GAZİOSMANPAŞA BİLİMSEL ARAŞTIRMA DERGİSİ (GBAD)
Gaziosmanpasa Journal of Scientific Research
ISSN: 2146-8168
http://dergipark.gov.tr/gbad
Araştırma Makalesi (Research Article)

Cilt/Volume : 12
Sayı/Number: 1
Yıl/Year: 2023
Sayı/Pages: 37-45

Alınış tarihi (Received): 15.11.2022
Kabul tarihi (Accepted): 01.06.2023

İki Aralıklı Sturm-Liouville Denklemlerinin Çözümlerinin Salınım ve Ayırma Özellikleri

Sevda Nur ÖZTÜRK[1,*], Oktay Sh. MUKHTAROV[1]

[1] *Tokat Gaziosmanpaşa Üniversitesi, Fen Edebiyat Fakültesi, Matematik Bölümü / Tokat*
**Sorumlu Yazar: omukhtarov@yahoo.com*

ÖZET: Bu çalışmanın esas amacı yeni tipten bir Sturm-Lioville probleminin bazı karşılaştırma ve salınım özelliklerinin incelenmesidir. Araştırdığımız problemin klasik Stum-Liouville probleminden esas farkı ortak sınırı olan iki tane ayrık aralıkta tanımlı olması ve ortak sınırda geçiş şartları olarak adlandırılan iki tane ek şart içermesidir. Klasik yöntemlerin yeni bir modifikasyonunu (biçimini) geliştirerek yeni karşılaştırma ve salınım teoremleri ispat ettik. Bizim sonuçlar karşılaştırma ve salınım hakkındaki bazı klasik sonuçları genelleştiriyor.

Anahtar Kelimeler– *Klasik olmayan Sturm-Liouville problemi, geçiş şartları, karşılaştırma teoremleri, salınım.*

Oscillation and Comparison Properties of Two-İnterval Sturm-Liouville Equations

ABSTRACT: The main purpose of this work is to study some comparison and oscillation properties of Sturm-Liouville problems of a new type. The considered problem differs from the classical Sturm-Liouville problems in that it is defined on two non-interesting intervals at common and of which are given two additional conditions, the so-called transmission conditions. By developing a new modification of the classical methods we proved a new comparison and oscillation theorems. Our results generalizes some classical results about comparison and oscillation.

Keywords– non-classical Sturm-Liouville problem, transmission problems, comparison theorems, oscillation.

1. Giriş

Sturm Liouville denkleminin çözüm fonksiyonunun sıfırlarının varlığı ve dağılımının incelenmesi adi diferansiyel denklemlerin nitel teorisinde son derece önemli bir konudur. Bu konuda geniş bir literatür olmasına rağmen son yıllarda doğa bilimlerinin çeşitli alanlarında ortaya çıkan yeni tip diferansiyel denklemlerin çözümlerinin salınımı veya salınımsızlığı için yeni yeterli koşulların türetilmesine artan bir ilgi vardır. Özellikle ek geçiş şartları içeren klasik olmayan Sturm-Liouville tipi problemler, fizikte karşılaşılan farklı problemlerin modellenmesinde sıklıkla karşımıza çıkmaktadır. Bu tür klasik olmayan problemler farklı dielektrik özelliklere sahip ferromanyetik ortamlardaki elektromanyetik işlemlerde, elastik çoklu yapılarda, ısı ve kütle transferinde, "hidrolik kırılma" problemlerinde, mekanik sistemlerin titreşimlerinde vb. matematiksel model olarak ortaya çıkmaktadır (Cannon ve Meyer, 1971; Duhamel, 1843; Ergün ve Amirov, 2020; Gaskell, 1942; Grace ve El-Marshedy, 2000; Lenger, 1932).

Bu çalışmada, geçiş şartları olarak adlandırdığımız ek iletim koşullarını içeren yeni tip bir Sturm-Liouville probleminin karşılaştırma ve salınım özellikleri araştırılmıştır (Akdoğan ve ark., 2019; Allahverdiev, 2013; Allahverdiev ve Tuna, 2019; Aydemir ve ark, 2018; Kandemir ve Mukhtarov, 2017; çalışmalarında geçiş şartı içeren bazı problemlerin farklı özellikleri incelenmiştir). Bu tipten klasik olmayan Sturm-Liouville problemleri Dünya'nın serbest salınımlarında, toroidal salınımlarının radyal bağımlılığını belirleyen problemlerde vb matematiksel model olarak ortaya çıkmaktadır. Problemimiz, etkileşim noktasında çözümlerin sol ve sağ limitleri ile türevleri arasındaki ilişkiyi tanımlayan ek iletim koşulları içermesi bakımından klasik Sturm-Liouville problemlerinden farklıdır. En büyük belirsizlik, çözümlerin sıfırlarının varlığını ve davranışını incelemekte ortaya çıkar ve bu nedenle klasik yöntemleri ek iletim koşullarını içeren problemlere de uygulanabilecek şekilde geliştirmek gerekir. Bir çok fiziksel olayın çeşitli özelliklerini incelerken, salınımlı veya salınımlı olmayan çözümler için yeterli koşulları elde etmek, ardışık sıfırlar arasındaki minimum mesafeyi ve belirli bir aralıkta bulunan sıfır sayısını tahmin etmek ve ayrıca bu tür fiziksel olayların modellenmesi sırasında ortaya çıkan diferansiyel denklemlerin bu özellikleri arasında bir bağlantı bulmak ihtiyacı ortaya çıkmaktadır. Bu nedenle Sturm karşılaştırma ve salınım teorisi giderek artan bir ilgi görmektedir. Örneğin bir parçacık $f_1(t) = -h_1(t)u$ kuvveti tarafından $u = 0$'a çekilsin. O halde bu parçacığın serbestlik derecesi bire eşitse hareketin matematiksel modeli

$$u'' + f_1(t)u = 0 \qquad (1)$$

şeklindeki Sturm-Liouville denklemi biçimindedir. Burada t zaman anlamına gelmektedir. Eğer $f_2(t) \geq f_1(t)$ olmak üzere başka bir parçacık $f_2(t) = -h_2(t)v$ kuvveti ile $v = 0$ 'a çekilirse (bu hareket aynı zamanda benzer şekilde $v'' + f_2(t)v = 0$ denklemi ile modellenmiştir) o halde Quantum teorisinden bilindiği gibi ikinci parçacık daha hızlı salınım yapar. Yani eğer birinci parçacık $u = 0$'dan t_1 ve t_2 ardışık zamanlarında geçerse, o zaman bu anlar arasında ikinci parçacık (daha büyük bir kuvvete sahip) en az bir kez geçmiş olacaktır. Bu salınım teorisi aynı zamanda diferansiyel denklemlerin kesin biçimde bulamadığımız çözümlerinin bazı niteliksel özelliklerini incelemek için de kullanılabilir. Bu nedenle Sturm teorisi teorik olduğu kadar uygulama açısından da önemlidir. Ayrıca matematiksel fiziğin bazı problemlerini incelerken, sadece adi diferansiyel denklemler için değil, aynı zamanda kısmi diferansiyel denklemler için de salınımlı ve salınımlı olmayan çözümler bulmak gerekir. İkinci mertebeden adi lineer diferansiyel denklemlerin çözümlerinin karşılaştırma ve salınım özelliklerine ilişkin ilk önemli sonuçlar 1836 'da Sturm tarafından oluşturulmuştur (Sturm, 1836). Geçiş şartları içeren sınır-değer problemlerinin bir çok spektral özelliklerinin incelenmesi son yıllarda daha fazla ilgi görmeye başlamıştır. Örneğin (Mukhtarov ve ark., 2018, 2020; Olğar ve ark., 2018; Şen, 2018; Yakar ve Akdoğan, 2017) çalışmalarında bu tür sonuçlar yer almaktadır. Bu çalışmada yeni tip Sturm-Liouville problemler için ayırma, karşılaştırma ve salınım teoremlerini genelleştireceğiz.

2. Etkileşim Noktasında İletim Koşulları Olan İki Aralıklı Sturm- Liouville Denklemleri İçin Ayırma Teoremleri

Bu çalışmamızda $C^n[a,c-0]\oplus C^n[c+0,b]$ ile $[a,c)\cup(c,b]$ kümesinde tanımlı olan, $[a,c)$ ve $(c,b]$ aralıklarının her birinde n . mertebeden sürekli türevlenebilir olan ve de $x=c$ geçiş noktasında sonlu $f^s(c\pm 0)=\lim\limits_{\varepsilon\downarrow 0} f^s(c\pm\varepsilon), \quad s=0,1,2,...,n$ limit değerlerine sahip olan tüm fonksiyonlardan oluşan uzayı göstereceğiz. $k\in C^1[a,c-0]\oplus C^1[c+0,b]$, $\sigma\in C[a,c-0]\oplus C[c+0,b]$ olduğunu varsayarak

$$-(k(x)y')'+\sigma(x)y=0 \ , \ x\in[a,c)\cup(c,b] \qquad (2)$$

iki aralıklı Sturm-Liouville denklemini ve $x=c$ iletim noktasında verilen

$$Jy(c)=0 \qquad (3)$$

$$Jy'(c)=\beta\, y(c-0) \qquad (4)$$

iletim koşullarını ele alacağız. Burada J operatörü $Jf(x_0)=\lim\limits_{x\to x_0^+} f(x)-\lim\limits_{x\to x_0^-} f(x)$ ile tanımlı sıçrama operatörüdür.

Teorem 1. (3) ve (4) iletim koşullarını sağlayan (2) iki-aralıklı Sturm-Liouville denkleminin aşikar olmayan bir çözümü $[a,c)\cup(c,b]$ aralığında en fazla sonlu sayıda sıfıra sahip olabilir.

İspat. Aksini kabul edelim, yani kabul edelim ki (2)-(4) probleminin $x_n\in[a,c)\cup(c,b]$, $n=1,2,.......$ olacak şekilde sonsuz sayıda sıfırı mevcuttur. Bolzano-Weirstrass teoremine göre yakınsak bir (x_{n_k}) alt dizisi seçebiliriz. $x_{n_k}\to w$ olsun. $w=c$ ve $w\neq c$ durumlarını ayrı ayrı araştıracağız. $w\neq c$ ve $w\in[a,c)$ olsun. (2)-(4) probleminin $y(x)$ çözümü w noktasında sürekli olduğu için

$$y(w)=\lim_{k\to\infty} y(x_{n_k})=0$$

eşitliği elde edilir. Buradan

$$y'(w)=\lim_{k\to\infty}\frac{y(x_{n_k})-y(w)}{x_{n_k}-w}=0$$

eşitliği bulunur. Bu durumda (2) denkleminin aşikar olmayan çözümü $y(w)=y'(w)=0$ başlangıç koşullarını sağlıyor. O halde Adi Diferansiyel Denklemler teorisinin iyi bilinen varlık ve teklik teoremine göre $y(x)$ fonksiyonu $[a,c)$ aralığında özdeş olarak sıfıra eşit olur. (3) ve (4) iletim koşullarını kullanarak

$$y(c+0)=y(c-0)=0$$

ve

$$y'(c+0)=y'(c-0)+\beta\, y\left(c-0\right)=0$$

elde ederiz. Bir kez daha varlık ve teklik teoremini uygularsak $y(x)$'in $(c,b]$ sağ aralığında da özdeş olarak sıfıra eşit olduğunu görürüz. Böylece bir çelişki elde ederek $w\in[a,c)$ durumu için ispatı tamamladık. $w\in(c,b]$ olması durumu bir önceki duruma tamamen benzer şekilde ispat edilebilir. Şimdi $w=c$ durumunu araştıralım. Bu durumda (x_{n_k}) alt dizisinin $[a,c)$ ve $(c,b]$ aralıklarının en az birinde sonsuz sayıda terimi olduğu için bu alt dizinin $(x_{n_k})\uparrow c$ veya $(x_{n_k})\downarrow c$ olacak biçimde en az bir $(x_{n_{k_s}})$ alt dizisi mevcuttur. Bu durumlar tamamen benzer olduklarından sadece bir durumu incelemek yeterlidir. Kabul edelim ki $(x_{n_{k_s}})\uparrow c$ olacak biçimde $(x_{n_{k_s}})$ alt dizisi mevcuttur. Buradan

$$y(c-0)=\lim_{s\to\infty} y(x_{n_{k_s}})=0$$

eşitliği elde edilir.

Şimdi $y'(c-0)=0$ olduğunu da göstereceğiz. Bunun için

$$y(w)=\begin{cases} y(x), & x\in[a,c) \\ y(c-0), & x=c \end{cases}$$

fonksiyonunu tanımlayalım. Ortalama değer teoremi gereği her $s=0,1,2,\ldots$ için $0\le\alpha_s\le 1$ olacak şekilde öyle α_s reel sayısı vardır ki, bu sayılar için

$$y(x_{n_{k_s}})=y(c)+y'(\alpha_s x_{n_{k_s}}+(1-\alpha_s)c)(x_{n_{k_s}}-c)$$

eşitliği sağlanır. Sonuç olarak $y'(\alpha_s x_{n_{k_s}}+(1-\alpha_s)c)=0$ eşitliği elde edilir. Şimdi $s\to\infty$ iken $(x_{n_k})\uparrow c$ olduğunu dikkate alarak buradan $y'(c-0)=0$, yani $y'(c-0)=0$ elde ederiz. Bu da varlık ve teklik teoremine göre çelişkidir. İspat tamamlanmış oldu.

Teorem 2. $u(x)$ ve $\varphi(x)$ fonksiyonları (2) iki-aralıklı Sturm- Liouville denkleminin (3) ve (4) iletim koşullarını sağlayan lineer bağımsız çözümleri olsun. O halde bu çözümlerin sıfırları iç içe geçer, yani bu çözümlerden birinin ardışık iki sıfırı arasında diğer çözümün tam olarak bir tane sıfırı vardır.

İspat. $x_1,x_2\in[a,c)\cup(c,b]$ noktalarının $u(x)$ çözümünün ardışık sıfırları olduğunu varsayalım. $a\le x_1<x_2<c$, $c<x_1<x_2\le b$ ve $a\le x_1<c<x_2\le b$ durumlarını ayrı ayrı araştıracağız. İlk olarak $x_1,x_2\in[a,c)$ durumunu ele alalım. Aksini kabul edelim, yani kabul edelim ki $\varphi(x)$ fonksiyonunun (x_1,x_2) aralığında sıfırı yoktur. Genelliği bozmadan $u(x)$ ve

$\varphi(x)$ fonksiyonlarının her ikisinin de (x_1, x_2) aralığında pozitif olduğunu kabul edelim. $u(x_1) = 0$ ve $\forall x \in (x_1, x_2)$ için $u(x) > 0$ olduğundan

$$u'(x_1) = \lim_{h \downarrow 0} \frac{u(x_1 + h) - u(x_1)}{h} = \lim_{h \downarrow 0} \frac{u(x_1 + h)}{h} \geq 0 \tag{5}$$

eşitsizliği sağlanır. $u(x_1) = 0$ ve $u(x)$ aşikar olmayan çözüm olduğu için çözümün varlığı ve tekliği hakkında teorem gereği $u'(x_1)$ sıfıra eşit olamaz. O halde $u'(x_1) > 0$ olur. Benzer şekilde $u'(x_2) < 0$ olduğunu gösterebiliriz. Sonuç olarak

$$W(u, \varphi; x_1) := u(x_1)\varphi'(x_1) - u'(x_1)\varphi(x_1) = -u'(x_1)\varphi(x_1) < 0 \tag{6}$$

ve

$$W(u, \varphi; x_2) := u(x_2)\varphi'(x_2) - u'(x_2)\varphi(x_2) = -u'(x_2)\varphi(x_2) > 0 \tag{7}$$

elde edilir. Fakat $u(x)$ ve $\varphi(x)$ fonksiyonlarının Wronskianı $[x_1, x_2]$ aralığında işaret değiştiremez. Bu nedenle (6) ve (7) çelişir. Böylece $a \leq x_1 < x_2 < c$ durumu için ispat tamamlanmış olur. $c < x_1 < x_2 \leq b$ durumu için ispat tamamen benzer şekilde yapılır. Son olarak $a \leq x_1 < c < x_2 \leq b$ durumunu araştıralım. Genelliği bozmadan $u(x) > 0$ ve $\varphi(x) > 0$ olduğunu kabul edelim. $u(x)$ çözümü (x_1, x_2) aralığında pozitif olduğu, $u(x_1) = 0$ olduğu ve $u'(x_1) \neq 0$ olduğu için

$$u'(x_1) = \lim_{h \downarrow 0} \frac{u(x_1 + h) - u(x_1)}{h} = \lim_{h \downarrow 0} \frac{u(x_1 + h)}{h} > 0$$

elde edilir. Benzer biçimde $u'(x_2) < 0$ olduğunu ispat edebiliriz. Böylece

$$W(u, \varphi; x_2) := u(x_2)\varphi'(x_2) - u'(x_2)\varphi(x_2) = -u'(x_2)\varphi(x_2) > 0 \tag{8}$$

eşitsizliğini elde ederiz. (3) ve (4) iletim koşullarını kullanarak

$$\begin{aligned} W(u, \varphi; x_2) &:= W(u, \varphi; c+0) = u(c+0)\varphi'(c+0) - u'(c+0)\varphi(c+0) \\ &= u(c-0)\varphi'(c-0) - u'(c-0)\varphi(c-0) \\ &= W(u, \varphi; c-0) = W(u, \varphi; x_1) \\ &= -u'(x_1)\varphi(x_1) \end{aligned} \tag{9}$$

elde edilir. Ayrıca $u(x)$ ve $\varphi(x)$ fonksiyonlarını $\forall x \in [a, c) \cup (c, b]$ için pozitif olduklarını kabul ettiğimizden ve $u'(x_1) > 0$ olduğundan sonuncu eşitsizlikten

$$W(u, \varphi; x_2) < 0 \tag{10}$$

sonucu elde edilir. Fakat (8) ve (10) çelişmektedir. Böylece bir çelişki elde ettik. İspat tamamlandı.

Teorem 3. (3) ve (4) iletim koşullarını sağlayan iki-aralıklı (2) diferansiyel denkleminin aşikar olmayan çözümlerinin tüm sıfırları basittir.

İspat. Aksini kabul edelim. Yani aşikar olmayan bir $y(x)$ çözümünün basit olmayan bir x_0 sıfırının var olduğunu varsayalım. O halde $y(x_0) = y'(x_0) = 0$ elde edilir. İlk önce $x_0 \in [a,c)$ durumunu araştıralım. Bu durumda varlık ve teklik teoremi gereği $y(x)$ çözümü $[a,c)$-de özdeşlik olarak sıfıra eşit olur. Buradan ve geçiş şartlarından

$$y(c+0) = y(c-0) = 0$$
$$y'(c+0) = y'\left(c-0\right) + \alpha y\left(c-0\right) = 0$$

eşitlikleri elde edilir. Buradan ise yine varlık ve teklik teoremi gereği $y(x)$ çözümünün $(c,b]$ aralığında da özdeş olarak sıfıra eşit olduğu sonucu elde edilir. Yani $x_0 \in [a,c)$ durumu için ispat tamamlanmış olur. $x_0 \in (c,b]$ durumunda da tamamen benzer şekilde ispat yapılır.

3. Karşılaştırma Teoremi

Teorem 4. $q \in C[a,c-0] \oplus C[c+0,b]$ olduğunu varsayalım. Ayrıca kabul edelim ki, $z(x)$ fonksiyonu

$$z''(x) + q(x)z(x) = 0, \qquad x \in [a,c) \cup (c,b] \tag{11}$$

İki-aralıklı diferansiyel denklemin

$$Jz(c) = 0$$
$$Jz'(c) = \beta z(c-0) \tag{12}$$

iletişim şartlarını sağlayan herhangi bir aşikar olmayan çözümü olsun.

Ayrıca $z(a) = z(b) = 0$ olduğunu ve

$$\lim_{\varepsilon \uparrow 0} \int_a^{c-\varepsilon} (p-q)z^2 dx \geq 0 \quad , \qquad \lim_{\varepsilon \uparrow 0} \int_{c+\varepsilon}^{b} (p-q)z^2 dx \geq 0 \tag{13}$$

eşitsizliklerinin sağlandığını kabul edelim. O halde

$$y''(x) + p(x)y(x) = 0, \qquad x \in [a,c) \cup (c,b] \tag{14}$$

iki-aralıklı diferansiyel denkleminin

$$y(a)=0 \tag{15}$$

$$Jy(c)=0$$

$$Jy'(c)=\beta y(c-0) \tag{16}$$

şartlarını sağlayan aşikar olmayan her çözümü $(a,c)\cup(c,b]$ iki aralığında en az bir sıfıra sahiptir.

İspat. Eğer $y(x)$ ve $z(x)$ lineer bağımlı ise ispat aşikardır. Bu yüzden, $y(x)$ ve $z(x)$'in lineer bağımsız fonksiyonlar olduğu durum için ispat edeceğiz. Aksini kabul edelim. O halde $\forall x\in(a,c)\cup(c,b]$ için $y(x)\neq 0$ sağlanır. (11) ve (14) denklemlerinden $z(z''+qz)=0$ ve $\frac{z^2}{y}(y''+py)=0$ elde ederiz. Bu denklemlerden birini diğerinden çıkartarak

$$\frac{z(x)}{y(x)}\frac{d}{dx}W(y,z;x)=z^2(x)(p(x)-q(x)) \tag{17}$$

eşitliğini elde ederiz.

$y(a)=z(a)=0$ olduğundan $y'(a)\neq 0$ ve $z'(a)\neq 0$ 'dır. D'Hospital kuralını uygularsak

$$\lim_{x\to a}\frac{z(x)}{y(x)}=\frac{z'(a)}{y'(a)}\neq 0 \tag{18}$$

elde ederiz. (18)'i kullanarak ve $y,z\in C[a,c-0]\oplus C[c+0,b]$ olduğunu da hesaba katarak (17)'nin sol tarafının $[a,c)$ ve $(c,b]$ aralıklarında integrallenebilir olduğunu görürüz. Şimdi (17) eşitliğini $[a,c)$ ve $(c,b]$ aralıklarında parça parça integrallersek (18) ifadesini de göz önünde bulundurarak aşağıdaki

$$\begin{aligned}
&\lim_{\varepsilon\downarrow 0}\left(\frac{z(x)}{y(x)}W(y,z;x)\Big|_{c+\varepsilon}^{c-\varepsilon}-\frac{z(b)}{y(b)}W(y,z;b)-\frac{z(a+\varepsilon)}{y(a+\varepsilon)}W(y,z;a+\varepsilon)\right)\\
&-\lim_{\varepsilon\downarrow 0}\left(\int_a^{c-\varepsilon}\left(\frac{z(x)}{y(x)}\right)'W(y,z;x)dx+\int_{c+\varepsilon}^{b}\left(\frac{z(x)}{y(x)}\right)'W(y,z;x)dx\right)\\
&=\lim_{\varepsilon\downarrow 0}\left(\int_a^{c-\varepsilon}\big(p(x)-q(x)\big)\,z^2(x)dx+\int_{c+\varepsilon}^{b}\big(p(x)-q(x)\big)\,z^2(x)dx\right)
\end{aligned} \tag{19}$$

eşitliklerini buluruz. Buradan

$$\lim_{\varepsilon\downarrow 0}\frac{z(a+\varepsilon)}{y(a+\varepsilon)}W(y,z;a+\varepsilon)=\frac{z'(a)}{y'(a)}W(y,z;a) \tag{20}$$

elde edilir. $y(a)=z(a)=0$ olduğundan (19) eşitliği aşağıdaki formda yazılır.

$$\frac{z(x)}{y(x)}W(y,z;x)\Big|_{c+0}^{c-0}-\int_a^{c-0}\left(\frac{W(y,z;x)}{y(x)}\right)^2dx-\int_{c+0}^{b}\left(\frac{W(y,z;x)}{y(x)}\right)^2dx$$
$$=\int_a^{c-0}\big(p(x)-q(x)\big)\,z^2(x)dx+\int_{c+0}^{b}\big(p(x)-q(x)\big)\,z^2(x)dx \tag{21}$$

(12) ve (16) iletim koşullarını kullanarak

$$\frac{z(c+0)}{y(c+0)}=\frac{z(c-0)}{y(c-0)}=\frac{z(c-0)}{y(c-0)} \tag{22}$$

eşitlikleri bulunur. Ayrıca

$$W(y,z;c+0):=y(c+0)z'(c+0)-y'(c+0)z(c+0)$$
$$=y(c-0)z'(c-0)-y'(c-0)z(c-0)$$
$$=W(y,z;c-0)=W(y,z;c+0) \tag{23}$$

elde edilir. (21) , (22) ve (23) 'den

$$-\int_a^{c-0}\left(\frac{W(y,z;x)}{y(x)}\right)^2dx-\int_{c+0}^{b}\left(\frac{W(y,z;x)}{y(x)}\right)^2dx$$
$$=\int_a^{c-0}\big(p(x)-q(x)\big)\,z^2(x)dx+\int_{c+0}^{b}\big(p(x)-q(x)\big)\,z^2(x)dx\geq 0 \tag{24}$$

eşitliği elde edilir. $y(x)$ ve $z(x)$ lineer bağımsız olduğundan, sol taraf negatiftir. Böylece çelişki elde ettik. İspat tamamlandı.

Not. Teorem 4'de (13) koşulu daha da kısıtlayıcı olan

$$\lim_{\varepsilon\downarrow 0}\int_a^{c-\varepsilon}(p-q)z^2dx>0 \quad , \quad \lim_{\varepsilon\downarrow 0}\int_{c+\varepsilon}^{b}(p-q)z^2dx>0 \tag{25}$$

koşulu ile değiştirilirse daha güçlü sonuç elde edebiliriz. Bu durumda $y(x)$'in $(a,c)\cup(c,b)$ açık iki-aralığında bir sıfırı olması sonucunu elde edebiliriz. Bunu göstermek için aksini varsayalım, yani $\forall x\in(a,c)\cup(c,b)$ için $y(x)\neq 0$ olsun. O halde bir önceki teoremde $y(x)$ çözümünün $(a,c)\cup(c,b]$ aralığında bir sıfırı olması gerektiğine dayanarak $y(b)=0$ olduğunu elde ederiz. $y(x)$ aşikar olmayan çözüm ve $y(b)=0$ olduğundan $y'(b)\neq 0$'dır. Böylece

$$\lim_{x\to b}\frac{z(b)}{y(b)}=\frac{z'(b)}{y'(b)}$$

elde edilir. O halde daha önce yapılan işlemlerin benzeri yapılarak (24)'ün sol tarafının pozitif olduğunu elde ederiz. Yani çelişki elde ederiz.

4. Kaynaklar

Akdoğan, Z., Yakar, A., Demirci, M. 2019. Discontinuous fractional Sturm-Liouville problems with transmission conditions, Applied Mathematics and Computation, 1–10, 350.

Allahverdiev, B.P., Bairamov E. ve Ugurlu, E. 2013. Eigenparameter dependent Sturm–Liouville problems in boundary conditions with transmission conditions. Journal of Mathematical Analysis and Applications, 40(1):388–396, DOI: 10.1016/j.jmaa.2012.12.020.

Allahverdiev, B.P. ve Tuna, H. 2019. Eigenfunction expansion for singular Sturm-Liouville problems with transmission conditions. Electronic Journal of Differential Equations, 2019(3):1–10.

Aydemir, K., Olğar, H., Mukhtarov, O. Sh. ve Muhtarov, F. S. 2018. Differential operator equations with interface conditions in modified direct sum spaces, Filomat, 32:3 (2018), 921–931.

Cannon, J.R. ve Meyer, G.H. 1971. On diffusion in a fractured medium. SIAM Journal on Applied Mathematics, 20(3):434–448, .DOI: 10.1137/0120047.

Duhamel, J.M.C. 1843. Mémoire sur les vibrations d'une corde flexible, chargée d'unou de plusieurs curseurs. J. de lÉtcole Polytechnique.

Ergün, A. ve Amirov, R. 2020. Half inverse problem for diffusion operators with jump conditions dependent on the spectral parameter. Numerical Methods for Partial Differential Equations, DOI: 10.1002/num.22666.

Gaskell, R.E. 1942. A problem in heat conduction and an expansion theorem. American Journal of Mathematics, 64(1):447–455, DOI: 10.2307/2371696.

Grace, S.R. ve El-Morshedy, H.A. 2000. Oscillation criteria of comparison type for second order difference equations. Journal of Applied Analysis, 6(1):87–102, DOI: 10.1515/JAA.2000.87.

Kandemir, M. ve Mukhtarov, O.Sh. 2017. Nonlocal Sturm-Liouville problems with integral terms in the boundary conditions. Electronic Journal of Differential Equations, 2017(11):1–12, 2017.

Langer, R. E. 1932. A problem in diffusion or in the flow of heat for a solid in contact with a fluid. Tohoku Mathematical Journal, First Series, 35:260–275.

Mukhtarov, O. S., Olğar, H., Aydemir, K., & Jabbarov, I. S. (2018). Operator-pencil realization of one Sturm-Liouville problem with transmission conditions. *Applied and Computational Mathematics*, *17*(2), 284-294.

Mukhtarov, O., Olğar, H., & Aydemir, K. (2020). Eigenvalue problems with interface conditions. *Konuralp Journal of Mathematics*, *8*(2), 284-286.

Olğar, H., Mukhtarov, O. Sh., Aydemir, K. 2018. Some properties of eigenvalues and generalized eigenvectors of one boundary value problem, Filomat, 32:3, 911-920.

Şen, E. 2018. Computation of eigenvalues and eigenfunctions of a Schrödinger-type boundary-value-transmission problem with retarded argument. Mathematical Methods in the Applied Sciences, 41(16):6604–6610, DOI: 10.1002/mma.5178.

Sturm, C. 1836. Mémoire sur les équations différentielles linéaires du second ordre. Journal de Mathématiques Pures et Appliquées, 1:106–186.

Yakar, A., Akdogan, Z. 2017. On the fundamental solutions of a discontinuous fractional boundary value problem, Adv Differ Equ 2017, 378.