OHÜ Müh. Bilim. Derg. / OHU J. Eng. Sci.
ISSN: 2147-012X
Ömer Halisdemir Üniversitesi Mühendislik Bilimleri Dergisi, Cilt 6, Sayı 1, (2017), 290-301
Omer Halisdemir University Journal of Engineering Sciences, Volume 6, Number 1, (2017), 290-301

Araştırma / Research

LİNEER OLMAYAN KISMİ TÜREVLİ DENKLEMLERE HOMOTOPİ PERTÜRBASYON YÖNTEMİNİN UYGULAMASI

Durmuş DAĞHAN*, Halil Yavuz MART, Güldem YILDIZ

[1] *Matematik Bölümü, Fen Edebiyat Fakültesi, Ömer Halisdemir Üniversitesi, 51200, Niğde, Türkiye*

Geliş / Received: *13.05.2016*
Düzeltmelerin gelişi / Received in revised form: *13.06.2016*
Kabul / Accepted: *13.06.2016*

ÖZ

Bu çalışmada, lineer olmayan Drinfeld-Sokolov denklem sistemi ve Modifiye-Benjamin-Bona-Mahony denkleminin pertürbatif çözümleri, homotopi pertürbasyon yöntemi kullanılarak elde edilmiştir. Denklemlerin pertürbatif çözümleri için üç iterasyon yapılmıştır. Birinci iterasyonlar kullanılarak her iki denklem için de basit dallanma noktaları hesaplanmıştır. İkinci iterasyonlar için basit dallanma noktasının yalnızca Drinfeld-Sokolov denklem sisteminde olduğu görülmüştür.

Anahtar Kelimeler: Homotopi Pertürbasyon Yöntemi, Drinfeld-Sokolov denklem sistemi, modifiye-Benjamin Bona-Mahony denklemi

APPLICATION OF HOMOTOPY PERTURBATION METHOD TO NONLINEAR PARTIAL DIFFERENTIAL EQUATIONS

ABSTRACT

In this paper, Drinfeld-Sokolov system of equation and Modify-Benjamin-Bona-Mahony equations are studied perturbatively by using homotopy perturbation method. We made three iterations for the perturbative solutions of these equations. The simple bifurcation points are calculated by using the first iterations for both equations. The simple bifurcaton point is seen only in the Drinfeld-Sokolov system of equation for the second iteration.

Keywords: Homotopy perturbation method, Drinfeld-Sokolov equation, modify-Benjamin-Bona-Mahony equation

1. GİRİŞ

Drinfeld-Sokolov (DS) denklem sistemi ilk olarak Drinfeld ve Sokolov tarafından, Lax çiftine sahip lineer olmayan kısmi diferansiyel denklemlerin özel formu olarak tanımlanmıştır [1]. Denklemin fiziksel uygulaması ayrıntılı olarak Kaynak [2]'de ele alınmıştır. DS denklem sistemi ve çözümleri çeşitli araştırmacılar tarafından farklı yöntemler kullanılarak incelenmiştir [3-8]. DS denklem sistemi; u ve v bağımlı ve x ve t bağımsız değişkenler, a, b ve k keyfi sabitler olmak üzere

$$u_t + (v^2)_x = 0 \tag{1}$$
$$v_t + av_{xxx} + 3bu_xv + 3kuv_x = 0 \tag{2}$$

şeklinde verilir [8].

*Corresponding author. Tel.: +90 505 7055451; Fax: +90 388 225 0180; e-mail/e-posta: durmusdaghan@ohu.edu.tr

Farklı fiziksel sistemlerin matematiksel modellerinden biri olan Benjamin-Bona-Mahony (BBM) denklemi ilk defa Benjamin ve diğerleri tarafından [9] Korteweg-de Vries (KdV) denkleminin alternatif modeli

$$u_t + u_x + uu_x - u_{xxt} = 0 \tag{3}$$

biçiminde verilmiştir. Burada u bağımlı ve x ve t bağımsız değişkenlerdir. Literatürde (3) denklemi ile verilen BBM denkleminin farklı modifiye versiyonları mevcuttur [10-15]. Bu çalışmada, Kaynak [14]'te verilen α, β ve γ keyfi sabitler olmak üzere

$$u_t + \alpha u_x + \beta u^2 u_x - \gamma u_{xxt} = 0 \tag{4}$$

ile tanımlanan Modifiye-Benjamin-Bona-Mahony (MBBM) denklemi incelenecektir. Aslan [14], (4) denklemi ile verilen MBBM denkleminde $\left(G'/G\right)$-açılım metodu ile tam çözümlere ulaşmıştır.

Bu çalışma, Kaynak [15] ve [16]'da yapılan çalışmaların bir genişlemesi niteliğindedir. Kaynak [15,16]'da; DS ve MBBM denklemleri için sadece birinci iterasyonlar kullanılarak basit dallanma noktaları hesaplanmıştır. Bu iki çalışmadan farklı olarak, bu çalışmada her iki denklem için de üçüncü iterasyona kadar basit dallanma noktaları araştırılmıştır. Birinci iterasyonlar kullanılarak basit dallanma noktaları hesaplanmıştır. İkinci iterasyonlar sonucunda, DS denklem sistemi için basit dallanma noktası hesaplanmıştır. MBBM denkleminde ise ikinci iterasyon için basit dallanma noktasının olmadığı tespit edilmiştir. Üçüncü iterasyon sonucunda ise durumun ikinci iterasyonla aynı olduğu görülmüştür.

2. MATERYAL VE METOT

2.1. Homotopi Pertürbasyon Metot

A genel bir diferansiyel operatör, $f(\mathrm{r})$ analitik bir fonksiyon, $\Gamma : \Omega$ bölgesinin sınırı olsun. Lineer olmayan bir diferansiyel denklem

$$A(u) - f(r) = 0, \quad r \in \Omega \tag{5}$$

şeklinde verilsin. B sınır şartları ise

$$B(u) - \frac{\partial u}{\partial n} = 0, \quad r \in \Gamma$$

olsun [17]. A diferansiyel operatörü, L lineer ve N lineer olmayan operatörler olmak üzere (5) denklemi

$$L(u) + N(u) = f(r), \; r \in \Omega$$

biçiminde yazılır. Burada

$$v(r, p) = \Omega \times [0,1] \to R$$

şeklinde bir homotopi tanımlanır [17]. $p \in [0,1]$ ve u_0 sınır koşullarını sağlayan başlangıç yaklaşımı olmak üzere

$$H(v,p) = L(v) - L(u_0) + pL(u_0) + p[N(v) - f(r)] = 0 \tag{6}$$

eşitliği gerçeklenir [17]. (5) denkleminden

$$H(v,p) = L(v) - L(u_0) = 0 \tag{7}$$
$$H(v,1) = L(v) - N(v) - f(r) = 0 \tag{8}$$

denklemleri elde edilir [17]. p parametresinin 0'dan 1'e değişmesi, $v(r,p)$ fonksiyonun u_0'dan u_r'ye değişimini gerçekleştirir. Topolojide bu değişim, $L(v) - L(u_0)$ ve $L(v) + N(v) - f(r)$ homotopik olarak adlandırılır [17]. (7) ve (8) denklemlerinin çözümleri p cinsinden bir kuvvet serisi

$$v = v_0 + pv_1 + p^2 v_2 + \cdots \tag{9}$$

şeklinde ifade edilir. (5) ile verilen denklemin yaklaşık çözümü ise

$$u = \lim_{p \to 1} v = v_0 + v_1 + v_2 + \cdots \tag{10}$$

serisiyle elde edilir.

3. BULGULAR VE TARTIŞMA

3.1. Homotopi Pertürbasyon Metodun Uygulamaları

3.1.1. DS Sistemine Homotopi Pertürbasyon Metodun Uygulanması

(1) ve (2) numaralı denklemler ile verilen DS denklem sisteminde $\eta = x - \beta t,\ u = U(\eta),\ v = V(\eta)$ dönüşümü uygulanırsa, $U' = \frac{dU}{d\eta}$ ve $V' = \frac{dV}{d\eta}$ olmak üzere

$$-\beta U' + (V^2)' = 0 \tag{11}$$

$$\beta V' + aV''' - 3bU'V - 3kUV' = 0 \tag{12}$$

denklemleri elde edilir. (11) denklemi integrallenebilen bir denklem olup, eğer integre edilirse c keyfi bir integrasyon sabiti olmak üzere

$$U = \frac{1}{\beta}(V^2 + c) \tag{13}$$

sonucuna ulaşılır. (13) denklemi (12) denkleminde yerine yazılır ve integrali alınırsa

$$V'' + \frac{(\beta^2 - 3ck)}{\alpha\beta}V - \frac{(2b+k)}{\alpha\beta}V^3 + \frac{e}{\alpha\beta} = 0 \tag{14}$$

elde edilir. Burada e yeni bir integrasyon sabitidir. Bu çalışmada, (14) denkleminin çözümü için kaynak [18]'de kullanılan başlangıç şartlarından farklı yeni başlangıç şartları kullanılacaktır.

3.1.1.1. Birinci İterasyon

Homotopi Pertürbasyon metodu (14) denklemine: $p \in [0,1]$ olmak üzere

$$V'' + \frac{(\beta^2 - 3ck)}{\alpha\beta}V - \frac{(2b+k)}{\alpha\beta}pV^3 + \frac{e}{\alpha\beta} = 0, \qquad p \in [0,1] \tag{15}$$

şeklinde uygulanır. $p = 0$ olduğunda (15) denklemi lineer bir denkleme, $p = 1$ durumunda ise (14) denklemi ile verilen orijinal denkleme indirgenir. (15) ile verilen adi türevli denklemin çözümü

$$V = V_0 + pV_1 \tag{16}$$

biçiminde p'nin bir serisi şeklinde aranır. Bununla birlikte (15) denkleminde lineer terimin katsayısı ve sabit terim ise

$$\frac{(\beta^2 - 3ck)}{\alpha\beta} = \omega^2 + p\omega_1, \tag{17}$$

$$\frac{e}{\alpha\beta} = pc_1. \tag{18}$$

olacak biçimde p'nin bir serisi biçiminde yazılabilir [19-21]. (16), (17) ve (18) ifadeleri (15) denkleminde yerine yazılırsa

$$V_0'' + \omega^2 V_0 = 0, \tag{19}$$

$$V_1'' + \omega^2 V_1 + \omega_1 V_0 - \frac{(2b+k)}{\alpha\beta} V_0^3 + c_1 = 0 \tag{20}$$

denklemleri elde edilir. (19) denkleminin $V_0(0) = A$ ve $V_0'(0) = 0$ başlangıç şartı altında çözümü

$$V_0 = A\cos\omega\eta \tag{21}$$

şeklindedir. (21) denklemi ile verilen çözüm (20) denkleminde yerine yazılırsa

$$V_1'' + \omega^2 V_1 + \left(\omega_1 - \frac{3A^2(2b+k)}{4\alpha\beta}\right) A\cos\omega\eta - \frac{A^3(2b+k)}{4\alpha\beta}\cos 3\omega\eta + c_1 = 0 \tag{22}$$

denklemine ulaşılır. (22) denkleminde $\omega_1 - \dfrac{3A^2(2b+k)}{4\alpha\beta} = 0$ eşitliği sağlanmazsa, (22) denkleminin her çözümü bir seküler terim içerir. Böylece

$$\omega_1 = \frac{3A^2(2b+k)}{4\alpha\beta},$$

$$c_1 = 0$$

eşitlikleri gerçeklenir. (22) denklemindeki $\cos\omega\eta$ terimi elimine edilirse

$$V_1'' + \omega^2 V_1 - \frac{A^3(2b+k)}{4\alpha\beta}\cos 3\omega\eta + c_1 = 0 \tag{23}$$

denklemine ulaşılır. (23) denkleminin $V_1(0) = 0$ ve $V_1'(0) = 0$ başlangıç şartları altında çözümü

$$V_1 = -\frac{A^3(2b+k)}{32\alpha\beta\omega^2}(\cos 3\omega\eta - \cos\omega\eta)$$

olur. $p = 1$ için (15) denkleminin çözümü

$$V = A\cos\omega\eta - \frac{A^3(2b+k)}{32\alpha\beta\omega^2}(\cos 3\omega\eta - \cos\omega\eta) \tag{24}$$

şeklinde elde edilir [15,16]. Bu çözüm (13) ile verilen denklemde yerine yazılırsa

$$U = \frac{1}{\beta}\left(\left(A\cos\omega\eta - \frac{A^3(2b+k)}{32\alpha\beta\omega^2}(\cos 3\omega\eta - \cos\omega\eta)\right)^2 + c\right)$$

elde edilir. V ve U ile verilen çözümlerde $\eta = x - \beta t$ dönüşümü uygulanırsa (1) ve (2) denklemleri ile verilen DS sisteminin birinci iterasyon ile elde edilen pertürbatif çözümleri bulunmuş olur. Ayrıca, (17) ve (18) ile verilen denklemlerden

$$\omega^2 = \frac{(\beta^2 - 3ck)}{\alpha\beta} - \frac{3A^2(2b+k)}{4\alpha\beta} \tag{25}$$

$$e = 0$$

sonucuna ulaşılır. (25) ile verilen denklemden $\omega^2 \geq 0$ olduğu aşikardır. $c > \frac{1}{3k}\beta^2 - \frac{A^2}{4k}(2b+k)$ için ise (25) denkleminin çözümü yoktur. Çözüm:

$$c < \frac{1}{3k}\beta^2 - \frac{A^2}{4k}(2b+k)$$

eşitsizliği gerçeklendiğinde mümkün olup, bu çözüm

$$\omega = \sqrt{\frac{(\beta^2 - 3ck)}{\alpha\beta} - \frac{3A^2(2b+k)}{4\alpha\beta}}$$

şeklinde elde edilir. Böylece, basit dallanma

$$c = \frac{1}{3k}\beta^2 - \frac{A^2}{4k}(2b+k)$$

için meydana gelir [15,16]. Birinci iterasyonda yapılan uygulamada olduğu gibi ikinci iterasyon sonucunda basit dallanma noktası tespiti aşağıda gösterilmiştir.

3.1.1.2. İkinci İterasyon

İkinci iterasyon için, (15) ile verilen denklemin çözümü

$$V = V_0 + pV_1 + p^2V_2 \tag{26}$$

şeklinde aranır. (15) denkleminin lineer terimin katsayısı ve sabit terimi

$$\frac{(\beta^2 - 3ck)}{\alpha\beta} = \omega^2 + p\omega_1 + p^2\omega_2, \tag{27}$$

$$\frac{e}{\alpha\beta} = pc_1 + p^2c_2. \tag{28}$$

şeklinde p'nin bir serisi biçiminde yazılabilir. (26), (27) ve (28) ifadeleri (15) denkleminde yerlerine yazılırsa

$$V_0'' + \omega^2 V_0 = 0,$$

$$V_1'' + \omega^2 V_1 + \omega_1 V_0 - \frac{(2b+k)}{\alpha\beta}V_0^3 + c_1 = 0$$

$$V_2'' + \omega^2 V_2 + \omega_2 V_0 + \omega_1 V_1 - \frac{3(2b+k)}{\alpha\beta}V_0^2 V_1 + c_2 = 0$$

denklemleri elde edilir. Bu denklemlerin çözümleri için;

$$\omega_1 = \frac{3A^2(2b+k)}{4\alpha\beta},$$

$$\omega_2 = \frac{3A^4(2b+k)^2}{2^7\alpha^2\beta^2 w^2}$$

olmak üzere sırasıyla $V_0(0) = A,\ V_0'(0) = 0$ ve $V_i(0) = 0, V_i'(0) = 0\ \ (i = 1, 2)$ başlangıç koşulları kullanılırsa

$$V_0 = A\cos\omega\eta$$

$$V_1 = -\frac{A^3(2b+k)}{32\alpha\beta\omega^2}(\cos 3\omega\eta - \cos\omega\eta),$$

$$V_2 = \frac{A^5(2b+k)^2}{2^{10}\alpha^2\beta^2\omega^4}\left(\cos 5\omega\eta - \cos\omega\eta\right)$$

çözümlerine varılır. Bu çözümler $p = 1$ için (26) ile verilen denklemde yerlerine yazılırsa

$$V = A\cos\omega\eta - \frac{A^3(2b+k)}{32\alpha\beta\omega^2}(\cos 3\omega\eta - \cos\omega\eta) + \frac{A^5(2b+k)^2}{2^{10}\alpha^2\beta^2\omega^4}\left(\cos 5\omega\eta - \cos\omega\eta\right)$$

çözümüne ulaşılır. Bu çözüm ise (13) de yerine yazılırsa

$$U = \frac{1}{\beta}((A\cos\omega\eta - \frac{A^3(2b+k)}{32\alpha\beta\omega^2}(\cos 3\omega\eta - \cos\omega\eta) + \frac{A^5(2b+k)^2}{2^{10}\alpha^2\beta^2\omega^4}\left(\cos 5\omega\eta - \cos\omega\eta\right))^2 + c)$$

çözümüne ulaşılır [15]. V ve U ile verilen çözümlerde $\eta = x - \beta t$ dönüşümü uygulanırsa (1) ve (2) denklemleri ile verilen DS sisteminin ikinci iterasyon ile elde edilen pertürbatif çözümüne ulaşılır. (27) ve (28) ile verilen denklemler

$$\frac{(\beta^2 - 3ck)}{\alpha\beta} = \omega^2 + \frac{3A^2(2b+k)}{4\alpha\beta} + \frac{3A^4(2b+k)^2}{2^7\alpha^2\beta^2\omega^2} \qquad e = 0 \tag{29}$$

şeklinde yeniden yazılabilir. (29) denkleminden de açıkça görüleceği üzere $\omega^2 \geq 0$ olmalıdır.

$$c > \frac{-12A^4b^2 - 12A^4bk - 3A^4k^2 - 672A^2b\beta^2 - 336A^2k\beta^2 - 1120\beta^4}{1344k\beta^2}$$

durumunda (29) ile verilen denklemin çözümü yokken,

$$c < \frac{-12A^4b^2 - 12A^4bk - 3A^4k^2 - 672A^2b\beta^2 - 336A^2k\beta^2 - 1120\beta^4}{1344k\beta^2}$$

eşitsizliği gerçeklendiğinde (29) denkleminin çözümü

$$s = \alpha^2\beta^2(15A^4(2b+k)^2 + 48A^2(2b+k)(3ck - \beta^2) + 32(-3ck + \beta^2)^2)$$

olmak üzere

$$\omega = \pm(1/4\alpha\beta)\ \sqrt{-6(4ck + A^2(2b+k))\alpha\beta + 8\alpha\beta^3 \pm \sqrt{2}\sqrt{s}}$$

şeklinde elde edilir. Böylece, ikinci iterasyona göre

$$c = \frac{-12A^4b^2 - 12A^4bk - 3A^4k^2 - 672A^2b\beta^2 - 336A^2k\beta^2 - 1120\beta^4}{1344k\beta^2}$$

değerinde basit dallanma meydana gelir.

3.1.1.3. Üçüncü İterasyon

Üçüncü iterasyon için, (15) ile verilen denklemin çözümü

$$V = V_0 + pV_1 + p^2V_2 + p^3V_3$$

şeklinde aranır. (15) denkleminin lineer terimin katsayısı ve sabit terimi

$$\frac{(\beta^2 - 3ck)}{\alpha\beta} = \omega^2 + p\omega_1 + p^2\omega_2 + p^3\omega_3,$$
$$\frac{e}{\alpha\beta} = pc_1 + p^2c_2 + p^3c_3$$

şeklinde p'nin bir serisi biçiminde yazılabilir. Burada

$$\omega_1 = \frac{3A^2(2b+k)}{4\alpha\beta},$$
$$\omega_2 = \frac{3A^4(2b+k)^2}{2^7\alpha^2\beta^2w^2},$$
$$\omega_3 = 0$$

olmak üzere $V_0(0) = A,\ V_0'(0) = 0$ ve $V_i(0) = 0, V_i'(0) = 0\ \ (i = 1,2,3)$ başlangıç koşulları altında birinci ve ikinci iterasyonlar için yapılan işlemler tekrar edilirse, $p = 1$ için

$$V = A\cos\omega\eta - \frac{A^3(2b+k)}{32\alpha\beta\omega^2}(\cos 3\omega\eta - \cos\omega\eta) + \frac{A^5(2b+k)^2}{2^{10}\alpha^2\beta^2\omega^4}(\cos 5\omega\eta - \cos\omega\eta)$$
$$-\frac{A^7(2b+k)^3}{2^{15}\alpha^3\beta^3\omega^6}(\cos 7\omega\eta - 6\cos 3\omega\eta + 5\cos\omega\eta)$$

$$U = \frac{1}{\beta}[(A\cos\omega\eta - \frac{A^3(2b+k)}{32\alpha\beta\omega^2}(\cos 3\omega\eta - \cos\omega\eta) + \frac{A^5(2b+k)^2}{2^{10}\alpha^2\beta^2\omega^4}(\cos 5\omega\eta - \cos\omega\eta)$$
$$-\frac{A^7(2b+k)^3}{2^{15}\alpha^3\beta^3\omega^6}(\cos 7\omega\eta - 6\cos 3\omega\eta + 5\cos\omega\eta))]^2 + c)$$

çözümleri elde edilir [15]. V ve U ile verilen çözümlerde $\eta = x - \beta t$ dönüşümü uygulanırsa (1) ve (2) denklemleri ile verilen DS sisteminin üçüncü iterasyon ile elde edilen pertürbatif çözümüne ulaşılır. $\omega_3 = 0$ ve $e = 0$ ifadelerinden; üçüncü iterasyon sonunda dallanma noktasının ikinci iterasyon ile elde edilen dallanma noktası ile aynı olduğu sonucu çıkmaktadır.

3.1.2. MBBM Denklemine Homotopi Pertürbasyon Metodun Uygulanması

(4) numaralı denklem ile verilen MBBM denklemine $\eta = kx + \omega t, u = U(\eta)$ dönüşümü uygulanırsa

$$-\gamma k^2 \omega U''' + \beta k U^2 U' + (\omega + \alpha k)U' = 0 \tag{30}$$

şeklinde adi türevli denklem elde edilir. Bu denklem integre edilebilir bir denklem olup, bir kez integre edilirse; c keyfi bir integrasyon sabiti olmak üzere

$$U'' - \frac{(\omega + \alpha k)}{\gamma k^2 \omega} U - \frac{\beta}{3\gamma k \omega} U^3 - \frac{c}{\gamma k^2 \omega} = 0 \tag{31}$$

denklemine ulaşılır. Bu çalışmada, (31) denklemi için kaynak [22]'de kullanılan başlangıç şartlarından farklı yeni başlangıç şartları için pertürbatif çözümler elde edilecektir.

3.1.2.1. Birinci İterasyon

(31) numara ile verilen adi türevli denkleme homotopi pertürbasyon metodu uygulanırsa;

$$U'' - \frac{(\omega + \alpha k)}{\gamma k^2 \omega} U - \frac{\beta}{3\gamma k \omega} pU^3 - \frac{c}{\gamma k^2 \omega} = 0, \qquad p \in [0,1] \tag{32}$$

şeklinde bir denklem elde edilir. $p = 0$ durumunda (32) denklemi lineer bir denkleme, $p = 1$ durumunda ise orijinal denkleme indirgenecektir. Homotopi pertürbasyon tekniği gereği, (32) denkleminin çözümü

$$U = u_0 + pu_1 \tag{33}$$

şeklinde p'nin bir serisi, lineer terimin katsayısı ve sabit terim

$$-\frac{(\omega + \alpha k)}{\gamma k^2 \omega} = \sigma^2 + p\sigma_1, \tag{34}$$

$$-\frac{c}{\gamma k^2 \omega} = pc_1. \tag{35}$$

biçiminde p'nin bir serisi biçiminde yazılır. (33), (34) ve (35) denklemleri (32) denkleminde yerine yazılırsa

$$U_0'' + \sigma^2 U_0 = 0, \tag{36}$$

$$U_1'' + \sigma^2 U_1 + \sigma_1 U_0 - \frac{\beta}{3\gamma k \omega} U_0^3 + c_1 = 0 \tag{37}$$

denklemleri elde edilir. $U_0(0) = A$ ve $U_0'(0) = 0$ başlangıç şartları (36) ile verilen adi türevli denkleme uygulanırsa,

$$U_0 = A\cos\sigma\eta \tag{38}$$

çözümüne ulaşılır. (38) ile verilen çözüm (37) denkleminde yerine yazılırsa

$$U_1'' + \sigma^2 U_1 + \left(\sigma_1 - \frac{A^2\beta}{4\gamma k\omega} \right) A\cos\sigma\eta - \frac{A^3\beta}{12\gamma k\omega}\cos 3\sigma\eta + c_1 = 0 \tag{39}$$

denklemi elde edilir. (39) denkleminde

$$\sigma_1 - \frac{A^2\beta}{4\gamma k\omega} = 0$$

eşitliği gerçeklenmez ise (39) denkleminin her çözümü bir seküler terim içerir. Bu sebepten

$$\sigma_1 - \frac{A^2\beta}{4\gamma k\omega} = 0, \qquad c_1 = 0$$

eşitlikleri ve (39) denklemindeki $\cos\sigma\eta$ terimleri yok edilirse,

$$U_1'' + \sigma^2 U_1 - \frac{A^3\beta}{12\gamma k\omega}\cos 3\sigma\eta = 0$$

denklemi elde edilir. Bu denklemin çözümü $U_1(0) = 0$ ve $U_1'(0) = 0$ başlangıç şartıyla birlikte

$$U_1 = -\frac{A^3\beta}{96\gamma k\omega\sigma^2}(\cos 3\sigma\eta - \cos\sigma\eta)$$

şeklinde bulunur. $p = 1$ durumunda (33), (34) ve (35) denklemlerinden

$$U = A\cos\sigma\eta - \frac{A^3\beta}{96\gamma k\omega\sigma^2}(\cos 3\sigma\eta - \cos\sigma\eta)$$

$$\sigma^2 = -\frac{(\omega + \alpha k)}{\gamma k^2\omega} - \frac{A^2\beta}{4\gamma k\omega} \tag{40}$$

$$c = 0$$

elde edilir [15,16]. $\sigma^2 \geq 0$ olacağından $\alpha > -\left(\frac{A^2\beta}{4} + \frac{\omega}{k}\right)$ eşitsizliği gerçeklendiğinde (40) denkleminin çözümü yoktur. Fakat, $\alpha < -\left(\frac{A^2\beta}{4} + \frac{\omega}{k}\right)$ eşitsizliği gerçeklendiğinde denklemin çözümü

$$\sigma = \sqrt{-\frac{(\omega + \alpha k)}{\gamma k^2\omega} - \frac{A^2\beta}{4\gamma k\omega}}$$

şeklinde elde edilir. Böylece $\alpha = -\left(\frac{A^2\beta}{4} + \frac{\omega}{k}\right)$ noktası birinci iterasyondan basit dallanma noktası olarak bulunmuş olur [15,16].

3.1.2.2. İkinci İterasyon

İkinci iterasyon için (32) numara ile verilen denklemin çözümü

$$U = u_0 + pu_1 + p^2u_2 \tag{41}$$

şeklinde p'nin bir serisi olsun. Ayrıca, (32) denkleminde lineer terimin katsayısı ve sabit terim

$$-\frac{(\omega+\alpha k)}{\gamma k^2\omega}=\sigma^2+p\sigma_1+p^2\sigma_2 \tag{42}$$

$$-\frac{c}{\gamma k^2\omega}=pc_1+p^2c_2 \tag{43}$$

biçiminde p'nin bir serisi biçiminde yazılır. (41), (42) ve (43) ile verilen denklemler (32) denkleminde yerine yazılırsa

$$U_0''+\sigma^2U_0=0,$$
$$U_1''+\sigma^2U_1+\sigma_1U_0-\frac{\beta}{3\gamma k\omega}U_0^3+c_1=0$$
$$U_2''+\sigma^2U_2+\sigma_2U_0+\sigma_1U_1-\frac{\beta}{\gamma k\omega}U_0^2U_1+c_2=0$$

denklemleri elde edilir. Bu denklemlerin çözümleri için

$$\sigma_1=\frac{A^2\beta}{4\gamma k\omega}$$
$$\sigma_2=\frac{A^4\beta^2}{2^7 3\gamma^2k^2\omega^2\sigma^2}$$

olmak üzere $U_0(0)=A$ ve $U_0'(0)=0$ ve $i=1,2$ için $U_i(0)=0$, $U_i'(0)=0$ başlangıç koşulları kullanılırsa

$$U_0=A\cos\sigma\eta$$
$$U_1=-\frac{A^3\beta}{96\gamma k\omega\sigma^2}(\cos 3\sigma\eta-\cos\sigma\eta)$$
$$U_2=\frac{A^5B^2}{3^2 2^{10}\gamma^2k^2\omega^2\sigma^4}\left(\cos 5\sigma\eta-\cos\sigma\eta\right)$$

çözümlerine ulaşılır. $p=1$ için (41) den

$$U=A\cos\sigma\eta-\frac{A^3\beta}{3^1 2^5\gamma k\omega\sigma^2}(\cos 3\sigma\eta-\cos\sigma\eta)+\frac{A^5\beta^2}{3^2 2^{10}\gamma^2k^2\omega^2\sigma^4}\left(\cos 5\sigma\eta-\cos\sigma\eta\right)$$

elde edilir [15]. (42) ve (43) denklemlerinden

$$\sigma^2=-\frac{(\omega+\alpha k)}{\gamma k^2\omega}-\frac{A^2\beta}{4\gamma k\omega}-\frac{A^4\beta^2}{2^7 3\gamma^2k^2\omega^2\sigma^2}, \tag{44}$$
$$\mathrm{c}=0$$

gerçeklenir. (44) denkleminden çözüm

$$q=-1536A^4k^2w^2\beta^2\gamma^2+(384w^2\gamma+384kw\alpha\gamma+96A^2kw\beta\gamma)^2$$

olmak üzere

$$\sigma=\pm(-\frac{1}{2k^2\gamma}-\frac{\alpha}{2kw\gamma}-\frac{A^2\beta}{8kw\gamma}\pm\frac{\sqrt{q}}{768k^2w^2\gamma^2})^{1/2}$$

şeklinde verilir. Burada, basit dallanma meydana gelmemektedir.

3.1.2.3. Üçüncü İterasyon

Üçüncü iterasyon için (32) ile verilen denklemin çözümü

$$U = u_0 + pu_1 + p^2u_2 + p^3u_3$$

şeklinde p'nin bir serisi olsun. Ayrıca, (32) denkleminde lineer terimin katsayısı ve sabit terim

$$-\frac{(\omega+\alpha k)}{\gamma k^2\omega} = \sigma^2 + p\sigma_1 + p^2\sigma_2 + p^3\sigma_3 \tag{45}$$

$$-\frac{c}{\gamma k^2\omega} = pc_1 + p^2c_2 + p^3c_3 \tag{46}$$

biçiminde p'nin bir serisi biçiminde yazılır.

Birinci ve ikinci iterasyonlar için yapılan işlemler tekrar edilirse ve $U_0(0) = A$ ve $U_0'(0) = 0$ ve $i = 1,2,3$ için $U_i(0) = 0$, $U_i'(0) = 0$ başlangıç koşulları altında $p = 1$ için (32) denkleminin iteratif çözümü

$$U = A\cos\sigma\eta - \frac{A^3\beta}{3^1 2^5\gamma k\omega\sigma^2}(\cos 3\sigma\eta - \cos\sigma\eta) + \frac{A^5\beta^2}{3^2 2^{10}\gamma^2k^2\omega^2\sigma^4}\left(\cos 5\sigma\eta - \cos\sigma\eta\right)$$
$$-\frac{A^7\beta^3}{3^3 2^{15}\gamma^3k^3\omega^3\sigma^6}\left(\cos 7\sigma\eta - 6\cos 3\sigma\eta + 5\cos\sigma\eta\right)$$

şeklinde elde edilir [15].

$\sigma_3 = 0$ ve $c = 0$ ifadelerinden üçüncü iterasyon kullanılarak dallanma noktası hesabı anlamsız olup, davranış ikinci iterasyonla aynı olmaktadır. Dolayısıyla, üçüncü iterasyon için de basit dallanma meydana gelmemektedir.

4. SONUÇ

Bu çalışmada, homotopi pertürbasyon tekniği kullanılarak lineer olmayan kısmi türevli Drinfeld-Sokolov denklem sistemi ve Modifiye-Benjamin-Bona-Mahony denkleminin pertürbatif çözümleri elde edilmiş ve bu çözümler için üçer iterasyon yapılmıştır. Birinci iterasyonlar sonucunda her iki denklem için de basit dallanma noktaları verilmiştir. Drinfeld-Sokolov denklem sisteminin ikinci iterasyon ile çözümünde basit dallanmanın varlığı tespit edilmiştir. Modifiye-Benjamin-Bona-Mahony denklemi için elde edilen ikinci pertürbatif çözümde basit dallanmanın olmadığı görülmüştür. Üçüncü iterasyonlar sonunda ise dallanma noktalarının ikinci iterasyonlarla aynı olduğu sonucuna varılmıştır. Dört ve sonraki iterasyonlar için dallanma noktaları çalışılmışsa da bir sonuca varılamamıştır.

KAYNAKLAR

[1] GOKTAS, U. and HEREMAN, E., "Symbolic Computation of Conserved Densities for Systems of Nonlinear Evolution Equations", J. Symb. Comput., 24, 591-621, 1997.

[2] GURSES, M. and KARASU, A., "Integrable KdV Systems: Recursion Operators of Degree Four ", Phys. Lett. A., 251, 247-249, 1999.

[3] UĞURLU, Y. and KAYA, D., " Exact and numerical Solutions of Generalized Drinfeld-Sokolov Equations", Phys. Lett. A., 372, 2867-2873, 2008.

[4] SWEET, E., VAN GORDER, R.A., "Analytical Solutions to a Generalized Drinfel'd-Sokolov Equation Related To DSSH and KdV", Appl. Math. And Comput., 216, 2783-2791, 2010.

[5] SWEET, E., VAN GORDER, R.A., "Trigonometric and Hyperbolic Type Solutions to a Generalized Drinfel'd-Sokolov Equation", Appl. Math. and Comput., 217, 4147-4166, 2010.

[6] SWEET, E., VAN GORDER, R.A., "Exponential-Type Solutions to a Generalized Drinfeld-Sokolov Equation", Physica Scripta, 82, 1-11, 2010.

[7] SWEET, E., VAN GORDER, R.A., "Traveling Wave Solutions (u,v) to a Generalized Drinfel'd- Sokolov System Which Satisfy $u = a_1 v^m + a_0$", Appl. Math. and Comput., 218, 9911-9921, 2012.

[8] DAGHAN, D., YILDIZ, O., TOROS, S., "Comparison of (G'/G)-Methods for Finding Exact Solutions of The Drinfeld-Sokolov System", Mathematica Slovaca, 65, 607-632, 2015.

[9] BENJAMIN, T.B., BONA, J.L., MAHONY, J.J., "Model EquationsfFor Long Waves in Nonlinear Dispersive Systems", Philos Trans. R. Soc. London, Ser. A. 272, 47-48, 1972.

[10] WAZWAZ, A.M., HELAL, M.A., "Nonlinear Variants of The BBM Equation With Compact and Noncompact Physical Structures", Chaos Solit. and Fractals., 26, 767-776, 2005.

[11] NICKEL, J., "Elliptic Solutions to a Generalized BBM Equation", Phys. Lett. A., 364, 221-226, 2007.

[12] YUSUFOGLU, E., BEKİR, A., "The Tanh and The Sinecosine Methods For Exact Solutions of The MBBM and The Vakhnenko Equations", Chaos Solit. and Fractals., 38, 1126-1133, 2008.

[13] LAYENİ, O.P., AKİNOLA, A.P., "A New Hyperbolic Auxiliary Function Method and Exact Solutions of The MBBM Equation, Commun.", Nonlinear Sci. Numer. Simul. 15, 135-138, 2010. Corrigendum: Nonlinear Sci. Numer. Simul. 15, 2734, 2010.

[14] ASLAN, I., "Exact and Explicit Solutions to Some Nonlinear Evolution Equations by Utilizing the -(G'/G) Expansion Method", Appl. Math. and Comput., 215, 857-863, 2009.

[15] MART, H.Y., "Lineer Olmayan Kısmi Türevli Denklemlerin Çözümlerinde Analitik ve Nümerik Teknikler", N.Ü., FBE, Yüksek Lisans Tezi, Niğde, Türkiye, 2015.

[16] DAGHAN, D., MART, H.Y., YILDIZ, G., "Bifurcation Points for DS and MBBM Equations by Using the Homotopy Perturbation Method", 9th NAUN International Conference on Applied Mathematics Simulation Modelling (ASM'15), 78-82, Konya, Turkey, 2015.

[17] HE, JH., "Homotopy Perturbation Technique", Comp. Meth. Appl. Mech. Eng., 178, 257-262, 1999.

[18] ALIBEIKI, E., NEYRAMEH, A., "Application of Homotopy Perturbation Method to Non-linear Drinfel'd-Sokolov-Wilson Equation ", Middle-East Journal of Scientific Research, 10, 440-443, 2011.

[19] HE, J.H., "Modified Lindstedt-Poincare Methods for Some Strongly Nonlinear Oscillations.Part I: Expansion of a Constant", Int J Nonlinear Mech., 37, 309-314, 2002.

[20] HE, J.H., "Homotopy Perturbation Method For Bifurcation of Nonlinear Problems", Int J. Nonlinear Sci Numer Simul., 6, 207-208, 2005.

[21] HE, J.H., "Application of Homotopy Perturbation Method to Non-Linear Wave Equation", Chaos Soliton. Fract., 26, 695-700, 2005.

[22] ASGHARI, R., "Application of Homotopy Perturbation Method to The Modified BBM Equation", Middle-East Journal of Scientific Research, 10, 274-276, 2011.