Int. J. Pure Appl. Sci. 9(1);197-208 (2023)

IJPAS
ijpas@munzur.edu.tr
ISSN: 2149-0910

Research article/Araştırma makalesi
DOI:10.29132/ijpas.1269744

Bulanık Topolojik Uzayların Toplamları Üzerine

Arife Atay[1]*, Farah Alşibli[2]
[1]*Dicle Üniversitesi, Fen Fakültesi, Matematik Bölümü, Diyarbakır, Türkiye*
[2]*Dicle Üniversitesi, Fen Bilimleri Enstitüsü, Matematik Anabilim Dalı, Diyarbakır, Türkiye*
arifea@dicle.edu.tr, farahsalih1990@gmail.com
Makale gönderme tarihi:23.03.2023, Makale kabul tarihi:30.05.2023

Öz

Tamamen ikili değerlendirmeye dayanan bir matematiksel modelleme olan klasik mantıkta her değer için sadece iki durum vardır, 1 sembolünün verildiği ve doğru anlamına gelen ilk durum ile 0 sembolünün verildiği ve yanlış anlamına gelen ikinci durum. Ancak gerçek bundan daha geniştir ve yalnızca 0 ve 1 olmak üzere iki duruma bağlı olmayabilir. Bu nedenle, yaklaşık veya spesifik olmayan bilgileri temsil etme problemini çözmek için genel çerçeveyi sağlayan yeni bir mantığa ihtiyaç duyulmuştur. Bulanık mantık adı verilen bu mantık ilk olarak 1965 yılında İranlı bilim adamı Lutfi Zadeh, tarafından ortaya atılmıştır. Bulanık mantık, sıcak, soğuk, ılık, az, çok, gibi deyimler ve belirsiz ifadeler aracılığıyla tümdengelim üzerine kuruludur. Çalışma boyunca, bulanık mantığın klasik mantığın bir genişlemesi olduğu sonucuna varılmıştır. Klasik mantık, üyelik derecesi $\{0,1\}$ kümesi olduğunda, bulanık mantığın özel bir durumudur. Bulanık mantık sadece kümeler teorisinde değil, yapay zekâda, gelişmiş elektronik cihazlarda, endüstriyel kontrolörlerde ve hatta günlük hayatımızda büyük öneme sahiptir. Bu çalışmada başlangıç olarak bulanık küme, bulanık küme türleri ve bunlarla ilgili önemli cebirsel işlemler ile bulanık topolojik uzayların tanıtılması ve özelliklerinin incelenmesi konu başlıklarına yer verilmiştir. Sonrasında bulanık topolojik uzayların toplamları üzerinde, açık kümeler, kaplı kümeler, iç, kapanış, taban, komşuluklar ve süreklilik gibi ifadeler tanımlanmıştır. Tanımlanan bu topolojik toplamlar için elde edilen bazı sonuçlardan bahsedilmiştir. Bu çalışmadan sonra incelenmesi planlanan araştırma alanı hakkında okuyucu sonuçlar başlığı altında bilgilendirilmiştir.

Anahtar Kelimeler: Bulanık kümeler, bulanık topoloji, topolojik toplam

On Sum of Fuzzy Topological Spaces

Abstract

In classical logic, which is purely a mathematical modeling based on binary evaluation, there are only two cases for each value, the first case where the symbol 1 is given and means true, and the second case where the symbol 0 is given and means false. But the truth is broader than that and may not depend solely on two states 0 and 1. Therefore, a new logic was needed that provides the general framework to solve the problem of representing approximate or nonspecific information. This logic, called fuzzy logic, was first put forward by Iranian scientist Lutfi Zadeh in 1965. Fuzzy logic is based on deduction through idioms such as hot, cold, warm, less, more, and indefinite expressions. Throughout the study, it is concluded that fuzzy logic is an extension of classical logic. Classical logic is a special case of fuzzy logic, when the membership degree is $\{0,1\}$ set, Fuzzy logic has great importance not only in set theory, but also in artificial intelligence, advanced electronic devices, industrial controllers and even in our daily life. In this study, initially fuzzy set, fuzzy set types and important algebraic operations related to them, introducing fuzzy topological spaces and examining their properties are given. Then, on the sums of fuzzy topological spaces, expressions such as open sets, covered sets, interior, closure, base, neighborhoods and continuity are defined. Some results obtained for these defined topological sums are mentioned. After this study, the reader was informed about the research area planned to be examined under the heading of conclusions.

Keywords: Fuzzy sets, fuzzy topology, topological sum.

GİRİŞ

Klasik mantıkla ifade edilemeyen bazı problemlerin varlığı ve aynı zamanda bilimsel gelişmeler, matematikçileri yeni matematiksel modeller ve araçlar kullanmaya yöneltmiştir. Bu tür problemlere

Int. J. Pure Appl. Sci. 9(1);197-208 (2023)

IJPAS
ijpas@munzur.edu.tr
ISSN: 2149-0910

Research article/Araştırma makalesi
DOI:10.29132/ijpas.1269744

çözüm bulmak için matematik alanında birçok teori sunulmuştur. Bu nedenle matematikçiler sürekli olarak yeni teoriler üretme ihtiyacı duymuşlardır. Bu teorilerden biri, 1965 yılında Zadeh (Zadeh, 1965) tarafından ortaya atılan bulanık küme kavramıdır. Bulanık küme teorisi, uzman sistemler, karar verme, modelleme, sosyal bilimler, tıbbi teşhis vb. alanlarda yaygın olarak kullanılmaktadır. Birçok farklı alanda kullanılmasının yanı sıra COVİD-19 hastalarının belirlenmesinde de uygulama alanlarına sahiptir. Son dönemde tüm insanlığın yakından takip ettiği bulanık küme teorisi üzerine matematik alanında da pek çok çalışma bulunmaktadır ve bu birçok araştırmacının ilgisini çekmektedir.

Bulanık küme teorisine dayanarak, 1968'de Chang (Chang, 1968) tarafından bir bulanık topoloji tanımı verildi. Ancak bu tanımla sabit fonksiyonlar sürekli olamamaktadır. Bu nedenle, Chang'ın tanımından farklı olarak, sabit fonksiyonları da sürekli kılacak daha doğal bir bulanık topoloji tanımı 1976'da Lowen (Lowen, 1976) tarafından verildi. Chang, bulanık küme teorisini topolojiye uyguladığından beri, birçok topolojik kavram bulanık bir ortamda tanıtıldı (Ming ve Ming 1980, Ying-ming ve Mao-kang (1998), Shostak, (1996), Shostak, (1989), Palaniappan, (2002)). Bulanık kümelerle ilgili güncel çalışmalardan biri (Al-shami ve Mhemdi, 2023) adlı bir makaledir. Bu makalede, "(m,n)-Fuzzy kümeler" adı verilen ortoçiftler (ayrık küme çiftleri) bulanık kümeler için genelleştirilmiş bir çerçeve sunulmaktadır. (m,n)-Fuzzy kümeler için bazı işlemler verilmiş ve karakterize edilmiştir. Daha sonra esnek hesaplamada geniş bir çalışma alanına sahip olan toplama operatörleri yöntemi (m,n)-Fuzzy kümeler yardımıyla genişletilmiştir.

Bu çalışmada, ön bilgi olarak, bulanık küme teorisindeki bazı temel tanımları ve sonuçları veriyoruz. Bu ön bilgileri verdikten sonra bulanık topolojinin tanımını veriyoruz. 2010 yılında A. Atay (Atay, 2010) tarafından topolojik uzayların toplamı, 2020 yılında ise Al-shami ve diğerleri (Al-shami vd., 2020) tarafından esnek (soft) topolojik uzayların toplamı ve bulanık esnek topolojik uzayların toplamı A. Atay (Atay, 2023) tarafından çalışılmış ve Kerre ve diğerleri 1984 yılında (Kerre vd., 1984) bulanık topolojik toplamlara bir giriş yapmıştır. Ancak bulanık topolojik uzayların toplamı ile ilgili ayrıntılı bir çalışma yapılmamıştır.

Kerre ve diğerleri 1984 yılında (Kerre vd., 1984) yayınladıkları makalede bulanık topolojik uzayların toplamlarının tanımını vererek alt uzaylar ile ilişkisinden bahsetmiş ve kompaktlık, sayılabilirlik gibi bazı topolojik özelliklerin topolojik toplamı oluşturan uzaylardan toplam uzayına korunarak geçip geçmediğini araştırılmıştır. Ayrıca bu makalede topolojik toplam uzayında ayırma aksiyomları incelenmiştir.

Biz bu çalışma ile öncelikle, bulanık topolojik uzayların serbest bileşimini ve ardından bulanık topolojik uzayların toplamını vererek bunlar arsındaki ilişkiden bahsettik. Amacımız ikişer ikişer ayrık bulanık topolojik uzaylar kullanılarak oluşturulan bulanık topolojik uzayların toplamı kavramını tanıtmak ve bu toplamın sağladığı özellikleri keşfetmektir. Sonuçlarımız, bulanık topolojik uzaylarda bulanık komşuluk, bulanık açık-kapalı küme, bulanık taban gibi topolojik kavramların bulanık topolojik uzayların toplamında nasıl tanımlandığını ve ilgili önerme ve teoremleri içermektedir. Ayrıca açıklayıcı birçok örnek verilmiştir. Ek olarak, bulanık topolojik uzayların toplam uzayında bulanık iç ve bulanık kapanış operatörleri ele alınmıştır. Ayrıca, hangi durumda bir bulanık topolojik uzayın bazı bulanık topolojik uzayların toplamını temsil ettiği açıklanmıştır.

MATERYAL VE METOT

Bu bölümde bulanık küme teorisinde yer alan kavramlar tanımlanacaktır. Bu kavramlar genel olarak klasik kümelerde bildiğimiz kavramların birer genelleştirmesidir.

Tanım: $X \neq \emptyset$, $A \subseteq X$ kümeleri ve $F_A: X \to [0,1]$ fonksiyonu için sıralı ikililerinin bir kümesi olarak gösterilen $F_A = \{ (x, F_A(x)) : x \in X \}$ şeklindeki F_A kümesine X'in bulanık alt kümesi ve $F_A(x)$ değerine x elemenınına ait üyelik derecesi denir (Zadeh, 1965). Bulanık kümeler kısaca F_A, G_B veya $\alpha, \beta, \gamma, \ldots$ gibi semboller ile gösterilecektir. X kümesinin bütün bulanık alt kümelerinin ailesi ise $I = [0,1]$ olmak üzere I^X ile gösterilecektir.

Tanım: Sabit bulanık küme, $\forall x \in A$ ve $0 \leq \alpha \leq 1$ için $C = \{ (x, F_A(x)) : F_A(x) = \alpha, x \in A \}$ şeklinde tanımlanan bulanık kümedir ve kısaca F_α ile gösterilecektir (Dobois ve Prade, 1980).

Örnek 1: $X = \{1,2,3,4,5,6\}$ evrensel küme ve $A = \{4,5,6\} \subseteq X$ verilsin. O zaman 6 elemanı A'ya tam üyedir ve 2 elemanı A'nın üyesi değildir. Bu durumda

Int. J. Pure Appl. Sci. 9(1);197-208 (2023)
IJPAS
ijpas@munzur.edu.tr
ISSN: 2149-0910
Research article/Araştırma makalesi
DOI:10.29132/ijpas.1269744

A kümesi bulanık küme olarak $F_A = \{(1,0), (2,0), (3,0), (4,1), (5,1), (6,1)\}$ ile ifade edilir.

Tanım: F_A ve G_A bulanık kümeleri eşittir ancak ve ancak $\forall\, x \in X$ için $F_A(x) = G_A(x)$ sağlanır (Zadeh, 1965).

Bundan sonra $\forall\, x \in X$ için $F_A(x) = G_A(x)$ yazmak yerine daha çok, benzer şey olan $F_A = G_A$ yazılacaktır.

Tanım: Bir F_A bulanık kümesinin tümleyeni F_A' ile gösterilir ve üyelik fonksiyonu $\forall\, x \in A$ için: $F_A'(x) = 1 - F_A(x)$ ile verilir (Zadeh, 1965).

Tanım: F_A nın G_A da kapsanması (veya denk oklarak , F_A nın G_A nın bir alt kümesi olması) için gerek ve yeter şart $\forall\, x \in A$ için, $F_A(x) \le G_A(x)$ olmasıdır . Bu durum sembollerle $F_A \subseteq G_A \Leftrightarrow F_A \le G_A$ şeklinde gösterilir (Zadeh, 1965).

Tanım: Sırasıyla , $F_A(x)$ ve $G_B(x)$ üyelik fonksiyonlarına sahip olan F_A ve G_B bulanık kümelerinin birleşimi, $C = A \cup B$ olmak üzere üyelik fonksiyonu $H_C(x) = \max\ \{F_A(x), G_B(x)\}$, $x \in X$ olarak tanımlanan bir H_C bulanık kümesidir ve kısaca $H_C = F_A \vee G_B$ şeklinde yazılır (Zadeh, 1965). F_A ve G_B nin birleşimi , hem F_A hem de G_B yi kapsayan en küçük bulanık kümedir.

Tanım: Sırasıyla $F_A(x)$ ve $G_B(x)$ üyelik fonksiyonlarına sahip olan F_A ve G_B bulanık kümesinin arakesiti, üyelik fonksiyonu $H_C(x) = \min\ \{F_A(x), G_B(x)\}$, $x \in X$ ile bir H_C bulanık kümesidir ve kısaca $H_C = F_A \wedge G_B$ olarak yazılır (Zadeh, 1965). F_A ve G_B bulanık kümelerinin arakesiti F_A ile G_B' de kapsanan en büyük bulanık kümedir. Eğer $F_A \wedge G_B = \emptyset$ ise F_A ve G_B bulanık kümeleri ayrıktır denir .

Tanım: F_A bir bulanık küme ve $\alpha \in [0,1] \subseteq \mathbb{R}$ olsun. F_A nın α–kesiti $F_A{}^{\alpha}$ şeklinde ifade edilir ve $F_A{}^{\alpha} = \{\, x \in X : F_A(x) \ge \alpha\}$ ile tanımlıdır (Zadeh, 1965).

Örnek 2: $X = \{1,2,3,4,5\}$ kümesi üzerinde $F_A = \{(1,0.5), (2,1), (5,0.7)\}$ ve $G_B = \{(1,0.6), (4,1), (5,0.4)\}$ bulanık kümeleri verilsin. Buna göre,

$F_A \vee G_B = \{(1,0.6), (2,1), (4,1), (5,0.7)\}$

$F_A \wedge G_B = \{(1,0.5), (5,0.4)\}$

$F_{A'} = \{(1,0.5), (2,0), (3,1), (4,1), (5,0.3)\}$

$G_{B'} = \{(1,0.4), (2,1), (3,1), (4,0), (5,0.6)\}$

bulunur.

Teorem: F_A, G_B ve H_C bulanık kümeler olmak üzere aşağıdaki ifadeler sağlanır.

i. $[(F_A)']' = F_A$,

ii. $(F_A \vee G_B)' = F_A' \wedge G_B'$ ve $(F_A \wedge G_B)' = F_A' \vee G_B'$,

iii. $F_A \vee G_B = G_B \vee F_A$ ve $F_A \wedge G_B = G_B \wedge F_A$,

iv. $(F_A \vee G_B) \vee H_C = F_A \vee (G_B \vee H_C)$ ve $(F_A \wedge G_B) \wedge H_C = F_A \wedge (G_B \wedge H_C)$,

v. $F_A \wedge (G_B \vee H_C) = (F_A \wedge G_B) \vee (F_A \wedge H_C)$

vi. $F_A \vee (G_B \wedge H_C) = (F_A \vee G_B) \wedge (F_A \vee H_C)$

vii. $F_A \vee (F_A \wedge G_B) = F_A$ ve $F_A \wedge (F_A \vee G_B) = F_A$

viii. $F_A \wedge F_A = F_A$ ve $F_A \vee F_A = F_A$

ix. $F_A \vee \emptyset = F_A$

İspat: Bulanık küme ve üyelik fonksiyonunu tanımları kullanılarak bu ifadelaerin doğruluğu rahatlıkla gösterilir.

Uyarı: Kalsik kümelerde sağlanan $A \cap A' = \emptyset$ ve $A \cup A' = X$ özellikleri bulanık kümelerde sağlanmaz. Yani $F_A \neq \emptyset$ için $F_A \wedge F_A' \neq \emptyset$ ve $F_A \vee F_A' \neq X$ dir. Gerçekten $F_A \neq \emptyset$ olduğundan $\exists x \in A$ için $F_A(x) \neq 0$ olur. Buradan $\exists x \in A$ için,

$(F_A \wedge F_A')(x) = \min\{F_A(x), 1 - F_A(x)\} \neq 0$

$(F_A \vee F_A')(x)(x) = \max\{F_A(x), 1 - F_A(x)\} \neq 1$

elde edilir (Dobois ve Prade, 1980).

Bulanık Topolojik Uzaylar:

X boştan farklı bir küme, $I = [0,1]$ kaplı aralığı ve $F_A = \{\, (x, F_A(x)) : x \in X\, \} \subseteq I^X$ bulanık alt kümesi verilsin. $\forall x \in X$ için bulanık boş küme ve bulanık evrensel küme sırasıyla,

IJPAS
ijpas@munzur.edu.tr
ISSN: 2149-0910

Research article/Araştırma makalesi
DOI:10.29132/ijpas.1269744

$0_X: X \longrightarrow I, x \longrightarrow 0_x(x) = 0$

$1_X: X \longrightarrow I, x \longrightarrow 1_x(x) = 1$

ile tanımlıdır.

Tanım: $X \neq \emptyset$, $\tau \subseteq I^X$ ve $F_A, G_B \in I^X$ olarak verilsin.

i. $0_X, 1_X \in \tau$
ii. $F_A, G_B \in \tau \Longrightarrow F_A \wedge G_B \in \tau$
iii. $\forall i \in J, F_{A_i} \in \tau \Longrightarrow \vee F_{A_i} \in \tau$

koşullarını sağlayan τ ailesine X üzerinde bir bulanık topoloji denir. Böylece (X, τ) ikilisine bulanık topolojik uzay ve τ ailesinin elemanlarına da bulanık açık kümeler denir. Tümleyeni bulanık açık olan kümeye ise bulanık kapalı küme denir (Chang, 1968).

X in bütün bulanık alt kümelerini içeren aile bir bulanık topolojidir ve ayrık bulanık topoloji adını alır. Ayrıca sadece $0_X, 1_X$ bulanık kümelerini içeren aile de bir bulanık topolojidir ve ayrık olmayan bulanık topoloji adını alır (Lowen, 1976).

Tanım: τ ve τ' bulanık topolojiler olmak üzere eğer $\tau \leq \tau'$ oluyorsa τ ya τ' den daha kaba ve τ' topolojisine de τ dan daha incedir denir (Lowen, 1976).

Önerme: X kümesinde tanımlı bulanık topolojilerin her hangi arakesiti de X üzerinde bir bulanık topolojidir ama birleşim genel olarak olmaz.

Örnek 4: X üzerinde herhangi bir F_A bulanık kümesi için $\tau = \{0_X, 1_X, F_A\}$ ailesi bir bulanık topolojidir ve (X, τ) bulanık topolojik uzayıdır.

Tanım: (X, τ) bulanık topolojik uzay ve $F_A \in I^X$ olsun. Bu durumda $(F_A)^o = \vee \{U: U \subseteq F_A, U \in \tau\}$ şeklinde tanımlanan $(F_A)^o$ bulanık kümesine, F_A bulanık kümesinin içi denir (Lowen, 1976).

Teorem: (X, τ) bulanık topolojik uzay ve $F_A \in I^X$ olsun. Bu durumda $F_A \in \tau \Leftrightarrow F_A = (F_A)^o$ sağlanır.

İspat: F_A bulanık açık olsun. F_A bulanık kümesinin her bir elemanı için, F_A bulanık açık olduğundan $x \in F_A \subseteq F_A$ yazılabilir. Yani F_A bulanık kümesinin her bir elemanı iç nokta olur. Bu da $F_A = (F_A)^o$ olduğunu gösterir.

Tersine $F_A = (F_A)^o$ olsun. $(F_A)^o$ bulanık açık olduğundan F_A bulanık açık olur.

Örnek 5: $X = \{a, b, c\}$ evrensel kümesi üzerinde tanımlı bulanık kümeler

$\alpha = \{(a, 0.8), (b, 0.9), (c, 0.7)\}$,

$\beta = \{(a, 0.6), (b, 0.5), (c, 0.4)\}$

$\gamma = \{(a, 0.3), (b, 0.3), (c, 0.2)\}$

ile verilsin. Bu durumda $\tau = \{0_X, 1_X, \alpha, \beta, \gamma\}$ ailesi bulanık topoloji olur. Gerçekten,

$\alpha \wedge \beta = \{(a, 0.6), (b, 0.5), (c, 0.4)\} = \beta \in \tau$

$\alpha \wedge \gamma = \{(a, 0.3), (b, 0.3), (c, 0.2)\} = \gamma \in \tau$

$\beta \wedge \gamma = \{(a, 0.3), (b, 0.3), (c, 0.2)\} = \gamma \in \tau$

$\alpha \vee \beta = \{(a, 0.8), (b, 0.9), (c, 0.7)\} = \alpha \in \tau$

$\alpha \vee \gamma = \{(a, 0.8), (b, 0.9), (c, 0.7)\} = \alpha \in \tau$

$\beta \vee \gamma = \{(a, 0.6), (b, 0.5), (c, 0.4)\} = \beta \in \tau$

olur. Ayrıca,

$\alpha \vee \beta \vee \gamma = \{(a, 0.8), (b, 0.9), (c, 0.7)\} = \alpha \in \tau$

bulunur.

Bu nedenle, (X, τ) bulanık topolojik uzaydır.

Örnek 6: $A = \{a, b\}$ kümesi üzerinde tanımlı bulanık alt kümeleri, $F_A^1 = \{(a, 0{,}4), (b, 0{,}6)\}$, $F_A^2 = \{(a, 0), (b, 0{,}4)\}$, $F_A^3 = \{(a, 0{,}4), (b, 0{,}4)\}$, $F_A^4 = \{(a, 0.4), (b, 0)\}$, $F_A^5 = \{(a, 0), (b, 0{,}2)\}$, $F_A^6 = \{(a, 0{,}4), (b, 0{,}2)\}$, $F_A^7 = \{(a, 0), (b, 0{,}5)\}$, $F_A^8 = \{(a, 0{,}4), (b, 0{,}5)\}$ şeklinde verilsin. Bu durumda $\tau = \{0_X, 1_X, F_A^1, F_A^2, F_A^3, F_A^4, F_A^5, F_A^6, F_A^7, F_A^8\}$ ailesi bir bulanık topoloji olur.

Sonuç: (X, τ) bulanık topolojik uzay ve $F_A, G_A \in I^X$ için aşağıdaki özellikler sağlanır:

i. $(1_X)^o = 1_X$ ve $(0_X)^o = 0_X$,

Int. J. Pure Appl. Sci. 9(1);197-208 (2023)
IJPAS
ijpas@munzur.edu.tr
ISSN: 2149-0910
Research article/Araştırma makalesi
DOI:10.29132/ijpas.1269744

ii. $(F_A)^o \subseteq F_A$,

iii. $((F_A)^o)^o = (F_A)^o$,

iv. $F_A \subseteq G_A \Rightarrow (F_A)^o \subseteq (G_A)^o$.

Tanım: (X,τ) Bulanık topolojik uzayında ve $F_A \in I^X$ olsun. F_A' yı kapsayan en küçük kapalı bulanık kümeye F_A nın kapanışı denir ve $\overline{F_A}$ ile gösterilir. $\overline{F_A} = \wedge\{ G_A \mid F_A \subseteq V,\ (G_A)' \epsilon\, \tau \}$ şeklinde ifade edilir (Lowen, 1976).

Teorem: (X,τ) Bulanık topolojik uzay ve $F_A \in I^X$ olsun. F_A bulanık kümesinin kapalı olması için, gerek ve yeter şart $F_A = \overline{F_A}$ olmasıdır (Lowen, 1976).

Sonuç: (X,τ) bulanık topolojik uzay ve $F_A, G_A \in I^X$ için aşağıdaki özellikler sağlanır:

i. $\overline{1_X} = 1_X$ ve $\overline{0_X} = 0_X$,

ii. $F_A \subseteq \overline{F_A}$,

iii. $\overline{\overline{F_A}} = \overline{F_A}$,

iv. $F_A \subseteq G_A \Rightarrow \overline{F_A} \subseteq \overline{G_A}$.

Örnek 7: X boştan farklı bir küme ve $F_A, G_A \in I^X$ bulanık kümelerine ait üyelik fonksiyonları sırasıyla aşağıdaki gibi tanımlansın.

$$F_A(x) = \begin{cases} 0 & ; \quad 0 \le x \le 1/2 \\ 2x-1 & ; \ 1/2 \le x \le 1 \end{cases}$$

$$G_A(x) = \begin{cases} 1 & ; \quad 0 \le x \le 1/4 \\ -4x+2 & ; \ 1/4 \le x \le 1/2 \\ 0 & ; \ 1/2 \le x \le 1 \end{cases}$$

$\tau = \{ 0,1, F_A, G_A, F_A \vee G_A \}$ X' de bir bulanık topoloji olur. Ayrıca kolayca görebiliriz ki, $\overline{F_A} = (G_A)'$, $\overline{G_A} = (F_A)'$, $\overline{(F_A \vee G_A)} = 1_X$, $\big((F_A)'\big)^o = G_A$, $\big((G_A)'\big)^o = F_A$, $\big((F_A \vee G_A)'\big)^o = 0_X$ olur.

Örnek 8: $X = \{a, b, c, d, e\}$ olarak tanımlansın.

$F_A^1 = \{(a, 0.6), (b, 0.2), (c, 0.5), (d, 1), (e, 0)\}$

$F_A^2 = \{(a, 0), (b, 0.3), (c, 0.5), (d, 0.7), (e, 1)\}$

$F_A^3 = \{(a, 0.6), (b, 0.3), (c, 0.5), (d, 1), (e, 1)\}$

$F_A^4 = \{(a, 0), (b, 0.2), (c, 0.5), (d, 0.7), (e, 0)\}$

$\tau = \{0_X, 1_X, F_A^1, F_A^2, F_A^3, F_A^4\}$ sınıfı bulanık topoloji olur. Ayrıca X in bulanık kapalı alt kümeleri; 0_X , 1_X

$(F_A^1)' = \{(a, 0.4), (b, 0.8), (c, 0.5), (d, 0), (e, 1)\}$

$(F_A^2)' = \{(a, 1), (b, 0.7), (c, 0.5), (d, 0.3), (e, 0)\}$

$(F_A^3)' = \{(a, 0.4), (b, 0.7), (c, 0.5), (d, 0), (e, 0)\}$

$(F_A^4)' = \{(a, 1), (b, 0.8), (c, 0.5), (d, 0.3), (e, 1)\}$

bulanık kümeleridir.

$G_A = \{(a, 0.5), (b, 0.4), (c, 0.7), (d, 1), (e, 1)\}$ bulanık kümesi için $G_A{}^0 = F_A^2$ ve $\overline{G_A} = 1_X$ olarak bulunur.

Tanım: (X,τ) bulanık topolojik uzay ve $F_A, U_B, V_C \in I^X$ olsun. V_C, F_A'nın komşuluğudur ancak ve ancak $F_A \subseteq U_B \subseteq V_C$ olacak şekilde bir U_B bulanık açık kümesi vardır (Lowen, 1976). Özel olarak bulanık açık olan komşuluğa bulanık açık komşuluk denir.

Teorem: F_A bulanık kümesi açıktır ancak ve ancak her bir $G_B \subseteq F_A$ bulanık kümesi için F_A, G_B nin bir bulanık komşuluğu olur.

İspat: ($\Longrightarrow$): Aşikârdır.

($\Longleftarrow$): Her bir $G_B \subseteq F_A$ bulanık kümesi için F_A, G_B nin bir bulanık komşuluğu olsun. $F_A \subseteq F_A$ olduğundan F_A kendisinin bir komşuluğu olur. O halde, $F_A \subseteq U_B \subseteq F_A$ olacak şekilde bir U_B bulanık açık kümesi vardır. $F_A = U_B$ alırsak F_A bulanık açık olur.

Bir bulanık kümenin komşuluk sistemi, bulanık kümenin tüm komşuluklarının ailesidir ve $\mathcal{N}$ ile gösterilir.

Teorem: $\mathcal{N}$ bir bulanık kümenin komşuluk sistemi olsun. $\mathcal{N}$ nin elemanlarının sonlu arakesitleri $\mathcal{N}$ ye aittir ve $\mathcal{N}$ nin bir elemanını kapsayan her bir bulanık küme $\mathcal{N}$ ye aittir.

İspat: F_A bulanık kümesinin, N_1 ve N_2 komşuluklarını alalım. Bu durumda $N_1{}' \subseteq N_1$ ve $N_2{}' \subseteq N_2$ olacak şekilde $N_1{}', N_2{}'$ açık komşulukları mevcuttur. Böylece $N_1{}' \wedge N_2{}' \subseteq N_1 \wedge N_2$ olur ki bu da $N_1 \wedge N_2$ 'nin F_A nın bir komşuluğu olduğunu

Int. J. Pure Appl. Sci. 9(1);197-208 (2023)

IJPAS
ijpas@munzur.edu.tr
ISSN: 2149-0910

Research article/Araştırma makalesi
DOI:10.29132/ijpas.1269744

gösterir. Böylece $\mathcal{N}$ nin iki elemanının arakesiti $\mathcal{N}$ ye aittir.

Diğer taraftan bir N bulanık kümesi F_A nın bir komşuluğunu kapsarsa F_A nın bir açık komşuluğunu kapsar ve dolayısıyla kendisi komşuluktur.

Örnek 9: $X = \{x, y, z\}$ kümesi üzerinde $\alpha, \beta, \gamma, \delta \in I^X$ bulanık alt kümeleri aşağıdaki gibi tanımlansın.

$\alpha = \{(x, 0.5), (y, 0.8), (z, 0.2)\}$,

$\beta = \{(x, 0.4), (y, 0.8), (z, 0.5)\}$,

$\gamma = \{(x, 0.5), (y, 0.8), (z, 0.5)\}$,

$\delta = \{(x, 0.3), (y, 0.7), (z, 0.1)\}$,

ile tanımlansın. Bu durumda $\tau = \{0_X, 1_X, \alpha, \beta, \gamma\}$ bir bulanık topoloji ve (X, τ) bulanık topolojik uzay olur. Böylece $\alpha, \beta, \gamma \in \tau$ δ'nın açık komşuluğudur.

Tanım: (X, τ) bulanık topolojik uzayı ve $\mathfrak{B} \subseteq \tau$ bulanık alt ailesi verilsin. Eğer X in her bulanık açık kümesi $\mathfrak{B}$ nin bazı elemanlarının birleşimi şeklinde yazılabiliyorsa ,$\mathfrak{B}$ ailesine τ topolojisin bir bulanık tabanı denir (Chang, 1968).

Tanım: (X, τ) bulanık topolojik uzay ve $\mathcal{A} \subseteq \tau$ olsun, $\mathfrak{B} = \wedge \{F_A : F_A \in \mathcal{A} \text{ ve } \mathcal{A} \text{ sonlu}\}$ ailesini bulanık taban kabul eden τ topolojisi için $\mathcal{A}$, τ için bir alt tabandır denir (Chang, 1968).

Örnek 10: $X = \{x, y\}$ ve $\alpha, \beta, \gamma \in I^X$,bulanık alt kümeleri $\alpha = \{(x, 0.3), (y, 0.6)\}$,$\beta = \{(x, 0.7), (y, 0.5)\}$, $\gamma = \{(x, 0.7), (y, 0.6)\}$ ile verilsin. $\delta = \alpha \wedge \beta = \{(x, 0.3), (y, 0.5)\}$ olmak üzere $\tau = \{0_X, 1_X, \alpha, \beta, \gamma, \delta\}$ ailesi bir bulanık topolojidir ve (X, τ) bir bulanık topolojik uzay olur. Bu durumda $\mathfrak{B} = \{0_X, 1_X, \alpha, \beta, \delta\}$ ailesi τ bulanık topolojisi için bir taban olur.

Örnek 11: $X = \{x, y\}$ ve $\alpha, \beta, \gamma, \delta \in I^X$ bulanık alt kümeler olsun. $\alpha = \{(x, 0.2), (y, 0.6)\}$, $\beta = \{(x, 0.3), (y, 0.5)\}$, $\gamma = \{(x, 0.2), (y, 0.5)\}$, $\delta = \{(x, 0.3), (y, 0.6)\}$. Böylece $\tau = \{0_X, 1_X, \alpha, \beta, \gamma, \delta\}$ bir bulanık topoloji ve (X, τ) bir bulanık topolojik uzay olur. Ayrıca $\mathcal{S} = \{\alpha, \beta\}$ τ için bir alt taban ve $\mathfrak{B} = \{0_X, 1_X, \alpha, \beta, \gamma\}$ ailesi τ için bir taban olur.

Tanım: $(X . \tau)$ bulanık topolojik uzay ve $F_A \in I^X$ olsun. $\tau_{F_A} = \{\vartheta \wedge F_A : \vartheta \in \tau\}$ ailesi, F_A üzerinde bir bulanık topolojidir ve τ_{F_A} ya F_A üzerine indirgenmiş bulanık topoloji denir. (F_A, τ_{F_A}) ikilisine ise (X, τ) bulanık topolojik uzayının bir bulanık alt uzayı denir.

Tanım: F_B, $F_B(y)$ üyelik fonksiyonuyla Y de bir bulanık küme, $B \subseteq Y$ ve $f : X \to Y$ bir fonksiyon olsun. Buradan F_B bulanık kümesinin ters resmi X üzerinde bir bulanık kümedir. $f^{-1}(F_B)$ bulanık kümesine ait üyelik fonksiyonu, $\forall\, x \in X$ için $F\,(f^{-1}(F_B)) = F_B(f(x))$ ile tanımlanır.

Diğer taraftan, F_A, $F_A(X)$ üyelik fonksiyonuyla X de bir bulanık küme, $A \subseteq X$ olsun. F_A nın görüntüsü $f[F_A]$, Y de bir bulanık kümedir. $f[F_A]$ ya ait üyelik fonksiyonu $\forall y \in Y$ için,

$$F_{f(F_A)}(y) = \begin{cases} \sup\{F_{F_A}(z)\} & , f^{-1}(y) \neq \emptyset \\ 0 & , f^{-1}(y) = \emptyset \end{cases}$$

ile tanımlıdır (Chang, 1968).

Teorem: $f : X \to Y$ bir fonksiyon olsun. $\alpha \in I^X$ ve $\beta \in I^Y$ olmak üzere aşağıdaki koşullar sağlanır.

i. $f^{-1}(\beta') = (f^{-1}(\beta))'$
ii. $(f(\alpha))' \subset f(\alpha')$
iii. $\beta_1 \subset \beta_2 \Rightarrow f^{-1}(\beta_1) \subset f^{-1}(\beta_2)$, $\beta_1, \beta_2 \in I^Y$
iv. $\alpha_1 \subset \alpha_2 \Rightarrow f(\alpha_1) \subset f(\alpha_2)$, $\alpha_1, \alpha_2 \in I^X$
v. $f\,(f^{-1}(\beta) \subset \beta$
vi. $\alpha \subset f^{-1}(f(\alpha))$

Örnek 12: $X = \{1,2,3,4\}, Y = \{a_{1.}, a_2, a_3\}$ sırasıyla parametre kümesi ve evlerden oluşan küme ve iki kişilik evlerin sahip oldukları özellikleri belirten bulanık küme $F_A = \{(1, 0.8), (2, 1), (3, 0.6), (4, 0.2)\}$ olsun. $f : X \longrightarrow Y$ fonksiyonu $f(1) = f(3) = a_1$, $f(2) = a_2$, $f(4) = a_3$ ile tanımlansın.

$f^{-1}(a_1) = \{1,3\}$, $F_{f(A)}(a_1) = \sup\{0.8, 0.6\} = 0.8$

$f^{-1}(a_2) = \{2\}$, $F_{f(A)}(a_2) = 1$

$f^{-1}(a_3) = \{4\}$, $F_{f(A)}(a_3) = 0.2$

Int. J. Pure Appl. Sci. 9(1);197-208 (2023)

ijpas@munzur.edu.tr
ISSN: 2149-0910

Research article/Araştırma makalesi
DOI:10.29132/ijpas.1269744

bulunur. Böylece,

$f(F_A) = \{Y, F_Y(f(F_A))\} = \{(a_1, 0.8), (a_2, 1), (a_3, 0.2)\}$

olur.

Örnek 13: $X = \{-1,0,1\}, f: X \longrightarrow Y,\ f(x) = x^2$ olsun. Y nin bulanık alt kümesini $F_B = \{(0,1), (1, 0.6)\}$ şeklinde tanımlayalım. O zaman $f^{-1}(F_B)$ bulanık kümesine ait üyelik fonksiyonu $F(f^{-1}(F_B)) = F_B(f(x))$ ile tanımlı olduğundan,

$x = -1, x = 1$ için $f(x) = 1$ ve $F_B(1) = 0.6$

$x = 0$ için $f(0) = 0$ ve $F_B(0) = 1$ değerleri ile

$F(f^{-1}(F_B)) = \{(-1,\ 0.6), (0, 1), (1, 0.6)\}$

bulunur.

Tanım: (X, τ_1) ve (Y, τ_2) İki bulanık topolojik uzay olsun. $f: (X, \tau_1) \longrightarrow (Y, \tau_2)$ fonksiyonu bir bulanık sürekli fonksiyondur ancak ve ancak Y de her bir bulanık açık kümenin ters resmi X de bir bulanık açık kümedir (Chang, 1968).

Not: Klasik topolojide sabit fonksiyonların sürekli olduğunu biliyoruz. Ancak bulanık topolojik uzaylarda bu geçerli değildir. Yani bulanık topolojide sabit fonksiyonlar bulanık sürekli olmayabilir.

Teorem: $f: X \longrightarrow Y$ ve $g: Y \longrightarrow Z$ bulanık sürekli fonksiyonlar olsun. Bu durumda:

$(gof): X \longrightarrow Z$ bileşke fonksiyon da bulanık sürekli fonksiyon olur.

İspat: $f: X \longrightarrow Y$ ve $g: Y \longrightarrow Z$ bulanık sürekli fonksiyonlar olsun. $\forall v \in Z$ İçin $(gof)(v)^{-1} = f^{-1}(g^{-1}(v))$ olur. f ve g nin bulanık sürekliliğini kullanarak $(gof)^{-1}(v)$ nin bulanık açık olduğunu görürüz.

Teorem: X ve Y bulanık topolojik uzayları verilsin. f $: X \to Y$ bir fonksiyon olmak üzere aşağıdaki özellikler denktir.

i. Her bulanık kapalı kümenin tersi bulanık kapalıdır.

ii. f fonksiyonu bulanık süreklidir.

iii. Her bir $F_A \in I^X$ için $f(F_A)$ nün her komşuluğunun ters resmi F_A`nın bir komşuluğudur.

iv. Her bir $F_A \in X$ için $f(F_A)$ nın her $\mathcal{U}$ komşuluğu için $f(T) \subset \mathcal{U}$ olacak biçimde F_A`nın bir T komşuluğu vardır.

Teorem: (X, τ_1) ve (Y, τ_2) iki bulanık topolojik uzay olsun. Buna göre, $f: (X, \tau_1) \longrightarrow (Y, \tau_2)$ süreklidir ancak ve ancak her $F_A \in I^X, f(\overline{F_A}) \subseteq \overline{f(F_A)}$ sağlanır.

İspat: (X, τ_1) ve (Y, τ_2) iki bulanık topolojik uzay olmak üzere $f: (X, \tau_1) \longrightarrow (Y, \tau_2)$ sürekli olsun. Her küme kapanışının alt kümesi olduğundan $f(F_A) \subseteq \overline{f(F_A)}$ elde edilir. Böylece, $F_A \subseteq f^{-1}(f(F_A)) \subseteq f^{-1}(\overline{f(F_A)})$ yazılır. f sürekli ve $\overline{f(F_A)}$ kapalı olduğundan $f^{-1}(\overline{f(F_A)})$ da kapalıdır. Ancak F_A'yı kapsayan en dar kümenin $\overline{F_A}$ olduğunu biliyoruz. O halde,

$$F_A \subseteq \overline{F_A} \subseteq f^{-1}(\overline{f(F_A)}) \Longrightarrow f(\overline{F_A}) \subseteq f(f^{-1}(\overline{f(F_A)})) = \overline{f(F_A)}$$

bulunur.

Tersine, her $F_A \in I^X$ için $f(\overline{F_A}) \subseteq \overline{f(F_A)}$ olsun. $G_B' \in \tau_2$ ve $f^{-1}(G_B) = H_A$ olacak şekilde $G_B \in I^Y$ bulanık kapalı alt kümesini ve $H_A \in I^X$ bulanık alt kümesini düşünelim. Hipotezden,

$$f(\overline{H_A}) \subseteq \overline{f(H_A)} = \overline{f(f^{-1}(G_B))} \subseteq \overline{G_B} = G_B \Longrightarrow \overline{H_A} \subseteq f^{-1}(f(\overline{H_A})) \subseteq f^{-1}(G_B) = H_A$$

yani $\overline{H_A} \subseteq H_A$ bulunur. Ayrıca $H_A \subseteq \overline{H_A}$ olduğunu biliyoruz. Böylece $\overline{H_A} = H_A$ bulunur. Buradan $f^{-1}(G_B) = H_A$ kapalıdır. Yani f süreklidir.

Tanım: $f: (X, \tau_1) \longrightarrow (Y, \tau_2)$ bulanık topolojik uzaylar arasında tanımlı bir fonksiyon olsun. $F_A, H_A \in I^X$ ve $G_B \in I^Y$ olmak üzere,

i. f bulanık süreklidir $\Longleftrightarrow \forall\, G_B \in \tau_2$ için $f^{-1}(G_B) \in \tau_1$

ii. f bulanık açık $\Longleftrightarrow \forall\, F_A \in \tau_1$ için $f(F_A) \in \tau_2$

IJPAS
ijpas@munzur.edu.tr
ISSN: 2149-0910

Research article/Araştırma makalesi
DOI:10.29132/ijpas.1269744

iii. f bulanık kapalı $\Leftrightarrow \forall\, H_A \in \tau_1'$ için $f(H_A) \in \tau_2'$

Ayrıca eğer f bijektif (yani bire- bir ve örten) ve f ile f^{-1} sürekli ise f fonksiyonuna bir bulanık homeomorfizma denir (Nasrin ve Zahan, 2021).

Tanım: $F_A \in I^X$ bir bulanık küme olsun. $\overline{F_A} = 1_X$ oluyorsa F_A bulanık yoğun veya her yerde yoğundur denir (Nasrin ve Zahan, 2021).

Tanım: $F_A \in I^X$ bir bulanık küme olsun. $(\overline{F_A})^o = 0_X$ oluyorsa F_A' ya hiçbir yerde yoğun değildir denir (Nasrin ve Zahan, 2021).

Sonuç: $F_A, G_B \in I^X$ bulanık kümeler olsunlar. Buna göre aşağıdakiler sağlanır.

i. $F_A \subseteq G_B$ ve G_B bulanık yoğun ise F_A da bulanık yoğun olur.
ii. F_A hiçbir yerde yoğun değil ise $\overline{F_A}$ da hiçbir yerde yoğun değildir.
iii. F_A bulanık yoğun ise $(1_X - F_A)^o = 0_X$ olur.

Tanım: (X, τ) bulanık topolojik uzay olsun. $\forall\, x, y \in X, x \neq y$ için $x \in F_A, y \in G_A$ ve $F_A \wedge G_A = 0_X$ olacak şekilde $F_A, G_A \in \tau$ bulanık açık alt kümeleri var ise (X, τ) bulanık topolojik uzayına Hausdorff bulanık uzay denir.

Teorem: $f: (X, \tau_1) \longrightarrow (Y, \tau_2)$ bulanık açık fonksiyon olmak üzere (X, τ_1) Hausdorff bulanık topolojik uzay ise (Y, τ_2) bulanık uzayı da bir Hausdorff bulanık topolojik uzayıdır.

İspat: $y_1, y_2 \in Y$ ve $y_1 \neq y_2$ olsun. $y_1 = f(x_1)$ ve $y_2 = f(x_2)$ alalım. Hipotezden (X, τ_1) Hausdorff bulanık topolojik uzayı olduğundan $x_1 \in F_A, x_2 \in G_A$ ve $F_A \wedge G_A = 0_X$ olacak şekilde $F_A, G_A \in \tau_1$ bulanık açık alt kümeleri vardır. $f: (X, \tau_1) \longrightarrow (Y, \tau_2)$ bulanık açık fonksiyon olduğundan $f(F_A), f(G_A) \in \tau_2$ olur. $y_1 \in f(F_A), y_2 \in f(G_A)$ ve ayrıca $f(F_A \wedge G_A) = f(F_A) \wedge f(G_A) = 0_Y$ olduğundan (Y, τ_2) bir Hausdorff bulanık topolojik uzayıdır.

TARTIŞMA VE SONUÇ

Bulanık Topolojik Uzayların Toplamları

Tanım : (X, τ) bulanık topolojik uzayının alt topolojik uzaylarının bir ailesi $\{(X_i, \tau_i)\}$, $i \in \Lambda$ ve $X = \bigvee X_i$ olsun. Bulanık alt uzay topolojisi tanıma göre her $i \in \Lambda$ ve her $F_A \in \tau$ bulanık açık (bulanık kapalı) kümesi için $F_A \wedge X_i$ bulanık kümesi X_i de bulanık açık (bulanık kapalı) olur. Buna göre :

$F_A \in \tau$ (veya $F_A{}' \in \tau$) $\Leftrightarrow$ $\forall\, i \in \Lambda$, $F_A \wedge X_i \in \tau_i$ (veya $(F_A \wedge X_i)' \in \tau_i$)

oluyorsa (X, τ) bulanık topolojik uzayına (X_i, τ_i) bulanık topolojik uzaylarının serbest bileşimi denir.

Sonuç: $F_A \in I^X$ bulanık alt küme olsun. (F_A, τ_{F_A}) bulanık alt uzayı $(F_A \wedge X_i\, , \tau_{F_A} \wedge X_i)$ bulanık alt uzaylarının serbest birleşimi olur.

Bulanık topolojik uzaylarının $\{(X_i, \tau_i)\}$; $i \in \Lambda$ ailesi için $X = \bigvee X_i$ olsun. X üzerinde söz konusu bulanık topoloji τ,

$F_A \in \tau \Leftrightarrow \forall\, i \in \Lambda\,,\; F_A \wedge X_i \in \tau_i$

ile verilsin. Eğer her bir (X_i, τ_i) bulanık topolojik uzayı (X, τ) bulanık topolojik uzayının birer alt uzay ve her bir X_i bulanık kümesi (X, τ) bulanık topolojik uzayında açık oluyorsa (X, τ), (X_i, τ_i) ailesinin serbest birleşimi olacaktır. Ancak (X, τ) bulanık topolojik uzayının (X_i, τ_i) ailesinin serbest bileşimi olması için (X_i, τ_i) bulanık topolojik uzaylarının alt uzay olması gerekmez. Serbest bileşim için alt uzay olma zorunluluğunu ortadan kaldıran önerme aşağıda verilmiştir.

Önerme : Bulanık topolojik uzaylardan oluşan $\{(X_i, \tau_i)\}$; $i \in \Lambda$ ailesi ayrık ve $X = \bigvee X_i$ olsun.

$F_A \in \tau \Leftrightarrow$ her $i \in \Lambda$ için $F_A \wedge X_i \in \tau_i$

şeklinde tanımlanan τ ailesi bir bulanık topolojidir.

İspat :

i. Her $i \in \Lambda$ için $0_X \wedge X_i = 0_X \;\Rightarrow 0_X \in \tau$ ve $1_X \wedge X_i = X_i \in \tau_i \;\Rightarrow 1_X \in \tau$
ii. Her sonlu $\{F_A{}^1, F_A{}^2, \ldots, F_A{}^n\} \subseteq \tau$ alt ailesi için,

Int. J. Pure Appl. Sci. 9(1);197-208 (2023)

IJPAS
ijpas@munzur.edu.tr
ISSN: 2149-0910

Research article/Araştırma makalesi
DOI:10.29132/ijpas.1269744

$\forall i \in \Lambda$, $(\wedge_{r=1}^{n} {F_A}^r) \wedge X_i = \wedge_{r=1}^{n}({F_A}^r \wedge X_i)$ ifadesinde ${F_A}^r \in \tau$ olduğundan

$\forall i \in \Lambda$ için ${F_A}^r \wedge X_i \in \tau_i$

olur. Her $i \in \Lambda$ için (X_i, τ_i) topolojik uzay olduğundan $\wedge_{r=1}^{n}({F_A}^r \wedge X_i) \in \tau_i$ bulunur. Böylece,

$\wedge_{r=1}^{n}({F_A}^r \wedge X_i) = (\wedge_{r=1}^{n} {F_A}^r) \wedge X_i \in \tau_i \Rightarrow (\wedge_{r=1}^{n} {F_A}^r) \in \tau$

çıkar.

iii. Her $\{{F_A}^1, {F_A}^2, \dots\} \subseteq \tau$ alt ailesi için :

$\forall i \in \Lambda$, $(\vee_r {F_A}^r) \wedge X_i = \vee_r({F_A}^r \wedge X_i) \in \tau_i \Rightarrow \vee_r {F_A}^r \in \tau$

elde edilir. Böylece topoloji aksiyomları sağlanmış olur. Böylece (X, τ) bir bulanık topolojik uzay olur. Özellikle bu (X, τ) uzayı, $\{(X_i, \tau_i)\}_{i \in \Lambda}$ ailesinin serbest bileşimi olacaktır.

Tanım : Yukarıdaki önermede tanımlanan (X, τ) bulanık topolojik uzayına ikişer ikişer ayrık (X_i, τ_i) bulanık topolojik uzaylarının bulanık topolojik toplamı denir. Bu bulanık toplam $(\uplus X_i, \tau_i)$ ile gösterilir. Daha net bir anlamda X_i bulanık kümeleri ikişer ikişer ayrık olmak üzere, X_i bulanık kümelerinin birleşimi X bulanık kümesini veriyorsa $X = \uplus X_i$ olur. $X = \uplus X_i$ topolojik toplamına ait τ topolojisine ise ayrık bileşim topolojisi adı verilir.

Önerme: Bulanık topolojik uzaylardan oluşan $\{(X_i, \tau_i)\}$; $i \in \Lambda$ ailesi için $X = \vee X_i$ olsun , yani $X = \uplus X_i$, $\{(X_i, \tau_i)\}$ bulanık uzaylarının bulanık topolojik toplamı olsun. $F_A \subseteq X$ bulanık alt kümesi bulanık kapalıdır ancak ve ancak her bir $i \in \Lambda$ için $F_A \wedge X_i$ (X_i, τ_i) bulanık uzayında bulanık kapalıdır.

İspat: $F_A \subseteq X$ bulanık alt kümesi X bulanık toplam uzayında bulanık kapalı ise her bir $i \in \Lambda$ için $F_A \wedge X_i$ bulanık kümesinin (X_i, τ_i) bulanık uzayında bulanık kapalı olacağı açıktır. Diğer taraftan her bir $i \in \Lambda$ için $F_A \wedge X_i$, (X_i, τ_i) bulanık uzayında bulanık kapalı olsun. $(X \backslash F_A) \wedge X_i = X_i \backslash (F_A \wedge X_i)$ ve $F_A \wedge X_i$ bulanık kapalı olduğundan $X_i \backslash (F_A \wedge X_i)$ ve dolayısıyla $(X \backslash F_A) \wedge X_i$ bulanık açıktır. Yani $X \backslash F_A$, $\uplus X_i$ uzayında bulanık açıktır. Buradan F_A , $\uplus X_i$ topalm uzayında bulanık kapalı olur.

Teorem: $\{(X_i, \tau_i)\}$; $i \in \Lambda$ bulanık topolojik uzayların ayrık ailesi ve $X = \uplus X_i$ olmak üzere (X, τ), X_i uzaylarının bulanık topolojik toplamı olsun. $\forall i \in \Lambda$ için τ_i- bulanık açık olan her küme τ-bulanık açık olur.

İspat: $\forall i \in \Lambda$ için $\tau_i \subseteq \tau$ olduğunu göstermeliyiz. $F_A \in \tau_i$ olsun. Eğer $F_A \subseteq X_i$ ise

$F_A \wedge X_i = F_A \in \tau_i \Longrightarrow F_A \wedge X_i \in \tau_i,$

$i \neq j$ için $F_A \wedge X_j = 0_X \in \tau_i \Longrightarrow F_A \wedge X_j \in \tau_i,$

bulunur. Yani $\forall i \in \Lambda$ için $F_A \wedge X_i \in \tau_i \Longrightarrow F_A \in \tau$ olur.

Örnek 14: $X = \{1,2,3,4,5\}$, $X_1 = \{1,2\}$, $X_2 = \{3,4,5\}$ olsun. X_1 kümesi üzerinde tanımlı bulanık kümeler $F_{X_1}^1 = \{(1, 0.2), (2, 0.5)\}$ ve $F_{X_1}^2 = \{(1,0), (2,0.3)\}$ olarak verilsin .Bu durumda $\tau_1 = \{0_X, 1_X, F_{X_1}^1, F_{X_1}^2\}$, X_1 üzerinde bulanık topoloji olur.

X_2 kümesi üzerinde tanımlı bulanık kümeler :

$G_{X_2}^1 = \{(3,0), (4, 0.5), (5, 0.6)\}$

$G_{X_2}^2 = \{(3, 0.1), (4, 0.8), (5,0.2)\}$

$G_{X_2}^1 \wedge G_{X_2}^2 = G_{X_2}^3 = \{(3,0), (4,0.5), (5,0.2)\}$

$G_{X_2}^1 \vee G_{X_2}^2 = G_{X_2}^4 = \{(3,0.1), (4,0.8), (5,0.6)\}$

olsun. O halde $\tau_2 = \{0_{X_2}, 1_{X_2}, G_{X_2}^1, G_{X_2}^2, G_{X_2}^3, G_{X_2}^4\}$, X_2 üzerinde bulanık topoloji olur.

$X = \uplus X_i$ bulanık topolojik toplamı üzerindeki bulanık topoloji ise aşağıdaki gibidir.

$$\tau = \left\{ \begin{array}{c} 0_X, 1_X, 1_{X_1}, 1_{X_2}, F^1, F^2, G^1, G^2, G^3, G^4, F^1 \vee G^1, \\ F^1 \vee G^2,\ F^1 \vee G^3, F^1 \vee G^4, F^2 \vee G^1, F^2 \vee G^2, \\ F^2 \vee G^3, F^2 \vee G^4, 1_{X_2} \vee F^1, 1_{X_2} \vee F^1 \\ 1_{X_1} \vee G^1, 1_{X_1} \vee G^2, 1_{X_1} \vee G^3, 1_{X_1} \vee G^4 \end{array} \right\}$$

Sonuçlar:

Int. J. Pure Appl. Sci. 9(1);197-208 (2023)

IJPAS
ijpas@munzur.edu.tr
ISSN: 2149-0910

Research article/Araştırma makalesi
DOI:10.29132/ijpas.1269744

i. $X = \uplus X_i$, $\{(X_i, \tau_i)\}$ bulanık uzaylarının bulanık topolojik toplamı olsun. Her X_i bulanık kümesi $X = \uplus X_i$ bulanık uzayında hem bulanık açık hem de bulanık kapalıdır.
ii. Her bulanık topolojik toplam uzayı bulanık bağlantısızdır.

Teorem : $X = \uplus X_i$ bulanık topolojik toplamları olsun. O halde her X_i bulanık topolojik uzayı X in bir bulanık alt uzayıdır.

İspat : $X = \bigvee_{i \in \Lambda} X_i$ ve X_i ayrık kümeler olduğundan $X_i \subseteq X$ olduğu açıktır . Ayrıca her $i \in \Lambda$ için $\tau' = \{X_i \wedge G \,;\, G \in \tau\}$ olmak üzere $\tau_i = \tau'$ olduğunu göstermeliyiz.

$F_A \in \tau' \Rightarrow \exists\, G_A \in \tau : F_A = X_i \wedge G_A \Rightarrow X_i \cap G_A \in \tau_i \Rightarrow F_A \in \tau_i$

$H_A \in \tau_i$ ve $\tau_i \subseteq \tau \Rightarrow H_A \in \tau$ ve $H_A \subseteq X_i \Rightarrow H_A = H_A \wedge X_i \,; H_A \in \tau \Rightarrow H_A \in \tau'$

O halde $\tau_i = \tau'$ olur.

Tanım: Bulanık topolojik uzaylardan oluşan $\{(X_i, \tau_i)\}$; $i \in \Lambda$ ailesi ayrık ve $X = \bigvee X_i$ olsun, yanı $\uplus X_i$ bulanık topolojik toplam olsun. $F_A, G_A \in I^X$ bulanık alt kümeleri verilsin. Eğer $F_A \subseteq H_A \subseteq G_A : H_A \in \tau$ varsa G_A kümesine F_A kümeye bir komşuluğu denir. F_A 'nın tüm bulanık komşuluklarının ailesi $\mathcal{N}_X(F_A)$ ile gösterilir.

$\mathcal{N}_X(F_A) = \{\, N_A \vee G_A : N_A \in \mathcal{N}_{X_i}(F_A) \,, G_A \in I^X \,\}$
olur. Burada $\mathcal{N}_{X_i}(F_A)$, F_A öğesinin (X_i, τ_i) uzayındaki komşulukları ailesidir.

Teorem: $F_A \in \mathrm{I}^X$ kümesi bulanık açıktır $\Leftrightarrow F_A$ bulanık kümesi her bir bulanık alt kümesinin bir komşuluğudur.

İspat:

$\Longrightarrow$: F_A bulanık açık , yanı $F_A \in \tau$ *ve* $G_A \subseteq F_A$ olsun. ${F_A}^1 \subseteq F_A \subseteq F_A$ yazılabildiğinden F_A , ${F_A}^1$ bulanık kümesinin bir komşuluğu olur.

$\Longleftarrow$: Tersine F_A her alt kümesinin bir komşuluğu ise ${F_A}^1 \subseteq G_A \subseteq F_A$ olacak şekilde G_A bulanık açık kümesi mevcudtur. Buradan,

$G_A = \bigvee {F_A}^1 \subseteq G_A \subseteq \bigvee F_A = \{F_A : {F_A}^1 \subset F_A\}$

olur. Bu nedenle F_A kümesi G_A bulanık açık kümelerinin bir birleşimi ve böylece F_A bulanık açıktır.

Örnek 15:

$X = \{a, b, c, d\}$, $X_1 = \{a, b\}$, $X_2 = \{c, d\}$ olsun . X_1 kümesi üzerinde tanımlı bulanık kümeler, $R_{X1}^1 = \{(a, 0.1), (b, 0.6)\}$ ve $R_{X1}^2 = \{(a, 0), (b, 0.4)\}$ olarak verilsin. Bu durumda, $\tau_1 = \{\, 0_{X1}, 1_{X1}, R_{X1}^1, R_{X1}^2\}$, X_1 üzerinde bir bulanık topoloji olur. X_2 kümesi üzerinde tanımlı bulanık kümeler :

$T_{X2}^1 = \{(C, 0), (d, 1)\}$

$T_{X2}^2 = \{\, (c, 0.3), (d, 0.5) \,\}$

$T_{X2}^1 \wedge T_{X2}^2 = \{\, (c, 0), (d, 0.5) \,\} = T_{X2}^3$

$T_{X2}^1 \vee T_{X2}^2 = \{(c, 0.3), (d, 1)\} = T_{X2}^4$

olsun. O halde,

$\tau_2 = \{\, 0_{X2}, 1_{X2}, T_{X2}^1, T_{X2}^2, T_{X2}^3, T_{X2}^4 \,\}$, X_2 üzerinde bir bulanık topoloji olur. $X = \uplus X_i$ toplamı üzerindeki bulanık topoloji ise

$$\tau = \left\{ \begin{matrix} 0_X, 1_X, 1_{X2}, 1_{X1}, R_{X1}^1, R_{X1}^2, T_{X2}^1, T_{X2}^2, T_{X2}^3, T_{X2}^4, \\ R_{X1}^1 \vee T_{X2}^1, R_{X1}^1 \vee T_{X2}^2, R_{X1}^1 \vee T_{X2}^3, R_{X1}^1 \vee T_{X2}^4, \\ R_{X1}^2 \vee T_{X2}^1, R_{X1}^2 \vee T_{X2}^2, R_{X1}^2 \vee T_{X2}^3, R_{X1}^2 \vee T_{X2}^4 \end{matrix} \right\}$$

ve

$$\mathcal{N}(R_{X1}^1) = \left\{ \begin{matrix} R_{X1}^1, R_{X1}^1 \vee T_{X2}^1, R_{X1}^1 \vee T_{X2}^2, R_{X1}^1 \vee T_{X2}^3, R_{X1}^1 \vee T_{X2}^4, \\ \{(a, 0.2), (b, 0.6)\}, \{(a, 0.3), (b, 0.6)\}, \ldots \\ \{(a, 0.2), (b, 0.7)\}, \{(a, 0.3), (b, 0.7)\}, \ldots \end{matrix} \right\}$$

olarak bulunur.

Tanım: $X = \uplus X_{\mathrm{i}}$ bulanık topolojik toplamını alalım. (X, τ) bulanık uzayının bir $F_A \in I^X$ bulanık alt kümesi düşünelim. F_A kümesinin kapanışı F_A kümesini kapsayan bütün bulanık kapalı kümelerin arakesitidir ve $\overline{F_A}$ ile gösterilir. Sonuç olarak $\overline{F_A}$, F_A kümesini barındıran en küçük bulanık kapalı kümedir. Diğer bir ifade ile

Int. J. Pure Appl. Sci. 9(1);197-208 (2023)

ijpas@munzur.edu.tr
ISSN: 2149-0910

Research article/Araştırma makalesi
DOI:10.29132/ijpas.1269744

$\overline{F_A} = \{ \wedge K_A : F_A \subset K_A \text{ ve } K_A{}' \in \tau\}$

bulanık kümesidir.

Tanım: $\{(\mathrm{X_i}, \tau_\mathrm{i}\}, \mathrm{i} \in \Lambda$ ailesinin bulanık topolojik toplamı olan (X, τ) bulanık topolojik uzayı için, $F_A \subset I^X$ ve $p \in F_A$ olsun. Eğer p 'nin, F_A' nın içinde kalan uygun bir komşuluğu varsa p 'ye F_A nın bulanık iç noktası denir. f_A nın tüm bulanık iç noktalarının kümesine F_A'nın içi denir ve $F_A{}^{o}$ ile gösterilir. $F_A{}^{o} = \vee\{G_A \subset F_A : G_A \in \tau\}$ olduğu açıktır.

Örnek 16: $\mathrm{X} = \{a, b, c\}$, $X_1 = \{a\}$, $X_2 = \{b, c\}$ olsun . X_1 kümesi üzerinde tanımlı bulanık kümeler $T_{X1}^1 = \{(a, 0.5)\}$ ve $T_{X1}^2 = \{(a, 0.3)\}$ olarak verilsin . Bu durumda $\tau_1 = \{ 0_{X1}, T_{X1}^1, T_{X1}^2\}$ olur. X_2 kümesi üzerinde tanımlı bulanık kümeler :

$D_{X2}^1 = \{(b, 0.1), (c, 0.5)\}$

$D_{X2}^2 = \{ (b, 0.4), (c, 1) \}$

olmak üzere $\tau_2 = \{ 0_{X2}, 1_{X2}, D_{X2}^1, D_{X2}^2\}$ X_2 üzerinde topoloji olur ve $X = \uplus X_i$ Bulanık topolojik toplamı üzerindeki bulanık topoloji

$$\tau = \begin{Bmatrix} 0_X, 1_X, 1_{X2}, 1_{X1}, T_{X1}^1, T_{X1}^2, D_{X2}^1, D_{X2}^2, \\ T_{X1}^1 \cup D_{X2}^1, T_{X1}^1 \cup D_{X2}^2, T_{X1}^2 \cup D_{X2}^1, T_{X1}^2 \cup D_{X2}^2 \end{Bmatrix}$$

$$= \begin{Bmatrix} 0_X, 1_X, 1_{X2}, 1_{X1}, T_{X1}^1, T_{X1}^2, D_{X2}^1, D_{X2}^2 \\ \{(a, 0.5), (b, 0.1), (c, 0.5)\}, \{(a, 0.5), (b, 0.4), (c, 1)\} \\ \{(a, 0.3), (b, 0.1), (c, 0.5)\}, \{(a, 0.3), (b, 0.4), (c, 1)\} \end{Bmatrix}$$

şeklinde bulunur ve bulanık kaplı kümeler ailesi

$$F = \begin{Bmatrix} 0_X, 1_X, 1_{X2}, 1_{X1}, \{(a, 0.5)\}, \{(a, 0.7)\}, \\ \{(b, 0.9), (c, 0.5)\}, \{(a, 0.5), (b, 0.6), (c, 0)\} \\ \{(b, 0.6), (c, 0)\}, \{(a, 0.5), (b, 0.9), (c, 0.5)\}, \\ \{(a, 0.7), (b, 0.9), (c, 0.5)\}, \{(a, 0.7), (b, 0.6), (c, 0)\} \end{Bmatrix}$$

şeklindedir. $E = \{(a, 0.5), (b, 0.6), (c, 1)\}$ bulanık kümesi için $E^{o} = \{(a, 0.5), (b, 0.4), (c, 1)\}$ ve $\overline{E} = 1_X$ bulunur.

Tanım: $\{(X_i, \tau_i)\}$; $i \in \Lambda$ ailesinin bulanık topolojik toplamı $(X. \tau)$ olmak üzere, $(X. \tau)$ bulanık topolojik uzayında $\beta \subseteq \tau$ alt ailesi için eğer X'in her bulanık açık kümesi β nin bazı elemanlarının birleşimi olarak yazılabiliyorsa, β ailesine τ bulanık topolojisinin bir tabanı diyeceğiz.

Örnek 17: $\mathrm{X} = \{m, n, r\}$, $X_1 = \{m\}$, $X_2 = \{n\}$, $X_3 = \{r\}$ olsun. X_1 kümesi üzerinde tanımlı bulanık kümeler $M_{X_1}^1 = \{(m, 0.1)\}$ ve $1_{X_1} = \{(m, 1)\}$ olmak üzere $\tau_1 = \{ 1_{X_1}, 0_{X_1}, M_{X_1}^1 \}$ bir bulanık topolojidir. X_2 kümesi üzerinde tanımlı bulanık kümeler $N_{X_2}^1 = \{(n, 0.2)\}$ ve $1_{X_2} = \{(n, 1)\}$ olmak üzere $\tau_2 = \{ 1_{X_2}, 0_{X_2}, N_{X_2}^1 \}$ de X_2 üzerinde bir bulanık topoloji olur. X_3 kümesi üzerinde ayrık olmayan bulanık topoloji ise $\tau_3 = \{ 1_{X_3}, 0_{X_3} \}$ ile verilsin. $X = \uplus X_i$ bulanık topolojik toplamı üzerindeki bulanık topoloji:

$$\tau = \begin{Bmatrix} 1_X, 0_X, 1_{X_1}, 1_{X_2}, 1_{X_3}, M_{X_1}^1, N_{X_2}^1, M_{X_1}^1 \vee N_{X_2}^1, \\ M_{X_1}^1 \vee 1_{X_2}, M_{X_1}^1 \vee 1_{X_3}, N_{X_2}^1 \vee 1_{X_1}, N_{X_2}^1 \vee 1_{X_3} \end{Bmatrix}$$

olarak elde edilir. Böylece $\mathcal{B} = \{ 0_X, 1_{X_1}, 1_{X_2}, 1_{X_3}, M_{X_1}^1, N_{X_2}^1 \}$ ailesi τ için bir taban olur.

Teorem: (X, τ) bulanık topolojik uzayı ve $\beta \subseteq \tau$ ailesi verilsin.

β, τ için bir taban olur $\Leftrightarrow$ $\forall F_A \in \tau$ ve $G_A \subseteq F_A$ için $\exists B_A \subseteq \beta : G_A \subseteq B_A \subseteq F_A$

İspat:

$\Rightarrow$ β, τ için bir taban, $F_A \in \tau$ ve $G_A \subseteq F_A$ olsun .

Bu durumda varsayımdan öyle bir takım $B_i \in \beta$ öğeleri bulunabilirki : $F_A = \vee B_i$ yazarız. $G_A \subseteq F_A$ dan $G_A \subseteq \vee B_i$ ve buradan $G_A \subseteq B_j \subseteq F_A$ şeklinde bir $B_j \in \beta$ elemanının var olduğu açıkça görünür.

$\Leftarrow$ Diğer taraftan, her $F_A \in \tau$ ve her $G_A \subseteq F_A$ için $\exists B_A \subseteq \beta : G_A \subseteq B_A \subseteq F_A$ yazabildiğimizi varsayalim. Buna göre,

$F_A = \vee\{G_A\} \subseteq \vee B_A \subseteq F_A$ ve bu nedenle $F_A = \{\vee B_A : G_A \subseteq F_A\}$ yazabiliriz ve buna göre β ailesi τ için bir tabandır.

SONUÇLAR

Bu çalışmada bulanık topoloji ve topolojik kavramlar baz alınarak bulanık topolojik toplamlar tanımı verildi ve örneklendirildi. Bulanık topolojik

IJPAS
ijpas@munzur.edu.tr
ISSN: 2149-0910

Research article/Araştırma makalesi
DOI:10.29132/ijpas.1269744

toplamlar için bazı sonuçlar elde edildi. Bulanık topolojik toplamlar için elde edilen ifadelerin aslında topolojik toplamlarda elde edilen sonuçların bir genişlemesi olduğu sonucuna varıldı. Dolayısıyla klasik topolojiyi, elemanlara ait olma derecesi 0 veya 1 olduğunda, bulanık topolojinin özel bir durumu olarak düşünülebilir.

Bu çalışmanın devamı olarak bulanık topolojik uzayların toplamında ayırma aksiyomları, bağlantılılık ve kompaktlık gibi kavramlar da incelenebilir.

ÇIKAR ÇATIŞMASI BEYANI

Yazarlar bu makale ile ilgili herhangi bir çıkar çatışması bildirmemektedir.

ARAŞTIRMA VE YAYIN ETİĞİ BEYANI

Yazarlar bu çalışmanın araştırma ve yayın etiğine uygun olduğunu beyan eder.

KAYNAKLAR

Al-shami, T.M., Ljubiša D. R. Koˇcinac ve Baravan A. Asaad (2020), Sum of soft topological spaces. Mathematics, 8, 990.

Al-shami, T.M. ve Mhemdi, A. (2023) Generalized frame for orthopair fuzzy sets: (m,n)-Fuzzy Sets and their applications to multi-criteria decision-making methods. Information, 14, 56.

Atay, A. (2010) Topolojik Toplamlar ve Bazı Sonuçlar (yüksek lisans tezi). Diyabakır: Dicle Üniversitesi, Fen Bilimler Enistitüsü.

Atay, A. (2023) Disjoint union of fuzzy soft topological spaces. AIMS Mathematics, 8(5), 10547–10557.

Chang, C. (1968) Fuzzy topological spaces. Journal of Mathematical Analysis and Application, 24(1), 182-190.

Dobois, D. ve Prade, H. (1980) Fuzzy sets and dystems:Theory and Applications. Boston: Academic Press.

Kerre, E., Mshhour, A. ve Ghanim, M. (1984) Separation Axioms, Subspaces and Sums in Fuzzy Topology. Journal of Mathematical Analaysis and Applications, 102(1), 189-202.

Lowen, P. (1976) Fuzzy Topological Spaces and Fuzzy Compactness. Journal of Mathematical Analysis and Applications, 56(3), 621-633.

Ming, L. ve Ming, P. (1980) Fuzzy Topology. I. Neighborhood Structure of a Fuzzy Point and Moore-Smith Convergence. Journal of Mathematical ve Applications, 76(2), 571-599.

Nasrin, R. ve Zahan, I. (2021) An Introduction to Fuzzy Topological Spaces. Advances in Pure Mathematics, 11(5), 483-501.

Palaniappan, N. (2002), Fuzzy Topology, Alpha Scie. Int. Lyd., 179 sf.

Shostak, A. P. (1996), Basıc Structures of Fuzzy Topology, J. Math. Sci. 78(6), 662-701.

Shostak, A. P. (1989), “Two decades of fuzzy topology: basic ideas, notions, and results”, Uspekhi Mat. Nauk, 44:6(270), 99–147; Russian Math. Surveys, 44:6, 125–186.

Ying-ming, L. ve Mao-kang, L. (1998), Fuzzy Topology, World Sci., Sichuan Union University, China, 353 sf.

Zadeh, L. (1965) Fuzzy sets. Information and control, 8, 338-353.