

## Ayrık Zamanlı Caputo-Fabrizio Kesirsel Mertebeden Ekli Allee Etkili Lojistik Denklemin Kompleks Dinamiği

Hatice Karakaya<sup>\*1</sup>, Şenol Kartal<sup>2</sup>, İlhan Öztürk<sup>3</sup>

<sup>\*1</sup> Erciyes Üniversitesi Fen Fakültesi Matematik Bölümü, KAYSERİ

<sup>2</sup> Nevşehir Hacı Bektaş Veli Üniversitesi, Eğitim Fakültesi, Matematik ve Fen Bilimleri Eğitimi Bölümü, NEVŞEHİR

<sup>3</sup> Kapodokya Üniversitesi, UBYO, NEVŞEHİR

(Alınış / Received: 02.11.2022, Kabul / Accepted: 01.03.2023, Online Yayınlanma / Published Online: 02.05.2023)

**Anahtar Kelimeler**  
Fark denklem,  
Kararlılık,  
Neimark-Sacker  
çatallanma,  
Caputo-Fabrizio  
türev,  
Allee etkisi.

**Öz:** Bu çalışmada ekli (additive) Allee etkisine sahip Caputo-Fabrizio lojistik model ele alınmıştır. Adams-Bashfort nümerik yöntemiyle kesirsel mertebeden dinamik sistemden iki boyutlu bir fark denklem sistemi elde edilmiştir. Bu fark denklem sisteminin denge noktaları hesaplanmış ve her bir denge noktasının lokal asimptotik kararlılığı için gerekli olan cebirsel koşullar Schur-Cohn kriterlerinin kullanılmasıyla elde edilmiştir. Ayrıca fark denklem sisteminin, pozitif denge noktası civarında Neimark-Sacker çatallanması sergilediği gösterilmiştir. Yine Allee fonksiyonunun sistemin dinamik yapısı üzerindeki etkisi araştırılmıştır. Allee fonksiyonunun kararlılık bölgesini genişlettiği ve daha geç çatallanmaların oluşmasına sebebiyet verdiği gözlemlenmiştir. Son olarak bütün teorik sonuçlar nümerik olarak test edilmiştir.

## Complex Dynamics of a Discretized Caputo-Fabrizio Fractional Logistic Model with Additive Allee Effect

**Keywords**  
Difference equation,  
Stability,  
Neimark-Sacker  
bifurcation,  
Caputo-Fabrizio  
derivative,  
Allee effect.

**Abstract:** In this study, the Caputo-Fabrizio logistic model with the additive Allee effect is considered. Two dimensional system of difference equation is obtained by using the Adams-Bashfort numerical method. The equilibrium points of the system of difference equation are calculated and by using the Schur-Chon criterion the algebraic conditions that required for the local asymptotic stability of each equilibrium point are obtained. Moreover, we show that discrete system exhibit Neimark-Sacker bifurcation around the positive equilibrium point. Furthermore, the effect of the Allee function on the dynamic structure of the system is investigated. It has been observed that the Allee function expands the stability region and bifurcation begin to form later. Finally, all theoretical results are tested numerically.

\*İlgili Yazar, email: htckrky.38@gmail.com

### 1. Giriş

Karmaşık sistemlerde mevcut olan sistem hafıza etkisi ve kalıtsal özelliklerini matematiksel modellere yansıtılabilmek tam sayılı mertebeden türevler vasıtasıyla mümkün olamamaktadır [1]. Kesirsel mertebeden türev bu sorunu ortadan kaldırması ile bilimin çok çeşitli alanlarında kendine yer bulmaya başlamıştır [2-5]. Çalışmalar da gösterilmiştir ki kesirsel mertebeden türev yardımıyla oluşturulan matematiksel modeller klasik adi diferansiyel denklemlerle oluşturulan modellere göre daha başarılı sonuçlar vermektedir [6-7]. Literatürde kesirsel mertebeden türevin birçok tanımı vardır ve bunlardan en önemlileri Riemann-Liouville (R-L) ve Caputo kesirli türevdir [8]. Riemann-Liouville ve Caputo kesirli türevler bir integral denklemini vasıtasıyla tanımlanmakta olup bu integral denklemlerin çekirdekleri bir tekilliğe sahiptir. Bu ise uygulamada bazı sorunlara yol açmaktadır. Bu ve benzeri engellerin üstesinden gelmek için Caputo ve Fabrizio, Caputo-Fabrizio kesirsel türevi (CF) olarak adlandırılan tekilli olmayan bir çekirdeğe sahip yeni bir kesirsel türev tanımı önerdiler [9]. CF kesirsel mertebeden

türev; kimya [10], kanser [11], Covid-19 [12], Hepatit-E virüs [13], ilaç [14] gibi literatürde bir çok fiziksel ve biyolojik süreçlerin matematiksel modellenmesinde kullanılmıştır.

$\alpha$ . mertebeden Caputo kesirsel mertebeden türev

$${}^c D_t^{(\alpha)} f(t) = \frac{1}{\Gamma(\alpha - n)} \int_a^t \frac{f^{(n)}(\tau)}{(t - \tau)^{\alpha+1-n}} d\tau, \quad (n - 1 < \alpha < n) \quad (1)$$

şeklinde tanımlanır.

$L^2(a, b)$ ,  $(a, b)$  aralığında kare integrallenebilir fonksiyonların uzayı [15],  $H^1(a, b) = \{f | f \in L^2(a, b) \text{ ve } f' \in L^2(a, b)\}$ ,  $\alpha \in (0, 1)$  ve  $f \in H^1(a, b)$  olmak üzere Caputo- Fabrizio kesirsel mertebeden türev

$${}_{CF} D_t^\alpha f(t) = \frac{M(\alpha)}{1-\alpha} \int_a^t f'(\tau) \exp\left(\frac{-\alpha(t-\tau)}{1-\alpha}\right) d\tau \quad (2)$$

olarak tanımlanır. Burada  $M(\alpha)$ ,  $M(0) = M(1) = 1$  koşulunu sağlayan normalizasyon fonksiyonudur [9].

1931 yılında Allee, popülasyon dinamiğinde önemli bir yere sahip olacak ve Allee etkisi olarak adlandırılacak bir teoriyi ortaya atmıştır. Bu teoriye göre eğer popülasyon düşük yoğunluğa sahip ise lojistik denklem gerçekçi sonuçlar vermez ve bundan ötürü lojistik denklem Allee fonksiyonu ile yer değiştirmelidir [16]. Popülasyon dinamiğinde Allee etkisi genel olarak nüfus yoğunluğu ve bireysel uygunluk arasındaki pozitif ilişki olarak tanımlanabilir [17-20]. Dennis [21] çalışmasında ekli Allee etkisine sahip

$$\frac{dN}{dt} = rN(t) \left[ \left( 1 - \frac{N(t)}{K} \right) - \frac{m}{N(t) + a} \right] \quad (3)$$

lojistik denklemini incelemiştir. Burada  $\frac{m}{N(t)+a}$  ekli Allee etkili terimi  $a$  ve  $m$  Allee sabitlerini temsil etmektedir [22]. Eğer  $0 < m < a$  ise zayıf Allee etkisinden  $m > a$  ise güçlü Allee etkisinden söz edilir [23,24]. Genel olarak, Allee etkisi için modelleme metodolojilerini iki farklı kategoride sınıflandırabiliriz: fenomenolojik model ve mekanik model. Fenomenolojik model, Allee etkisini dinamik popülasyon modellerine doğrudan dahil ederken ve modelleyiciler genellikle Allee etkisinin sonucuyla ilgilenirken, mekanik model, alta yatan mekanizmayı modeller ve genellikle Allee etkisinin nasıl oluşturulduğunu test eder [25].

Kesirsel mertebeden diferansiyel denklemlerin nümerik çözümlerini elde etmede en sık kullanılan metotlardan bir tanesi Adams-Bashfort metodudur [26]. Lineer olmayan Caputo-Fabrizio kesirsel mertebeden

$${}_{CF} D_0^\alpha(t) = g(t, u(t)), \quad u(0) = u_0 \quad (4)$$

denklemini ele alalım. Bu denklemin Adams-Bashfort nümerik metoduyla çözümünden [27]

$$u_{n+1} = u_n + \left( \frac{1-\alpha}{M(\alpha)} + \frac{3\alpha h}{2M(\alpha)} \right) g(t_n, u_n) + \left( \frac{1-\alpha}{M(\alpha)} + \frac{\alpha h}{2M(\alpha)} \right) g(t_{n-1}, u_{n-1}) \quad (5)$$

fark denklemi elde edilir.

## 2. Kararlılık ve Çatallanma Analizi

Ekli Allee fonksiyonlu Lojistik denklemini

$${}_{CF} D_t^{(\alpha)}(t) = rN(t) \left[ \left( 1 - \frac{N(t)}{K} \right) - \frac{m}{N(t)+a} \right] \quad (6)$$

şeklinde ele alalım. (6) denkleminin Adams-Bashforth nümerik metoduna dayalı nümerik çözümü

$$N_{CF}(t_{n+1}) = N(t_n) + \left( \frac{1-\alpha}{M(\alpha)} + \frac{3\alpha h}{2M(\alpha)} \right) rN(t_n) \left[ \left( 1 - \frac{N(t_n)}{K} \right) - \frac{m}{N(t_n) + a} \right] + \left( \frac{1-\alpha}{M(\alpha)} + \frac{\alpha h}{2M(\alpha)} \right) rN(t_{n-1}) \left[ \left( 1 - \frac{N(t_{n-1})}{K} \right) - \frac{m}{N(t_{n-1}) + a} \right] \quad (7)$$

olarak hesaplanır.

(7) denkleminde  $N(t_n) = X_1(n)$  ve  $N(t_{n-1}) = X_2(n)$  değişken değiştirmesi yaparsak

$$\begin{aligned} X_1(n+1) &= X_1(n) + \left(\frac{1-\alpha}{M(\alpha)} + \frac{3ah}{2M(\alpha)}\right) r X_1(n) \left(1 - \frac{X_1(n)}{K} - \frac{m}{X_1(n)+a}\right) \\ &+ \left(\frac{1-\alpha}{M(\alpha)} + \frac{ah}{2M(\alpha)}\right) r X_2(n) \left(1 - \frac{X_2(n)}{K} - \frac{m}{X_2(n)+a}\right) \\ X_2(n+1) &= X_1(n) \end{aligned} \quad (8)$$

iki boyutlu fark denklem sistemini elde ederiz. Bu sistemin denge noktaları

$$E_0 = (X_1, X_2) = (0, 0),$$

$$E_1 = (X_1, X_2) = \left(\frac{1}{2}(-a + K + \sqrt{(a+K)^2 - 4Km}), \frac{1}{2}(-a + K + \sqrt{(a+K)^2 - 4Km})\right)$$

ve

$$E_2 = (X_1, X_2) = \left(\frac{1}{2}(-a + K - \sqrt{(a+K)^2 - 4Km}), \frac{1}{2}(-a + K - \sqrt{(a+K)^2 - 4Km})\right)$$

olarak bulunur.  $E_2$  denge noktasının pozitifliği için

$$0 < a < K \quad (9)$$

ve

$$a < m \leq \frac{(a+K)^2}{4K} \quad (10)$$

koşullarına ihtiyaç vardır.

**Teorem 1:** (8) fark denklem sisteminin  $E_0$  denge noktası

a)  $0 < m < a$  için kararsız

b)  $0 < a < m, 0 < \alpha < 1$

ve

$$r < -\frac{2aM}{(a-m)(2+(-2+h)\alpha)} \quad (11)$$

koşulları altında lokal asimptotik kararlıdır.

**İspat:** (8) fark denklem sisteminin  $E_0$  denge noktasındaki lineerleştirilmiş sisteminin Jakobiyen matrisi

$$J(E_0) = \begin{pmatrix} 1 + \frac{(a-m)r(2+(-2+3h)\alpha)}{2aM} & \frac{(a-m)r(2+(-2+h)\alpha)}{2aM} \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

şeklinde hesaplanır. Bu matrisin karakteristik denklemi

$$p(\lambda) = \lambda^2 + p_1\lambda + p_0 = 0$$

olarak elde edilir. Burada

$$p_1 = \frac{-2a(M+r) + a(2-3h)r\alpha + mr(2+(-2+3h)\alpha)}{2aM}$$

ve

$$p_0 = -\frac{(a-m)r(2+(-2+h)\alpha)}{2aM}$$

dir. Schur-Cohn kriterlerinden

$$1 + p_1 + p_0 = -\frac{2(a-m)r(1+(-1+h)\alpha)}{aM}$$

$$1 - p_1 + p_0 = 2 + \frac{h(a-m)r\alpha}{aM}$$

ve

$$1 - p_0 = -\frac{2(a-m)r(1+(-1+h)\alpha)}{aM}$$

elde edilir.

a)  $0 < m < a$  koşulu altında  $1 + p_1 + p_0 > 0$  eşitsizliği mevcut değildir ve buradan sistemin  $E_0$  denge noktasının kararsız olduğunu söyleyebiliriz.

b)  $0 < a < m$  ve  $0 < \alpha < 1$  koşulları altında  $1 + p_1 + p_0 > 0$  elde edilirken

$$0 < a < m, \quad 0 < \alpha < 1 \text{ ve } 0 < r < -\frac{2aM}{ah\alpha - hm\alpha}$$

koşulları altında

$$1 - p_1 + p_0 = 2 + \frac{h(a-m)r\alpha}{aM} > 0$$

bulunur.

$$0 < a < m, \quad 0 < \alpha < 1 \text{ ve } 0 < r < -\frac{2aM}{(a-m)(2+(-2+h)\alpha)}$$

koşulları altında ise

$$1 - p_0 = -\frac{2(a-m)r(1+(-1+h)\alpha)}{aM} > 0$$

yazılabilir. Burada

$$r < -\frac{2aM}{(a-m)(2+(-2+h)\alpha)} < -\frac{2aM}{ah\alpha - hm\alpha}$$

olabilmesi için  $0 < \alpha < 1$  koşulunun varlığı yeterlidir.

**Teorem 2:**  $\delta = (a + K)^2 - 4Km$  olmak üzere (8) fark denklem sisteminin  $E_1$  denge noktası için aşağıdaki ifadeler doğrudur.

i)  $0 < m < a$ ,  $0 < \alpha < 1$ ,  $0 < a < K$  olsun. Bu durumda

$$0 < m < \frac{a^2 + aK}{2K} \tag{12}$$

ve

$$r < \sqrt{\frac{(a(a+K) - 2Km)^2 M^2}{(a-m)^2 \delta (2 + (-2+h)\alpha)^2}} + \frac{Ma}{(a-m)(2 + (-2+h)\alpha)} \quad (13)$$

veya

$$\frac{a^2 + aK}{2K} \leq m < a \quad (14)$$

ve

$$r < -\sqrt{\frac{(a(a+K) - 2Km)^2 M^2}{(a-m)^2 \delta (2 + (-2+h)\alpha)^2}} + \frac{Ma}{(a-m)(2 + (-2+h)\alpha)} \quad (15)$$

ise  $E_1$  denge noktası lokal asimptotik kararlıdır.

ii)  $m > a$ ,  $0 < \alpha < 1$  ve  $0 < a < K$  olsun

$$a < m < \frac{(a+K)^2}{4K} \quad (16)$$

ve

$$0 < r < \sqrt{\frac{(a(a+K) - 2Km)^2 M^2}{(a-m)^2 \delta (2 + (-2+h)\alpha)^2}} + \frac{Ma}{(a-m)(2 + (-2+h)\alpha)} \quad (17)$$

ise  $E_1$  denge noktası lokal asimptotik kararlıdır.

**İspat:** (8) fark denklem sisteminin  $E_1$  denge noktasındaki lineerleştirilmiş sisteminin Jakobiyen matrisi

$$J(E_1) =$$

$$\left( \begin{array}{cc} 1 + \frac{(-a+K+\sqrt{\delta}) \left( -\frac{1}{K} + \frac{4m}{(a+K+\sqrt{\delta})^2} \right) r(2 + (-2+3h)\alpha)}{4M} & -\frac{(\sqrt{\delta}m + \sqrt{\delta}(a+K-2m)r(2 + (-2+h)\alpha))}{(a+K+\sqrt{\delta})^2 M} \\ 1 & 0 \end{array} \right)$$

olarak bulunur ve bu matrisin karakteristik denklemi

$$p(\lambda) = \lambda^2 + p_1 \lambda + p_0 = 0$$

şeklinde hesaplanır. Burada

$$p_1 = \frac{-2m\sqrt{\delta}r(2 + (-2+3h)\alpha) - a(2K + \sqrt{\delta})(2M + r(-2+2\alpha-3h\alpha)) + a^2(-2M + r(2-2\alpha+3h\alpha))}{(a+K+\sqrt{\delta})^2 M}$$

$$+ \frac{K^2(-2M + r(2 - 2\alpha + 3h\alpha)) + K(4m(M + r(-2 + 2\alpha - 3h\alpha)) + \sqrt{\delta}(-2M + r(2 - 2\alpha + 3h\alpha)))}{(a + K + \sqrt{\delta})^2 M}$$

ve

$$p_0 = \frac{((a + K)^2 - 4Km + a\sqrt{\delta} + K\sqrt{\delta} - 2m\sqrt{\delta})r(2 + (-2 + h)\alpha)}{(a + K + \sqrt{\delta})^2 M}$$

dır. Schur-Cohn kriterlerinden

$$1 + p_1 + p_0 = \frac{4((a + K)^2 - 4Km + a\sqrt{\delta} + K\sqrt{\delta} - 2m\sqrt{\delta})r(1 + (-1 + h)\alpha)}{(a + K + \sqrt{\delta})^2 M}$$

$$\frac{1 - p_1 + p_0}{=} \frac{4K(K - 2m)M + 4K\sqrt{\delta}M - 2hK(K - 4m)r\alpha - 2hK\sqrt{\delta}r\alpha + 4hm\sqrt{\delta}r\alpha + a^2(4M - 2hr\alpha) + 2a(2K + \sqrt{\delta})(2M - hr\alpha)}{(a + K + \sqrt{\delta})^2 M}$$

ve

$$1 - p_0 = 1 - \frac{((a + K)^2 - 4Km + a\sqrt{\delta} + K\sqrt{\delta} - 2m\sqrt{\delta})r(2 + (-2 + h)\alpha)}{(a + K + \sqrt{\delta})^2 M}$$

elde edilir.

$0 < \alpha < 1$  ve  $0 < m < a$  koşulları altında  $1 + p_1 + p_0 > 0$  dir. Öte yandan (12) ve (13) den veya (14) ve (15) ten  $1 - p_1 + p_0 > 0$  ve  $1 - p_0 > 0$  dir.

ii) Farzedelim ki  $m > a$  ve  $0 < \alpha < 1$  olsun

$$0 < a < K \text{ ve } a < m < \frac{a^2 + 2aK + K^2}{4K}$$

koşulları altında  $1 + p_1 + p_0 > 0$  elde edilirken

$$0 < a < K, \quad a < m < \frac{a^2 + 2aK + K^2}{4K}$$

ve

$$0 < r < \sqrt{\frac{(a(a + K) - 2Km)^2 M^2}{h^2(a - m)^2 \delta \alpha^2}} + \frac{Ma}{aha - hma}$$

koşulları altında  $1 - p_1 + p_0 > 0$  elde edilir. Yine

$$0 < a < K, \quad a < m < \frac{a^2 + 2aK + K^2}{4K}$$

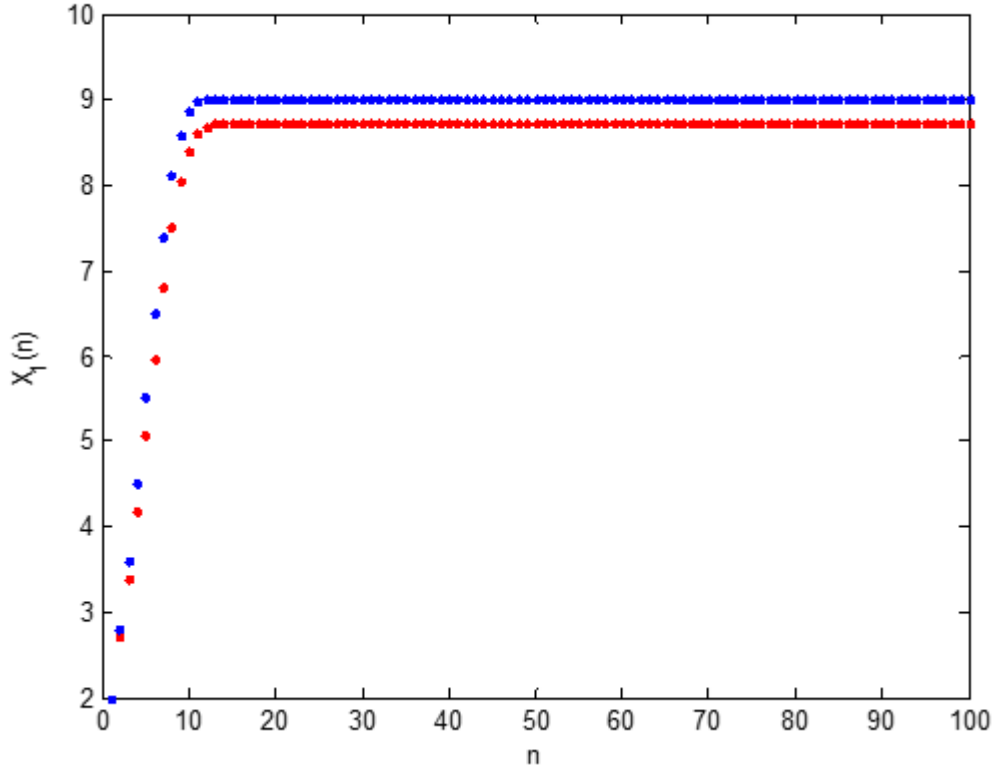
ve

$$r < \sqrt{\frac{(a(a + K) - 2Km)^2 M^2}{(a - m)^2 \delta (2 + (-2 + h)\alpha)^2}} + \frac{Ma}{(a - m)(2 + (-2 + h)\alpha)}$$

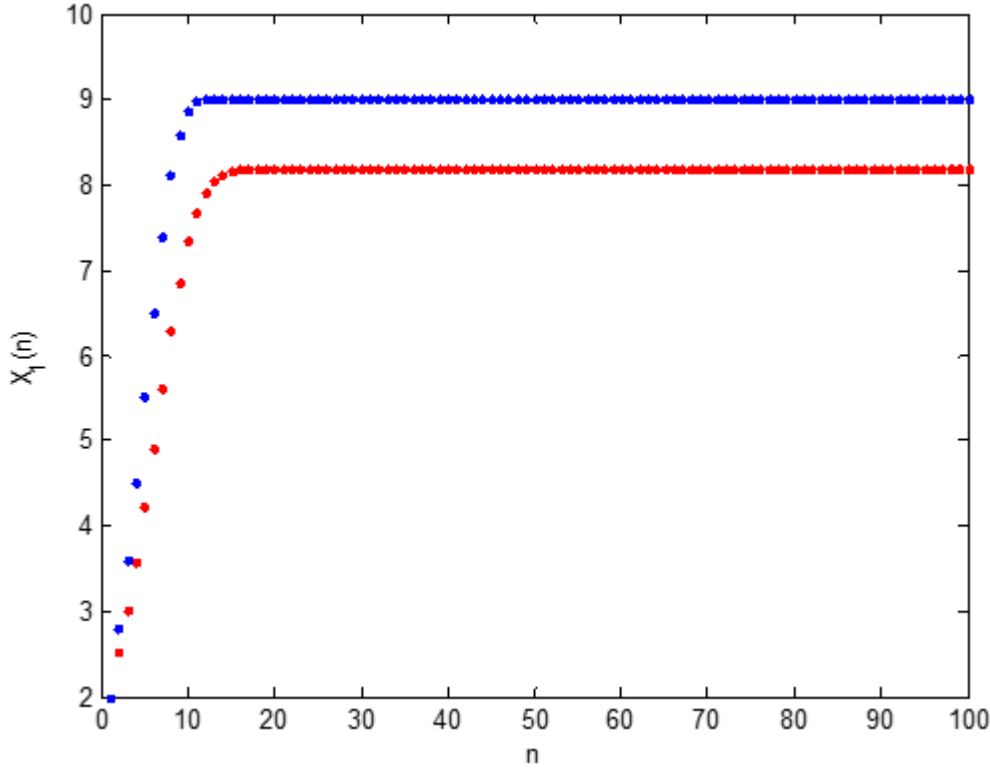
koşulları altında  $1 - p_0 > 0$  dir. Son olarak

$$\sqrt{\frac{(a(a+K)-2Km)^2M^2}{(a-m)^2\delta(2+(-2+h)\alpha)^2}} + \frac{Ma}{(a-m)(2+(-2+h)\alpha)} < \sqrt{\frac{(a(a+K)-2Km)^2M^2}{h^2(a-m)^2\delta\alpha^2}} + \frac{Ma}{h\alpha(a-m)}$$

olduğu açıktır.



**Şekil 1.**  $K = 9, m = 0.3, h = 0.001, M = 0.88716, \alpha = 0.8, r = 1, a = 0.9$  parametre değerleri ve  $X_1(1) = 2, X_2(1) = 3$  başlangıç koşulları için Allee etkisiz (mavi eğri) ve zayıf ekli Allee etkili (kırmızı eğri) ayrık zamanlı Caputo- Fabrizio lojistik denklemlerin yerel asimptotik kararlı denge noktası  $E_1$ .



**Şekil 2.**  $K = 9, m = 0.8, h = 0.001, M = 0.88716, \alpha = 0.8, r = 1, a = 0.7$  parametre değerleri ve  $X_1(1) = 2, X_2(1) = 3$  başlangıç koşulları için Allee etkisiz (mavi eğri) ve güçlü ekli Allee etkili (kırmızı eğri) ayrık zamanlı Caputo-Fabrizio lojistik denklemlerin yerel asimptotik kararlı denge noktası  $E_1$ .

**Teorem 3:** (8) fark denklem sisteminin  $E_2$  denge noktası kararsızdır.

**İspat:** Sistemin  $E_2$  denge noktasındaki lineerleştirilmiş sistemin Jakobiyen matrisi

$$J(E_2) =$$

$$1 + \frac{(-a + K - \sqrt{\delta}) \left( -\frac{1}{K} + \frac{4m}{(a+K-\sqrt{\delta})^2} \right) r(2 + (-2 + 3h)\alpha)}{4M} \quad \frac{(-a^2 - K^2 - 2m\sqrt{\delta} + a(-2K + \sqrt{\delta}) + K(4m + \sqrt{\delta})) r(2 + (-2 + h)\alpha)}{(a + K - \sqrt{\delta})^2 M}$$

ve bu matrisin karakteristik denklemi

$$p(\lambda) = \lambda^2 + p_1\lambda + p_0 = 0$$

şeklindedir. Burada

$$p_1 = \frac{2m\sqrt{\delta}r(2 + (-2 + 3h)\alpha) + a(-2K + \sqrt{\delta})(2M + r(-2 + 2\alpha - 3h\alpha)) + a^2(-2M + r(2 - 2\alpha + 3h\alpha))}{(a + K - \sqrt{\delta})^2 M}$$

$$\left( + \frac{K^2(-2M + r(2 - 2\alpha + 3h\alpha)) + K(4m(M + r(-2 + 2\alpha - 3h\alpha))) + \sqrt{\delta}(2M + r(-2 + 2\alpha - 3h\alpha))}{(a + K - \sqrt{\delta})^2 M} \right)$$

ve



$$p_0 = -\frac{(-a^2 - K^2 - 2m\sqrt{\delta} + a(-2K + \sqrt{\delta}) + K(4m + \sqrt{\delta}))r(2 + (-2 + h)\alpha)}{(a + K - \sqrt{\delta})^2 M}$$

dır. Schur-Cohn kriterinin ilk kriterinden

$$1 + p_1 + p_0 = -\frac{4(-a^2 - K^2 - 2m\sqrt{\delta} + a(-2K + \sqrt{\delta}) + K(4m + \sqrt{\delta}))r(1 + (-1 + h)\alpha)}{(a + K - \sqrt{\delta})^2 M}$$

elde edilir ki denge noktasının pozitiflik koşullarından  $1 + p_1 + p_0 > 0$  eşitsizliği sağlanmaz.

**Teorem 4:** Farzedelim ki  $0 < a \leq K$ ,  $0 < m < \frac{a^2 + 2aK + K^2}{4K}$  ve  $0 < \alpha < 1$  olsun. Üstelik  $\alpha \neq \frac{2}{2+h}$  olsun. Eğer

$$r = r^* = \sqrt{\frac{(a(a + K) - 2Km)^2 M^2}{(a - m)^2 \delta (2 + (-2 + h)\alpha)^2}} + \frac{Ma}{(a - m)(2 + (-2 + h)\alpha)}$$

ise (8) fark denklem sisteminin  $E_1$  denge noktası civarında Neimark-Sacker çatallanması oluşur.

**İspat:**

$1 - p_0 = 0$  dan kritik çatallanma değeri

$$r^* = \sqrt{\frac{(a(a + K) - 2Km)^2 M^2}{(a - m)^2 \delta (2 + (-2 + h)\alpha)^2}} + \frac{aM}{(a - m)(2 + (-2 + h)\alpha)}$$

olarak bulunur.  $r$  nin bu kritik değeri için jakobiyen matris

$$J(r^*) = \begin{pmatrix} -\frac{2h\alpha}{2 + (-2 + h)\alpha} & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

formundadır. Bu matrisin özdeğerleri ise

$$\lambda_{1,2} = \frac{-h\alpha}{2 - 2\alpha + h\alpha} \pm i \frac{2\sqrt{1 - 2\alpha + h\alpha + \alpha^2 - h\alpha^2}}{2k}$$

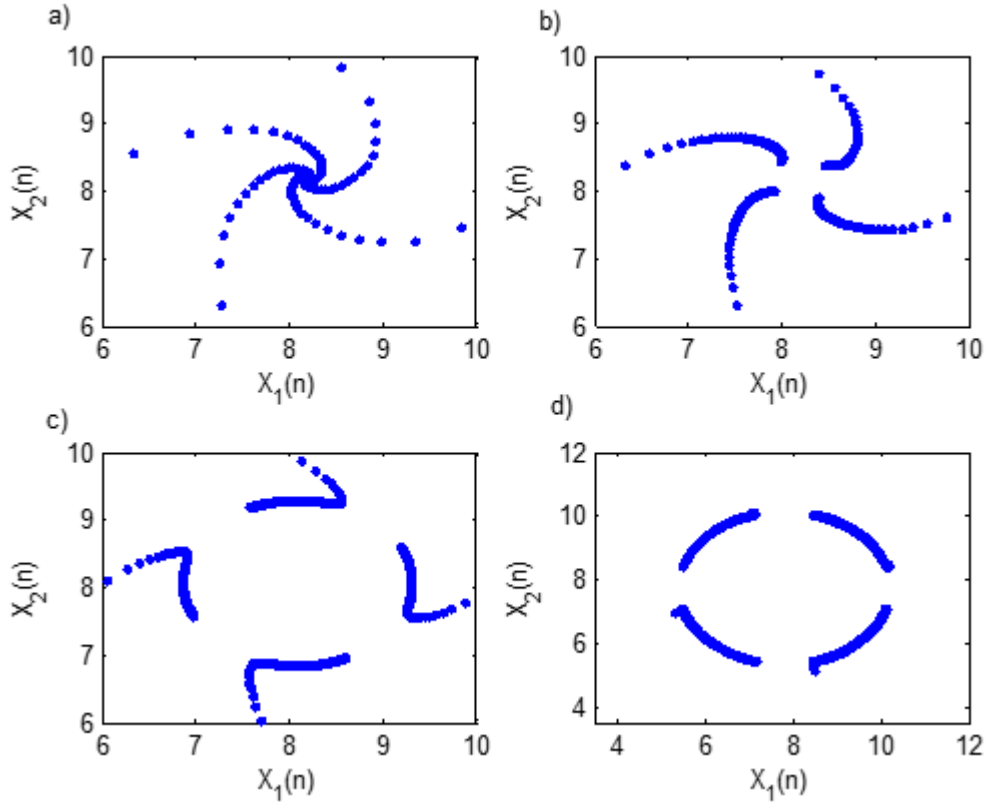
şeklinde elde edilir. Bu özdeğerler için  $|\lambda_{1,2}| = 1$  olduğu açıktır. Öte yandan Nonresonance koşulundan eğer  $\alpha \neq \frac{2}{2+h}$  ise

$$p_1(r^*) = \frac{2h\alpha}{2 + (-2 + h)\alpha} \neq 0,1$$

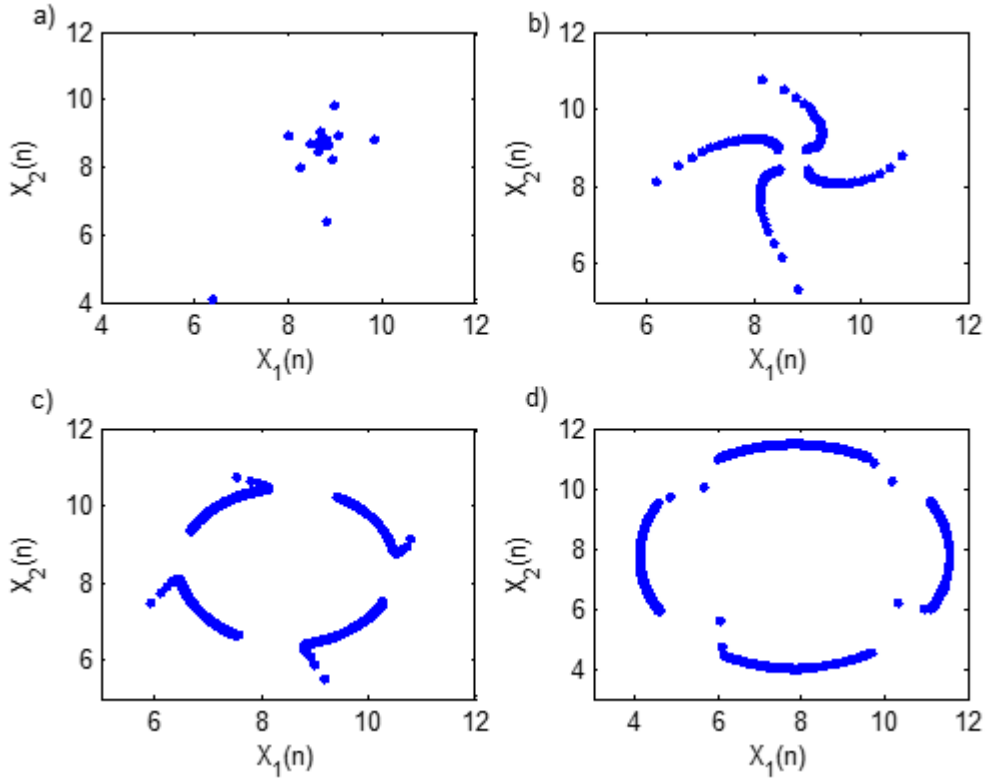
dır. Transversality koşulundan ise eğer  $0 < a \leq K$ ,  $0 < m < \frac{a^2 + 2aK + K^2}{4K}$  ve  $0 < \alpha < 1$  ise

$$\frac{d|\lambda_{1,2}|}{dr} \Big|_{r=r^*} = \frac{((a + K)^2 - 4Km + a\sqrt{\delta} + K\sqrt{\delta} - 2m\sqrt{\delta})(2 + (-2 + h)\alpha)}{2(a + K + \sqrt{\delta})^2 M} \neq 0$$

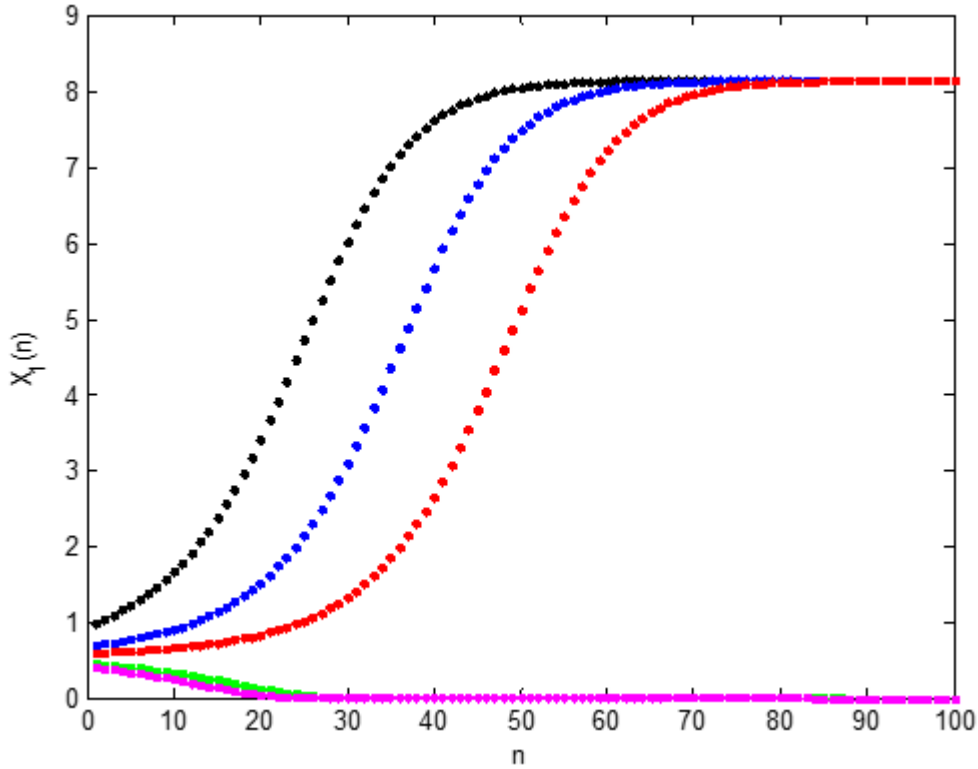
dır.



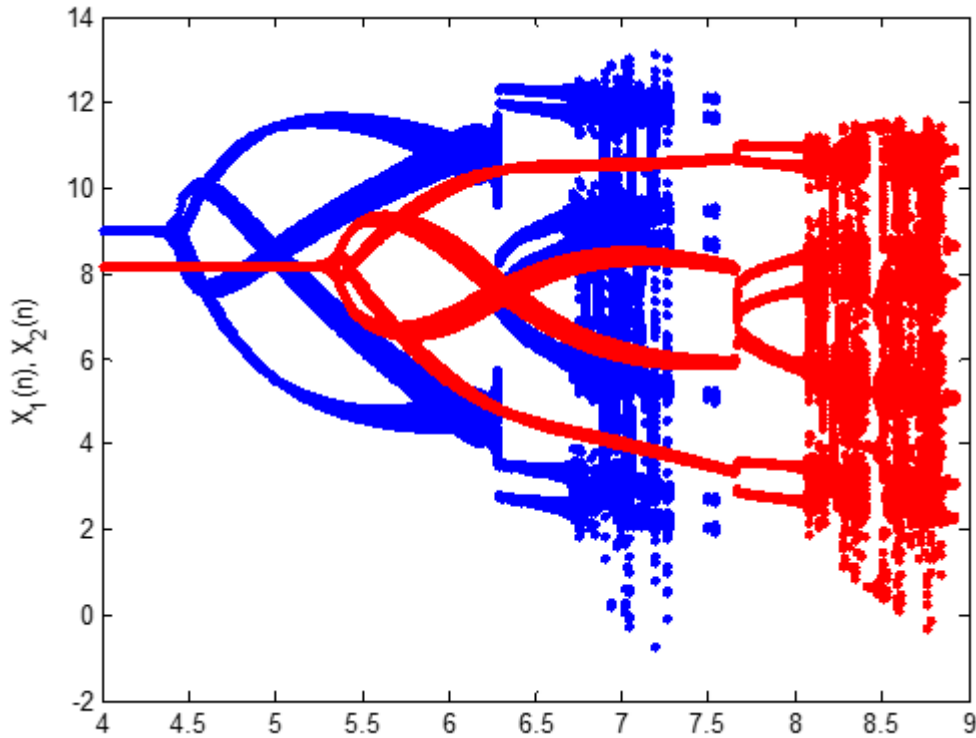
**Şekil 3.** Güçlü Allee etkisine sahip (8) fark denklem sisteminin  $E_1$  denge noktasındaki faz diyagramları. (a)  $r = 5$ , (b)  $r = r^* = 5.3523$ , (c)  $r = 5.5$  ve (d)  $r = 6$ . Diğer parametre değerleri ve başlangıç koşulları Şekil 2 deki gibidir.



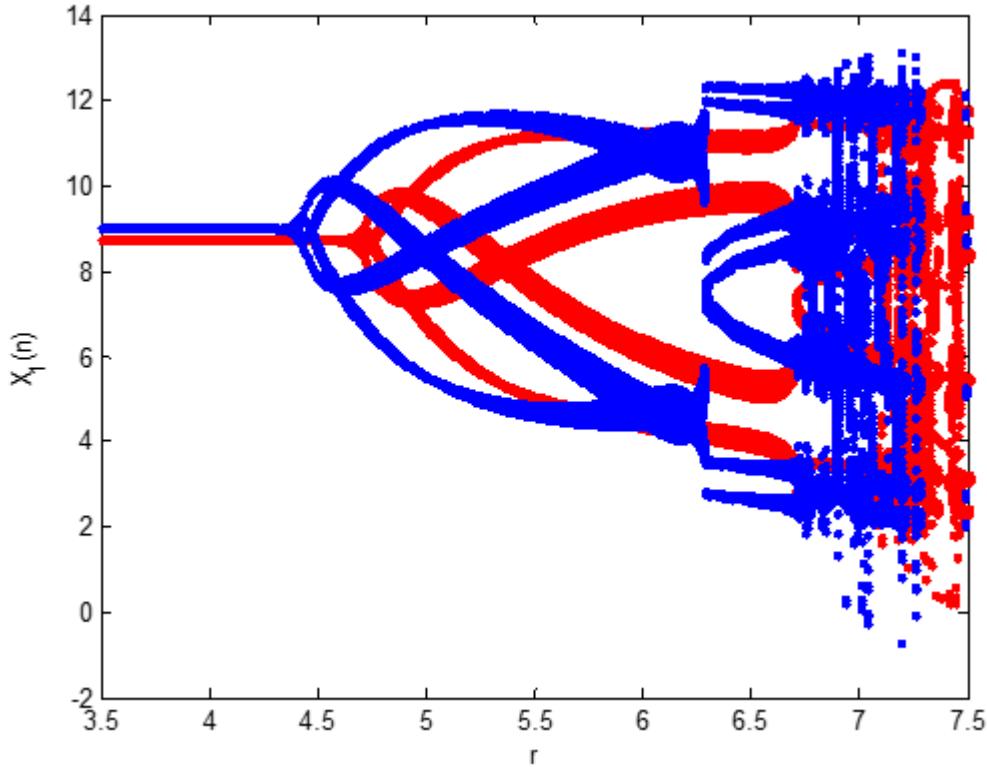
**Şekil 4.** Zayıf Allee etkisine sahip (8) fark denklem sisteminin  $E_1$  denge noktasındaki faz diyagramları. (a)  $r = 3$ , (b)  $r = r^* = 4.7068$ , (c)  $r = 5$  ve (d)  $r = 6$ . Diğer parametre değerleri ve başlangıç koşulları Şekil 1 deki gibidir.



**Şekil 5.**  $K = 9, m = 0.8, h = 0.001, M = 0.88716, \alpha = 0.8, r = 4, a = 0.3$  parametre değerleri (8) fark denklem sisteminin farklı başlangıç koşulları altında  $E_1$  denge noktasındaki dinamik davranışları.  $X_1(1) = X_2(1) = 0.7$  (mavi eğri),  $X_1(1) = X_2(1) = 0.6$  (kırmızı eğri),  $X_1(1) = X_2(1) = 0.45$  (yeşil eğri),  $X_1(1) = X_2(1) = 0.4$  (siyah eğri).



**Şekil 6.** Allee etkisiz (mavi eğri) ve güçlü Allee etkili (kırmızı eğri) ayrık zamanlı Caputo- Fabrizio lojistik denklemlerin çatallanma diagramları. Diğer parametre değerleri ve başlangıç koşulları Şekil 2 deki gibidir.



**Şekil 7.** Allee etkisiz (mavi eğri) ve zayıf Allee etkili (kırmızı eğri) ayrık zamanlı Caputo-Fabrizio lojistik denklemlerin çatallanma diagramları. Diğer parametre değerleri ve başlangıç koşulları Şekil 1 deki gibidir.

### 3. Sonuç ve Tartışma

Bu çalışmada Ekli Allee etkiye sahip ayrık zamanlı Caputo-Fabrizio lojistik modeli (8) in dinamik davranışları incelenmiştir. (8) fark denklem sisteminin denge noktaları  $E_0$ ,  $E_1$  ve  $E_2$  olarak bulunmuştur.  $E_0$  denge noktası zayıf Allee etkisi altında ( $0 < m < a$ ) kararsız iken güçlü Allee etkisi altında ( $m > a$ ) (11) eşitsizliğinin varlığı altında lokal asimptotik kararlı olabilmektedir.  $E_1$  pozitif denge noktası ise  $0 < a < K$  ve  $0 < \alpha < 1$  olmak üzere zayıf Allee etkisi altında (12) ve (13) veya (14) ve (15) eşitsizlikleri için lokal asimptotik kararlıdır (Şekil 1).  $0 < a < K$  ve  $0 < \alpha < 1$  olmak üzere güçlü Allee etkisi altında (16) ve (17) eşitsizliklerinin var olması  $E_1$  pozitif denge noktasını lokal asimptotik kararlı yapmaktadır (Şekil 2).  $E_2$  denge noktası ise denge noktasının pozitif olma koşulları altında kararsızdır. Güçlü Allee etkisi altında  $K = 9, m = 0.8, h = 0.001, M = 0.88716, \alpha = 0.8, a = 0.7$  parametre değerleri için kritik çatallanma değeri  $r^* = 5.3523$  olarak bulunur.  $r$  nin bu kritik değerinde Neimark-Sacker çatallanmasının oluşabilmesi için gerekli olan transversality ve non-resonance koşullarının sağlandığı gösterilmiştir (Şekil 3 ve Şekil 6). Zayıf Allee etkisi altında  $K = 9, m = 0.3, h = 0.001, M = 0.88716, \alpha = 0.8, a = 0.9$  parametre değerleri için kritik çatallanma değeri  $r^* = 4.7068$  olarak bulunur (Şekil 4 ve Şekil 7). Güçlü Allee etkisi altında  $r$  parametresine göre çatallanma değeri  $r^* = 5.3523$  iken zayıf Allee etkisi altında bu değer  $r^* = 4.7068$  olmaktadır. Dolayısıyla güçlü Allee etkisinin zayıf Allee etkisine göre kararlılık bölgesini daha da genişlettiğini söyleyebiliriz.

Şekil 5, farklı başlangıç değerleri altında popülasyonun dinamik davranışlarını göstermektedir.

Ekli Allee etkili (8) ve Allee etkisiz dinamik sistemleri karşılaştırdığımızda Allee fonksiyonunun kararlılık bölgesini genişlettiğini görebiliriz (Şekil 6 ve Şekil 7). Yani diğer bir deyişle Ekli Allee etkiye sahip dinamik sistemde daha geç çatallanmalar oluşmaya başlamaktadır.

### Kaynakça

- [1] Djeddi, N., Hasan, S., Al-Smadi, M., Momani, S. 2020. Modified analytical approach for generalized quadratic and cubic logistic models with Caputo-Fabrizio fractional derivative. Alex. Eng. Jour., 59(2020), 5111-5122.

- [2] Vivek, D., Kanagarian, K., Harikrishnan, S. 2016 Numerical solution of fractional-order logistic equations by fractional Euler's method. *IJRASET*, 4(2016), 775-780.
- [3] Zhu, S., Cai, C., Spanos, P. D. 2015. A nonlinear fractional derivative viscoelastic model for rail pads in dynamic analysis of coupled vehicle-slap track system. *Jour. of Sound. and Vibr.*, 335(2015), 304-320.
- [4] Singh, J., Kumar, D., Hammouch, Z., Atangana, A. 2015. A fractional epidemiological model for computer viruses pertaining to a new fractional derivative. *Appl. Math. and Comput*, 316 (2015), 504-515.
- [5] Laj, J., Mao, S., Qui, J., Zhang, Q., Hu, Z., Chen, J. 2016. Investigation progress and Applications of Fractional Derivative Model in Geotechnical Engineering. *Hindawi*, (2016).
- [6] Balcı, E., Öztürk, İ., Kartal, S. 2019. Dynamical behaviour of fractional order tumor model with Caputo and conformable fractional derivative. *Chaos, Solutions and fractals*, 123 (2019), 43-51.
- [7] Javidi, M., Nyamoradi, N. 2013. Dynamic analysis of order prey-predator interaction with harvesting. *Appl. Math. Model*, 37(2013), 8946-8956.
- [8] Aydoğan, S. M., Baleanu, D., Mousalou, A., Rezapour, S. 2017. On approximate solutions for two higher-order Caputo-Fabrizio fractional integro-differential equations. *Adv. Differ. Equ*, (2017), 221.
- [9] Caputo, M., Fabrizio M. 2015. A new Definition of Fractional Derivative without Singular Kernel. *Prog. Fract. Differ. Appl*, 2 (2015), 73-85.
- [10] Bashiri, T., Vaezpour, S. M., Nieto, J. 2018. Approximating Solution of Fabrizio-Caputo Volterra's Model for Population Growth in a Closed System by Homotopy Analysis Method. *Hindawi*, (2018).
- [11] Dokuyucu, M. A., Celik, E., Bulut, H., Baskonus, H. M. 2018. Cancer treatment model with the Caputo-Fabrizio fractional derivative. *Eur. Phys. J. Plus*, 133:92 (2018).
- [12] Baleanu, D., Mohammadi, H., Rezapour, S. 2020. A fractional differential equation model for the Covid-19 transmission by using the Caputo-fabrizio derivative. *Adv. Differ. Equ*, 299(2020).
- [13] Khan, M. A., Hammouch, Z., Baleanu, D. 2019. Modeling the Dynamics of Hepatitis E via the Caputo-Fabrizio derivative. *Math. Model. Nat. Phenom*, 14 (2019).
- [14] Harrouche, N., Momani, S., Hasan, S., Al-Smadi, M. 2021. Computational algorithm for solving drug pharmacokinetic model under uncertainty with nonsingular kernel type Caputo-Fabrizio fractional derivative. *Alex. Eng. J*, 60(2021), 4347-4362.
- [15] Karakaya, H., Öztürk, İ., Kartal, Ş., Gurcan, F. 2021. Dynamical Analysis of Discretized Logistic Model with Caputo-Fabrizio Fraction Derivative. *Comp. Ecol. and Soft*, 11(2021), 21-34.
- [16] Yousef, A., Yousef, F.B. 2019. Bifurcation and stability Analysis of a system of Fractional-Order Differential Equations for a Plant-Herbivore Model with Allee Effect. *mathematics*, DOI: 10.3390/math7050454.
- [17] Vinoth, S., Sivasamy, R., Sathiyathan, K., Rajchakit, G., Hammachukiattikul, P., Vadivel, R., Gunasekaran, N. 2021. Dynamical analysis of a delayed food chain model with additive Allee effect. *Adv. Differ. Equ*, (2021), 2021:54.
- [18] Merdan, H., Gümüş, Ö. A. 2012. Stability analysis of a general discrete-time population model involving delay and Allee effects. *Appl. Maths. Comp*, 219 (2012), 1821-1832.
- [19] Kang, Y., Udiani, O. 2014. Dynamics of a single species evolutionary model with Allee effects. *J. Math. Anal. Appl*. 418 (2014), 492-515.
- [20] Xue, C., Liu, X. 2015. Chaos and bifurcation of a Leslie-Gower food chain with strong Allee effect. *Hindawi*. (2015), <http://dx.doi.org/10.1155/2015/430985>.

- [21] Dennis, B. 1989. Allee effects: Population growth, Critical Density and the Change of extinction. *Nat. Resc. Mod*, 3(1989).
- [22] Cai, Y., Zhao, C., Wang, W., Wang, J. 2015. Dynamics of a Leslie-Gower predator-prey model with additive Allee effect. *App. Math. Model*, 39 (2015), 2092-2106.
- [23] Lv, Y., Chen, L., Chen, F. 2020. Stability and bifurcation in a single species logistic model with additive Allee effect and feedback control. *Adv. Differ. Equ*, 129 (2020).
- [24] Chen, L., Liu, T., Chen, F. 2021. Stability and bifurcation in a two-patch model with additive Allee effect. *Mathematics*, (2021), DOI: 10.3934/math.2022034.
- [25] Qin, L., Zhang, F., Wang, W., Song, W. 2017. Interaction between Allee effects caused by organism-environment feedback and by other ecological mechanisms. *Plos. One*, 12(2017).
- [26] Koca, I. 2018. Efficient numerical approach for solving fractional partial differential equations with non-singular kernel derivatives. *Chaos Solutions Fractals* 116 (2018), 278-286.
- [27] Noupoue, Y., Y., Tandogan, Y., Awadalla, M. 2019. On numerical techniques for solving the fractional logistic differential equation,. *Adv. Differ. Equ*, 108 (2019).