

ÇİFT TARAFLI TİP II SANSÜRLENMİŞ ÖRNEKLEMLER İÇİN JONES VE FADDY' NİN ÇARPIK t DAĞILIMININ KONUM VE ÖLÇEK PARAMETRELERİNİN TAHMİNİ

M. S. Talha ARSLAN ^{1,*} Birdal ŞENOĞLU ²

¹ İstatistik Bölümü, Fen Edebiyat Fakültesi, Eskişehir Osmangazi Üniversitesi, 26480 Odunpazarı, Eskişehir, Türkiye

² İstatistik Bölümü, Fen Fakültesi, Ankara Üniversitesi, 06100 Tandoğan, Ankara, Türkiye

ÖZET

Bu çalışmada, çift taraflı Tip II sansürlenmiş (doubly Type II censored) örneklem için Jones ve Faddy' nin çarpık t (Jones and Faddy' s Skew t - JFST) dağılımının konum ve ölçek parametrelerinin en çok olabilirlik (maximum likelihood - ML) ve uyarlanmış en çok olabilirlik (modified maximum likelihood - MML) tahmin edicileri elde edilmiştir. Monte Carlo (MC) simülasyon çalışması kullanılarak ML ve MML tahmin edicilerinin etkinlikleri karşılaştırılmıştır. MC simülasyon çalışması, MML tahmin edicilerinin ML tahmin edicileri ile hemen hemen aynı etkinliğe sahip olduğunu göstermiştir. Çalışma sonucunda, odaklanılan nokta tahmin edicilerin etkinlikleri ise ML tahmin edicilerinin, etkinlikle beraber hesaplama zorlukları ele alındığında ise MML tahmin edicilerinin tercih edilmesi gerektiği belirlenmiştir.

Anahtar Kelimeler: JFST dağılımı, Tip II sansürleme, Uyarlanmış olabilirlik, Etkinlik, Monte Carlo simülasyonu

ESTIMATION FOR THE LOCATION AND THE SCALE PARAMETERS OF THE JONES AND FADDY'S SKEW t DISTRIBUTION UNDER THE DOUBLY TYPE II CENSORED SAMPLES

ABSTRACT

In this study, we obtain the maximum likelihood (ML) and the modified maximum likelihood (MML) estimators for the location and the scale parameters of the Jones and Faddy's Skew t (JFST) distribution based on the doubly Type II censored samples. Then, we use the Monte Carlo (MC) simulation study to compare the efficiencies of the ML and the MML estimators. The MC simulation study shows that, MML estimators have more or less same efficiency with the corresponding ML estimators. At the end of the study, it can be concluded that if we focus on the efficiencies of the estimators, we prefer to use ML estimators. However, if we focus on the computational difficulties together with the efficiencies of the estimators, we prefer to use MML estimators.

Keywords: JFST distribution, Type II censoring, Modified likelihood, Efficiency, Monte Carlo simulation

1. GİRİŞ

İstatistiksel çıkarımlar genellikle tam örneklem (complete samples) kullanılarak yapılmaktadır. Fakat örneklemin elde edilmiş şekline bağlı olarak bazı durumlarda sansürlenmiş örneklem (censored samples) kullanılması söz konusu olmaktadır. Sansürlenmiş örneklem genel olarak Tip I (Type I) ve Tip II (Type II) sansürlenmiş örneklem olarak isimlendirilir. Literatürde sansürlenmiş örneklemin kullanıldığı birçok çalışma mevcuttur. Bu çalışmaların çoğunluğu birimlerin yaşam sürelerinin incelendiği uygulamalı çalışmalardan oluşmaktadır.

Üstel, Normal, Lojistik, Log-normal dağılımları için farklı sansürleme türleri altında dağılım parametrelerinin tahmin edicileri Tiku [1-6] tarafından elde edilmiştir. Ayrıca, Tiku [7,8] deney

tasarımında Tip I ve Tip II sansürlenmiş örneklemelerin Normal dağılımdan geldiği varsayımı altında deneme etkilerinin tahmin edicileri ve bu tahmin edicilere dayalı test istatistiklerinin güçleri üzerinde çalışmıştır. Balakrishnan ve Mi [9] genelleştirilmiş ilerleyen tür Tip II (progressively Type II) sansürlenmiş örneklemeler için Normal dağılıma ilişkin konum ve ölçek parametrelerinin en çok olabilirlik (ML) tahmin edicilerinin var ve tek olduklarını göstermiştir. Senoglu ve Tiku [10] Normal dağılımdan gelmeyen sansürlenmiş örneklemeler için deney tasarımı model parametrelerinin tahmin edicileri ve bu tahmin edicilere dayalı test istatistiği üzerinde çalışmıştır. Wu, Lee ve Shen [11] çoklu Tip II (Multiply Type II) sansürlenmiş örneklemeler için Pareto dağılımının ölçek parametresinin tahmin edicisi olarak ağırlıklandırılmış moment (Weighted moment-WM) tahmin edicisini kullanmıştır.

Cristan [12] Tip I sansürlenmiş örneklemelerin karma dağılımdan geldiği varsayımı altında dağılım parametrelerinin ML tahmin edicilerini EM (Expectation Maximization) algoritmasını kullanarak elde etmiştir. Vaughan ve Tiku [13] Üstel dağılıma sahip sansürlenmiş iki örneklemin konum parametrelerinin eşitliğinin testi için istatistiksel bir test önermiştir. Balakrishnan ve Kateri [14] tam ve sansürlenmiş örneklemeler için Weibull dağılımının parametrelerinin ML tahmin edicilerinin var ve tek olduklarını göstermiştir. Sun, Zhou ve Wang [15] çift taraflı Tip II (doubly Type II) sansürlenmiş örneklemeler için iki parametrelili Üstel dağılımın ölçek parametresinin aralık tahminini elde etmiştir. Balakrishnan ve Dembinska [16] kesikli dağılıma sahip sağdan sansürlenmiş ilerleyen tür Tip II örneklemeler için istatistiksel çıkarımlar yapmıştır. Deng ve Pandey [17] sansürlenmiş örneklemeler için negatif değerler almayan dağılımların kantil fonksiyonunun tahmininde parametrik olmayan yeni bir yöntem kullanmıştır.

Saffari, Adnan ve Greene [18] sansürlenmiş örneklemeler için Hurdle Poisson regresyon model parametrelerinin ML tahmin edicilerini elde etmiştir. He ve Nagaraja [19], Tip II sansürlenmiş örneklemeler için Downton' ın iki değişkenli üstel dağılımının parametrelerinin Fisher bilgi matrisini elde etmiştir. Ortega, Cordeiro ve Lemonte [20] sansürlenmiş örneklemeler için hata terimlerinin Beta Birnbaum-Saunders dağılımına sahip olduğu regresyon model parametrelerinin ML tahmin edicilerini elde etmiştir. Lopez ve Saint-Pierre [21] iki değişkenli rasgele sansürlenmiş örneklemeler için regresyon model parametrelerinin M tahmin edicilerini elde etmiştir. Basak ve Balakrishnan [22] ilerleyen tür Tip II sansürlenmiş örneklemeler için üç parametrelili Gamma dağılımının parametrelerini ML yöntemini kullanarak tahmin etmiştir. Saffari, Adnan ve Greene [23] sağdan sansürlenmiş örneklemeler için Hurdle Genelleştirilmiş Poisson Regresyon model parametrelerinin ML tahmin edicilerini elde etmiştir. Balakrishnan ve Davies [24] Üstel dağılıma sahip Tip I sansürlenmiş örneklemelere dayalı Pitman yakınlık sonuçlarını karşılaştırmıştır. Rastogi ve Tripathi [25] hibrit (hybrid) sansürlenmiş örneklemeler için dağılım parametrelerinin ML tahmin edicilerini elde etmiştir. Pradhan ve Kundu [26] ilerleyen tür Tip II sansürlenmiş örneklemeler için Brinbaum-Saunders dağılımının parametrelerini ML yöntemi kullanarak tahmin etmiştir. Cramer ve Balakrishnan [27] ilerleyen tür hibrit Tip I (Type I progressively hybrid) sansürlenmiş örneklemeler için iki parametrelili Üstel dağılımın parametrelerini ML yöntemini kullanarak tahmin etmiştir. Matos, Lachos, Balakrishnan ve Labra [28] sansürlenmiş örneklemeler için doğrusal ve doğrusal olmayan karma etkili modellerin parametrelerini ML yöntemini kullanarak tahmin etmiştir.

Literatür taramasından görüleceği üzere örneklemelerin modellenmesinde birçok istatistiksel dağılım kullanılmıştır. Örneğin, simetrik verilerin dağılımlarının modellenmesinde Normal dağılım, simetrik ve kalın kuyruklu verilerin dağılımlarının modellenmesinde Normal dağılıma alternatif olarak t dağılımı ve çarpık verilerin dağılımlarının modellenmesinde ise çarpık Normal dağılım ya da çarpık t dağılımı gibi dağılımlar kullanılmıştır. Normal dağılıma alternatif olarak Basso, Lachos, Cabral, ve Ghosh [29], Flecher, Naveau ve Allard [30], Garcia, Gomez-Deniz ve Vazquez-Polo [31], Mameli [32], Mudholkar ve Hutson [33] çarpık Normal dağılımın değişik türlerini verilerin modellenmesinde kullanmıştır. Jones ve Faddy [34] t dağılımına alternatif olarak farklı bir çarpık t (JFST) dağılımı önermiştir. Acitas, Senoglu ve Arslan [35], Acitas, Kasap, Senoglu ve Arslan [36], Acitas, Kasap, Senoglu ve Arslan [37], Arslan [38], Arslan ve Senoglu [39] çarpık t dağılımının farklı türlerini verilerin modellenmesinde

kullanmışlardır. Acitas, Kasap, Senoglu ve Arslan [36] tam örneklem durumunda JFST dağılımı için bir adım M tahmin edicisini ele almıştır.

Literatürdeki çalışmalardan farklı olarak bu çalışmada JFST dağılımının tercih edilmesinin nedeni simetrik veya çarpık birçok farklı verinin dağılımının modellenmesinde kullanılabilecek esnek bir dağılım olmasıdır. Bu çalışmada, Tip II sansürlenmiş örneklem için JFST dağılımının konum ve ölçek parametrelerinin ML ve uyarlanmış en çok olabilirlik (modified maximum likelihood – MML) tahmin edicileri elde edilmiştir. JFST dağılımına ilişkin elde edilen olabilirlik denklemlerinde konum ve ölçek parametreleri doğrusal olmayan ifadeler içerisinde yer almaktadır. Dolayısıyla konum ve ölçek parametrelerinin tahmin edicileri kapalı formda elde edilememektedir. Konum ve ölçek parametresinin tahmin edicileri kapalı formda elde edilemediği için olabilirlik denklemlerinin çözümünde Newton-Raphson (NR) yöntemi kullanılmıştır, ayrıca bkz. Arslan [38] ve Arslan ve Senoglu [39]. Olabilirlik denklemlerinin NR yardımıyla elde edilen çözüm değerleri konum ve ölçek parametrelerinin ML tahmin değerleri olarak adlandırılmaktadır.

JFST dağılımının çarpık ve simetrik durumları için sırasıyla Tip II (tek taraflı) ve çift taraflı Tip II sansürleme uygulanmıştır. Çift taraflı Tip II sansürleme şeması Tip II sansürlemenin genel hali olarak görülmektedir. Çift taraflı Tip II sansürleme altında elde edilen çıkarımlarda soldan sansür sayısı (r_1) veya sağdan sansür sayısı (r_2) sıfır olarak alındığında Tip II sansürleme için çıkarımlar elde edilebilmektedir.

Bu çalışmanın geri kalanı şu şekilde düzenlenmiştir. Öncelikle, JFST dağılımı tanıtılmış ve dağılım ile ilgili betimleyici bilgiler verilmiştir. Daha sonra, çift taraflı Tip II sansürlü örneklem için JFST dağılımının konum ve ölçek parametrelerinin ML ve MML tahmin edicileri elde edilmiştir. Ayrıca, MC simülasyon çalışması kullanılarak elde edilen tahmin edicilerin etkinlikleri karşılaştırılmıştır. Son olarak, bu çalışmada elde edilen bulgular sonuç ve tartışma kısmında verilmiştir.

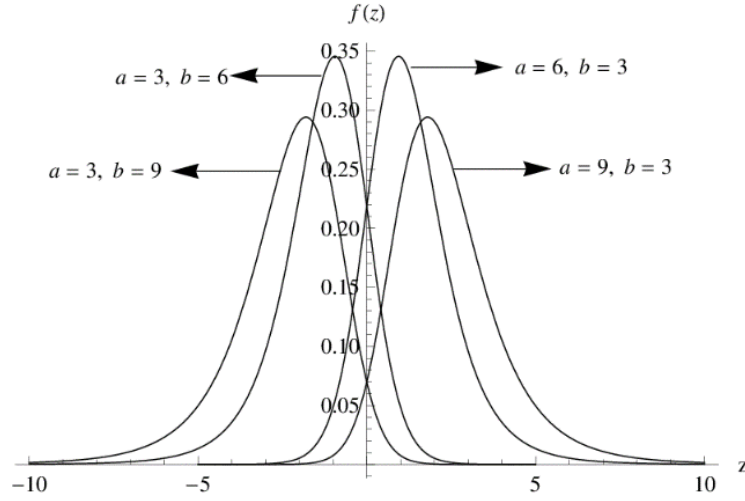
2. JFST DAĞILIMI

JFST dağılımı Jones ve Faddy [34] tarafından t dağılımına alternatif olarak önerilmiştir. Konum parametresi μ , ölçek parametresi σ ve şekil parametreleri a, b olan JFST (μ, σ, a, b) dağılımına ilişkin olasılık yoğunluk fonksiyonu (o.y.f.) (1)' de verildiği gibidir:

$$f_{JFST}(z) = \sigma^{-1} C_{a,b}^{-1} \left\{ 1 + \frac{z}{\sqrt{v+z^2}} \right\}^{a+0.5} \left\{ 1 - \frac{z}{\sqrt{v+z^2}} \right\}^{b+0.5}, \quad z, \mu \in R, \quad a, b, \sigma \in R^+. \quad (1)$$

Burada, $C_{a,b}^{-1} = 2^{v-1} B(a, b) \sqrt{v}$, $v = a + b$ ve $z = \frac{(y-\mu)}{\sigma}$ olarak ifade edilir. Ayrıca, $B(\cdot, \cdot)$ beta fonksiyonunu göstermektedir.

JFST dağılımı şekil parametrelerinin aldığı değerlere bağlı olarak sağa çarpık, sola çarpık veya simetrik olabilmektedir. $a > b$ için JFST dağılımı sağa çarpık, $a < b$ için JFST dağılımı sola çarpıktır. Ayrıca, şekil parametrelerinin eşit ($a=b$) olması halinde JFST dağılımı $2a$ serbestlik dereceli t dağılımına dönüşmektedir. Bunun ile birlikte, $a \rightarrow \infty$ ve $b \rightarrow \infty$ durumunda JFST dağılımı Normal dağılıma yakınsamaktadır, bkz. [36]. Şekil 1' de farklı şekil parametreleri değerleri için JFST dağılımının o.y.f.'nin grafikleri verilmiştir.



Şekil 1. Farklı şekil parametreleri için JFST dağılımının o.y.f.' nun grafikleri

JFST(0, 1, a, b) dağılımının birinci ve ikinci momentleri sırasıyla,

$$E[Z] = \frac{(a-b)\sqrt{(a+b)} \Gamma(a-\frac{1}{2})\Gamma(b-\frac{1}{2})}{2 \Gamma(a)\Gamma(b)} \quad (2)$$

ve

$$E[Z^2] = \frac{(a+b)(a-b)^2 + a-1+b-1}{4(a-1)(b-1)} \quad (3)$$

olarak verilir. Ayrıca, farklı şekil parametreleri için JFST dağılımının çarpıklık ve basıklık değerleri için bkz. Acitas, Kasap, Senoglu ve Arslan [36].

3. ÇİFT TARAFLI TİP II SANSÜRLENMİŞ ÖRNEKLEMLER İÇİN JFST DAĞILIMININ KONUM VE ÖLÇEK PARAMETRELERİNİN TAHMİNİ

Bu bölümde, çift taraflı Tip II sansürlenmiş örneklem için JFST dağılımının konum ve ölçek parametrelerinin ML ve MML tahmin edicileri elde edilmiştir. Çift taraflı Tip II sansürlenmiş örneklem için olabilirlik fonksiyonu (likelihood function-L):

$$L = [F(z_{r_1+1})]^{r_1} \prod_{i=r_1+1}^{n-r_2} f(z_i) [1 - F(z_{n-r_2})]^{r_2} \quad (4)$$

şeklinde genel formda yazılabilir. Burada, r_1 soldan (alttan) sansürleme sayısını ve r_2 sağdan (üstten) sansürleme sayısını göstermektedir. Ayrıca, $F(\cdot)$ dağılım fonksiyonu ve $z_i = (y_i - \mu)/\sigma$, $i = r_1 + 1, \dots, n - r_2$ dir. $r_1 = 0$ veya $r_2 = 0$ olarak alındığında Tip II sansürlenmiş örneklem için olabilirlik fonksiyonu elde edilir. Bu çalışmada JFST dağılımının çarpık ve simetrik durumları için çift taraflı Tip II sansürlenmiş örneklem altında konum ve ölçek parametrelerinin ML ve MML tahmin edicileri elde edilmiştir.

3.1. Konum ve Ölçek Parametrelerinin ML Tahmini

Eşitlik (4)' te verilen olabilirlik fonksiyonunun logaritması alınarak log-olabilirlik (log likelihood- $\ln L$) fonksiyonu elde edilir. $\ln L$ fonksiyonunun μ ve σ parametrelerine göre türevleri alınarak sıfıra eşitlenir. Elde edilen denklemler olabilirlik denklemleri olarak adlandırılır. Olabilirlik denklemleri μ ve σ için çözülerek $\hat{\mu}$ ve $\hat{\sigma}$ tahmin değerleri elde edilir. $\ln L$ fonksiyonunun μ ve σ için türevleri alındığında sırasıyla (5) ve (6)' da verilen olabilirlik denklemleri elde edilir:

$$\frac{\partial \ln L}{\partial \mu} = -\frac{(a+0.5)}{\sigma} \sum_{i=r_1+1}^{n-r_2} \frac{v}{(v+z_i^2)^{\frac{3}{2}}+z_i(v+z_i^2)} + \frac{(b+0.5)}{\sigma} \sum_{i=r_1+1}^{n-r_2} \frac{v}{(v+z_i^2)^{\frac{3}{2}}-z_i(v+z_i^2)} - \frac{r_1 f(z_{r_1+1})}{\sigma F(z_{r_1+1})} + \frac{r_2 f(z_{n-r_2})}{\sigma (1-F(z_{n-r_2}))} = 0 \quad (5)$$

ve

$$\frac{\partial \ln L}{\partial \sigma} = -\frac{n-r_1-r_2}{\sigma} - \frac{(a+0.5)}{\sigma} \sum_{i=r_1+1}^{n-r_2} Z_i \left(\frac{v}{(v+z_i^2)^{\frac{3}{2}}+z_i(v+z_i^2)} \right) + \frac{(b+0.5)}{\sigma} \sum_{i=r_1+1}^{n-r_2} Z_i \left(\frac{v}{(v+z_i^2)^{\frac{3}{2}}-z_i(v+z_i^2)} \right) - Z_{r_1+1} \frac{r_1 f(z_{r_1+1})}{\sigma F(z_{r_1+1})} + Z_{n-r_2} \frac{r_2 f(z_{n-r_2})}{\sigma (1-F(z_{n-r_2}))} = 0. \quad (6)$$

Olabilirlik denklemleri doğrusal olmayan ifadeler içerdiğinden konum ve ölçek parametrelerin ML tahmin değerleri elde edilirken iteratif yöntemlere ihtiyaç duyulmaktadır. Dolayısıyla, (5) ve (6) denklemlerinin çözümleri NR yöntemi yardımı ile bulunabilir. Burada, NR yöntemi ile (5) ve (6)' da verilen denklemlerin kökleri bulunurken iterasyonun başlangıç değerlerinin belirlenmesi gerekmektedir. Bu çalışmada başlangıç değerleri olarak konum ve ölçek parametrelerinin MML tahmin değerleri kullanılmıştır. Ayrıca, durdurma kriteri olarak, $\varepsilon = 1 \times 10^{-4}$ olarak alınmıştır.

İteratif yöntemler kullanılırken bazen köke yakınsamama, yanlış köke yakınsama ya da birden fazla kökün olması gibi problemler ile karşılaşılabilir. Bu tür problemler olabilirlik denklemlerinin çözümünde zorluklar çıkarmaktadır.

3.2. Konum ve Ölçek Parametrelerinin MML Tahmini

ML tahminleri elde edilirken iteratif yöntemlerden kaynaklı oluşan problemler ile karşılaşmamak için Tiku [2, 3] MML yöntemini önermiştir. MML tahmin edicileri elde edilirken ilk olarak; olabilirlik denklemleri sıra istatistikleri cinsinden yeniden (7) ve (8) şeklinde yazılır:

$$\frac{\partial \ln L}{\partial \mu} = -\frac{(a+0.5)}{\sigma} \sum_{i=r_1+1}^{n-r_2} \frac{v}{(v+z_{(i)}^2)^{\frac{3}{2}}+z_{(i)}(v+z_{(i)}^2)} + \frac{(b+0.5)}{\sigma} \sum_{i=r_1+1}^{n-r_2} \frac{v}{(v+z_{(i)}^2)^{\frac{3}{2}}-z_{(i)}(v+z_{(i)}^2)} - \frac{r_1 f(z_{(r_1+1)})}{\sigma F(z_{(r_1+1)})} + \frac{r_2 f(z_{(n-r_2)})}{\sigma (1-F(z_{(n-r_2)}))} = 0 \quad (7)$$

ve

$$\frac{\partial \ln L}{\partial \sigma} = -\frac{n-r_1-r_2}{\sigma} - \frac{(a+0.5)}{\sigma} \sum_{i=r_1+1}^{n-r_2} Z_{(i)} \left(\frac{v}{(v+z_{(i)}^2)^{\frac{3}{2}}+z_{(i)}(v+z_{(i)}^2)} \right) - Z_{(r_1+1)} \frac{r_1 f(z_{(r_1+1)})}{\sigma F(z_{(r_1+1)})} + \frac{(b+0.5)}{\sigma} \sum_{i=r_1+1}^{n-r_2} Z_{(i)} \left(\frac{v}{(v+z_{(i)}^2)^{\frac{3}{2}}-z_{(i)}(v+z_{(i)}^2)} \right) + Z_{(n-r_2)} \frac{r_2 f(z_{(n-r_2)})}{\sigma (1-F(z_{(n-r_2)}))} = 0. \quad (8)$$

Doğrusal olmayan terimler belirlenir. (7) ve (8)' de yer alan doğrusal olmayan ifadeler;

$$g_1(z_{(i)}) = \frac{v}{(v+z_{(i)}^2)^{\frac{3}{2}}+z_{(i)}(v+z_{(i)}^2)}, \quad g_2(z_{(i)}) = \frac{v}{(v+z_{(i)}^2)^{\frac{3}{2}}-z_{(i)}(v+z_{(i)}^2)},$$

$$g_3(z_{(r_1+1)}) = \frac{f(z_{(r_1+1)})}{F(z_{(r_1+1)})} \text{ ve } g_4(z_{(n-r_2)}) = \frac{f(z_{(n-r_2)})}{1-F(z_{(n-r_2)})}$$

olarak tanımlanmıştır. Doğrusal olmayan terimler sıra istatistiklerinin beklenen değerleri etrafında Taylor serisine açılır ve serinin ilk iki terimi kullanılarak doğrusal formda (9)' da verilen şekilde yazılır:

$$g_1(z_{(i)}) \cong \alpha_{1i} - \beta_{1i}z_{(i)}, g_2(z_{(i)}) \cong \alpha_{2i} - \beta_{2i}z_{(i)},$$

$$g_3(z_{(r_1+1)}) \cong \alpha_{3r_1+1} - \beta_{3r_1+1}z_{(r_1+1)} \text{ ve } g_4(z_{(n-r_2)}) \cong \alpha_{4n-r_2} - \beta_{4n-r_2}z_{(n-r_2)}. \quad (9)$$

Burada;

$$\beta_{1i} = \frac{v[3t_{(i)}\sqrt{v+t_{(i)}^2}+v+3t_{(i)}^2]}{[(v+t_{(i)}^2)^{3/2}+t_{(i)}(v+t_{(i)}^2)]^2}, \beta_{2i} = \frac{v[3t_{(i)}\sqrt{v+t_{(i)}^2}-v-3t_{(i)}^2]}{[(v+t_{(i)}^2)^{3/2}-t_{(i)}(v+t_{(i)}^2)]^2},$$

$$\beta_{3r_1+1} = \frac{f'(t_{(r_1+1)})}{F(t_{(r_1+1)})} - \left(\frac{f(t_{(r_1+1)})}{F(t_{(r_1+1)})}\right)^2, \beta_{4n-r_2} = \frac{f'(t_{(n-r_2)})}{1-F(t_{(n-r_2)})} - \left(\frac{f(t_{(n-r_2)})}{1-F(t_{(n-r_2)})}\right)^2,$$

$$\alpha_{1i}=g_1(t_{(i)}) + t_{(i)}\beta_{1i}, \alpha_{2i}=g_2(t_{(i)}) + t_{(i)}\beta_{2i}, \alpha_{3r_1+1} = \frac{f(t_{(r_1+1)})}{F(t_{(r_1+1)})} + t_{(r_1+1)}\beta_{3r_1+1}$$

ve

$$\alpha_{4n-r_2} = \frac{f(t_{(n-r_2)})}{1-F(t_{(n-r_2)})} + t_{(n-r_2)}\beta_{4n-r_2}$$

olarak bulunur. (9)' da verilen doğrusal ifadeler kullanılarak olabilirlik denklemleri yeniden düzenlenir.

Yeni denklemler uyarlanmış olabilirlik denklemleri olarak adlandırılır. Uyarlanmış olabilirlik denklemleri (10) ve (11)' de verildiği şekilde yazılır:

$$\frac{\partial \ln L^*}{\partial \mu} = -\frac{(a+0.5)}{\sigma} \sum_{i=r_1+1}^{n-r_2} (\alpha_{1i} - \beta_{1i}z_{(i)}) + \frac{(b+0.5)}{\sigma} \sum_{i=r_1+1}^{n-r_2} (\alpha_{2i} - \beta_{2i}z_{(i)})$$

$$- \frac{r_1}{\sigma} (\alpha_{3r_1+1} - \beta_{3r_1+1}z_{(r_1+1)}) + \frac{r_2}{\sigma} (\alpha_{4n-r_2} - \beta_{4n-r_2}z_{(n-r_2)}) = 0 \quad (10)$$

ve

$$\frac{\partial \ln L^*}{\partial \sigma} = -\frac{n-r_1-r_2}{\sigma} - \frac{(a+0.5)}{\sigma} \sum_{i=r_1+1}^{n-r_2} z_i (\alpha_{1i} - \beta_{1i}z_{(i)}) + \frac{(b+0.5)}{\sigma} \sum_{i=r_1+1}^{n-r_2} z_i (\alpha_{2i} - \beta_{2i}z_{(i)})$$

$$- \frac{r_1}{\sigma} z_{r_1+1} (\alpha_{3r_1+1} - \beta_{3r_1+1}z_{(r_1+1)}) + \frac{r_2}{\sigma} z_{n-r_2} (\alpha_{4n-r_2} - \beta_{4n-r_2}z_{(n-r_2)}) = 0. \quad (11)$$

Uyarlanmış olabilirlik denklemleri (10) ve (11)' in çözülmesi ile MML tahmin edicileri (12)' de verildiği şekilde elde edilir:

$$\hat{\mu}_{MML} = K + D\hat{\sigma}_{MML} \text{ ve } \hat{\sigma}_{MML} = \frac{B+\sqrt{B^2+4AC}}{2A}. \quad (12)$$

Burada,

$$A = n - r_1 - r_2,$$

$$m = \sum_{i=r_1+1}^{n-r_2} [(a + 0.5)\beta_{1i} - (b + 0.5)\beta_{2i}] + r_1\beta_{3r_1+1} + r_2\beta_{4n-r_2},$$

$$K = \frac{\sum_{i=r_1+1}^{n-r_2} [(a+0.5)\beta_{1i} - (b+0.5)\beta_{2i}]y_{(i)}}{m} + \frac{r_1\beta_{3r_1+1}y_{(r_1+1)} + r_2\beta_{4n-r_2}y_{(n-r_2)}}{m},$$

$$D = \frac{\sum_{i=r_1+1}^{n-r_2} [(b+0.5)\alpha_{2i} - (a+0.5)\alpha_{1i}]}{m} - \frac{r_1\alpha_{3r_1+1} + r_2\alpha_{4n-r_2}}{m},$$

$$B = \sum_{i=r_1+1}^{n-r_2} [(b + 0.5)\alpha_{2i} - (a + 0.5)\alpha_{1i}](y_{(i)} - K) - r_1\alpha_{3r_1+1}(y_{(r_1+1)} - K) + r_2\alpha_{4n-r_2}(y_{(n-r_2)} - K)$$

ve

$$C = \sum_{i=r_1+1}^{n-r_2} [(a + 0.5)\beta_{1i} - (b + 0.5)\beta_{2i}](y_{(i)} - K)^2 + r_1\beta_{3r_1+1}(y_{(r_1+1)} - K)^2 + r_2\beta_{4n-r_2}(y_{(n-r_2)} - K)^2$$

olarak tanımlanmıştır. $\hat{\sigma}_{MML}$ ' in paydasındaki $2A$ ifadesi $2\sqrt{A(A-1)}$ ile değiştirilerek yan düzeltmesi yapılmıştır.

Dikkat edilmelidir ki, çift taraflı Tip II sansürlenmiş örneklem durumunda elde edilen ML ve MML tahmin edicilerinde $r_1 = 0$ ve $r_2 = 0$ olarak alındığında tam örneklem için ML ve MML tahmin edicileri elde edilir.

4. MONTE CARLO SİMÜLASYONU

Bu bölümde, MC simülasyonu kullanılarak ML ve MML tahmin edicilerinin etkinlikleri karşılaştırılmıştır. Simülasyon çalışması boyunca $\mu = 0$ ve $\sigma = 1$ olarak alınmıştır. Simülasyonda farklı örneklem hacimleri ($n = 10, 15, 20$) kullanılmıştır. JFST dağılımının simetrik olduğu $a = b = 3$ ve $a = b = 15$ durumlarda sağdan ve soldan $[|0.5+n(0.1)|]$ değerinde sansürleme yapılmıştır. JFST dağılımının çarpık olduğu $a=3, b=6$ ve $a=3, b=9$ durumlarda soldan $[|0.5+n(0.1)|]$ değerinde sansürleme yapılmıştır. Başka bir ifade ile; JFST dağılımının çarpık ve simetrik durumları için sırasıyla Tip II ve çift taraflı Tip II sansürleme uygulanmıştır. Tüm simülasyonlar $N = [100,000/n]$ tekrar ile gerçekleştirilmiştir. Burada, $[|\cdot|]$ tam değer fonksiyonu olarak tanımlanmıştır.

Tahmin edicilerin oransal etkinlikleri (relative efficiency-RE) (13) eşitliği kullanılarak

$$RE = \frac{MSE(\hat{\theta}_{MML})}{MSE(\hat{\theta}_{ML})} \quad (13)$$

şeklinde hesaplanmıştır. Ayrıca, hata kareler ortalaması (Mean Square Error-MSE) değerleri (14)' de verilen

$$MSE(\hat{\theta}) = Var(\hat{\theta}) + [Bias(\hat{\theta})]^2 \quad (14)$$

eşitliği kullanılarak hesaplanmıştır. Burada; $Bias(\cdot)$ ilgilenilen parametre için simülasyon sonucunda elde edilen tahmin değerlerinin ortalaması ile parametrenin gerçek değeri arasındaki farkı göstermektedir. $Var(\cdot)$ ise simülasyon sonucunda ilgilenilen parametre için elde edilen tahmin değerlerinin varyansını göstermektedir. Tip II sansürlenmiş örneklem için $JFST(\mu, \sigma, a, b)$ dağılımının μ ve σ parametrelerinin ML ve MML tahmin edicilerinin simülasyon ile elde edilmiş yan (bias) ve MSE değerleri Tablo 1' de verilmiştir.

Tablo 1. $\hat{\mu}$ ve $\hat{\sigma}$ ' nın MC simülasyonu yardımıyla elde edilmiş yan ve MSE değerleri

			$\hat{\mu}$					$\hat{\sigma}$					
			MML		ML			MML		ML			
r_1	r_2	n	Yan	MSE	Yan	MSE	RE	Yan	MSE	Yan	MSE	RE	
$a=b=3$	1	1	10	-0.003	0.132	-0.003	0.131	1.008	-0.085	0.131	0.088	0.093	1.409
	1	1	15	-0.003	0.090	-0.002	0.090	1.000	-0.049	0.079	0.071	0.064	1.234
	2	2	20	-0.002	0.064	-0.002	0.064	1.000	-0.042	0.052	0.038	0.044	1.182
$a=b=15$	1	1	10	0.007	0.108	0.007	0.108	1.000	-0.037	0.094	0.078	0.072	1.301
	1	1	15	-0.001	0.077	-0.002	0.077	1.000	-0.020	0.065	0.061	0.054	1.204
	2	2	20	0.001	0.053	0.001	0.053	1.000	-0.014	0.041	0.021	0.035	1.171
$a=3, b=6$	1	0	10	-0.008	0.191	0.097	0.187	1.021	-0.077	0.105	0.049	0.076	1.382
	1	0	15	-0.005	0.127	0.064	0.125	1.016	-0.050	0.063	0.032	0.051	1.235
	2	0	20	-0.007	0.098	0.042	0.095	1.011	-0.043	0.045	0.011	0.037	1.216
	5	0	50	-0.002	0.036	0.022	0.036	1.000	-0.017	0.016	0.010	0.015	1.067
$a=3, b=9$	1	0	10	-0.009	0.376	0.153	0.354	1.062	-0.071	0.104	0.025	0.078	1.333
	1	0	15	-0.006	0.246	0.096	0.235	1.047	-0.040	0.061	0.020	0.050	1.220
	2	0	20	-0.001	0.182	0.062	0.176	1.034	-0.036	0.041	0.001	0.037	1.108
	5	0	50	-0.001	0.068	0.025	0.067	1.015	-0.018	0.016	0.002	0.015	1.067

Tablo 1 incelendiğinde,

Konum parametresi için;

JFST dağılımının simetrik ya da çarpık olduğu durumlarda, ML ve MML tahmin edicilerinin neredeyse yansız çıktığı söylenebilir. Ayrıca örneklem hacmi arttıkça her iki tahmin edici içinde MSE değerlerinin azaldığı görülmektedir.

JFST dağılımının simetrik olduğu $a=b=3$ için küçük örneklem hacimlerinde, ML tahmin edicisinin MML' e göre çok az da olsa etkin olduğu fakat örneklem hacminin artması ile ML ve MML tahmin edicilerinin etkinliklerinin eşit olduğu söylenebilir. JFST dağılımının Normal dağılıma yakınsadığı değerler $a=b=15$ için tüm örneklem hacimlerinde, ML ve MML tahmin edicilerinin etkinliklerinin eşit olduğu Tablo 1' den görülmektedir.

JFST dağılımının çarpık olduğu $a=3$ ve $b=6,9$ için küçük örneklem hacimlerinde, ML tahmin edicisinin MML' e göre daha etkin olduğu fakat örneklem hacminin artması ile ML ve MML tahmin edicilerinin etkinlikleri arasındaki farkın azaldığı söylenebilir. JFST dağılımı çarpıklaştıkça küçük örneklem hacimlerinde MML tahmin edicinin yansızlık özelliğini koruduğu fakat çok azda olsa etkinliğinin azaldığı Tablo 1' den görülmektedir.

Ölçek parametresi için;

JFST dağılımının simetrik ya da çarpık olduğu durumlarda, ML ve MML tahmin edicilerinin küçük örneklem hacimlerinde az da olsa yanlı çıktıkları fakat örneklem hacmi arttıkça yan miktarlarının azaldığı söylenebilir. Ayrıca örneklem hacmi arttıkça her iki tahmin edici içinde MSE değerlerinin azaldığı görülmektedir.

JFST dağılımının simetrik olduğu $a=b=3$ ve $a=b=15$ için küçük örneklem hacimlerinde, ML tahmin edicisinin MML' e göre daha etkin olduğu fakat örneklem hacminin artması ile ML ve MML tahmin edicilerinin etkinlikleri arasındaki farkın azaldığı Tablo 1' den görülmektedir.

JFST dağılımının çarpık olduğu $a=3$ ve $b=6,9$ için küçük örneklem hacimlerinde, ML tahmin edicisinin MML' e göre daha etkin olduğu fakat örneklem hacminin artması ile ML ve MML tahmin edicilerinin etkinlikleri arasındaki farkın azaldığı söylenebilir.

Ayrıca, JFST dağılımının çarpık olduğu büyük örneklem hacimleri ($n>100$) için gerçekleştirilen MC simülasyonu sonucunda konum ve ölçek parametresinin ML ve MML tahmin edicilerinin etkinliklerinin eşit olduğu görülmüş fakat Tablo1' de verilmemiştir.

5. SONUÇ VE TARTIŞMA

Bu çalışmada çift taraflı Tip II sansürlenmiş örneklem için JFST dağılımının konum ve ölçek parametrelerinin ML ve MML tahmin edicileri elde edilmiştir. Ayrıca, MC simülasyonu kullanılarak ML ve MML tahmin edicilerinin etkinlikleri karşılaştırılmış ve küçük örneklem hacimlerinde MML tahmin edicisinin neredeyse ML tahmin edicisi kadar etkin çıktığı ve büyük örneklem hacimlerinde ise ML ve MML tahmin edicilerinin etkinliklerinin eşit olduğu görülmüştür.

Bu çalışma sonucunda, ML tahmin değerleri elde edilirken karşılaşılabilecek hesaplama zorluklarından kaçınmak için iteratif yöntemlere ihtiyaç duymayan ve örneklem hacmi arttıkça ML ile aynı sonuçları veren MML tahmin edicilerinin kullanılabilceği gösterilmiştir.

KAYNAKLAR

- [1] Tiku, M. L. A Note on Estimating the Location and Scale Parameters of the Exponential Distribution. Aust. J. Stat. 1967a; 9: 49-54.
- [2] Tiku, M. L. Estimating the Mean and Standard Deviation from a Censored Normal Sample. Biometrika 1967b; 54: 155-165.
- [3] Tiku, M. L. Estimating the Parameters of Normal and Logistic Distributions from Censored Samples. Aust. J. Stat. 1968a; 10: 64-74.
- [4] Tiku, M. L. Estimating the Parameters of Log-Normal Distribution from Censored Samples. Amer. Stat. Assn. 1968b; 63: 134-140.
- [5] Tiku, M. L. Estimating the Mean and Standard Deviation from Progressively Censored Normal Samples. J. Indian Agric. Stat. 1968c; 20: 20-25.
- [6] Tiku, M. L. Estimating the Means and Standard Deviation from Two Censored Normal Samples. Biometrika 1971; 58: 241-242.
- [7] Tiku, M. L. Testing Group Effects from Type II Censored Normal Samples in Experimental Design. Biometrics 1973; 29: 25-33.
- [8] Tiku, M. L. Estimating and Testing Group Effects from Type I Censored Normal Samples. Commun. Stat. – Theor. Meth. 1977; 6(15): 1485-1501.
- [9] Balakrishnan, N., ve Mi, J. Existence and Uniqueness of the MLEs for Normal Distribution based on General Progressively Type-II Censored Samples. Statistics & Probability Letters 2003; 64: 407-414.
- [10] Senoglu, B., ve Tiku, M. L. Censored and Truncated Samples in Experimental Design Under Non-Normality. Statistical Methods 2004; 6(2): 173-199.

- [11] Wu, J.W., Lee, W.C., ve Shen, S.C. Computatioanl Comparison of Prediction Future Lifetime of Electronic Components with Pareto Distribution based on Multiply Type II Censored Samples. *Applied Mathematics and Computation* 2007; 374-406.
- [12] Cristan, A. C. Using the EM algorithm for Inference in Mixture of Distributions with Censored but Partially Identifiable Data. *Computational Statistics & Data Analysis* 2007; 51: 2769-2781.
- [13] Vaughan, D. C., ve Tiku, M. L. Testing the Equality of Location Parameters of Exponential Populations from censored samples. *Commun. Stat.-Theor. Meth.* 1993; 22: 2567-2581.
- [14] Balakrishnan, N., ve Kateri, M. On the Maximum Likelihood Estimation of Parameters of Weibull Distribution based on Complete and Censored Data. *Statistics and Probability Letters* 2008; 78: 2971-2975.
- [15] Sun, X., Zhou, X., ve Wang, J. Confidence Intervals for the Scale Parameter of Exponential Distribution based on Type II Doubly Censored Samples. *Journal of Statistical Planning and Inference* 2008; 138: 2045-2058.
- [16] Balakrishnan, N., ve Dembinska, A. Progressively Type-II Right Censored Order Statistics from Discrete Distributions. *Journal of Statistical Planning and Inference* 2008;138: 845-856.
- [17] Deng, J., ve Pandey, M. D. Cross Entropy Quatile Function Estimation from Censored Samples Using Partial Probability Weighted Moments. *Journal of Hydrology* 2008; 363: 18-31.
- [18] Saffari, S. E., Adnan, R., ve Greene, W. Parameter Estimation on Hurdle Poisson Regression Model with Censored Data. *Jurnal Teknologi* 2012; 189-198.
- [19] He, Q., ve Nagaraja, H. Fisher Information in Censored Samples form Downton's Bivariate Exponential Distribution. *Journal of Statistical Planning and Inference* 2012; 142: 1888-1898.
- [20] Ortega, E. M., Cordeiro, G. M., ve Lemonte, A. J. A Log-Linear Regression Model for the Beta-Birnbaum-Saunders Distribution with Censored Data. *Computational Statistics and Data Analysis* 2012; 56: 698-718.
- [21] Lopez, O., ve Saint-Pierre, P. Bivariate Censored Regression Relying on a New Estimator of the Joint Distribution Function. *Journal of Statistical Planning and Inference* 2012; 142: 2440-2453.
- [22] Basak, I., ve Balakrishnan, N. Estimation for Three-Parameter Gamma Distribution Based on Progressively Censored Data. *Statistical Methodology* 2012; 9: 305-319.
- [23] Saffari, S. E., Adnan, R., ve Greene, W. Investigating the Impact of Excess Zeros on Hurdle-Generalized Poisson Regression Model with Right Censored Count Data. *Statistica Neerlandica* 2013; 67: 67-80.
- [24] Balakrishnan, N., ve Davies, K. F. Pitman Closeness Results for Type-I Censored Data from Exponential Distribution. *Statistics and Probability Letters* 2013; 83: 2693-2698.
- [25] Rastogi, M. K., ve Tripathi, Y. M. Estimation Using Hybrid Censored Data from a Two-Parameter Distribution with Bathtub Shape. *Computational Statistics and Data Analysis* 2013; 67: 268-281.
- [26] Pradhan, B., ve Kundu, D. Inference and Optimal Censoring Schemes for Progressively Censored Birnbaum-Saunders Distribution. *Journal of Statistical Planning and Inference* 2013; 143: 1098-1108.

- [27] Cramer, E., ve Balakrishnan, N. On some Exact Distributional Results Based on Type-I Progressively Hybrid Censored Data from Exponential Distributions. *Statistical Methodology* 2013; 10: 128-150.
- [28] Matos, L. A., Lachos, V. H., Balakrishnan, N., ve Labra, F. V. Influence Diagnostics in Linear and Nonlinear Mixed-Effects Models with Censored Data. *Computational Statistics and Data Analysis* 2013; 57: 450-464.
- [29] Basso, R.M., Lachos, V.H., Cabral, C.R.B ve Ghosh P. Robust mixture modeling on scale mixtures of skew-normal distributions. *Computational Statistics and Data Analysis* 2010; 54: 2926-2941.
- [30] Flecher, C., Naveau, P. ve Allard, D. Estimating the closed skew-normal distribution parameters using weighted moments. *Statistics and Probability Letters* 2009; 79: 1977-1984.
- [31] Garcia, V.J., Gomez-Deniz, E. ve Vazquez-Polo, F.J. A new skew generalization of the normal distribution: Properties and applications. *Computational Statistics and Data Analysis* 2010; 54: 2021-2034.
- [32] Mameli, V. The Kumaraswamy skew-normal distribution. *Statistics and Probability Letters* 2015; 104: 75-81.
- [33] Mudholkar, G.S. ve Hutson, A.D. The epsilon-skew-normal distribution for analyzing near-normal data. *Journal of Statistical Planning and Inference* 2009; 83: 291-309.
- [34] Jones, M.C. ve Faddy, M.J. A skew extension of the t-distribution, with applications. *J.R. Stat. Soc. Ser. B* 2003; 65: 159-174.
- [35] Acitas, S., Senoglu, B. ve Arslan, O. Alpha-Skew Generalized t distribution. *Revista Colombiana de Estadística* 2015; 38(2): 353-370.
- [36] Acitas, S., Kasap, P., Senoglu, B., ve Arslan, O. One-step M-estimators: Jones and Faddy's skewed t-distribution. *Journal of Applied Statistics* 2013; 40(7): 1545-1560.
- [37] Acitas, S., Kasap, P., Senoglu, B. ve Arslan, O. Robust estimation with the skew t2 distribution. *Pakistan Journal of Statistics* 2013; 29(4): 409-430.
- [38] Arslan, M.S.T. Tam ve Sansürlü Örneklemeler için Deney Tasarımı Model Parametrelerinin Dayanıklı Tahmini, Doktora Tezi, Eskişehir Osmangazi Üniversitesi, Eskişehir, Türkiye, 2015.
- [39] Arslan, T. ve Senoglu B. Statistical Inference for the Location Model when the Distribution of the Error Terms is Jones and Faddy's Skew t : Type II Censored Samples. *International Conference on Trends and Perspectives in Linear Statistical Inference (LINSTAT'16)*; August 22-25 2016; Istanbul, Turkey: pp. 28