmıştır. Ayrıca 2. ve 3. çizimlerde herhangi bir eğriye dayalı silindir çizimi yapan (sırası ile $f=5$ ve $f=4$) öğretmen adayları da mevcuttur. Hiyerarşik ilişkiyi düşünerek silindir çizimleri istendiğinde prizma çizen öğretmen adaylarının frekansı 18'dir. Bu çizimlerden çoğu dik prizma, çok azı ise yatay ya da eğik prizma şeklindedir. Prizmalar genellikle üçgen, kare, dikdörtgen prizma ya da küp şeklinde çizilmiş, bir öğretmen adayı altıgen prizma bir öğretmen adayı ise yıldız şeklinde on iki-gen prizma çizimine yer vermiştir. Şekil 4 ve 5'te yer alan cisimlerin her birine birer örnek öğretmen adaylarının çizimlerinden alınmış ve Şekil 6'da sunulmuştur. Her bir cisim için cisimler arasındaki farkları görmek adına birer örneğe yer verilmiş, cisimlerin farklı türlerine girilmemiştir.

Ayrıca silindir olarak kodlanan cisimler herhangi bir eğriye dayalı silindir hariç tabanları çember ya da daire şeklindedir.



Doğru çizimlere örnekler

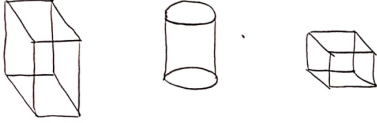
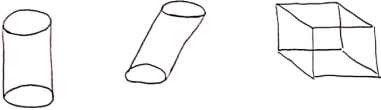


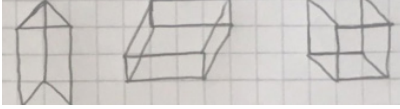
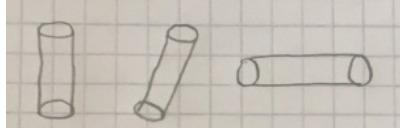

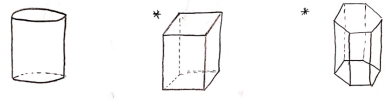
Yanlış çizimlere örnekler

Şekil 6. Öğretmen Adaylarının Prizma ve Silindir İçin Yaptıkları Çizimlerden Örnekler

Görüşme yapılan öğretmen adaylarının yaptıkları çizimlere ve görüşme kesitlerine ilişkin örnekler Tablo 4'te sunulmuştur.

Tablo 4. Öğretmen Adaylarının Prizma ve Silindire Yönelik Yaptıkları Çizimler ve Görüşme KesitleriNden Örnekler

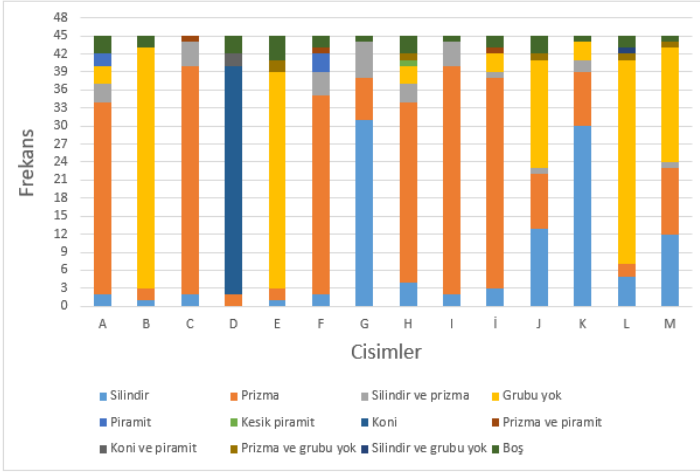
Öğretmen Adayı	Çizimler	Görüşme Kesitleri
	Prizma	
		A: Çizimlerini neye göre yaptığını açıklar mısın? ÖA12: Silindir deyince çeşitlerinden bahsetmek istedim. Dik silindir, eğik silindir ve küp çizdim.
	Silindir	
		A: Küp de sana göre bir silindir öyleyse? Yani tabanlarının mutlaka daire olması gerekmiyor? ÖA12: Bence daire olmak zorunda değil. Prizma da bir silindir diyebilirim.
ÖA12		A: Prizma için dikdörtgenler prizması, dik silindir ve küp çizmişsin. ÖA12: Himm. Burada aslında bir kafa karışıklığım var. Silindir prizma mı yoksa prizma silindir mi? Hangisi hangisini kapsıyor şeklinde. Liseden kalan bilgim yeterli olmamış. A: Anladım. Peki şu anda ne düşünüyorsun? ÖA12: Aslına bakarsanız silindiri prizmanın altına almam şu an çok şaşırttı beni. Şimdi olsa bunu çizmezdim. Evet, bence prizma silindirin alt kümesi.

ÖA16	Prizma		A: Çizimlerini neye göre yaptığını açıklar mısın?
	Silindir		ÖA16: Aklıma bu şekiller geliyor. Silindir için dikey konumda, eğik olarak ve yatay olarak farklı konumlardaki duruşlarını çizdim. Prizma için tabanlarına göre farklı prizmalar çizdim.
ÖA29	Prizma		A: Çizimlerini neye göre yaptığını açıklar mısın?
	Silindir		ÖA29: Silindir için ilk çizim aklıma gelen ilk şekil. 2. ve 3. Çizimlerde silindirin daha geniş bir küme olduğunu belirtmek istedim. Hem silindirde hem prizmada aynı şekiller çizdim.
			A: Prizma çizimleri için ne söylersin?
			ÖA29: Prizmada işte çokgen olmasına dikkat ettim tabanlarının. Ondan sonra farklı düzlemlerde yapınca tabanlarını, birleştirmek kaldı.

Tablo 4 incelendiğinde öğretmen adaylarının prizma ve silindir ile ilgili farklı çizimler yaptıkları görülmektedir. İlk çizimleri genellikle akıllarına gelen ilk cisim olarak çizmişlerdir. Bazı öğretmen adayları prizma ve silindiri ayrı kümeler olarak görmektedir. Bazıları aralarında hiyerarşik bir ilişki olduğunu düşünmektedir ancak hangisinin hangisini kapsadığı konusunda emin değildir. Bazı öğretmen adayları ise net bir şekilde aralarında hiyerarşik bir ilişki olduğunu düşünmektedir.

Öğretmen Adaylarının Prizma ve Silindire Yönelik Gruplandırılmalarının Analizi

Bu bölümde öğretmen adaylarının verilen cisimleri gruplandırılmalarına ait bulgular sunulmuş, gruplandırma biçimleri Şekil 7'de gösterilmiştir.



Şekil 7. Öğretmen adaylarının verilen cisimleri gruplandırma biçimleri

Şekil 7 incelendiğinde öğretmen adaylarının çoğunluğunun g ve k cisimlerini silindir grubuna; a, c, f, h, l ve i'yi ise prizma grubuna dahil ettikleri görülmektedir. Genellikle cisimler ayrık kümeler olarak düşünülmüş; yalnızca prizma ya da yalnızca silindir grubuna dahil edilmiştir. Bir cismi hem silindir hem de prizma grubuna dahil eden öğretmen adaylarının sayısı oldukça azdır. Herhangi bir gruba ait olmadığı düşünülen cisimler b, e, j, l ve m şeklindedir. B, e ve l'nin bir grubu olmadığını düşünen öğretmen adayları daha büyük çoğunlukta. J ve m için ise grubu olmadığını düşünen öğretmen adayları daha çok olsa da, prizma veya silindir olduğunu düşünen öğretmen adaylarının sayısı da oldukça fazladır. Bunun dışında d cismi öğretmen adaylarının büyük çoğunluğu tarafından koni sınıfına dahil edilmiştir. Bazı gruplandırmaların ise yanlış olduğu görülmektedir. Bir cismi "prizma ve piramit", "prizma ve grubu yok", "silindir ve grubu yok" sınıflarına aynı anda dahil eden öğretmen adaylarının cevapları yanlış cevaplara örnektir. Diğer bir yanlış cevap h cisminin kesik piramit olarak isimlendirilmesidir. Bunun dışında bazı cisimler grubu olduğu halde herhangi bir grubunun olmadığı belirtilmiştir: a (yatay üçgen prizma), h (yamuk dik prizma), i (eğik kare prizma) ve k (eğik silindir). Görüşme yapılan öğretmen adaylarının seçimleri Şekil 8'de sunulmuştur.

	Silindir	Prizma	Koni	Grubu olmayanlar	Kesik piramit	Piramit
ÖA4	g, k, l	a, c, f, i, j, m	d	b, e	h	
ÖA12		a, c, e, f, g, h, i, j, k, l, n	d	b, e, h, j, l, m		
ÖA16	g, k	c, h, i, l	d	b, e, j, l, m		a, f
ÖA27	g, k	a, c, f, h, i, l, j, m	d	b, e, l		
ÖA29	a, c, f, g, h, i, j, k, m	a, c, f, i	d	b, e, l		
ÖA30	g, k	a, c, e, f, h, i, j, m	d	b, e, l		

Şekil 8. Görüşme Yapılan Öğretmen Adaylarının Verilen Geometrik Cisimleri Gruplandırma Biçimleri

Öğretmen adaylarının verilen cisimleri gruplandırma ile ilgili bazı ortak fikirleri olsa da farklı fikirlere de sahip oldukları görülmektedir. Görüşmelerden ulaşılan bulgular ve görüşme kesitleri Tablo 5'te sunulmuştur.

Tablo 5. Öğretmen Adaylarının Verilen Cisimleri Gruplandırmalarına Dayalı Görüşmelerden Ulaşılan Bulgular ve Görüşme Kesitleri

Öğretmen adaylarının silindirlerin ve prizmaların tabanlarına dayalı algılarının farklılaştığı görülmüştür.
<i>A: Gruplandırmaları neye göre yaptığını açıklar mısın?</i>
ÖA29: Yaptığım tanımlar gibi, prizma iki eş çokgen taban olmalı, silindir ise tabanları eş olan herhangi bir şekil olabilir.
ÖA30: Prizma için alt ve üst tabanı birbirine paralel olmalı. e'yi prizmalara yanlışlıkla dahil etmişim. Bir grubu yok bence.
ÖA4: Prizmaları gruplandırırken tabanlarının aynı olup olmadığına, silindirler için tabanlarının çember olup olmadığına baktım.
Öğretmen adaylarının silindir ve prizma arasındaki hiyerarşik ilişki konusunda farklı fikirleri sahip olduğu görülmüştür. ÖA4 ve ÖA16 silindir ve prizmayı ayrıık kümeler olarak düşünmektedir. ÖA27 ve ÖA30 gruplandırma ile ilgili yapılan görüşmelerde silindirlerin prizmaların alt kümesi olduğunu düşündüklerini ifade etmişlerdir. Bu öğretmen adaylarının tanımlarında ve çizimlerinde ise hiyerarşik ilişki olduğunu düşündüklerine dair bir ifade yoktur. ÖA30'un hiyerarşik ilişkiye dayalı fikri görüşme sırasında değişmiştir. ÖA27 ise hiyerarşik ilişki olduğunu düşündüğünü ifade etmektedir ama bu durumu tanım, çizim ve seçimlerine yansıtamamıştır. ÖA12 ve ÖA29 ise prizmaları silindirlerin alt kümesi olarak düşündüklerini ifade etmişlerdir. ÖA12'nin tanımı bu hiyerarşik ilişkiyi yansıtmaktadır, çizimlerinde hiyerarşik ilişki ile ilgili kafa karışıklığı vardır, seçimlerinde ise hiyerarşik ilişkiyi dikkate almamıştır ancak çizimlerle ve gruplandırma ile ilgili görüşme sırasında prizmaların da silindir olduğunu söylemiştir. ÖA29'un ise tanımları, çizimleri ve yaptığı gruplandırmalar prizmaların silindirlerin alt kümesi olduğunu düşündüğünü göstermektedir.

A: Peki silindir ve prizma arasında herhangi bir hiyerarşik ilişki var mı sence?

ÖA4: Hiçbiri hiçbirinin alt kümesi olduğunu düşünmüyorum. Bence birbirinden ayrıık kümeler.

ÖA16: Bence ayrıı geometrik cisimler.

A: Peki silindir ve prizma arasında herhangi bir hiyerarşik ilişki var mı sence?

ÖA30: Aslında ayrıık olduklarını düşünüyordum. Silindir alt ve üst tabanı çember. Prizma çokgen. Ama şimdi inceleyince ikisinin de alt ve üst tabanı aynı. Ortak noktaları var. Bence silindir prizmadır ama prizma silindir değildir.

A: Buna nasıl ulaştın?

ÖA30:Prizmada taban çember olursa silindir oluyor.

A:O zaman g ve k'yı tekrar incelemeni istesem?

ÖA30: Bu durumda bunlar silindirdir ve aynı zamanda prizmadır.

A: Bu durumda g ve k için ne söylersin? Sadece silindir grubuna dahil etmişsin?

ÖA27:G,k silindir. Çünkü tabanı ve tavanı daire ve birbirine paralel. Silindir tanımına uyar.

Ama aynı zamanda prizmadır diyebilirim. Hocam hani silindir ayrıı bir isimdir ya silindir diye öğrenmişizdir o gruba almırım ama aynı zamanda prizmadır. Özel isim olduğu için bu şekilde almıştım.

A: Peki silindir ve prizma arasında herhangi bir hiyerarşik ilişki var mı sence?

ÖA12: Aslında silindir prizmanın üst kümesidir. A ve c prizmadır aynı zamanda da silindirdir. Bu gibi şekilleri aynı zamanda silindire de alabilirim.

A: Prizma için aldıklarımın hepsini silindir grubuna da almışsın. Bu da tanım ve çizimindeki hiyerarşik ilişkiyi desteliyor gibi.

ÖA29: Evet.

A: Silindir ve prizma arasındaki hiyerarşik ilişkiyi nasıl ifade edersin?

ÖA29:Silindirde tabanlarının eş olması yetiyor. Yani silindir daha geniş, prizma onun alt kümesi olmuş oluyor. Çünkü prizmada çokgen olması şartı var.

Alt ve üst tabanı paralel ve eş olan ancak çokgen olmayan cisimleri (j ve m) gruplandırma konusunda farklı fikirlere sahip oldukları görülmüştür.

A: j ve m için ne söylersin?

ÖA16: J ve m alışkın olduğumuz dikdörtgen, üçgen gibi şekiller olmadığı için prizma grubuna dahil etmedim. Tabanları daire değil o yüzden silindir grubuna da almadım. (Tanımında da silindirin alt ve üst tabanın dairelerden oluştuğunu belirtmişim)

A: J ve m yi de prizma olarak almışsın? Mutlaka tabanları dörtgen, beşgen olması şart değil mi sana göre?

ÖA27:Tabanların birbirine eş ve paralel olması yeterli.

A: J ve m için ne söylersin? Neden silindir grubuna dahil edebiliriz?

ÖA29: Tabanlar eş paralel ve farklı düzlemde.

A:Tabanlarının çokgen olması gerekmiyor mu?

ÖA29: Silindirde gerekmiyor. Ama prizmaya almam çokgen olmadığı için.

Herhangi bir grubu olmayan cisimler (b, e ve l) ile ilgili farklı görüşlere sahip oldukları görülmüştür. B ve e'nin bir grubu olmadığını düşünenler daha fazladır. Ancak l'yi tabanların paralellğine dikkat etmeyerek silindir grubuna alanlar da vardır.

A: Herhangi bir grubu olmayan cisimler için ne söylersin?

ÖA29: b için silindir desem tabanları eşit değil. Tabanları eşit olsa bile birleştirilme şekli yanlış. Doğru parçaları ile birleşmemiş. l'de tabanlar birbirine paralel değil. e'den bir parça alınmış.

A: l'yi de silindir olarak almışsın. Nedenini açıklar mısın?

ÖA4: Tabanları daire olduğu için.

Prizmanın tabanlarını genellikle bilindik çokgenler olarak düşünmektedirler. h cismini tabanları yamuk olduğu (alınmış dörtgenlerin dışında) için prizma grubuna almayanlar vardır. ÖA29'da bu şekilde gruplandırma yapmış ancak görüşme sırasında hatasını fark etmiştir.

A: Başka düzenlemek istediğin durum var mı?

ÖA29: h'yi şu an fark ettim. h'yi de prizma almalıyım. Düzgün olması şart değil. Uygulamada yazdıktan sonra düzgün yazmamalıydım diye düşündüm aslında.

A: h için ne söylersin?

ÖA12: h'de tabanlar yamuk şeklinde. Prizmalar genelde kare, üçgen, dikdörtgen gibi tabanlar oluyordu. O yüzden karar veremedim.

TARTIŞMA, SONUÇ VE ÖNERİLER

Bu çalışmada matematik öğretmen adaylarının prizma ve silindir ile ilgili kavram imajları yaptıkları tanımlar, çizimler ve gruplandırma biçimleri çerçevesinde analiz edilmiştir. Ayrıca öğretmen adaylarının teste verdikleri cevaplar ve yapılan görüşme kesitleri birlikte değerlendirilerek kavram imajlarının nasıl olduğu ile ilgili yorumlamalar yapılmıştır.

Yapılan tanımlar, çizimler ve gruplandırma biçimleri birlikte düşünüldüğünde öğretmen adaylarının prizma ile ilgili kavram imajlarının genellikle dik prizma şeklinde olduğu görülmüştür. Sonuçlar farklı düzeylerdeki katılımcıların prizma algılarının dik prizma şeklinde olduğunu belirtilen çalışmalar ile benzerdir (Gökkurt & Soylu, 2016; Horzum & Ertekin, 2018; Man, 2019; Türnüklü & Ergin, 2016; Unlu & Horzum, 2018). Diğer taraftan öğretmen adaylarının prizma algıları bilindik çokgen tabanlı prizmalar şeklinde olup bu durum kavram imajlarının prototip algılara dayalı olduğunu göstermektedir. Prizma çizimlerinde altıgen prizma ve yamuk prizma çizimlerde yok denecek kadar azdır; ongen, on iki-gen kenarlı gibi farklı çizimlere ise hiç rastlanmamıştır, sadece bir öğretmen adayı yıldız şeklinde prizmayı silindir çizimine dahil etmiştir. Birçok çalışmada benzer şekilde ortaokul öğrencilerinin (Ergin & Türnüklü 2015; Türnüklü & Ergin 2016); ortaöğretim öğrencilerinin (Avgören, 2011); öğretmen adaylarının (Gökbulut & Ubuz 2013; Karakuş ve Erşen, 2021; Ulusoy, 2019; Gökbulut, 2010; Zeybek Şim-

şek, 2019) ve öğretmenlerin (Gökkurt & Soylu, 2016; Man, 2019) prizma ile ilgili kavram imajlarının belirtilen prototip örneklerle sınırlı olduğu belirtilmektedir. Gruplandırma ise öğretmen adayları yine en çok bilindik çokgen tabanlı dik prizmaları prizma grubuna dahil etmişlerdir ancak altıgen dik prizmayı ve altıgen prizma kadar olmasa da yamuk dik prizmayı da prizma olarak almışlardır. Yine de bu seçimler prototip prizmalara göre özellikle yamuk için azdır. Benzer şekilde Yurniwati ve Soleh (2019)'in çalışmasında da öğretmen adaylarının yamuk tabanlı prizma ile ilgili algılarının kısıtlı olduğu belirtilmektedir. Diğer taraftan Altaylı vd.'nin (2014) çalışmasında belirtilen bazı öğretmen adaylarının üçgen prizmayı prizma olarak almamaları bu çalışmada elde edilen sonuçlardan farklılaşmaktadır. Üçgen prizma öğretmen adaylarının çizimlerinde ve gruplandırmalarında yer verdikleri prizmalardandır. Benzer şekilde bu çalışmada küp de çizimlerde en çok yapılan prizma çizimlerindedir. Bu sonuç ortaokul öğrencilerinin (Ergin & Türnüklü, 2015) küpü prizma olarak görmemeleri ile farklılaşmakta, Zeybek Şimşek'in (2019) çalışmasında öğretmen adaylarının küpü prizma olarak almaları ile ise benzerlik göstermektedir. Bu farklılıkların katılımcıların sınıf seviyesinden kaynaklanabileceği düşünülmektedir. Karakuş ve Erşen'in (2021) çalışmasında da son sınıf öğretmen adaylarının birinci sınıf öğretmen adaylarına göre geometrik cisimleri tanımlama ve prototip olmayan çizimler yapmada daha başarılı oldukları bulgusuna ulaşılmıştır.

Öğretmen adaylarının silindir ile ilgili kavram imajları ise dairesel tabanlı ve dik silindir şeklindedir. Bu sonuç birçok çalışma ile öğretmen adaylarının (Ertekin vd., 2014; Gökbulut 2010; Gökkurt, 2014; Karakuş ve Erşen, 2021; Koçak vd., 2017) ve öğretmenlerin (Man, 2019; Tsamir vd., 2008) silindiri dairesel tabanlı algılamaları açısından benzerdir. Zeybek Şimşek (2019)'in ve Karakuş (2018)'un da belirttiği gibi silindirin tabanlarının daire olarak alınması durumunda herhangi kapalı bir eğri olabilme durumu göz ardı edilmektedir. Bu çalışmada da öğretmen adaylarının prototip algılarının sınırlı görsel algılar oluşturarak kavramı sınırlandığı görülmüştür. Öğretmen adaylarının çoğu tabanları birbirine eş ve paralel ancak çokgen ya da daire olmayan cisimlerin (j ve m) bir grubu olmadığını düşünmekte, daha az sayıda olsa da bazıları ise bu cisimleri prizma veya silindir gruplarına dahil etmektedir. Benzer şekilde Karakuş (2018)'un çalışmasında da aynı (m) cismi silindir grubuna dahil edilmemiştir. Bu durum öğretmen adaylarının silindir için çoğunlukla prototip imajlara sahip olduklarını ve geometrik cisimler hangi kritik özellikle sahip olduğunda silindir ya da prizma olacağı ile ilgili bilgilerinin net olmadığını göstermektedir. Benzer şekilde öğretmen adaylarının silindir ve prizmanın (Ulusoy, 2019) ve prizmanın (Gökbulut & Ubuz, 2013; Gökkurt & Soylu, 2016) kritik özelliklerini ayırt etmede zorluk yaşadıkları belirtilmektedir.

Çalışmadan elde edilen sonuçlar birçok çalışma ile öğretmen adaylarının (Karakuş, 2018; Gökkurt 2014; Koçak vd., 2017) ve öğretmenlerin (Tsamir vd., 2008) silindir ile ilgili kavram imajlarının dik silindir olması açısından benzerlik

göstermektedir. Özellikle ders kitaplarında yer alan silindir gibi geometrik cisimlerin tanımlarının genel tanımlar yerine özel tanımlar (dik dairesel silindir vb.) üzerinden açıklanmasından kaynaklı olabileceği belirtilmektedir (Yemen-Karpuzcu ve Işıksal-Bostan, 2013). Ayrıca ders kitaplarında genellikle prototip örneklere yer verilmekte (Ertekin vd., 2014), bu durum da öğretmen adaylarının her iki geometrik cisim için prototip kavram imajlarına sahip olmalarına sebep olmaktadır. Her ne kadar 11. sınıf ders kitabında silindirin dairesel dışında farklı tabanlara da sahip olabileceği belirtilse de verilen örnekler bu durumu yansıtmada yeterli kalmamaktadır. Sadece prototip modeller üzerinde durulduğunda geometrik cisimlerle ilgili kavram imgesi ile kavram tanımı arasındaki tutarsızlık ortaya çıkmaktadır (Monaghan, 2000). Buna dayalı olarak öğrencilerin derslerde farklı örnekler ile karşı karşıya getirilmesi önemlidir (Uygun vd., 2022). Diğer taraftan öğretmen adayları tanımlarda (yan yüzlerin dikdörtgen olması vb.) ve çizimlerde genellikle dik prizma/silindirlere yer vermişler, gruplandırmada ise dik prizmalar/silindirler kadar olmasa da yatay ve eğik prizmaları ve silindirleri tanıyabilmişlerdir. Buna dayalı olarak öğretmen adaylarının gruplandırmada çizim yapmaya göre daha başarılı oldukları söylenebilir.

Kritik özellikler ile ilgili diğer bir sorun ise bir cismin silindir ya da prizma olabilmesi için gereken ön şartların genel ifadelerle açıklanmasıdır. Prizmanın hangi kritik özelliklere sahip olduğunu tam olarak bilmeyerek prizmayı üç boyutlu herhangi bir geometrik cisim olarak algılayan ve özellikle piramitleri de prizma olarak düşünen öğretmen adayları vardır. Benzer şekilde öğretmen adaylarının silindiri (Koçak vd., 2017), prizmayı (Gökbulut, 2010; Gökkurt & Soylu, 2016; Unlu & Horzum, 2018; Zeybek Şimşek, 2019) ve silindir ile prizmayı (Karakuş ve Erşen, 2021) “katı bir cisim, hacmi olan, ayrıtları olan” gibi sadece silindire/prizmaya özgü olmayıp üç boyutlu cisimler için geçerli olabilecek nitelikte ifadelerle açıkladıkları belirtilmektedir. Yine araştırma bulgularına benzer olarak öğretmen adaylarının prizma çizimlerinde ve/veya seçimlerinde başka geometrik cisimlere ve özellikle piramitlere yer verdiklerini (Gökbulut & Ubuz 2013; Gökkurt & Soylu, 2016; Ulusoy, 2019; Zeybek Şimşek, 2019) gösteren çalışmalar mevcuttur. Benzer şekilde öğretmen adaylarının çoğunun prizma ve piramit arasında ayırım yapamadığı belirtilmektedir (Noto, Priatna ve Dahlan, 2019). Geometrik cisimler konusu öğretilirken prizma ve silindirlerin kritik özelliklerine değinilmesi önemlidir (Uygun vd., 2022).

Herhangi bir grubu olmayan cisimleri (b, e ve l) çoğu öğretmen adayı doğru belirleyebilmiştir ancak özellikle (l) şeklini paralelliği ihmal ederek tabanları daireden oluştuğu için silindir olarak düşünen ve çizimlerinde de bu şekle benzer çizimler yapan öğretmen adayları vardır. Bu sonuç Zeybek Şimşek (2019) ve Karakuş’un (2018) çalışmaları ile öğretmen adaylarının kesik silindiri silindir olarak çizmeleri ya da gruplandırmaları açısından benzerdir. Benzer şekilde Tsamir vd. (2008) ile Gökbulut’un (2010) çalışmalarında da tabanları daire olduğu için kesik

koni silindir olarak alınmıştır. Araştırmadan elde edilen diğer bir sonuç kavram imajlarının kavram tanımlarına göre baskın olmasıdır. Benzer şekilde Karakuş (2018) da ilkökul ve ortaokulda silindir için verilen açıklama ve örneklere dayalı olarak öğrencilerin zihninde silindire ilişkin bir imaj oluştuğunu, lise matematik öğretim programında silindir için daha kapsamlı bir tanım verilmesine karşın bu tanımın öğretmen adaylarının mevcut imajlarını değiştirmede etkili olmadığını belirtmektedir. Başka çalışmalarda da kavrama yönelik kavram imajlarının kavram tanımlarına göre daha baskın kullanıldığı ifade edilmektedir (Clements & Sarama, 2011; Vinner, 2011; Zeybek Şimşek, 2019).

Silindir ve prizma arasındaki hiyerarşik ilişki düşündüğünde öğretmen adaylarının genellikle bu cisimleri ayrı kümeler olarak düşünmekle birlikte farklı fikirlere sahip olduğu tespit edilmiştir. Öğretmen adayları prizmaları çokgen tabanlı (Gökbulut, 2010; Gökbulut & Ubuz, 2013; Ulusoy, 2019), silindirleri ise daire tabanlı (Ulusoy, 2019) olarak görselleştirmektedirler ve bu durumun bu iki geometrik cisim ayrı kümeler olarak görmeye neden olduğu düşünülmektedir. Hiyerarşik ilişki olduğunu düşünen öğretmen adaylarından bazılarının fikirleri ise çok net değildir. Hiyerarşik ilişki olduğunu düşünenler arasında çizimlerde genellikle silindirler daha geniş bir küme olarak algılanmış, gruplandırmada ise az da olsa iki türlü de ilişki olduğunu düşünenlerin olduğu görülmüştür. Literatürdeki çalışmalarda da bu konudaki görüşlerin farklı olduğu, silindiri özel bir prizma olarak düşünen öğretmenler (Gökkurt & Soylu, 2016; Man, 2019) ve öğretmen adayları (Gökbulut & Ubuz, 2013; Işıksal Bostan & Yemen Karpuzcu, 2017; Karakuş, 2018; Ulusoy, 2019; Zeybek Şimşek, 2019) ile prizmayı özel bir silindir alan öğretmen adaylarının (Ertekin vd., 2014) olduğu belirtilmektedir. Ayrıca bazı öğretmen adaylarının silindir ve prizma arasındaki hiyerarşik ilişki hakkında fikirlerinin net olmadığı (Akayüre, 2021) ve yine öğretmen adaylarının çoğunun silindir ve prizma arasında bir ilişki olmadığını düşündükleri (Karakuş ve Erşen, 2021) sonucuna ulaşılmıştır. Van de Walle vd. (2014) prizmaların aynı zamanda silindir olduğunu ifade etmekte ve birçok öğrencinin bu tür bir ilişkilendirmeyi kuramadığını ifade etmektedir. Türkiye'deki matematik öğretim programlarında prizmalar çok yüzlü olarak kabul edildiği için öğretmen adaylarının bu tür ilişkilendirmeleri kurmakta zorlandıkları düşünülmektedir.

Öğretmen adaylarının büyük çoğunluğunun matematiksel dili kullanma konusunda eksiklerinin olduğu görülmüştür. Bu yanlış kullanımlardan biri taban kavramının “alt ve üst tabanları” ve “tabanı ve tavanı” şeklinde ele alınmasıdır. Horzum ve Ertekin'in (2018) çalışmasında matematik öğretmen adaylarının konum değişikliğinde de tabanı yere değen kısım olarak gördükleri belirtilmektedir. Bu çalışmada öğretmen adayları bir masa üzerinde kare yüzeyi üzerinde duran kare prizmaya kare prizma adını vermekte, ancak aynı prizmaya, dikdörtgen yüzeyinde durduğunda dikdörtgen prizma demektedirler. Benzer şekilde Gökkurt ve Soylu (2016) öğretmenlerin; Bozkurt ve Koç (2012) öğretmen adaylarının prizma için ve

Altaylı vd. (2014) öğretmen adaylarının prizma ve silindir için yaptıkları tanımlarda taban ve tavan kelimesini kullanarak matematiksel hata yaptıklarını belirtmektedir. Diğer taraftan tanımlarda öne çıkan ifadelerde şekil ve geometrik şekil kavramlarının kullanıldığı görülmektedir. Birçok çalışmada da üç boyutlu geometrik cisimler için öğretmen adaylarının şekil (Ertekin vd., 2014; Karakuş, 2018); geometrik şekil (Bozkurt & Koç, 2012; Ulusoy, 2019); üç boyutlu şekil (Bozkurt & Koç, 2012; Koçak vd., 2017; Unlu & Horzum 2018); üç boyutlu geometrik şekil (Unlu & Horzum 2018) kavramlarını kullanarak hata yaptıkları belirtilmektedir. Hatalı terim içeren diğer bir durum ise doğru parçaları, doğrular gibi kavramlara yer verilmesi ancak ayrıt kavramının kullanılmamasıdır. Gökkurt ve Soylu (2016) öğretmenlerin ayrıt yerine kenar kavramını kullanarak matematiksel hata yaptıklarını, Kılıçoğlu (2020) de öğretmen adaylarının ayrıt kavramını yüzey, kenar ve köşegen gibi kavramlarla karıştırdıkları ifade etmektedir. Diğer taraftan silindir ile ilgili yaptıkları tanımlarda ve görüşme kesitlerinde silindirin tabanlarının daire yerine çember olduğunu ifade edenler olmuştur. Bu sonuç Koçak vd.'nin (2017) çalışması ile benzerdir. Dilin matematik öğrenmedeki rolü ve özellikle matematiksel dilin önemli olduğu (Ginsburg, Lee & Boyd, 2008) dikkate alındığında öğretmen adaylarının hatalı ifadelerinin çeşitli sorunlara yol açabileceği söylenebilir.

Araştırmadan elde edilen sonuçlara dayalı olarak aşağıdaki öneriler getirilmiştir:

- Ders kitaplarında prototip örnekler dışında örneklere de yer verilmelidir.
- Öğretmenler öğretim sürecinde örnekleri ve karşı-örnekleri kullanmalı, sınıfta bu örnekler üzerinden tartışma ortamı oluşturarak derslerini yürütmelidir.
- Matematiksel dilin doğru ve etkili kullanımına özen gösterilmelidir.
- Kavram tanımı ile kavram imajı arasında dengesizlik oluşmaması için öğretim sürecinde verilen tanımların ve örneklerin birbiri ile uyumlu olmasına dikkat edilmelidir.
- Öğretmen adaylarına lisans eğitimleri sürecinde bu konular ile ilgili alan bilgilerindeki eksikleri giderecek nitelikte eğitim verilmelidir.

Teşekkür ve Açıklamalar

Çalışmaya katkı sağlayan tüm öğretmen adaylarına teşekkür ederim.

KAYNAKLAR

- Accascina, G., & Rogora, E. (2006). Using cabri 3D diagrams for teaching geometry. *International Journal for Technology in Mathematics Education*, 13(1), 11-22.
- Akayüre, P. (2021). Preservice teachers' content knowledge and learning obstacles in shape and space. *Asian Research Journal of Mathematics*, 17(7), 49-60.
- Alkış Küçükaydın, M., & Gökbulut, Y. (2013). Prospective primary teachers' misconceptions about definition of geometric shapes and unfolding process. *Cumhuriyet International Journal of Education*, 2(1), 102-117.
- Altaylı, D., Konyaloğlu A. C., Hızarcı, S., & Kaplan, A. (2014). The investigation of pre-service elementary mathematics teachers' pedagogical content knowledge on three dimensional objects. *Middle Eastern & African Journal of Educational Research*, 10(1), 4-24.
- Armah, R. B., Coffie, P. O., & Okpoti, C. A. (2017). The geometric thinking levels of pre-service teachers in Ghana. *Higher Education Research*, 2(3), 98-106.
- Attneave, F. (1957). Transfer of experience with a class schema to identification of patterns and shapes. *Journal of Experimental Psychology*, 54(2), 81-88.
- Avğören, S. (2011). *Farklı sınıf seviyelerindeki öğrencilerin katı cisimler (prizma, piramit, koni, silindir, küre) ile ilgili sahip oldukları kavram imajı*. Yayınlanmamış Yüksek Lisans Tezi, Gazi Üniversitesi, Ankara.
- Baki, M. (2013). Pre-service classroom teachers' mathematical knowledge and instructional explanations associated with division. *Education and Science*, 38(167), 300-311.
- Battista, M. T., & Clements, D. H. (1996). Students' understanding of three-dimensional rectangular arrays of cubes. *Journal for Research in Mathematics Education*, 27(3), 258-292.
- Baykul, Y. (2014). *Ortaokulda matematik öğretimi (5-8 sınıflar)*. Ankara: Pegem Akademi.
- Böge, H., & Akıllı, R. (2018). *Ortaokul ve imam hatip ortaokulu matematik 8 ders kitabı*. Milli Eğitim Bakanlığı.
- Bozkurt, A., & Koc, Y. (2012). Investigating first year elementary mathematics teacher education students' knowledge of prism. *Educational Sciences: Theory and Practice*, 12(4), 2949-2952.
- Clements, D. H. (2003). Teaching and learning geometry. In J. Kilpatrick, G. Martin, & D. Schifter (Eds.), *Research companion to principles and standards for school mathematics* (pp. 15-78). Reston, VA: National Council of Teachers of Mathematics.
- Clements, D. H., & Battista, M. T. (1992). Geometry and spatial understanding. In D. A. Grouws. (Ed.), *Handbook of research mathematics teaching and learning* (pp. 420-465). New York: McMillan Publishing Company.
- Clements, D. H., & Sarama, J. (2011). Early childhood teacher education: the case of geometry. *Journal of Mathematics Teacher Education*, 14(2), 133-148.
- Cohen, L. M., & Manion, L. (1998). *Research methods in education*. New York: Routledge.
- Çakmak, Z., Konyaloğlu, A. C., & Işık, A. (2014). The investigation of pre-service elementary mathematics teachers' content knowledge on three dimensional objects. *Middle Eastern & African Journal of Educational Research*, 8(1), 28-44.
- de Villiers, M. (1998). To teach definitions in geometry or teach to define?, In A. Olivier & K. Newstead (Eds), *Proceedings of the 22nd international conference of the international group for psychology of mathematics education: Vol. 2*. (pp. 248-255). Univ Stellenbosch: South Africa.
- Ergin, A. S., & Türnüklü, E. (2015). Investigation of middle school students' images of solids: geometric and spatial thinking relations. *Journal of Research in Education and Teaching*, 4(2), 188-199.
- Ertekin, E., Yazıcı, E., & Delice, A. (2014). Investigation of primary mathematics student teachers' concept images: Cylinder and cone. *International Journal of Mathematical Education in Science and Technology*, 45(4), 566-588.
- Forman, J., & Damschroder, L. (2008). Qualitative content analysis. In L. Jacoby, & L. A. Siminoff (Eds.), *Empirical methods for bioethics: A primer* (pp. 39-62). Elsevier.
- Fujita, T., & Jones, K. (2007). Learners' understanding of the definitions and hierarchical classification of quadrilaterals: Toward a theoretical framing. *Research in Mathematics Education*, 9(1), 3-20.
- Ginsburg, H. P., Lee, J. S., & Boyd, J. S. (2008). Mathematics education for young children: What it is and how to promote it. *Society for Research in Child Development, Social Policy Report*, 22, 3-22.
- Gökbulut, Y. (2010). *Sınıf öğretmeni adaylarının geometrik cisimler konusundaki pedagojik alan bilgileri*. Yayınlanmamış Doktora Tezi, Gazi Üniversitesi, Ankara.
- Gökbulut, Y., & Ubuş, B. (2013). Prospective primary teachers' knowledge on prism: Generating definitions and examples. *Elementary Education Online*, 12(2), 401-412.
- Gökkurt, B. (2014). *Ortaokul matematik öğretmenlerinin geometrik cisimler konusuna ilişkin pedagojik alan bilgilerinin incelenmesi*. Yayınlanmamış Doktora Tezi, Atatürk Üniversitesi, Erzurum.

- Gökkurt, B., & Soylu, Y. (2016). Examination of middle school mathematics teachers' mathematical content knowledge: The sample of prism. *Abant İzzet Baysal University Journal of the Faculty of Education*, 16(2), 451- 481.
- Gökkurt, B., Şahin, Ö., Soylu, Y., & Doğan, Y. (2015). Pre-service teachers' pedagogical content knowledge regarding student mistakes on the subject of geometric shapes. *Elementary Education Online*, 14(1), 55-71.
- Haapasalo, L., & Kadijevich, D. (2000). Two types of mathematical knowledge and their relation. *Journal für Mathematik-Didaktik*, 21(2), 139-157.
- Hasanah, A. N., & Yulianti, K. (2020, April). Error analysis in solving prism and pyramid problems. In *Journal of Physics: Conference Series* (Vol. 1521, No. 3, p. 032035). IOP Publishing.
- Hershkowitz, R. (1989). Visualization in geometry: Two sides of the coin. *Focus on Learning Problems in Mathematics*, 11(1), 61-76.
- Horzum, T., & Ertekin, E. (2018). Prospective mathematics teachers' understanding of the base concept. *International Journal of Mathematical Education in Science and Technology*, 49(2), 176-199.
- İşıksal Bostan, M., & Yemen Karpuzcu, S. (2017). The role of definitions on classification of solids including (non) prototype examples: The case of cylinder and prism. In T. Dooley, & G. Gueudet (Eds.), *Proceedings of the tenth congress of the european society for research in mathematics education: Vol.5.* (pp. 3320-3327). Dublin: CERME.
- Karakuş, F. (2018). Investigation of primary pre-service teachers' concept images on cylinder and cone. *Elementary Education Online*, 17(2), 1033-1050.
- Karakuş, F., & Erşen, Z. B. (2021). Investigation of pre-service elementary mathematics teachers' understanding on solids. *REDİMAT*, 10(2), 175-212.
- Kılıçoğlu, E. (2020). A study on the professional development of prospective primary school teachers: Subject matter knowledge on geometry. *International Online Journal of Educational Sciences*, 12(2), 30-54.
- Koç, Y., & Bozkurt, A. (2011). Evaluating pre-service mathematics teachers' comprehension level of geometric concepts. In B. Ubuz, (Ed.), *The proceedings of the 35th annual meeting of the international group for the psychology of mathematics education: Vol. 2.* (pp. 335). Ankara, Turkey: PME.
- Kocak, M., Gökkurt Özdemir, B., & Soylu, Y. (2017). An investigation the pedagogical content knowledge of primary mathematics prospective teachers about the concept of cylinder. *Cukurova University Faculty of Education Journal*, 46(2), 711-765.
- Levenson, E., Tirosh, D., & Tsamir, P. (2011). Theories and research related to concept formation in geometry. In E. Levenson, D. Tirosh, & P. Tsamir (Eds.), *Preschool geometry* (pp. 3-18). AW Rotterdam: Sense Publishers.
- Man, S. (2019). *Ortaokul matematik öğretmenlerinin geometrik cisimlere ilişkin kavram tanımlarının incelenmesi*. Yayınlanmamış Yüksek Lisans Tezi, Adıyaman Üniversitesi, Adıyaman.
- Marshall, M. N. (1996). Sampling for qualitative research. *Family Practice*, 13(6), 522-526.
- Maviş, M., Gül, G., Solaklıoğlu, H., Tarku, H., Bulut, F., & Gökşen, M. (2021). *Ortaöğretim matematik 10 ders kitabı*. Milli Eğitim Bakanlığı.
- McMillan, J. H. (2000). *Educational research: Fundamentals for the consumer*. New York: Longman.
- Miles, M. B., & Huberman, A. M. (1994). *Qualitative data analysis: An expanded Sourcebook*. (2nd ed). Thousand Oaks, CA: Sage.
- Milli Eğitim Bakanlığı (MEB). (2018a). *Matematik dersi öğretim programı (İlkokul ve ortaokul 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7 ve 8 sınıflar)*. Ankara: MEB.
- Milli Eğitim Bakanlığı (MEB). (2018b). *Ortaöğretim matematik dersi (9, 10, 11 ve 12. sınıflar) öğretim programı*. Ankara: MEB.
- Monaghan, F. (2000). What difference does it make? Children's views of the differences between some quadrilaterals. *Educational Studies in Mathematics*, 42(2),179-196.
- National Council of Teachers of Mathematics [NCTM]. (2000). *Principles and standards for school mathematics*. Reston, VA: Author.
- National Council of Teachers of Mathematics [NCTM] (2006). *Curriculum focal points for prekindergarten through grade 8 mathematics: A quest for coherence*. National Council of Teachers of Mathematics.
- Noto, M. S., Priatna, N., & Dahlan, J. A. (2019, February). Analysis of learning obstacles on transformation geometry. In *Journal of Physics: Conference Series* (Vol. 1157, No. 4, p. 042100). IOP Publishing.
- Oberdorf, C. D., & Taylor-Cox, J. (1999). Shape up!. *Teaching Children Mathematics*, 5(6), 340-345.
- Olkun, S., & Toluk U.Z., (2007). İlköğretimde etkinlik temelli matematik öğretimi. Ankara: Maya Akademisi.
- Putnam, R.T., Heaton, R.M., Prawat, R.S., & Remillard, J. (1992). Teaching mathematics for understanding: Discussing case studies of four fifth-grade teachers. *The Elementary School Journal*, 93(2), 213-228.
- Reed, S. K. (1972). Pattern recognition and categorization. *Cognitive Psychology*, 3(3), 382-407.
- Riastuti, N., Mardiyana, M., & Pramudya, I. (2017, September). Students' errors in geometry viewed from spatial intelligence. In *Journal of Physics: Conference Series* (Vol. 895, No. 1, p. 012029). IOP Publishing.

- Rosch, E. H. (1973). Natural categories. *Cognitive Psychology*, 4(3), 328-350.
- Sarfaty, Y., & Patkin, D. (2013). The ability of second graders to identify solids in different positions and to justify their answer. *Pythagoras*, 34(1), 212-222.
- Seymen, E., Gazioğlu, G., Yıldırım, S., & Meral, Y. (2021). *Ortaöğretim matematik 11 ders kitabı*. Milli Eğitim Bakanlığı.
- Star, J. R., & Stylianides, G. J. (2013). Procedural and conceptual knowledge: Exploring the gap between knowledge type and knowledge quality. *Canadian Journal of Science, Mathematics and Technology Education*, 13(2), 169-181.
- Tsamir, P., Tirosh, D., & Levenson, E. (2008). Intuitive non-examples: the case of triangles. *Educational Studies in Mathematics*, 69(2), 81-95.
- Tsamir, P., Tirosh, D., Levenson, E., Barkai, R., & Tabach, M. (2015). Early-years teachers' concept images and concept definitions: Triangles, circles, and cylinders. *ZDM*, 47(3), 497-509.
- Tall, D., & Vinner, S. (1981). Concept image and concept definition in mathematics with particular reference to limits and continuity. *Educational Studies in Mathematics*, 12(2), 151-169.
- Türnüklü, E., & Ergin, A. S. (2016). 8th year students' definitions and figural recognitions of solids: Concept images. *Elementary Education Online*, 15(1), 40-52.
- Ubuz, B., & Gökbulut, Y. (2015). Primary prospective teachers' knowledge on pyramid: Generating definitions and examples. *Journal of Kirsehir Education Faculty*, 16(2), 335-351.
- Ulusoy, F. (2019). Early-years prospective teachers' definitions, examples and non-examples of cylinder and prism. *International Journal for Mathematics Teaching and Learning*, 20(2), 149-169.
- Unlu, M., & Horzum, T. (2018). Mathematics teacher candidates' definitions of prism and pyramid. *International Journal of Research in Education and Science*, 4(2), 670-685.
- Uygun, T., Guner, P., & Simsek, I. (2022). Examining students' geometrical misconceptions by eye tracking. *International Journal of Mathematical Education in Science and Technology*, 1-26.
- Van de Walle, J., Karp, K. S., & Bay-Williams, J. M. (2014). *Elementary and middle school mathematics: Teaching developmentally (Eight international edition)*. Essex: Pearson.
- Van Dormolen, J., & Zaslavsky, O. (2003). The many facets of a definition: The case of periodicity. *Journal of Mathematical Behavior*, 22(1), 91-106.
- Vinner, S. (1983). Concept definition, concept image and the notion of function. *International Journal of Mathematical Education in Science and Technology*, 14(3), 293-305.
- Vinner, S. (1991). The role of definitions in the teaching and learning of mathematics. In Tall D. (Ed.), *Advanced Mathematical Thinking* (pp. 65-81). Dordrecht, Kluwer Academic.
- Vinner, S. (2011). The role of examples in the learning of mathematics and in everyday thought processes. *ZDM*, 43(2), 247-256.
- Weber, K., Porter, M., & Housman, D. (2008). Worked examples and conceptual usage in understanding mathematical concepts and proofs. In M. P. Carlson and C. Rasmussen (Eds.), *Making the connection: Research and teaching in undergraduate mathematics* (pp. 245-252). Washington, DC: Mathematical Association of America.
- Wilson, P. S. (1990). Inconsistent ideas related to definitions and examples. *Focus on Learning Problems in Mathematics*, 12(3&4), 31-47.
- Yemen Karpuzcu, S., & Işıkbal Bostan, M. (2013). Geometrik cisimler: Silindir, prizma, koni, piramit ve kürenin matematiksel anlamı. In İ. Ö Zembat, M. F Özmentar, E. Bingölbalı, Şandır, H, & A. Delice (Eds.), *Tanımları ve tarihsel gelişimleriyle matematiksel kavramlar* (pp. 278- 279). Ankara: Pegem.
- Yıldırım, A., & Şimşek, H. (2016). *Sosyal bilimlerde nitel araştırma yöntemleri*. Ankara: Seçkin Yayıncılık.
- Yurniwa, Y., & Soleh, D. A. (2019). Geometric conceptual and procedural knowledge of prospective teachers. *International Journal of Education and Pedagogy*, 1(2), 108-117.
- Zazkis, R., & Chernoff, E. J. (2008). What makes a counterexample exemplary?. *Educational Studies in Mathematics*, 68(3), 195-208.
- Zazkis, R., & Leikin, R. (2008). Exemplifying definitions: a case of a square. *Educational Studies in Mathematics*, 69(2), 131-148.
- Zeybek Şimşek, Z. (2019). Investigating pre-service teachers' ability to recognize and classify geometric concepts hierarchically. *Turkish Journal of Computer and Mathematics Education (TURCOMAT)*, 10(3), 680-710.
- Zodik, I., & Zaslavsky, O. (2008). Characteristics of teachers' choice of examples in and for the mathematics classroom. *Educational Studies in Mathematics*, 69(2), 165-182.

EXAMINATION OF PROSPECTIVE MATHEMATICS TEACHERS' CONCEPT IMAGES OF PRISM AND CYLINDER IN THE SCOPE OF THEIR DEFINITIONS, DRAWINGS AND GROUPING SKILLS

ABSTRACT

In this study, it was aimed to reveal the concept images of prospective mathematics teachers (known hereafter as PMTs) about prisms and cylinders. For this purpose, PMTs' definitions of these geometric objects, their different drawings, and the way they grouped the given geometric objects were examined. The research was conducted based on the case study model. The study group for the research consisted of 45 prospective teachers studying at the first grade level in the department of primary education mathematics teaching at the faculty of education of a university in the north of Turkey. Firstly, the geometric objects test, which includes the skills of defining, drawing, and grouping cylinders and prisms, was applied to the PMTs. Then interviews were conducted with six PMTs. The analysis of answers to the geometric object test was carried out based on the content analysis technique. The descriptive analysis technique was used in the analysis of the interview data. The results obtained from the research were presented under the headings of the PMTs' definitions, drawings, and grouping styles. As a result of the research, it was found that the PMTs' definitions of cylinder and prism were not fully sufficient, and they had difficulty distinguishing the critical features. Concept images are based on prototype examples, usually in the form of right objects with a circular region base for a cylinder and a polygon base for a prism. It was seen that the concept images were more dominant than the concept definitions. In addition, it was determined that they made mistakes in using the mathematical language and that there were deficiencies in the content knowledge about the subject. When considering the hierarchical relationship between the cylinder and the prism, it was concluded that the PMTs generally thought of these objects as discrete sets, but had different ideas. Various suggestions were made based on the results obtained from the research.

Keywords: Cylinder, Concept Image, Prism, Prospective Mathematics Teachers.



MATEMATİK ÖĞRETMEN ADAYLARININ PRİZMA VE SİLİNDİRE YÖNELİK KAVRAM İMAJLARININ TANIMLARI, ÇİZİMLERİ VE GRUPLANDIRMA BECERİLERİ KAPSAMINDA İNCELENMESİ

ÖZ

Bu araştırmada ilköğretim matematik öğretmen adaylarının prizma ve silindire yönelik kavram imajlarını ortaya çıkarmak amaçlanmıştır. Bu amaç doğrultusunda öğretmen adaylarının bu geometrik cisimlere yönelik tanımları, farklı çizimleri ve verilen geometrik cisimleri gruplandırma biçimleri incelenmiştir. Araştırma durum çalışması modeline dayalı olarak yürütülmüştür. Araştırmanın çalışma grubunu Türkiye'nin kuzeyinde bulunan bir üniversitenin eğitim fakültesi ilköğretim matematik öğretmenliği bölümünde birinci sınıf düzeyinde öğrenim gören 45 öğretmen adayı oluşturmaktadır. Öncelikle uygun örnekleme yöntemi kullanılarak belirlenen öğretmen adaylarına silindir ve prizmaya yönelik tanımlama, çizim yapma ve gruplama becerilerini içeren geometrik cisimler bilgi testi uygulanmıştır. Ardından maksimum çeşitlilik örnekleme yöntemine dayalı olarak öğretmen adaylarının verdikleri cevapların incelenmesi sonucunda 6 öğretmen adayı ile görüşmeler gerçekleştirilmiştir. Bilgi testine verilen cevapların analizi içerik analizi tekniğine dayalı olarak gerçekleştirilmiştir. Görüşme verilerinin analizinde ise betimsel analiz tekniği kullanılmıştır. Araştırmadan elde edilen sonuçlar öğretmen adaylarının tanımları, çizimleri ve gruplandırma biçimleri başlıkları altında sunulmuştur. Araştırma sonucunda öğretmen adaylarının silindir ve prizma tanımlarının tam olarak yeterli olmadığı, bu geometrik cisimlere yönelik kritik özellikleri ayırt etmekte güçlük yaşadıkları bulunmuştur. Kavram imajları genellikle silindir için dairesel tabanlı ve prizma için çokgen tabanlı ve dik cisimler şeklindedir. Çizimlerinde genellikle prototip algıya dayalı çizim yapmışlar, gruplandırmada da prototip örnekleri ayırt etmekte zorlanmamışlar ancak prototip olmayan örnekleri ayırt etmekte zorlanmışlardır. Kavram imajlarının kavram tanımlarına göre daha baskın olduğu görülmüştür. Ayrıca matematiksel dili kullanmada hatalar yaptıkları ve konu ile ilgili alan bilgilerinde de eksikler olduğu tespit edilmiştir. Silindir ve prizma arasındaki hiyerarşik ilişki düşündüğünde öğretmen adaylarının genellikle bu cisimleri ayrı kümeler olarak düşünmekle birlikte farklı fikirlere sahip olduğu sonucuna ulaşılmıştır. Araştırmadan elde edilen sonuçlara dayalı olarak çeşitli öneriler getirilmiştir.

Anahtar Kelimeler: Kavram İmajı, Matematik Öğretmen Adayları, Prizma, Silindir.



INTRODUCTION

The subject of geometric objects has a wide place in mathematics teaching programs. In addition, geometric objects are a part of our daily lives (Baykul, 2014), and when we look around us, geometric objects appear in many places (Gökbulut & Ubuz, 2013). There are many studies stating that secondary school students, prospective teachers, and teachers have difficulties with geometric objects, which are important subjects (Accascina & Rogora, 2006; Akayuure, 2021; Avgören, 2011; Battista & Clements, 1996; Çakmak, Konyalıoğlu & Işık, 2014; Koçak, Gökçurt Özdemir & Soylu, 2017). In geometric objects, prisms and cylinders are mentioned in current education reforms as subjects to be recognized, aware of, and able to relate (NCTM, 2000; NCTM, 2006). It is said that studies on definitions, features, generalizations, operations, and connections on these subjects are important (Armah, Cofie & Okpoti, 2017).

Correlations are made between cylinders and prisms in international geometry books and literature. As an example, Van de Walle et al. (2014) included the statement: “Cylinders with polygonal bases are called prisms” and considered all prisms to be special cases of cylinders. Furthermore, the cylinder concept is too comprehensive to be considered a special prism, and it serves a vital role in teaching geometry (Yemen Karpuzcu & Işıksal Bostan, 2013). It is emphasized that the hierarchical classification skill of geometric objects according to their properties constitutes an important part of the geometry curriculum, and understanding the hierarchical relations between geometric objects is important in the development of reasoning and inquiry skills (Clements, 2003; Fujita & Jones, 2007).

In education programs in Turkey, the subject of the prism is handled as a right prism at the 8th-grade level and is defined as: “Objects with congruent polygons and side faces perpendicular to the base planes, and whose one side is equal to one side of the polygon” (Böge & Akıllı, 2018). In the 10th-grade, it is considered again as a right prism (Maviş, Gül, Solaklıoğlu, Tarku, Bulut & Gökşen 2021; and in secondary and high school education levels, prisms with polygonal bases (square, triangle, rectangular) are generally known, and there are also pentagonal and hexagonal prism drawings, albeit less frequently. The subject of the cylinder is at the 8th-grade level, is handled as a right circular cylinder, and is defined as: “The geometric object formed by the upper and lower bases of congruent circles and the perpendicularity of the line segment connecting the points around these bases to the bases” (Böge & Akıllı, 2018). At high school, it takes place in the 11th-grade, and first of all, the cylindrical surface is defined, and then the cylinder definition is given (Seymen, Gazioğlu, Yıldırım & Meral, 2021). While making this definition, the image of the cylinder, which is any surface without a circular region, was included, but since right circular region-based cylinders were included in the curricu-

lum, explanations and examples are given according to prototypical right circular cylinders. The hierarchical relationship between the prism and the cylinder is not directly included in the secondary and high school mathematics curriculum, but in the 11th-grade, when the volume of the prism and the cylinder is explained: “When you increase the number of sides (n), the bases of the prism change from polygon to circle; the prism will turn into a cylinder.” (Seymen et al., 2021). This shows that cylinders are implied to be a more general concept, but a direct correlation is not made.

It is stated that teachers should have sufficient content and pedagogical content knowledge about three-dimensional objects in order to fulfill their teaching duties in the best way (Akayuure, 2021). Procedural and conceptual learning deficiencies in geometry (Star & Stylianides, 2013; Haapasalo & Kadijevich, 2000) and poor spatial perception and faulty definitions (Riastuti, Mardiyana & Pramudya, 2017) are expressed as some problems in learning geometry. Kılıçoğlu (2020), in her study dealing with the definition of concepts such as geometric shape and geometric object by prospective teachers, stated that there are prospective teachers who do not have clear information about the content of the concepts, make definitions based on rote, and do not attach importance to the use of some concepts in their definitions.

In studies on prism and cylinder, it is stated that prospective teachers and teachers have misconceptions about defining and exemplifying these objects (Alkış Küçükaydın & Gökbulut, 2013; Altaylı, Konyalıoğlu, Hızarcı & Kaplan, 2014). It is stated that the content knowledge is not sufficient for prism (Gökbulut & Ubuz 2013; Gökkurt & Soylu, 2016) and cylinder (Karakuş, 2018; Koçak et al., 2017). In addition, studies are showing that prospective teachers cannot define cylinder and prism (Gökbulut, 2010; Gökkurt, 2014; Karakuş & Erşen, 2021; Ulusoy, 2019; Zeybek Şimşek, 2019); cylinder (Ertekin, Yazici & Delice, 2014; Karakuş, 2018) and prism (Bozkurt & Koç, 2012; Gökbulut & Ubuz 2013; Unlu & Horzum, 2018) properly and have difficulty making mathematical definitions. Similarly, Türnüklü and Ergin (2016) state that 8th-grade students have difficulty defining the prism, and they try to describe the image formed in their minds while making their definitions; and Uygun, Guner, and Şimşek (2022) also state that 7th-grade students have difficulty defining the prism and cylinder. Again, Hasanah and Yulianti (2020) state that high school students do not understand the concept of prism, therefore they have misconceptions about the subject. In Man’s (2019) study, it is said that mathematics teachers cannot properly define the prism and cylinder.

One of the problems with definitions is that prospective teachers (Alkış Küçükaydın & Gökbulut, 2013; Ubuz & Gökbulut, 2015) and teachers (Gökkurt & Soylu, 2016; Tsamir, Tirosh, Levenson, Barkai & Tabach, 2015) have difficulty distinguishing critical features of definition. Again, in many studies, it is stated that

prospective mathematics teachers (Ertekin et al., 2014; Bozkurt & Koç, 2012; Gökbulut & Ubuz, 2013; Karakuş, 2018; Ulusoy, 2019; Zeybek Şimşek, 2019); mathematics teachers (Gökkurt & Soylu, 2016) and secondary school students (Ergin & Türnüklü, 2015; Türnüklü & Ergin, 2016) have weak concept images of cylinder and/or prism. On the other hand, some studies show that students and prospective teachers had difficulties understanding the hierarchical classification between three-dimensional geometric objects (Gökbulut & Ubuz, 2013; Gökkurt, Şahin, Soylu & Doğan, 2015; Işıksal Bostan & Yemen Karpuzcu, 2017; Karakuş & Erşen, 2021; Koç & Bozkurt, 2011; Uygun et al., 2022; Zeybek Şimşek, 2019). When all these studies are examined, it is seen that the cylinder and prism subjects have many difficulties.

It is thought that it is important to reveal the concept images of the prospective teachers, who will be the teachers of the future, about the prism and cylinder, which are important topics for geometry, and to determine what kind of knowledge they have and what kind of structures they have created in their minds so that the students receive the desired education. In addition, when the studies were examined, no study was found that examined the concept images of PMTs about prisms and cylinders. Often the focus is on the relationship between the cylinder and the cone, the prism and the pyramid, or one of the cylinders or prisms. In this study, the hierarchical relationship between the prism and the cylinder was also examined, and it is thought that it will contribute to the field by comparatively examining how the PMTs deal with these two geometric objects. In this direction, the aim of the study is to reveal the concept images by examining the definitions, drawings, and groupings (example, non-example cases, objects that do not belong to any group) of PMTs for prism and cylinder. The problem of the research is: "How are the PMTs' concept images of prism and cylinder?" The sub-problems are as follows:

1. What are the definitions of PMTs' for prism and cylinder?
2. What are the drawings of PMTs' for prism and cylinder?
3. What are the groupings of PMTs' for prism and cylinder?

Theoretical Framework

Concept Image

In this study, PMTs' concept images were examined according to the concept image theory of Tall and Vinner (1981), and the terms concept definition and concept image are used in this theory. Concept definition is a set of words that are used to explain the related concept and that clearly define the concept; on the other

hand, concept image refers to all cognitive structures that include mental shapes, pictures, features, and processes related to a concept in the mind of the individual. These terms are encountered in many studies examining how mathematical concepts are structured in students' minds (Clements & Battista, 1992; Fujita & Jones, 2007; Tall & Vinner, 1981; Türnüklü & Ergin, 2016).

A concept image is shaped unconsciously or consciously in a mental process that takes place in the cognition of individuals, has a dynamic structure, and can change and develop with experiences (Tall & Vinner, 1981). If the student does not have an image in his or her mind for the concept he or she will learn, first of all, an image of the concept is created with the help of the definition, explanation, and examples given. However, if there is an image of the concept in the mind of the student, this image may change and differentiate or remain unchanged based on the teacher's explanations, definitions, and examples in the textbook (Vinner, 1983). There are many factors in the formation of the concept image of the student, such as the environment in which the student learns the concept and the method, techniques, and materials used by the teacher for teaching (Karakuş, 2018).

Concept definition and concept image are structures that cannot be thought of independently and can interact with each other (Vinner, 1991). Definitions and the way they are presented to students shape the relationship between concept definition and concept image (Zazkis & Leikin, 2008). Tsamir, Tirosh and Levenson (2008) also stated that depending on the visual presentation and experiences in the minds of the students, first a concept image of the concept is formed, and the formal definition of the concept takes a place in the learner's mind in the following process. Even if the definition of the concept is given clearly when teaching a new concept, the formal definition may not be reached immediately. Vinner (2011) also argues that concept image and concept definition are not always parallel and that concept image is usually dominant in decision-making. If the concept image is wrong, the definition of the concept will not be correct (Olkun & Toluk Uçar, 2007). On the other hand, knowing only the definition of a concept does not definitively show that the concept is understood correctly (de Villiers, 1998). One of the factors that ensure the correct formation of these concept images is the examples chosen with the awareness of creating a concept image. Along with definitions, examples and non-examples also play a role in the creation of a mathematical concept in the mind (Monaghan, 2000; Wilson, 1990), and it is recommended to give examples of non-examples as well as examples of concepts in geometry teaching (Oberdorf & Taylor-Cox, 1999; Tsamir et al., 2008).

The Role of Examples and Critical Features in Concept Image

Examples are generally divided into three groups: examples that come to mind first and are taken as the basis of comparison when grouping (prototype exam-

les), additional examples, and reverse examples (non-examples) (Attneave, 1957; Reed, 1972; Rosch, 1973). Considering the prototype examples, the inability to distinguish the critical and non-critical features of the concept and make groupings based on these examples may constitute an obstacle in the formation of the concept (Hershkowitz, 1989; Tsamir et al., 2008). Such examples are mostly identified with the concept, and different forms cannot be considered for the concept (Aygören, 2011). Prototype examples play a major role in the formation of students' concept images (Levenson, Tirosh & Tsamir, 2011), and it is stated that these examples may cause students to create misconceptions (Hershkowitz, 1989) and form faulty structures related to the concept by creating limited perceptions about the concept (Fujita & Jones, 2007). For example, in the study of G and Soylu (2016), it is said that giving examples such as square and triangular right prism for prism may cause people not to think of oblique prism or decagonal prism as prism. In order to avoid these limited perceptions, it is recommended to emphasize the critical features of the concept through concept definitions (Monaghan, 2000) and various examples (Hershkowitz, 1989).

Critical features of the concept enable the concept to be defined under necessary and sufficient conditions and to be included in the set containing examples of the concept (Hershkowitz, 1989; Tall & Vinner, 1981). According to Hershkowitz (1989), the definitions in the textbooks should include critical features, and these features in the definitions can form the basis for people's decision-making. Non-critical features are generally based on prototypical concept images that people have (Sarfaty & Patkin, 2013). For this reason, it is necessary to define critical and non-critical features well (Hershkowitz, 1989); otherwise, misconceptions may be encountered (Gökbulut & Ubuz, 2013). For example, Gökçurt and Soylu (2016) state the critical features of a prism as "the bases are polygonal, the bases are equal and parallel, the lateral surfaces are parallel, and the prismatic region is bounded by two parallel bases". The definition of "objects with angular bases are prisms" includes the critical feature of bases being polygons, but it does not include other critical features and causes the misconception that pyramids can also be prisms (Gökbulut & Ubuz, 2013). On the other hand, it is stated that one of the important criteria of a good definition is that it be hierarchical (Van Dormolen & Zaslavsky, 2003) and that the definitions made for concepts should be hierarchical in order to understand the hierarchical relationship between geometric objects (Zeybek Şimşek, 2019).

The teacher's content knowledge has a direct impact on the quality of the learning and teaching process (Baki, 2013) and the knowledge level of the teachers plays an important role in the creation of the desired learning environments (Putnam, Heaton, Prawat & Remillard, 1992). Teachers are among the important factors affecting the development of students' concept images (Tsamir et al., 2015). The fact that the examples given by the teachers are accurate, clear, remarkable, and capable

of helping to clarify the mathematical subtleties (Zodik & Zaslavsky, 2008) and representing the object appropriately ensures that students understand the concepts correctly (Zazkis & Chernoff, 2008), do not fall into misconceptions (Çakmak et al., 2014), and create an appropriate concept image (Weber, Porter & Housman, 2008). Their content knowledge should not be limited to prototypical examples; they should know examples that will create the right concept image in the minds of students (Gökkurt, 2014). On the other hand, the definitions of geometric concepts should be learned exactly, and it should be known which critical properties they should have (Hershkowitz, 1989). Meaningful geometry learning requires an in-depth understanding of concepts and the strong relationship between concepts (Tall & Vinner, 1981).

METHOD

Research Model

The research was conducted based on the case study model. A case study is defined as a method in which one or more events, programs, environments, social groups, or systems are examined in depth (McMillan, 2000). In this study, the concept images of the PMTs' regarding the concepts of prism and cylinder were examined as a case.

Study Group

The study group for the research consisted of 45 PMTs studying at the first grade level in the Department of Primary Education Mathematics Teaching in the Faculty of Education of a state university in the north of Turkey. They studied the subject of geometric objects in secondary and high school, as stated in the introduction part. At the undergraduate level, the subject of geometric objects is seen within the scope of the Fundamentals of Mathematics II course, which is among the first-year courses, but this subject had not yet been covered in this course before the data collection process was carried out. Therefore, PMTs' knowledge at the beginning of their undergraduate education was suitable for determining. In addition, the mathematics-specific lessons taken by the PMTs until they reach this level are limited to Analysis I (a course containing the subjects of functions, limits, continuity, and derivatives), Fundamentals of Mathematics I (a course containing subjects related to numbers and operations, and algebra learning areas), and History of Mathematics. They have not yet taken any course in mathematics education, the courses they take related to education are limited to Introduction to Education and Educational Sociology.

Convenience sampling, one of the non-random sampling methods, was used to determine the study group. This sampling is briefly defined as the selection of the sample from easily accessible and applicable units due to limitations in terms of time, money, and labor (Cohen & Manion, 1998). The study group consisted of the PMTs, who are taught a different course by the researcher. The selection of the PMTs for the interviews was made based on the examination of the geometric objects test applied before the study. Maximum variation sampling, one of the purposive sampling methods, was used as the sample selection method for the interviews. The purpose of this sampling method is to create a relatively small sample and to reflect the diversity of individuals at the highest level (Marshall, 1996). The perceptions of the PMTs interviewed about geometric objects are shown in Table 5 in detail. In addition, PMTs of different genders were also asked to be included in the interview; PMT29 and PMT30 are male, and others are female. Also, each PMT was willing to be interviewed.

Data Collection Tools and Data Collection

The “Geometric Objects Test” developed by the researcher, was used as a data collection tool in the research. This test consists of two parts. In the first part, PMTs were asked to define the prism and cylinder and then make three different drawings for both geometric objects. In the second part, for the 14 geometric objects given (Figure 1), the question was asked to be answered: “*a) How would you group the objects seen in the figure? For each group, explain why you did the grouping in this way. b) Are there any objects that do not belong to any group in your classification? If so, explain why these objects do not belong to any group.*” While determining these objects, the ways in which geometric objects are handled in the secondary and high school mathematics curriculum (MoNE, 2018a; MoNE, 2018b), the resources related to the subject (Van de Walle, 2014), and the related literature (Ertekin et al., 2014; Karakuş, 2018; Zeybek Şimşek, 2019) were used.

Before the application, a language specialist, an assessment and evaluation specialist, and two mathematics educators examined the prepared test. Experts stated that the first part of the test was appropriate. For the second part, they made suggestions about the arrangement of the question root. In the first version of the second part, “*Which of the objects seen in the figure are cylinders?*” and “*Which of the objects seen in the figure are prisms?*” question roots were used. However, experts stated that it would be more correct for the PMTs to group themselves directly without giving names such as cylinders, prisms, etc. For this reason, the root of the question has been arranged as stated. In addition, a similar test prepared on a different subject (quadrilaterals) was applied to PMTs studying in the first grade the previous year. Considering this was a pilot application, it was planned to complete both parts of the test separately in approximately 20 minutes.

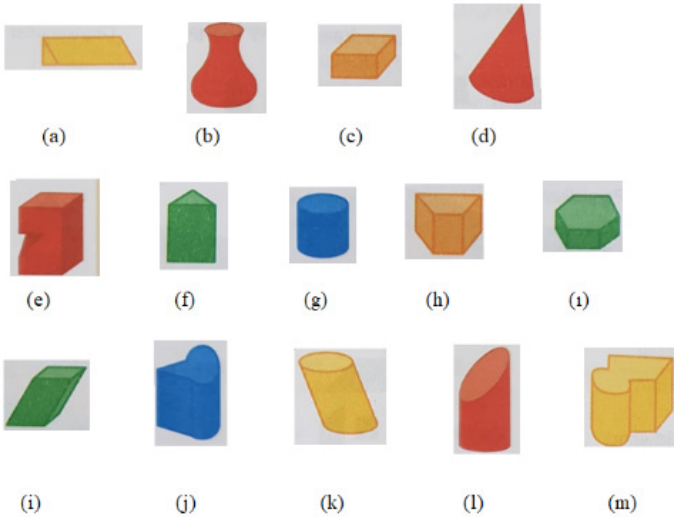


Figure 1. Objects in the Geometric Objects Test

Due to the COVID-19 pandemic, the PMTs were receiving distance education during this period, and the application was made through the Zoom program. It was stated that the answers they gave would not have any effect on a grade, and they were asked to give their answers sincerely. During the implementation process, visual and audio communication were established with the PMTs. They were also able to direct their questions to the researcher when they had any questions. The application process and interviews were recorded with the Zoom program. In order for the PMTs not to be affected by the definitions they made and the shapes they drew, they were asked to answer the second part after the first part was received. They wrote and scanned their answers on papers and uploaded them to the homework application in the university's distance education system within the given time.

After examining their written answers, video interviews were conducted with six of them through the Zoom program. The interviews were video-recorded, and the interview with each PMT lasted approximately 25 minutes. The definitions they made, drawings, and groupings were discussed, and it was asked whether they were sure of their answers, what they paid attention to when making a definition, why they made these drawings, and how they made the grouping.

Analysis of Data

The definitions of PMTs were subjected to content analysis. The main purpose of content analysis is to gather similar data within the framework of certain concepts and interpret them in a way that the reader can understand (Forman & Damschroder, 2008). In this context, categories and codes were created for prism and cylinder definitions, the frequencies of these codes were presented in tables, and comments were made. Three different drawings of the prism and cylinder and groupings based on the objects given were coded in Excel. Then, graphs were created using Excel based on these encodings. The descriptive analysis technique was used in the analysis of the interview data. In the descriptive analysis, direct quotations are included in order to reflect the views of the interviewed individuals in a striking way, and the aim is to present the findings to the reader in an organized and interpreted way (Yıldırım & Şimşek, 2016). The reason for choosing the descriptive analysis technique in the analysis of the interview data is to support the answers given by the PMTs to the test with direct quotations from the interviews. In this context, the interview sections of the PMTs related to each sub-problem were presented and interpreted. Since the interview transcripts are long, the interview dialogues of all the PMTs interviewed for each sub-problem were not included. Interview sections, which are thought to explain the answers given to the test in different sub-problems, were presented, and when all sub-problems were considered as a whole, attention was paid to ensure that the interview sections given from each PMT were balanced.

Validity, Reliability and Ethics

The researcher and an academician who works in the field of mathematics education separately coded the data for coding reliability. The reliability formula (Reliability: Consensus/Consensus + Disagreement) developed by Miles and Huberman (1994) was used, and the percentage of agreement between the evaluators was found to be 92%. The part with different coding is related to the definitions, and the coding for this part has been revised. In addition, timing reliability was also used, and the data were recoded by the researcher one month after the first coding. The codes were found to be compatible. An example of how the data was analyzed is given in Figure 2. The example given is about how the definitions are analyzed, as can be seen in the figure, first the codes were obtained from the definitions, and then the categories belonging to these codes were created.

PMT	Definition				
PMT1	A three-dimensional shape whose lower and upper bases are equal and parallel.				
PMT2	Geometric shape formed by the rotation of a rectangle 360 degrees around one of its sides, with a circle at lower and upper bases				
PMT3	Closed figure with lower and upper bases combined with straight lines				
CONTENT ANALYSIS					
	Coding			Frequency	
PMT1	Lower and upper bases are equal			1	
	Lower and upper bases are parallel			1	
PMT2	Lower and upper bases are circular region			1	
	Formed by 360° rotation of the rectangle around one edge			1	
PMT3	Lower and upper bases are combined with straight lines			1	
EXPRESSIONS					
	Coding			Frequency	
PMT1	Three dimensional			1	
	Shape			1	
PMT2	Geometric shape			1	
PMT3	Closed			1	
	Shape			1	

Figure 2. An Example of How Definitions For Cylinder Are Analyzed

Ethics Committee Permission Information

In this study, all the rules specified to be followed within the scope of the “Higher Education Institutions Scientific Research and Publication Ethics Directive” were complied with.

Name of Ethical Evaluation Committee: Kastamonu University Social and Human Sciences Research and Publication Ethics Committee

Date of Ethics Evaluation Decision: 25.03.2021

Ethics Evaluation Document Issue Number: E-16498365-050.01.04 2100025489

RESULTS

In this section, the definitions, drawings, and prism-cylinder groupings made by the PMTs for prism and cylinder are analyzed, respectively. For each sub-problem, first the findings based on the answers given to the test administered to all PMTs were presented, and then the findings of the PMTs interviewed were presented.

Analysis of the PMTs’ Definitions of Prism and Cylinder

This section includes findings based on the analysis of the PMTs’ definitions of prism and cylinder. The analysis of the prism is presented in Table 1.

Table 1. Content Analysis of the Definitions for the Prism

Category	Code	Frequency
Lower and Upper Bases	With	3
	Parallel	7
	Equal	6
	Polygon	8
	Regular polygon	1
	Smooth geometric shape	1
	Planar shape	1
	Combined with straight lines	2
	Combined with parallel lines	1
	Total	30
Bases	Equal	4
	Parallel	5
	Polygon	1
	In different planes	3
	Regular polygons	1
	Combined with straight lines	1
	Total	15
Base and Ceiling	Equal	2
	Made up of geometric shapes	1
	Combined with line segments	2
	Combined with side surface	1
	Combined with corners	1
	Combined vertically	1
	Combined with endless lines	1
	Total	9
Base	Named according to	4
	Square	1
	And a vertex	2
	Total	7

Side Faces	Rectangular	4
	Equal	1
	Quadrilateral	1
	Circular region	1
	Perpendicular to the base	1
	Can be the same or different shape	1
	Composed of triangles with their corners touching each other	1
	Total	10
Opening	Containing closed surfaces	2
	Containing regular geometric shapes	4
	Containing geometric shapes	2
	Total	8

When examining Table 1, it was seen that the definitions made about the prism generally focus on the concept of the base in the prism. In the definitions in which the concept of base was used, the phrase “lower and upper bases” ($f = 30$) was mostly used. Among the definitions, “with a base and a vertex” is an incorrect definition for a prism and expresses a pyramid. Similarly, it was seen that the definition of a pyramid was used in the definition in which the expression “with a square base” was used. The statement “with regular polygons on bases” is also inaccurate because the bases of the prism do not have to be regular polygons. On the other hand, there were also definitions focusing on the concepts of “side faces” and “opening” among these definitions, and they are also wrong expressions. In Table 2, the analysis for the cylinder was presented.

Table 2. Content Analysis of the Definitions for the Cylinder

Category	Code	Frequency
Lower and Upper Bases	Equal	14
	Parallel	17
	Circular region	14
	Combined with straight lines	7
	Circle	2
	Symmetrical	1
	In the same plane	1
	Formed as a result of the merging of all points of	1
	Formed as a result of the combination of the innumerable straights of	1
	Total	56

Bases	Combined with line segments	1
	Combined with parallel line segments	4
	In different planes	5
	Equal	5
	Parallel	1
	Total	16
Side Faces	Rectangle	7
	Circular region	1
	Total	8
Opening	Consisting of 2 equal circular Region and 1 rectangle or square	2
	Consisting of 2 equal circular region and 1 rectangle	3
	Total	5
Around One Edge	Formed by 360° rotation of the rectangle	8
	Formed by 360° rotation of a square or rectangle	1
	Total	9

When examining Table 2, it was seen that the definitions of the cylinder generally focus on the concept of the base, similar to the prism. In the definitions in which this concept was used, the expression “lower and upper bases” ($f = 56$) was mentioned quite a lot. The definition in which the expression “circular region on the side face” was used is an incorrect definition. In addition, the PMTs did not include the concept of edge in 3D objects in their definitions for prism and cylinder; they stated that the bases were combined with line segments or lines. There were also PMTs who stated that the bases of the cylinder are circles as well as the circular regions. The prominent expressions in the definitions of prism and cylinder are shown in Figure 3.

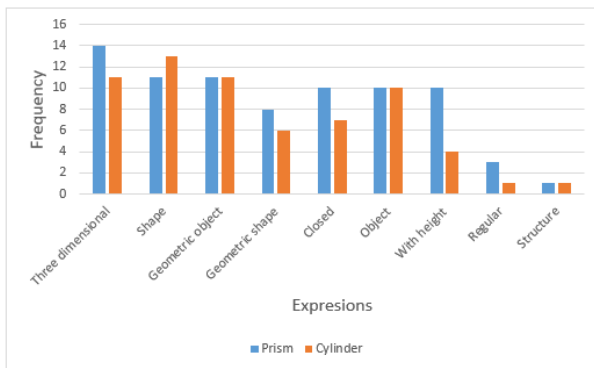


Figure 3. Expressions That Stand out in the PMTs’ Definitions of Prism and Cylinder

When examining Figure 3, it was seen that the expression “three-dimensional” ($f = 14$) was mostly used in the definition of the prism, and the expression “shape” ($f = 13$) was mostly used in the definition of the cylinder. Focusing on different expressions when describing both cylinder and prism; it can be said that some of these statements are true and some are false. On the other hand, the expression coded as “with height” was stated as “with height” in cylinder definitions and as “with width, size, and height” in prism definitions.

Examples of the definitions and interview sections made by the PMTs interviewed are presented in Table 3.

Table 3. Definitions and Interview Sections of the Pmts About Prism And Cylinder

PMT	Definitions	Görüşme Kesitleri
PMT4	Prism: A three-dimensional closed object with width, size, and height.	R: Let's examine your definitions. Is there an expression you want to edit?
	Cylinder: A three-dimensional closed object consisting of equal circles with lower and upper bases and combining these circles with a certain height.	PMT4: I stated that it has a certain volume for the prism. In fact, it would be better if I said that their bases were equal. R: What would you say about the cylinder? PMT4: What comes to mind for the cylinder is that the bases of the shapes are circles. The object we saw in middle school comes to mind.
PMT27	Prism: A geometric object whose base and ceiling are composed of certain geometric shapes, whose base and ceiling are combined with the side surface.	R: Let's examine your definitions. Is there an expression you want to edit?
	Cylinder: A geometric object with a circular base and ceiling and side surfaces parallel to each other.	PMT27: Geometric shapes are an incomplete expression for prism. I changed my mind after the shapes you gave me. It doesn't necessarily have to be in shapes like triangles or rectangles. It would be enough if the bases were the same. R: What would you say about the cylinder? PMT27: I used the words "base and ceiling" for the cylinder. However, if I reverse the shape now, the floor and ceiling will change places. I can fix the bases as circles.

PMT29	Prism: A geometric object with two equal bases in different planes whose bases are parallel to each other and whose bases are regular polygons.	R: Let's examine your definitions. Is there an expression you want to edit?
	Cylinder: A geometric solid with two equal bases in different planes whose bases are parallel to each other.	PMT29: I said that in a prism, the bases should be regular polygons. It's enough to be polygonal. It doesn't need to be a regular polygon

When examining Table 3, it can be said that the PMTs made some adjustments to their definitions during the interviews. In the interviews with six PMTs, it was observed that the objects envisioned in their minds were effective in the definitions they made, and the perceptions of the PMTs about the prism and the cylinder differed from each other.

Analysis of the PMTs' Drawings of Prism and Cylinder

In this section, findings based on the analysis of the drawings made by the PMTs for the prism and cylinder were presented. The analysis of the drawings for the prism is shown in Figure 4.

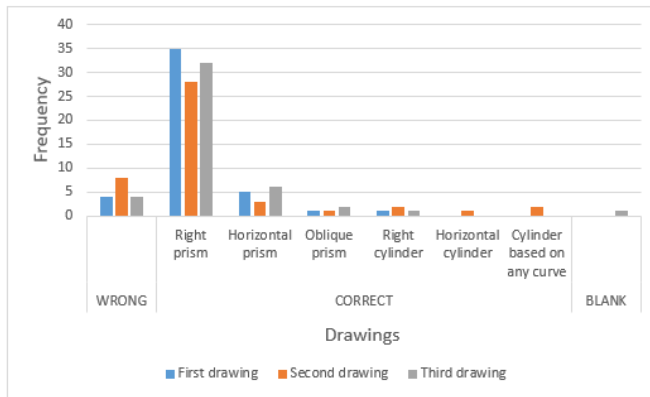


Figure 4. Analysis of the Drawings Made for the Prism

When examining Figure 4, the total number of wrong drawings was 16. It was generally seen that a pyramid was drawn instead of a prism ($f = 9$); other than that, there were drawings with unequal lower and upper bases ($f = 2$), opposite lower and upper bases ($f = 2$), and a cone ($f = 2$). When looking at the correct drawings for the prism, it was seen that the right prism was mostly included in all three drawings. When they wanted to make three different drawings, they usually chose to change the number of edges of the polygon at the base of the prism. In right pris-

ms, mostly square, triangular, and rectangular prism and cube drawings were made. There were also hexagonal, pentagonal, octagonal, and trapezoidal prism drawings, although much less frequently. The correct drawings for the prism were followed by the horizontal prisms, and there were very few PMTs who drew an oblique prism. There were few PMTs who drew cylinders when asked to draw prisms by considering the hierarchical relationship ($f = 7$). Cylinder drawings include 1 horizontal cylinder, 4 right cylinders with bases of circles, and 2 cylinders based on any curve. The analysis of the drawings made for the cylinder is presented in Figure 5.

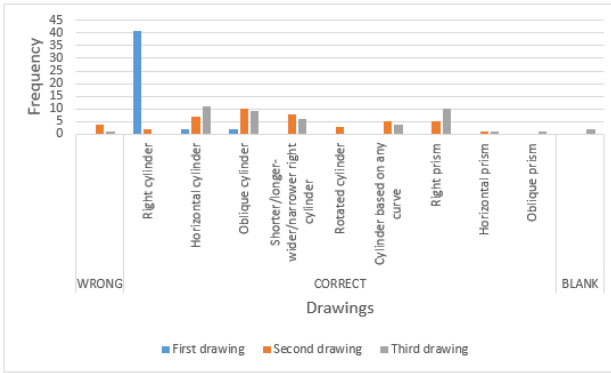


Figure 5. Analysis of the Drawings Made for the Cylinder

When examining Figure 5, the total number of wrong drawings was 5, and they generally include drawings with unequal bases or non-parallel bases. Looking at the correct drawings, it was seen that almost all of the PMTs drew the right cylinder for the first drawing ($f = 41$). The first drawing of the PMTs ($f = 2$), which was coded as a right cylinder in the second drawing, was an oblique cylinder. Apart from that, those who drew the right cylinder in the second and third drawings drew the shorter/longer or wider/narrower of the right cylinder in the first figure. Right-cylinder drawings were followed by horizontal and oblique cylinder drawings. Very few PMTs drew the right cylinder by turning it diagonally in their second drawing, which was coded as a rotated cylinder. There were also PMTs who drew cylinders based on any curve in the second and third drawings. The total number of PMTs who drew a prism by considering the hierarchical relationship was ($f = 18$) when asked to draw a cylinder. Most of these drawings were right prisms, and very few were horizontal or oblique prisms. Prisms were generally drawn in the form of triangles, squares, rectangular prisms, or cubes, while a PMT included a hexagonal prism, and a PMT drew a dodecagon prism in the form of a star. An example for each of the objects in Figures 4 and 5 was taken from the drawings of the PMTs and presented in Figure 6. For each object, an example was given in order to see the differences between the objects, but different types of objects were

not entered. In addition, objects coded as cylinders have their bases in the form of circles or circular regions, except for cylinders based on any curve.

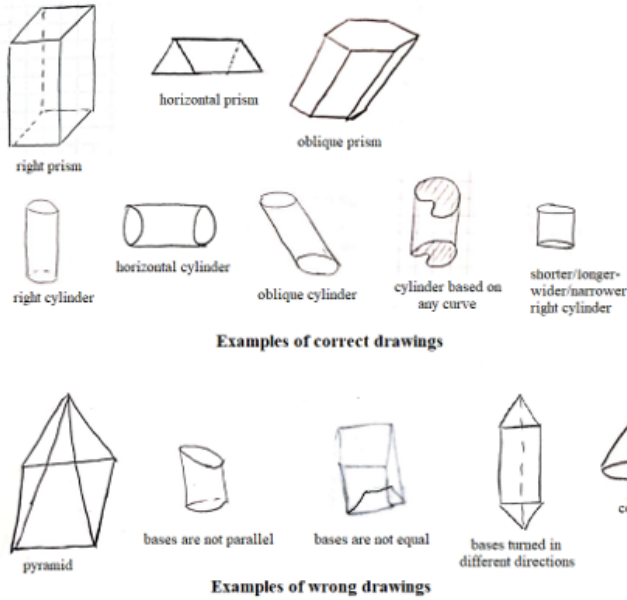
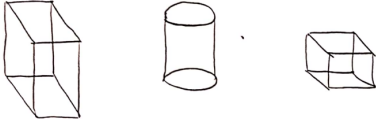
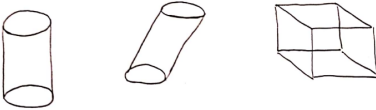
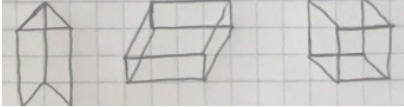
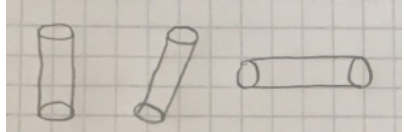
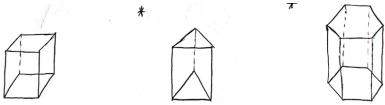
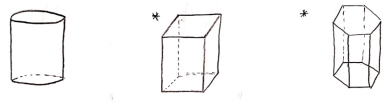


Figure 6. Examples of PMTs Drawings for Prism and Cylinder

Examples of the drawings and interview sections made by the PMTs interviewed are presented in Table 4.

Table 4. Drawings and Interview Sections of the PMTs About Prism and *Cylinder*

PMT	Drawings			Interview Sections
PMT12	Prism			R: Could you explain how you made your drawings?
			PMT12: When it comes to cylinders, I wanted to talk about their types. I drew the right cylinder, the oblique cylinder, and the cube.	
PMT12	Cylinder			R: So the cube is a cylinder for you, then? Their bases don't necessarily have to be circular regions.
			PMT12: I think it doesn't have to be. I can say that a prism is also a cylinder. R: You have drawn a rectangular prism, right cylinder, and cube for a prism. PMT12: Hmm. I actually have some confusion here. Are cylinders prisms or prisms cylinders? Which covers which? My knowledge from high school was not enough. R: Got it. So what do you think right now? PMT12: As a matter of fact, I was very surprised when I put the cylinder under the prism. I wouldn't draw this now. Yes, I think the prism is a subset of the cylinder.	

PMT16	Prism		<p>R: Could you explain how you made your drawings?</p>
	Cylinder		<p>PMT16: These shapes come to mind. For the cylinder, I drew it in different positions: vertically, obliquely, and horizontally. For the prism, I drew different prisms according to their bases.</p>
PMT29	Prism		<p>R: Could you explain how you made your drawings?</p>
	Cylinder		<p>PMT29: The first drawing for the cylinder is the first shape that comes to mind. In other drawings, I wanted to point out that the cylinder is a larger set than the prism. I drew the same shapes on both the cylinder and the prism.</p>
			<p>R: What would you say about the prism drawings?</p>
			<p>PMT29: I paid attention to the fact that the bases of the prism are polygons. After that, when you do it on different planes, it remains to combine the bases.</p>

When examining Table 4, it was seen that the PMTs made different drawings about the prism and cylinder. They usually drew the first objects that came to their minds. Some PMTs see prisms and cylinders as discrete sets. Some think that there is a hierarchical relationship between them, but they are not sure which covers which, and some PMTs clearly think that there is a hierarchical relationship between them.

Analysis of the PMTs Groupings of Prism and Cylinder

In this section, the findings of the PMTs' grouping of the given objects were presented, and the grouping ways are shown in Figure 7.

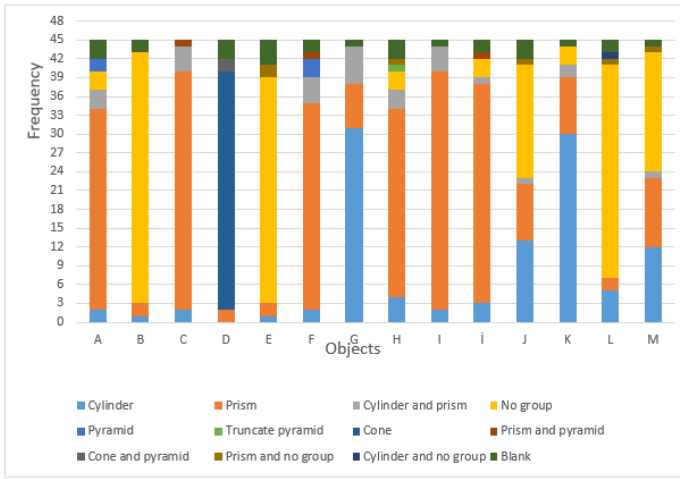


Figure 7. PMTs' Ways of Grouping the Given Objects

When examining Figure 7, it was seen that the majority of the PMTs were assigned g and k to the cylinder group, and they included a, c, f, h, i, and i to the prism group. Generally, objects were thought of as discrete sets, included in only the prism or cylinder group. The number of PMTs who included an object in both groups was quite low. Objects that were not thought to belong to any group were b, e, j, l, and m. The PMTs who thought that b, e, and l do not have a group are in the greater majority. For j and m, although there were more PMTs who thought that they had no groups, the number of PMTs who thought that they were prism or cylinder was also quite high. Apart from that, d was included in the cone class by the majority of the PMTs. The answers of the PMTs who included an object in the classes “prism and pyramid”, “prism and no group”, and “cylinder and no group” at the same time were examples of wrong answers. Another wrong answer was that the object h called a truncated pyramid. Also, although some objects have groups, it was stated that they do not have any groups: a (horizontal triangular prism), h (trapezoidal right prism), i (oblique square prism), and k (oblique cylinder). The choices of the PMTs interviewed are presented in Figure 8.

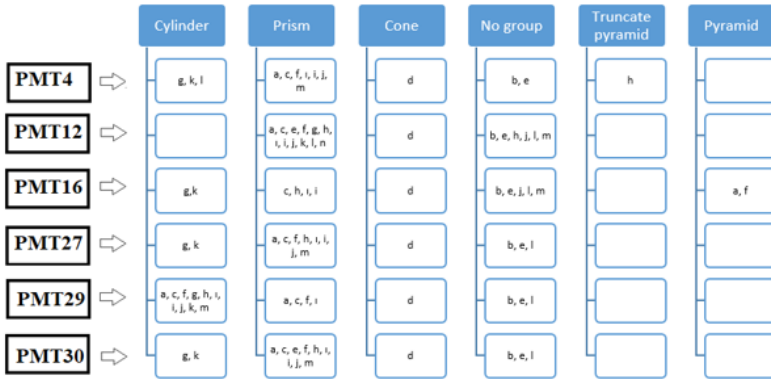


Figure 8. The Way of Grouping the Given Geometric Objects by the Interviewed PMTs

Although the PMTs have some common ideas about grouping the given objects, it is seen that they also have different ideas. The findings obtained from the interviews and the interview sections are presented in Table 5.

Table 5. Findings and Interview Sections Obtained From the Interviews Based on the Pmts' Grouping of the Given Objects

It was observed that the perceptions of the PMTs based on the bases of the cylinders and prisms differed

R: Could you explain how you made the groupings?

PMT29: Like the definitions I made, a prism must have two equal polygonal bases, and a cylinder can be any shape with equal bases.

PMT30: For a prism, the upper and lower bases must be parallel to each other. I accidentally included e in the prisms, and I don't think e has a group.

PMT4: While grouping the prisms, I checked whether their bases were equal, and for cylinders, whether their bases were circles.

It was seen that the PMTs had different ideas about the hierarchical relationship between the cylinder and the prism. PT4 and PT16 consider the cylinder and prism as discrete sets. PMT27 and PMT30 stated that they think cylinders are a subset of prisms in the interviews about grouping. There is no statement in the definitions and drawings of these PMTs that they think there is a hierarchical relationship. PT30's idea of the hierarchical relationship changed during the interview. PMT27 stated that she thinks there is a hierarchical relationship, but she could not reflect this situation in her definition, drawing, and groupings. PMT12 and PMT29 stated that they thought of prisms as a subset of cylinders. PMT12's definition reflects this hierarchical relationship. There is confusion about the hierarchical relationship in her drawings; she did not consider the hierarchical relationship in her choices, but during the interview about the drawings and grouping, she said that prisms are also cylinders. PMT29's definitions, drawings, and groupings show that he thinks prisms are a subset of cylinders..

R: Do you think there is any hierarchical relationship between cylinder and prism?

PMT4: I don't think any of them are subsets of any of them. I think they are discrete sets.

PMT16: I think they are discrete geometric objects.

R: Do you think there is any hierarchical relationship between cylinder and prism?

PMT30: Actually, I thought they were separate. The lower and upper bases of the cylinder are circles. Prism polygon. But when I examine it now, both the lower and upper bases are the same. They have common points. I think "a" cylinder is a prism, but a prism is not a cylinder.

R: How did you arrive at this?

PMT30: If the base is a circle in a prism, it becomes a cylinder.

R: Then what if I ask you to review g and k again?

PMT30: In this case, these are cylinders and also prisms.

R: What would you say for g and k, then? You just included it in the cylinder group?

PMT27: g and k are cylinders. Because the bases and ceilings are circular regions and parallel to each other. Fits the cylinder description. But I can also say that it is a prism. Sir, you know that cylinder is a different name; we learned that it is a cylinder, so I include it in that group, but it is also a prism. I got it that way because it's a special name.

R: Do you think there is any hierarchical relationship between cylinder and prism?

PMT12: Actually, the cylinder is the superset of the prism. a and c are prisms and also cylinders. I can also get shapes like this on the cylinder.

R: You put all the objects you took for the prism into the cylinder group. This seems to support the hierarchical relationship in the definition and drawing.

PMT29: Yes.

R: How would you describe the hierarchical relationship between cylinder and prism?

PMT29: It is enough for the bases of the cylinder to be equal. So the cylinder is wider, and the prism becomes its subset. Because there is a condition that the bases of the prism must be polygons.

It was observed that they have different ideas about grouping the objects (j and m) whose lower and upper bases are parallel and equal but not polygonal.

R: What would you say for j and m?

PMT16: I did not include j and m in the prism group because they are not familiar shapes such as rectangles and triangles. The bases are not circular regions, so I did not include them in the cylinder group. (She also stated in her definition that the lower and upper bases of the cylinder consist of circular regions)

R: You also took j and m as prisms? Isn't it necessary for you that the bases of the prism be rectangular, pentagonal, etc.?

PMT27: It is enough that the bases are equal and parallel to each other.

R: What would you say about j and m? Why can we include it in the cylinder group?

PMT29: The bases are equal and on different planes.

R: Aren't their bases should be polygons?

PMT29: It is not required in the cylinder. But I do not take these objects for prism, since their bases are not polygons.

It was observed that they had different opinions about the objects (b, e, and l) that did not belong to any group. There were more PMTs who thought that b and e did not have a group. However, there were also those who took l to the cylinder group without paying attention to the parallelism of the bases.

R: *What would you say about objects that do not have any groups?*

PMT29: *If I say cylinder for b, the bases are not equal. Even if the bases are equal, the way they are combined is wrong. There aren't any straight segments connecting it. In l, the bases are not parallel to each other. Taken part of e.*

R: *You also took l as a cylinder. Can you explain why?*

PMT4: *Because their bases are circular regions.*

They usually thought of the bases of the prism as familiar polygons. There are some who do not include the object "h" in the prism group because its bases are trapezoidal. PMT29 grouped in this way but realized his mistake during the interview.

R: *Is there anything else you want to edit?*

PMT29: *I noticed h right now. I should also take h as a prism. It doesn't have to be a regular polygon. I actually thought I shouldn't have written "regular" after writing it in the application.*

R: *What would you say for h?*

PMT12: *At h, the bases are trapezoid. Prisms generally had bases such as squares, triangles, and rectangles. That's why I couldn't decide.*

DISCUSSION, CONCLUSION AND RECOMMENDATIONS

In this study, PMTs' concept images of prism and cylinder were analyzed within the framework of their definitions, drawings, and grouping styles. In addition, the answers given by the PMTs to the test and the interview sections were evaluated together, and interpretations were made about how the concept images were.

When the definitions, drawings, and grouping styles are considered together, it is seen that concept images related to prisms are in the form of a right prism. The results are similar to the studies that stated that the prism perceptions of the participants at different levels were in the form of the right prism (Gökkurt & Soyulu, 2016; Horzum & Ertekin, 2018; Man, 2019; Türnüklü & Ergin, 2016; Unlu & Horzum, 2018). On the other hand, PMTs' prism perceptions are in the form of familiar polygon-based prisms, which shows that concept images are based on prototypical perceptions. In prism drawings, hexagonal and trapezoidal prisms were negligible, and different drawings such as decagonal and dodecagonal prisms were never encountered. Only one PMT included the star-shaped prism in his cylinder drawing. Similarly, in many studies, it is stated that the concept images of secondary school students (Ergin & Türnüklü 2015; Türnüklü & Ergin 2016); high school students (Avgören, 2011); prospective teachers (Gökbulut & Ubuz 2013; Karakuş ve Erşen, 2021; Ulusoy, 2019; Gökbulut, 2010; Zeybek Şimşek, 2019) and teachers (Gökkurt & Soyulu, 2016; Man, 2019) are limited to the prototypical examples. In the grouping, the PMTs included the most familiar polygon-based right prisms in the prism group, but they also took the hexagonal right prism and the trapezoidal right prism as prisms, although not as much as the hexagonal prism. However, these selections are particularly small for trapezoidal prisms compared to proto-

typical prisms. Similarly, in the study of Yurniwati and Soleh (2019), it is stated that prospective teachers' perceptions about trapezoidal prisms are limited. On the other hand, Altaylı et al. (2014) stated that some prospective teachers did not take the triangular prism as a prism, which differs from the results obtained in this study. A triangular prism is one of the prisms that PMTs include in their drawings and groupings. Similarly, in this study, the cube is one of the most common prism drawings. This result differs in that secondary school students (Ergin & Türnüklü, 2015) do not see the cube as a prism, and it is similar to the fact that prospective teachers took the cube as a prism in Zeybek Şimşek's (2019) study. It is thought that these differences may be due to the class level of the participants. In the study of Karakuş and Erşen (2021), it was found that senior pre-service teachers were more successful in describing geometric objects and making non-prototype drawings compared to freshman pre-service teachers.

The concept images of the PMTs about the cylinder are in the form of a circular region base and a right cylinder. This result is similar to many studies stating that prospective teachers (Ertekin et al., 2014; Gökbulut 2010; Gökkurt, 2014; Karakuş & Erşen, 2021; Koçak et al., 2017) and teachers (Man, 2019; Tsamir et al., 2008) perceive the cylinder as circular region bases. As Zeybek Şimşek (2019) and Karakuş (2018) stated, if the bases of the cylinder are taken as a circular region, the condition that the bases of the cylinder can be any closed curve is ignored. In this study, it was seen that the prototypical perceptions of the PMTs were limited by their limited visual perceptions. Most of the PMTs think that there is no group of objects (j and m) whose bases are equal and parallel to each other but are not polygons or circular regions. Some, though less numerous, include these objects in prism or cylinder groups. Similarly, in the study of Karakuş (2018), the same (m) object was not included in the cylinder group. This shows that the PMTs mostly have prototype images for the cylinder, and it is not clear what critical properties geometric objects have as cylinders or prisms. Similarly, it is stated that prospective teachers have difficulties distinguishing the critical features of the cylinder and prism (Ulusoy, 2019) and the prism (Gökbulut & Ubuz, 2013; Gökkurt & Soylu, 2016).

The results obtained from the study are similar to many studies in that the concept images of the prospective teachers (Karakuş, 2018; Gökkurt 2014; Koçak et al., 2017) and teachers (Tsamir et al., 2008) are right cylinders. It is stated that this situation may be due to the fact that the definitions of geometric objects such as cylinders in the textbooks are explained over specific definitions (right circular region cylinder, etc.) instead of general definitions (Yemen-Karpuzcu & Işıksal-Bostan, 2013). In addition, textbooks usually include prototypical examples (Ertekin et al., 2014), which causes prospective teachers to have prototypical concept images for both geometric objects. Although it is stated in the 11th-grade textbook that the cylinder can have different bases other than circular regions, the examples given are not sufficient to reflect this situation. When only prototype models are empha-

sized, the inconsistency between the concept image of geometric objects and the concept definition emerges (Monaghan, 2000). Based on this, it is important that students are confronted with different examples in the lessons (Uygun et al., 2022). On the other hand, the PMTs generally included right prisms and cylinders in definitions (side faces being rectangular, etc.) and drawings, and they were able to recognize horizontal and oblique prisms and cylinders in the grouping, although not as much as right prisms and cylinders. Based on this, it can be said that the PMTs are more successful at grouping than drawing.

Another problem with critical properties was explaining the prerequisites for an object to be a cylinder or a prism with general expressions. There were PMTs who perceived the prism as any three-dimensional geometric object and especially considered the pyramids as prisms because of not knowing exactly what critical properties the prism has. Similarly, the prospective teachers only described the cylinder (Koçak et al., 2017), the prism (Gökbulut, 2010; Gök Kurt & Soylu, 2016; Unlu & Horzum, 2018; Zeybek Şimşek, 2019) and the cylinder and the prism (Karakuş & Erşen, 2021) as “a solid object, with a volume, with edges”. It is stated that they are not specific to the cylinder or prism but explain them with expressions that can be valid for three-dimensional objects. Again, similar to the research findings, there are studies showing that prospective teachers include other geometric objects, especially pyramids, in their prism drawings and/or groupings (Gökbulut & Ubuz 2013; Gök Kurt & Soylu, 2016; Ulusoy, 2019; Zeybek Şimşek, 2019). Similarly, it is stated that most prospective teachers cannot distinguish between prism and pyramid (Noto, Priatna, & Dahlan, 2019). While teaching the subject of geometric objects, it is important to mention the critical properties of prisms and cylinders (Uygun et al., 2022).

Most of the PMTs were able to correctly identify the objects (b, e, and l) that do not have any group, but there were PMTs who ignored the parallelism of the (l) object and thought of it as a cylinder since its bases are circles and drew similar shapes in their drawings. This result is similar to the studies of Zeybek Şimşek (2019) and Karakuş (2018) in terms of PMTs drawing or grouping the truncated cylinder as a cylinder. Similarly, Tsamir et al. (2008) and Gökbulut (2010) have also taken the truncated cone as a cylinder since its bases are circular regions. Another result obtained from the research is that concept images are dominant compared to concept definitions. Karakuş (2018) states that an image of the cylinder is formed in the minds of the students based on the explanations and examples given for the cylinder in primary and secondary schools. Although a more comprehensive definition is given for the cylinder in the high school mathematics curriculum, this definition is not effective in changing the current images of prospective teachers. Similarly, in some studies, it is stated that concept images related to the concept are used more frequently than concept definitions (Clements & Sarama, 2011; Vinner, 2011; Zeybek Şimşek, 2019).

When considering the hierarchical relationship, it was determined that the PMTs generally think of these objects as discrete sets but have different ideas. They visualize prisms as polygon-based (Gökbulut, 2010; Gökbulut & Ubuz, 2013; Ulusoy, 2019) and cylinders as circular region-based (Ulusoy, 2019), and this is thought to cause them to see these two geometric objects as discrete sets. The ideas of some of the PMTs who think that there is a hierarchical relationship are not very clear. Among those, cylinders are generally perceived as a larger set in the drawings, and there are those who think that there are two types of relationship, albeit a little, in the grouping. In the studies, opinions on this subject were also different. It is stated that there are teachers (Gökkurt & Soylu, 2016; Man, 2019) and prospective teachers (Gökbulut & Ubuz, 2013; Işıksal Bostan & Yemen Karpuzcu, 2017; Karakuş, 2018; Ulusoy, 2019; Zeybek Şimşek, 2019) who think of the cylinder as a special prism, and that there are prospective teachers who think of the prism as a special cylinder (Ertekin et al., 2014). In addition, it was concluded that some prospective teachers' ideas about the hierarchical relationship between cylinder and prism are not clear (Akayuure, 2021) and that most of the prospective teachers think that there is no relationship between cylinder and prism (Karakuş & Erşen, 2021). Van de Walle et al. (2014) state that prisms are also cylinders and that many students cannot establish such a relationship. Since prisms are accepted as polyhedral in mathematics teaching programs in Turkey, it is thought that PMTs have difficulties establishing such associations.

Another result obtained from the research is that the majority of PMTs have deficiencies in using mathematical language. One of these misuses is considering the concept of base as “lower and upper bases” and “base and ceiling”. In the study of Horzum and Ertekin (2018), it is stated that prospective mathematics teachers see the base as the part that touches the ground in the change of position. In this study, the PMTs call the square prism standing on the square surface a square prism, but they call the same prism a rectangular prism when it is standing on the rectangular surface. Similarly, it was stated that, for prism, teachers (Gökkurt & Soylu, 2016) and prospective teachers' (Bozkurt & Koç, 2012) and for prism and cylinder, prospective teachers (Altaylı et al., 2014) made mathematical mistakes by using the words “base and ceiling” in their definitions. On the other hand, it is seen that the concepts of shape and geometric shape are used in the definitions. In many studies, for three-dimensional geometric objects, prospective teachers made mistakes by using the concepts of shape (Ertekin et al., 2014; Karakuş, 2018); geometric shape (Bozkurt & Koç, 2012; Ulusoy, 2019); three-dimensional shape (Bozkurt & Koç, 2012; Koçak et al., 2017; Unlu & Horzum 2018) and three-dimensional geometric shape (Unlu & Horzum 2018). Another situation that is misused is that concepts such as line segments and lines are included, but the concept of edge in 3D objects is not used. Gökkurt and Soylu (2016) also state that teachers make mathematical mistakes by using the concept of edge in 2D shapes instead of edge in 3D objects.

Gökkurt and Soylu (2016) state that teachers make mathematical mistakes by using the concept of edge of 2D instead of edge of 3D, and Kılıçoğlu (2020) states that prospective teachers confuse the concept of edge of 3D with concepts such as surface, edge of 2D, and diagonal. On the other hand, in the definitions they made about the cylinder and in the interview sections, some stated that the bases of the cylinder were circles instead of circular regions. This result, reported by Koçak et al. (2017), is similar to the study. Considering the role of language in learning mathematics and especially the importance of mathematical language (Ginsburg, Lee & Boyd, 2008), it can be said that incorrect statements of PMTs may cause various problems.

Based on the results of the research, the following recommendations were made:

- In addition to the prototype examples, non-prototypical examples should also be included in the textbooks.
- Teachers should use examples and non-examples in the teaching process and conduct their lessons by creating a discussion environment based on these examples.
- Care should be taken to make the correct and effective use of mathematical language.
- Care should be taken to ensure that the definitions and examples given in the teaching process are compatible with each other so that there is no imbalance between the concept definition and the concept image.
- During their undergraduate education, prospective teachers should be provided with training that will make up for the deficiencies in their content knowledge on these subjects.

Thanks and Explanations

I would like to thank all prospective teachers who contributed to the study.

REFERENCES

- Accascina, G., & Rogora, E. (2006). Using cabri 3D diagrams for teaching geometry. *International Journal for Technology in Mathematics Education*, 13(1), 11-22.
- Akayüre, P. (2021). Preservice teachers' content knowledge and learning obstacles in shape and space. *Asian Research Journal of Mathematics*, 17(7), 49-60.
- Alkış Küçükaydın, M., & Gökbulut, Y. (2013). Prospective primary teachers' misconceptions about definition of geometric shapes and unfolding process. *Cumhuriyet International Journal of Education*, 2(1), 102-117.
- Altaylı, D., Konyalıoğlu A. C., Hızarcı, S., & Kaplan, A. (2014). The investigation of pre-service elementary mathematics teachers' pedagogical content knowledge on three dimensional objects. *Middle Eastern & African Journal of Educational Research*, 10(1), 4-24.
- Armah, R. B., Coffe, P. O., & Okpoti, C. A. (2017). The geometric thinking levels of pre-service teachers in Ghana. *Higher Education Research*, 2(3), 98-106.
- Attneave, F. (1957). Transfer of experience with a class schema to identification of patterns and shapes. *Journal of Experimental Psychology*, 54(2), 81-88.
- Avgören, S. (2011). *Farklı sınıf seviyelerindeki öğrencilerin katı cisimler (prizma, piramit, koni, silindir, küre) ile ilgili sahip oldukları kavram imajı* [Different grade levels students concept image related with solids objects (prism, pyramid, cone, cylinder, sphere)]. Unpublished Master's Thesis, Gazi University, Ankara.
- Baki, M. (2013). Pre-service classroom teachers' mathematical knowledge and instructional explanations associated with division. *Education and Science*, 38(167), 300-311.
- Battista, M. T., & Clements, D. H. (1996). Students' understanding of three-dimensional rectangular arrays of cubes. *Journal for Research in Mathematics Education*, 27(3), 258- 292.
- Baykul, Y. (2014). *Ortaokulda matematik öğretimi (5-8 sınıflar)* [Teaching mathematics in secondary school (grades 5-8)]. Ankara: Pegem Akademi.
- Böge, H., & Akıllı, R. (2018). *Ortaokul ve imam hatip ortaokulu matematik 8 ders kitabı [Secondary school and imam hatip secondary school mathematics 8 textbooks]*. Ministry of Education.
- Bozkurt, A., & Koc, Y. (2012). Investigating first year elementary mathematics teacher education students' knowledge of prism. *Educational Sciences: Theory and Practice*, 12(4), 2949-2952.
- Clements, D. H. (2003). Teaching and learning geometry. In J. Kilpatrick, G. Martin, & D. Schifter (Eds.), *Research companion to principles and standards for school mathematics* (pp. 15-78). Reston, VA: National Council of Teachers of Mathematics.
- Clements, D. H., & Battista, M. T. (1992). Geometry and spatial understanding. In D. A. Grouws. (Ed.), *Handbook of research mathematics teaching and learning* (pp. 420-465). New York: McMillan Publishing Company.
- Clements, D. H., & Sarama, J. (2011). Early childhood teacher education: the case of geometry. *Journal of Mathematics Teacher Education*, 14(2), 133-148.
- Cohen, L. M., & Manion, L. (1998). *Research methods in education*. New York: Routledge.
- Çakmak, Z., Konyalıoğlu, A. C., & Işık, A. (2014). The investigation of pre-service elementary mathematics teachers' content knowledge on three dimensional objects. *Middle Eastern & African Journal of Educational Research*, 8(1), 28-44.
- de Villiers, M. (1998). To teach definitions in geometry or teach to define?, In A. Olivier & K. Newstead (Eds), *Proceedings of the 22nd international conference of the international group for psychology of mathematics education: Vol. 2.* (pp. 248-255). Univ Stellenbosch: South Africa.
- Ergin, A. S., & Türnüklü, E. (2015). Investigation of middle school students' images of solids: geometric and spatial thinking relations. *Journal of Research in Education and Teaching*, 4(2), 188-199.
- Ertekin, E., Yazıcı, E., & Delice, A. (2014). Investigation of primary mathematics student teachers' concept images: Cylinder and cone. *International Journal of Mathematical Education in Science and Technology*, 45(4), 566-588.
- Forman, J., & Damschroder, L. (2008). Qualitative content analysis. In L. Jacoby, & L. A. Siminoff (Eds.), *Empirical methods for bioethics: A primer* (pp. 39-62). Elsevier.
- Fujita, T., & Jones, K. (2007). Learners' understanding of the definitions and hierarchical classification of quadrilaterals: Toward a theoretical framing. *Research in Mathematics Education*, 9(1), 3-20.
- Ginsburg, H. P., Lee, J. S., & Boyd, J. S. (2008). Mathematics education for young children: What it is and how to promote it. *Society for Research in Child Development, Social Policy Report*, 22, 3-22.
- Gökbulut, Y. (2010). *Sınıf öğretmeni adaylarının geometrik cisimler konusundaki pedagojik alan bilgileri* [Prospective primary teachers' pedagogical content knowledge about geometric shapes]. Unpublished Doctoral Dissertation, Gazi University, Ankara.
- Gökbulut, Y., & Ubuz, B. (2013). Prospective primary teachers' knowledge on prism: Generating definitions and examples. *Elementary Education Online*, 12(2), 401-412.

- Gökkurt, B. (2014). *Ortaokul matematik öğretmenlerinin geometrik cisimler konusuna ilişkin pedagojik alan bilgilerinin incelenmesi* [An examination of secondary school mathematics teachers' pedagogical content knowledge on geometric shapes]. Unpublished Doctoral Dissertation, Atatürk University, Erzurum.
- Gökkurt, B., & Soylu, Y. (2016). Examination of middle school mathematics teachers' mathematical content knowledge: The sample of prism. *Abant İzzet Baysal University Journal of the Faculty of Education*, 16(2), 451-481.
- Gökkurt, B., Şahin, Ö., Soylu, Y., & Doğan, Y. (2015). Pre-service teachers' pedagogical content knowledge regarding student mistakes on the subject of geometric shapes. *Elementary Education Online*, 14(1), 55-71.
- Haapasalo, L., & Kadjevich, D. (2000). Two types of mathematical knowledge and their relation. *Journal für Mathematik-Didaktik*, 21(2), 139-157.
- Hasanah, A. N., & Yulianti, K. (2020, April). Error analysis in solving prism and pyramid problems. In *Journal of Physics: Conference Series* (Vol. 1521, No. 3, p. 032035). IOP Publishing.
- Hershkowitz, R. (1989). Visualization in geometry: Two sides of the coin. *Focus on Learning Problems in Mathematics*, 11(1), 61-76.
- Horzum, T., & Ertekin, E. (2018). Prospective mathematics teachers' understanding of the base concept. *International Journal of Mathematical Education in Science and Technology*, 49(2), 176-199.
- İşıkbal Bostan, M., & Yemen Karpuzcu, S. (2017). The role of definitions on classification of solids including (non) prototype examples: The case of cylinder and prism. In T. Dooley, & G. Gueudet (Eds.), *Proceedings of the tenth congress of the european society for research in mathematics education: Vol.5*. (pp. 3320-3327). Dublin: CERME.
- Karakuş, F. (2018). Investigation of primary pre-service teachers' concept images on cylinder and cone. *Elementary Education Online*, 17(2), 1033-1050.
- Karakuş, F., & Erşen, Z. B. (2021). Investigation of pre-service elementary mathematics teachers' understanding on solids. *REDIMAT*, 10(2), 175-212.
- Kılıçoğlu, E. (2020). A study on the professional development of prospective primary school teachers: Subject matter knowledge on geometry. *International Online Journal of Educational Sciences*, 12(2), 30-54.
- Koç, Y., & Bozkurt, A. (2011). Evaluating pre-service mathematics teachers' comprehension level of geometric concepts. In B. Ubuz, (Ed.), *The proceedings of the 35th annual meeting of the international group for the psychology of mathematics education: Vol. 2*. (pp. 335). Ankara, Turkey: PME.
- Kocak, M., Gökkurt Özdemir, B., & Soylu, Y. (2017). An investigation the pedagogical content knowledge of primary mathematics prospective teachers about the concept of cylinder. *Cukurova University Faculty of Education Journal*, 46(2), 711-765.
- Levenson, E., Tirosh, D., & Tsamir, P. (2011). Theories and research related to concept formation in geometry. In E. Levenson, D. Tirosh, & P. Tsamir (Eds.), *Preschool geometry* (pp. 3-18). AW Rotterdam: Sense Publishers.
- Man, S. (2019). *Ortaokul matematik öğretmenlerinin geometrik cisimlere ilişkin kavram tanımlarının incelenmesi* [Investigation of middle school mathematics teachers' concept definitions of geometric objects]. Unpublished Master's Thesis, Adiyaman University, Adiyaman.
- Marshall, M. N. (1996). Sampling for qualitative research. *Family Practice*, 13(6), 522-526.
- Maviş, M., Gül, G., Solaklıoğlu, H., Tarku, H., Bulut, F., & Gökşen, M. (2021). *Ortaöğretim matematik 10 ders kitabı* [High school mathematics 10 textbooks]. Ministry of Education.
- McMillan, J. H. (2000). *Educational research: Fundamentals for the consumer*. New York: Longman.
- Miles, M. B., & Huberman, A. M. (1994). *Qualitative data analysis: An expanded Sourcebook*. (2nd ed). Thousand Oaks, CA: Sage.
- Ministry of National Education (MoNE). (2018a). *Matematik dersi öğretim programı (İlkokul ve ortaokul 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7 ve 8. sınıflar)*[Primary and secondary school mathematics curriculum (grades 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7 and 8)]. Ankara: Republic of Turkish Ministry of National Education.
- Ministry of National Education (MoNE). (2018b). *Ortaöğretim matematik dersi (9, 10, 11 ve 12. sınıflar) öğretim programı*. [High school mathematics (grades 9, 10, 11 and 12) curriculum]. Ankara: Republic of Turkish Ministry of National Education.
- Monaghan, F. (2000). What difference does it make? Children's views of the differences between some quadrilaterals. *Educational Studies in Mathematics*, 42(2),179-196.
- National Council of Teachers of Mathematics [NCTM]. (2000). *Principles and standards for school mathematics*. Reston, VA: Author.
- National Council of Teachers of Mathematics [NCTM] (2006). *Curriculum focal points for prekindergarten through grade 8 mathematics: A quest for coherence*. National Council of Teachers of Mathematics.
- Noto, M. S., Priatna, N., & Dahlan, J. A. (2019, February). Analysis of learning obstacles on transformation geometry. In *Journal of Physics: Conference Series* (Vol. 1157, No. 4, p. 042100). IOP Publishing.
- Oberdorf, C. D., & Taylor-Cox, J. (1999). Shape up!. *Teaching Children Mathematics*, 5(6), 340-345.
- Olkun, S., & Toluk U.Z., (2007). İlköğretimde etkinlik temelli matematik öğretimi. Ankara: Maya Akademi.

- Putnam, R.T., Heaton, R.M., Prawat, R.S., & Remillard, J. (1992). Teaching mathematics for understanding: Discussing case studies of four fifth-grade teachers. *The Elementary School Journal*, 93(2), 213-228.
- Reed, S. K. (1972). Pattern recognition and categorization. *Cognitive Psychology*, 3(3), 382-407.
- Riastuti, N., Mardiyana, M., & Pramudya, I. (2017, September). Students' errors in geometry viewed from spatial intelligence. In *Journal of Physics: Conference Series* (Vol. 895, No. 1, p. 012029). IOP Publishing.
- Rosch, E. H. (1973). Natural categories. *Cognitive Psychology*, 4(3), 328-350.
- Sarfaty, Y., & Patkin, D. (2013). The ability of second graders to identify solids in different positions and to justify their answer. *Pythagoras*, 34(1), 212-222.
- Seymen, E., Gazioğlu, G., Yıldırım, S., & Meral, Y. (2021). *Ortaöğretim matematik 11 ders kitabı* [High school mathematics 11 textbooks]. Ministry of Education.
- Star, J. R., & Stylianides, G. J. (2013). Procedural and conceptual knowledge: Exploring the gap between knowledge type and knowledge quality. *Canadian Journal of Science, Mathematics and Technology Education*, 13(2), 169-181.
- Tsamir, P., Tirosh, D., & Levenson, E. (2008). Intuitive non-examples: the case of triangles. *Educational Studies in Mathematics*, 69(2), 81-95.
- Tsamir, P., Tirosh, D., Levenson, E., Barkai, R., & Tabach, M. (2015). Early-years teachers' concept images and concept definitions: Triangles, circles, and cylinders. *ZDM*, 47(3), 497-509.
- Tall, D., & Vinner, S. (1981). Concept image and concept definition in mathematics with particular reference to limits and continuity. *Educational Studies in Mathematics*, 12(2), 151-169.
- Türnüklü, E., & Ergin, A. S. (2016). 8th year students' definitions and figural recognitions of solids: Concept images. *Elementary Education Online*, 15(1), 40-52.
- Ubuz, B., & Gökbulut, Y. (2015). Primary prospective teachers' knowledge on pyramid: Generating definitions and examples. *Journal of Kirsehir Education Faculty*, 16(2), 335-351.
- Ulusoy, F. (2019). Early-years prospective teachers' definitions, examples and non-examples of cylinder and prism. *International Journal for Mathematics Teaching and Learning*, 20(2), 149-169.
- Unlu, M., & Horzum, T. (2018). Mathematics teacher candidates' definitions of prism and pyramid. *International Journal of Research in Education and Science*, 4(2), 670-685.
- Uygun, T., Guner, P., & Simsek, I. (2022). Examining students' geometrical misconceptions by eye tracking. *International Journal of Mathematical Education in Science and Technology*, 1-26.
- Van de Walle, J., Karp, K. S., & Bay-Williams, J. M. (2014). *Elementary and middle school mathematics: Teaching developmentally* (Eight international edition). Essex: Pearson.
- Van Dormolen, J., & Zaslavsky, O. (2003). The many facets of a definition: The case of periodicity. *Journal of Mathematical Behavior*, 22(1), 91-106.
- Vinner, S. (1983). Concept definition, concept image and the notion of function. *International Journal of Mathematical Education in Science and Technology*, 14(3), 293-305.
- Vinner, S. (1991). The role of definitions in the teaching and learning of mathematics. In Tall D. (Ed.), *Advanced Mathematical Thinking* (pp. 65-81). Dordrecht, Kluwer Academic.
- Vinner, S. (2011). The role of examples in the learning of mathematics and in everyday thought processes. *ZDM*, 43(2), 247-256.
- Weber, K., Porter, M., & Housman, D. (2008). Worked examples and conceptual usage in understanding mathematical concepts and proofs. In M. P. Carlson and C. Rasmussen (Eds.), *Making the connection: Research and teaching in undergraduate mathematics* (pp. 245-252). Washington, DC: Mathematical Association of America.
- Wilson, P. S. (1990). Inconsistent ideas related to definitions and examples. *Focus on Learning Problems in Mathematics*, 12(3&4), 31-47.
- Yemen Karpuzcu, S., & İşıksal Bostan, M. (2013). Geometrik cisimler: Silindir, prizma, koni, piramit ve kürenin matematiksel anlamı. In İ. Ö Zembat, M. F Özmentar, E. Bingölbali, Şandır, H, & A. Delice (Eds.), *Tanımları ve tarihsel gelişimleriyle matematiksel kavramlar* (pp. 278- 279). Ankara: Pegem.
- Yıldırım, A., & Şimşek, H. (2016). *Sosyal bilimlerde nitel araştırma yöntemleri* [Qualitative research methods in the social sciences]. Ankara: Seçkin Yayıncılık.
- Yurniawati, Y., & Soleh, D. A. (2019). Geometric conceptual and procedural knowledge of prospective teachers. *International Journal of Education and Pedagogy*, 1(2), 108-117.
- Zazkis, R., & Chernoff, E. J. (2008). What makes a counterexample exemplary?. *Educational Studies in Mathematics*, 68(3), 195-208.
- Zazkis, R., & Leikin, R. (2008). Exemplifying definitions: a case of a square. *Educational Studies in Mathematics*, 69(2), 131-148.
- Zeybek Şimşek, Z. (2019). Investigating pre-service teachers' ability to recognize and classify geometric concepts hierarchically. *Turkish Journal of Computer and Mathematics Education (TURCOMAT)*, 10(3), 680-710.
- Zodik, I., & Zaslavsky, O. (2008). Characteristics of teachers' choice of examples in and for the mathematics classroom. *Educational Studies in Mathematics*, 69(2), 165-182.