RASGELE SIKIŞTIRMA YOLUYLA WEIBULL DAĞILIMININ YENI BIR KARAKTERIZASYONU

Sevgi YURT ÖNCEL* Fazıl ALİEV ALİOĞLU** Funda AYGÜN*

ÖZET

Bu çalışmada Wesolowski ve Ahsanullah (2003) tarafından öne sürülen rasgele sıkıştırma tekniği ele alınmıştır. Rekor değerlerin dağılım fonksiyonu için yeni bir ardışık ilişki bulunmuş ve bu ilişki yardımıyla Weibull dağılımı için yeni bir karakterizasyon verilmiştir.

Anahtar Kelimeler: *Rekor değer, rasgele sıkıştırma, karakterizasyon, Power dağılımı, Weibull dağılımı*

1. GİRİŞ

$X_1, X_2, ..., X_n, ...$ birbirinden bağımsız ve aynı mutlak sürekli $F(x)$ dağılımına sahip rasgele değişkenler olsun.

Eğer $X_j > \max(X_1, X_2, ..., X_{j-1})$ ise X_j'ye $X_1, X_2, ..., X_n, ...$dizisinin j. rekor değeri denir. $U(n)$, n. rekor zamanı ve $X_{U(n)}$, n. rekor değer olmak üzere ,

$$U(1) = 1,\ U(n)=\min\{j : j > U(n-1), X_j > X_{U(n-1)}\}, n \geq 1 \tag{1}$$

olarak tanımlanır. $X_{U(1)}, X_{U(2)}, \ldots$ dizisine rekor değerler dizisi denir.

k.rekor değer $X_{U(k)}$'nın dağılım fonksiyonu $F_k(x)$ ve olasılık yoğunluk fonksiyonu $f_k(x)$ olmak üzere,

$$F_k(x) = P(X_{U(k)} \leq x) = \int_{-\infty}^{x} \frac{(R(u))^{k-1}}{(k-1)!} dF(u) \tag{2}$$

* Kırıkkale Üniversitesi Fen Edebiyat Fakültesi İstatistik Bölümü (syoncel@kku.edu.tr)
** Başkent Üniversitesi Mühendislik Fakültesi Endüstri Mühendisliği Bölümü

ve

$$f_k(x) = \frac{1}{(k-1)!}(R(x))^{k-1} f(x) \tag{3}$$

dır ve burada $R(x) = -\ln(1 - F(x))$ dır (Ahsanullah, 1995).

Rasgele sıkıştırma tekniği, sıra istatistikleri için Nevzorov (2001), rekor değerler için Wesolowski ve Ahsanullah (2003) tarafından kullanılmıştır. Rekor değerler hakkında Chandler (1952), Ahsanullah (1995), Arnold, Balakrishnan ve Nagaraja (1998), Balakrishnan ve Rao (1998) tarafından yapılan çalışmalar literatürde önemli bir yer tutmaktadır.

Rasgele sıkıştırma tekniği şöyle ifade edilebilir: U, sürekli F dağılımına sahip rasgele değişken ve X, U'dan bağımsız pozitif bir rasgele değişken olsun. Bu durumda XU'nun dağılımı, X'in dağılımının sıkıştırılmışıdır.

Bu çalışmada yeni bir rasgele sıkıştırma biçimi geliştirilmiş ve bunun aracılığıyla Weibull dağılımının yeni bir karakterizasyonu verilmiştir. Özel olarak U'nun dağılımı Power dağılımı olarak seçilmiştir. Buna gore a ve α pozitif parametreleriyle Power dağılımının olasılık yoğunluk fonksiyonu

$$f(x) = \alpha a^{-\alpha} x^{\alpha-1} I_{(0,a)}(x) \tag{4}$$

dir ve kısaca Power(a,α) olarak gösterilir. Eğer a=1 olarak seçilirse (4) eşitliği

$$f(x) = \alpha x^{\alpha-1} I_{(0,1)}(x) \tag{5}$$

olarak ele alınır. Weibull dağılımının olasılık yoğunluk fonksiyonu ise

$$f(x) = \lambda\beta\, x^{\beta-1} \exp\{-\lambda x^{\beta}\} I_{(0,\infty)}(x), \quad \lambda > 0, \quad \beta > 0 \tag{6}$$

dır ve kısaca Weibull(λ, β) olarak gösterilir.

2. REKOR DEĞERLERİN DAĞILIM FONKSİYONU İÇİN ARDIŞIK BİR İLİŞKİ

k.rekor değer $X_{U(k)}$'nın dağılım fonksiyonunda $t = R(u)$ dönüşümü yapılırsa (2) eşitliği ,

$$F_k(x) = \int_0^{R(x)} \frac{t^{k-1}}{(k-1)!} e^{-t} dt, \quad -\infty < x < \infty$$

olarak elde edilir. Ahsanullah (1995) tarafından

$$\overline{F}_k(x) = \overline{F}(x)\sum_{j=0}^{k-1}\frac{(R(x))^j}{j!} = e^{-R(x)}\sum_{j=0}^{k-1}\frac{(R(x))^j}{j!} \tag{7}$$

olduğu gösterilmiştir. Burada $\overline{F}(x) = 1 - F(x)$ dır.

Buna gore (7) eşitliği kullanılarak ardışık iki rekor değerin dağılım fonksiyonları arasındaki fark

$$F_k(x) - F_{k+1}(x) = \overline{F}(x)\frac{(R(x))^k}{k!} \quad , \forall\, k \geq 1 \text{ için} \tag{8}$$

olarak elde edilmiştir.

3. KARAKTERİZASYON TEOREMİ

Bu bölümde Power dağılımının sıkıştırması ile Weibull dağılımının karakterizasyonu hakkında yeni bir teorem verilecektir.

Teorem: U rasgele değişkeni $Power(1;\alpha)$, $\alpha > 0$ dağılımına sahip olsun. $X_1, X_2, \ldots$ birbirinden bağımsız ve aynı dağılıma sahip pozitif rasgele değişkenler dizisi, U rasgele değişkeninden bağımsız olmak üzere, X_1 rasgele değişkeninin $\lambda > 0$ ve keyfi $k \in \{1,2,\ldots\}$ için $Weibull(\lambda, \alpha / k)$ dağılımına sahip olması için gerek ve yeter koşul,

$$X_{U(k)} \overset{d}{=} X_{U(k+1)}U. \tag{9}$$

dir.

İspat: Gereklilik kısmı için; $\lambda > 0$, $\alpha > 0$ olmak üzere X_1'in dağılımı Weibull$\left(\lambda, \beta = \dfrac{\alpha}{k}\right)$ ve U'nın dağılımı Power$(1,\alpha)$ olsun. (6) eşitliğinden X_1'in dağılım fonksiyonu $F(x) = 1 - e^{-\lambda x^\beta}$ ve $R(x) = \lambda x^\beta$ dir. Buna göre;

$X_{U(k+1)}U$'nın dağılım fonksiyonu,

$$P(X_{U(k+1)}U < x) = \int_0^1 F_{k+1}(x/u)\alpha u^{\alpha-1}du \tag{10}$$

(10) eşitliği ile verilen integralde $t = \dfrac{x}{u}$ değişimi yapılırsa

$$= x^\alpha \int_x^\infty F_{k+1}(t)\alpha t^{-\alpha-1}dt \tag{11}$$

elde edilir. (11) eşitliği ile verilen integralde $u = F_{k+1}(t)$ ve $dv = \alpha t^{-\alpha-1} dt$ $v = -t^{-\alpha}$ dönüşümü yapılırsa,

$$= x^{\alpha}[-F_{k+1}(t)t^{-\alpha}\Big|_x^{\infty} + \int_x^{\infty} f_{k+1}(t)t^{-\alpha}dt] = F_{k+1}(x) + x^{\alpha}\int_x^{\infty} f_{k+1}(t)t^{-\alpha}dt \tag{12}$$

elde edilir. k. rekor değerin olasılık yoğunluk fonksiyonu,

$$f_k(t) = (R(x))^{k-1} f(x)/(k-1)! = \frac{\beta(\lambda x^{\beta})^k Exp(-\lambda x^{\beta})}{x(k-1)!} \tag{13}$$

dir. Buna göre $(k+1)$. rekor değerin olasılık yoğunluk fonksiyonunu (12) eşitliğinde yerine yazılırsa,

$$F_{k+1}(x) + x^{\alpha}\int_x^{\infty}\frac{\beta(\lambda t^{\beta})^{k+1} Exp(-\lambda t^{\beta})}{tk!}t^{-\alpha}dt = F_{k+1}(x) + x^{\alpha}\int_x^{\infty}\frac{\beta(\lambda t^{\beta})^{k+1} Exp(-\lambda t^{\beta})}{k!}t^{-\alpha-1}dt \tag{14}$$

elde edilir. (14) eşitliğinde yer alan integral içindeki ifadede $\beta = \alpha / k$ veya $\alpha = \beta k$ yazılırsa,

$$F_{k+1}(x) + x^{\beta k}\int_x^{\infty}\frac{\beta\lambda^{k+1}t^{\beta-1}Exp(-\lambda t^{\beta})}{k!}dt \tag{15}$$

elde edilir. (15) eşitliğinde yer alan integrali alabilmek için

$$\frac{d}{dt}\left[-\frac{\lambda^k \exp(-\lambda t^{\beta})}{k!}\right] = \frac{\beta\lambda^{k+1}t^{\beta-1}\exp(-\lambda t^{\beta})}{k!}$$

türevinden yararlanılırsa (15) eşitliği,

$$F_{k+1}(x) + x^{\beta k}\left[-\frac{\lambda^k \exp(-\lambda t^{\beta})}{k!}\Big|_x^{\infty}\right] = F_{k+1}(x) + \frac{(\lambda x^{\beta})^k \exp(-\lambda x^{\beta})}{k!} \tag{16}$$

olarak bulunur. (8) formülüne gore,

$$F_k(x) - F_{k+1}(x) = \frac{(\lambda x^{\beta})^k \exp(-\lambda x^{\beta})}{k!}$$

olduğundan (16) formülü k. rekor değerin dağılım fonksiyonu $F_k(x)$'e eşittir.

Yeterlilik kısmı için (5) ve (9) eşitliğinden $x > 0$ için,

$$F_k(x) = \int_0^1 F_{k+1}(x/u)\alpha u^{\alpha-1} du \tag{17}$$

yazılır.

$a = \sup\{x > 0 : F(x) < 1\}$ olsun. $a < \infty$ olması durumunda($a = \infty$ da seçilebilir) (17) eşitliği ile verilen integral parçalanıp $t = x/u$ dönüşümü yapılırsa,

$$\begin{aligned} F_{k(x)} &= \int_0^{x/a} F_{(k+1)}(x/u)\alpha u^{\alpha-1} du + \int_{x/a}^{1} F_{(k+1)}(x/u)\alpha u^{\alpha-1} du \\ &= \int_0^{x/a} \alpha u^{\alpha-1} du + \alpha \int_x^a F_{(k+1)}(t) x^{\alpha} t^{-\alpha-1} dt \\ &= x^{\alpha}/a^{\alpha} + \alpha x^{\alpha} \int_x^a F_{k+1}(t) t^{-\alpha-1} dt \end{aligned} \tag{18}$$

elde edilir. (18) eşitliğinin her iki tarafından x' e göre türev alınır,

$$\begin{aligned} f_k(x) &= \alpha x^{\alpha-1}/a^{\alpha} + \alpha^2 x^{\alpha-1} \int_x^a F_{k+1}(t) t^{-\alpha-1} dt - \alpha x^{-1} F_{k+1}(x) \\ &= \alpha x^{-1}\left[x^{\alpha}/a^{\alpha} + \alpha x^{\alpha} \int_x^a F_{k+1}(t) t^{-\alpha-1} dt - F_{k+1}(x) \right] \end{aligned} \tag{19}$$

ve (18) eşitliği, (19) eşitliğinde yerine konduğunda,

$$x f_k(x) = \alpha\left[F_k(x) - F_{k+1}(x)\right] \tag{20}$$

elde edilir.

Şimdi her $0 < x < a$ için $R(x) > 0$ veya denk olarak $F(x) > 0$ olduğunu gösterelim. (17) eşitliğinin sağ tarafındaki integral, $u \to 0$ için pozitif olduğundan negatif olmayan sürekli fonksiyondur. Böylece $0 < x < a$, $F_k(x) > 0$ dır.

(3) ve (8) eşitlikleri (20) eşitliğinde yerine konursa

$$x\frac{(R(x))^{k-1}}{(k-1)!}f(x)=\alpha\overline{F}(x)\frac{(R(x))^{k}}{k!},$$

$$\frac{dF(x)}{1-F(x)}=\frac{\alpha}{xk}R(x),$$

$$\frac{R'(x)}{R(x)}=\frac{\alpha}{xk},$$

$$\ln R(x)=\ln x^{\alpha/k}+\ln c,$$

$$R(x)=cx^{\alpha/k},\quad c>0$$

$$1-F(x)=\exp\{-R(x)\}=\exp\{-cx^{\alpha/k}\}$$

olmak üzere

$$F(x)=1-\exp\{-cx^{\alpha/k}\},\ x>0\quad \text{(c keyfi)}$$

elde edilir ve $a=\infty$ için $F(a)=1$ dır.

Böylece, $F(x)=1-\exp\{-cx^{\alpha/k}\}$, $x\geq 0$ olmak üzere $\lambda=c,\beta=\alpha/k$ parametreli Weibull dağılımı elde edilir.

4. SONUÇ

Rekor değerler yardımıyla dağılımların karakterizasyonu problemi, istatistik teorisinde önemli bir yer tutmaktadır. Bunun nedeni, verilen karakterizasyonlar sayesinde örneklemin özelliklerini kullanarak dağılım hakkında bilgi edinmek ve tersine, dağılımı bildiğimizde örneklemin bazı özelliklerini söyleyebilmektir. Öngörü problemlerinin çözümü için rekorların yardımıyla verilen karakterizasyonlar hakkında son yıllarda pek çok çalışmanın yapıldığı ve daha çok sürekli dağılımlar üzerinde durulduğu görülmüştür.

Bu çalışmada rekor değerleri kullanarak Weibull dağılımı için karakterizasyon sonucu, yeni bir teorem ile verilmiştir. Bu karakterizasyonu verirken rasgele değişkenlerin sıkıştırılması tekniği kullanılmıştır.

KAYNAKLAR

AHSANULLAH, M. (1995), *Record Statistics*, Nova Science Publishers Inc. Commack, NY.

CHANDLER, K.N. (1952),*The distribution and frequency of record values*, J.Roy. Statist. Soc. Series B,14,220-228.

ARNOLD, B.C., BALAKRISHNAN, N.and NAGARAJA, H.N., (1998), *Records*, John Wiley&Sons. New York.

BALAKRISHNAN, N. and RAO, C.R. (1998), *Handbook of Statistics*,16.

NEVZOROV, V.B. (2001), *Records*: Mathematical Theory. Translations of Mathematical Monographs 194, American Mathematical Society Providence.

WESOLOWSKI, J. AND AHSANULLAH, M. (2003), *Switching Order Statistics Through Random Power Contractions*, Australian and New Zealand Journal of Statistics ,In Pres.

A NEW CHARACTERIZATIONS OF WEIBULL DISTRIBUTION VIA RANDOM CONTRACTIONS

ABSTRACT

In this paper we investigate a random contraction scheme proposed by Wesolowski and Ahsanullah (2003). The distributional recurrence relations found for the distribution functions of record statistics. This reccurrence relations leads to new characterizations of Weibull distributions.

Key Words: *Record statistics, random contraction, characterization, Power distribution, Weibull distribution.*