

GAZİ

JOURNAL OF ENGINEERING SCIENCES

Elastic Analysis of Functionally Graded Rotating Spherical Pressure Vessels

Durmuş Yarımabuç^a, Mehmet Eker^b, Aybegüm Çalışkan^c

Submitted: 16.04.2023 Revised: 10.07.2023 Accepted: 04.08.2023 doi:10.30855/gmbd.0705080

ABSTRACT

Keywords: Thick-walled sphere, rotating sphere, Functionally graded materials, Halpin-Tsai method, Pseudospectral Chebyshev method

^a Osmaniye Korkut Ata University,
Faculty of Arts and Sciences,
Dept. of Mathematics
80000 - Osmaniye, Türkiye
Orcid: 0000-0002-8763-1125

^b Tarsus University,
Engineering Faculty,
Dept. of Mechanical Engineering
33400 - Mersin, Türkiye
Orcid: 0000-0002-6785-1710
e mail: mehmeteker@tarsus.edu.tr

^c Osmaniye Korkut Ata University,
Faculty of Arts and Sciences,
Dept. of Mathematics
80000 - Osmaniye, Türkiye
Orcid: 0000-0002-8515-7466
e mail: aybegum.mat@gmail.com

*Corresponding author:
durmusyarimpabuc@osmaniye.edu.tr

Anahtar Kelimeler: Kalın cidarlı küre, Dönen küre, Fonksiyonel dereceli malzemeler, Halpin-Tsai yöntemi, Pseudospektral Chebyshev yöntemi

In this study, elastic analysis of functionally graded rotating hollow spherical pressure vessels is investigated. It is assumed that the material properties of these structures, thought to be formed gradually from a mixture of metal and aluminum in the radial direction, are graded using the Halpin-Tsai homogenization scheme. These conditions result in an variable coefficient boundary value problem that may difficult to be solved by conventional analytical methods. The solution to this problem is handled by the Pseudospectral Chebyshev Method. Based on the differential matrix approach, this method transforms the differential equation into a linear equation system, making it easily solvable by any decomposition method. The solutions available in the literature are used to validate the results. The effects of internal pressure and rotation with a mixture of randomly selected metal and aluminum on the stress and displacement distributions are demonstrated.

Kalın Cidarlı Fonksiyonel Dereceli Dönen Küresel Basıncılı Kapların Elastik Analizi

ÖZ

Bu çalışmada fonksiyonel derecelendirilmiş, dönen, kalın cidarlı küresel basınçlı kaplar elastik olarak incelenmiştir. Radyal doğrultuda metal ve alüminyum karışımından oluşan kürenin malzeme özelliklerinin Halpin-Tsai homojenleştirme şeması kullanılarak derecelendirildiği varsayılmıştır. Bu koşullar, geleneksel analitik yöntemlerle çözülmesi zor, değişken katsayılı sınır değer problemi ile sonuçlanır. Problemin çözümü pseudospektral Chebyshev yöntemi ile ele alınmıştır. Diferansiyel matris yaklaşımına dayanan bu yöntem, diferansiyel denklemi doğrusal bir denklem sistemine dönüştürerek herhangi bir ayrıştırma yöntemiyle kolayca çözülebilir hale getirir. Elde edilen sonuçları doğrulamak için literatürde mevcut analitik çözümler kullanılmıştır. Rastgele seçilen metal ve alüminyum karışımı ile iç basınç ve döndürmenin gerilme ve yer değiştirme dağılımları üzerindeki etkileri gösterilmiştir.

1. Giriş (Introduction)

Kalın cidarlı basınçlı kaplar kimya, petrol, nükleer ve havacılık alanlarında yaygın kullanım alanına sahip ekipmanlardır. Genellikle silindirik ve küresel geometriye sahip olan kalın cidarlı kaplar, birçok mühendislik tasarımında ortak bir yapısal bileşen olarak kullanılmaktadır. İç/dış basınç, sıcaklık, döndürme ve manyetik alan gibi etkilerin bir veya birden çoğunun etkisinde çalışan bu tür mühendislik elemanları, yapısal başarımlarını belirleyecek yer değiştirme, gerinim ve gerilmelere maruz kalmaktadır. Bu nedenle, bu yapıların malzeme tasarımları yüksek basınç/sıcaklık, korozif ortamlar, dönme ve kırılmaya da dayanacak şekilde yapılmalıdır.

Teknolojideki hızlı ilerleme, mühendislik elemanları için de zorlu işletme koşullarını beraberinde getirmektedir. Bu durum da tasarımların daha özgün olmasını ve tercih edilecek malzemelerin daha yetkin olmasını gerekli kılmaktadır. Özelliklerinde dereceli bir değişim sergileyen fonksiyonel dereceli malzemeler hem yapı için hem de çevresel koşullara dayanıklı tabakalı kompozitlere alternatif olarak geliştirilmeye ve birçok alanda kullanılmaya başlanmıştır [1-3]. Fonksiyonel derecelendirilmiş malzemelerin bileşimi homojen olmadığı için elastisite modülü, Poisson oranı, yoğunluğu ve akma dayanımı gibi tüm özellikleri makroskobik anlamda bir yüzeyden diğerine sürekli değişebilmektedir. Özel kompozit sınıfı malzeme kategorisinde yer alan ve üretimi daha zor olan bu malzemelerin üretilmeden önce özelliklerinin iyi tanımlanması gerekmektedir. Genellikle metal-seramik ve metal-metal kombinasyonları şeklinde oluşan bu malzemelerin özelliklerinin etkili bir şekilde tahmin edilmesinde birçok malzeme modeli mevcuttur ve yeni modeller oluşturmak için araştırmalar devam etmektedir [4-6]. Katı mekaniği bakış açısından da fonksiyonel derecelendirilmiş malzemeler (FGM'ler) homojen olmayan elastik ortamlardır.

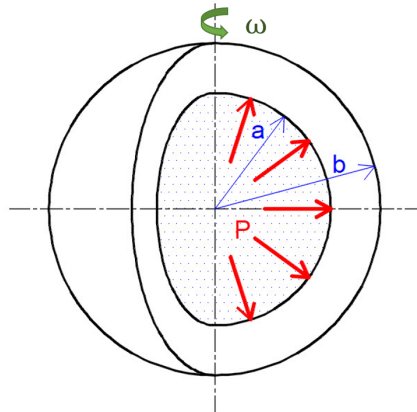
Literatürde fonksiyonel derecelendirilmiş küresel basınçlı kapların elastik analizi ile ilgili birçok çalışma mevcuttur. Bu çalışmalarda analitik çözüm ancak Poisson oranını sabit tutulması ve derecelendirme için belirli fonksiyonların (kuvvet/üstel) seçilmesi ile mümkündür [7, 12]. Benzer kabullerle Çelebi, ve ark., eksponansiyel derecelendirilmiş kürenin ısilelastik analizini tamamlayıcı fonksiyonlar yöntemi ile sayısal olarak yapmışlardır [13]. Elastik modülü ile yoğunluk özelliklerinin aynı oranda derecelendirildiği varsayılan bu çalışmalar, matematiksel olarak mümkün olmasına karşın, fiziksel olarak böyle bir malzemenin tanımlanması konusunda zorluk yaşanmaktadır. Bunlarla birlikte literatürde, sadece sabit bir açısız hızla dönen [14], sadece manyetik alana maruz [15] ve her ikisinin etkilerini [16] dikkate alan elastik analizler de tartışılmıştır. Chen ve Lin, çeşitli fonksiyonlarla (eksponansiyel, üstel, sinüzoidal vb.) derecelendirildiği varsayılan kalın silindir ve kürenin elastik analizini yer değiştirme fonksiyonunu temel alan sayısal bir entegrasyon yöntemi ile yapmışlardır [17], [18]. İç ve dış yüzeyleri arasındaki bölgenin seramikten metale farklı karışım oranlarına göre derecelendirilen içi boş silindir, disk ve küresel basınçlı kapların aksel simetrik yer değiştirme ve gerilme analizleri, düzlem elastisite teorisi kullanılarak Tütüncü ve Temel tarafından sayısal olarak yapılmıştır [19]. Fonksiyonel derecelendirilmiş dönen küresel basınçlı kaplar Shrivastava ve ark., tarafından durağan toplam potansiyel prensibine dayanan sonlu elemanlar yöntemi ile incelenmiştir [20]. Çalışmada, malzeme özellikleri Mori-Tanaka şeması ile radyal yönde derecelendirilmiştir. Derecelendirmenin kürenin yer değiştirme, gerinim ve gerilme davranışı üzerindeki etkileri araştırılmış ve metal-seramik karışımı içeren küredeki farklı derecelendirme parametrelerinin sonuçlara etkisi karşılaştırmalı olarak sunulmuştur. Homojen küreye kıyasla, fonksiyonel derecelendirmenin kürenin yer değiştirme ve gerilmenin azalmasına katkı sağladığını gözlemlemişlerdir. Arslan ve Marc, iç basınç ve homojen ısıtma altındaki fonksiyonel derecelendirilmiş içi boş elastik küresel yapılarıdaki parametre belirsizliklerinin sıcaklık ve gerilme dağılımları üzerindeki etkileri incelemişlerdir [21]. Son zamanlarda Yıldırım ve ark. [22], Halpi-Tsai homojenizasyon şemasını kullanarak derecelendirdikleri kürenin ısilelastik davranışını incelemişlerdir. Metal/seramik karışımından oluşan kürenin tüm malzeme özellikleri sıcaklığa bağlı olarak ele alınmış, bundan dolayı ortaya çıkan doğrusal olmayan diferansiyel denklem sisteminin çözümünü pseudospektral Chebyshev yöntemi ile elde etmişlerdir.

Bu çalışmada, sabit bir açısız dönme ve iç basınç etkisi altındaki fonksiyonel dereceli küresel basınçlı kaplar incelenmiştir. Radyal doğrultuda malzeme özelliklerini etkin bir şekilde tahmin edebilmek için, deneysel verilerle uyumlu Halpin-Tsai modeli [21-23] kullanılarak kürenin metal-metal karışımından oluşacak şekilde derecelendirildiği varsayılmıştır [24, 25]. Bu koşullar altında elde edilen değişken katsayılı sınır değer probleminin çözümü, diferansiyel matris yaklaşımına dayanan pseudospektral Chebyshev yöntemi ile doğrusal bir denklem sistemine dönüştürülmüştür [15, 26-28]. Bu lineer denklem sistemine, problemin sınır koşulları entegre edildikten sonra uygun bir ayrıştırma yöntemi ile aşık olmayan çözüm elde edilmiştir.

Keyfi seçilen paslanmaz çelik ve alüminyum karışımı malzeme çiftinin ve döndürmenin, yer değiştirme, gerinim ve gerilme dağılımları üzerindeki etkileri incelenmiştir.

2. Temel Formülasyon (Basic Formulation)

Sabit bir açısal hızla (ω) dönen, içi boş, kalın cidarlı, işlevsel derecelendirilmiş bir kürenin elastik analizi problemi ele alınmıştır. Mühendislik açısından özellikleri birbirinden farklı iki metalin derecelendirilerek oluşturduğu kürenin aynı zamanda iç basınca (P) maruz kaldığı varsayılmaktadır. Probleme ait küre kesiti Şekil 1'de verilmiştir.



Şekil 1. İşlevsel derecelendirilmiş, içi boş, kalın cidarlı kürenin kesiti (Cross-section of a functionally graded, hollow, thick-walled sphere)

Kürenin malzeme bileşiminin radyal doğrultu boyunca düzgün bir şekilde değiştiği varsayılmaktadır. İç yüzeyde çelik ve dış yüzeyde alüminyum olan bu yapıların bileşenlerinin hacim oranları, basit bir kuvvet yasasına göre aşağıdaki gibi tanımlanmaktadır:

$$V_s(r) = \left(\frac{r-b}{a-b}\right)^k, \quad V_a(r) = 1 - V_s(r) \quad (1)$$

Burada V_s ve V_a sırasıyla çelik ve alüminyumun hacim oranlarını gösterirken, k (≥ 0) hacim oranı indeksini ifade eder. Hacim oranı indeksinin sıfır ($k = 0$) (1) olarak alınması durumunun tamamen çelikten oluşan homojen bir malzemeye karşılık geldiği kolaylıkla görülebilir. Halpin-Tsai homojenizasyon şeması, deneysel verilerle eğri uydurarak geliştirilen ampirik denkleme dayalı olarak malzemelerin derecelendirilmesinde kullanılmaktadır [21], [23].

$$P(r) = P_s \left(\frac{1+\xi\eta V_a}{1-\eta V_a}\right), \quad \eta = \frac{P_a/P_s - 1}{P_a/P_s + \xi} \quad (2)$$

Burada P , elastik modül, yoğunluk ve Poisson oranı gibi malzeme özelliklerine karşılık gelmektedir. Halpin-Tsai homojenizasyonundaki ξ elyaf geometrisine bağlı bir parametre olup, derecelendirilmiş malzeme oluşturulurken kullanılan parçacığın, uzunluğunun genişliğine oranının iki katına eşittir. Bu çalışmada parçacığın dairesel/kare şeklinde (uzunluk/genişlik=1) olduğu varsayılmış ve $\xi = 2$ alınmıştır [6]. Kalın cidarlı küresel kabın, sabit bir açısal döndürme ile iç cidarında sabit basınç altında olduğu ve dış cidarında herhangi bir etkinin olmadığı (traction free) durumda gerilme dağılımları elastik olarak incelenmektedir. Bu durumu tanımlayan sınır koşulları aşağıdaki gibi verilmiştir:

$$\sigma_r(a) = -P, \quad \sigma_r(b) = 0 \quad (3)$$

Kürenin iç cidarının ($r = a$) mukavemete dayanıklı saf çelik ve dış cidarının duvarın ($r = b$) daha hafif olan saf alüminyum olduğu varsayılmıştır. Fonksiyonel derecelendirilmiş kalın cidarlı kürenin, düzlem gerinim koşulu varsayımı altında aksel simetrik olduğu varsayılır. Simetrik yer değiştirme durumunda yer değiştirme (u) sadece radyal (r) yönde gerçekleşir. Küresel koordinatlarda kürenin (r, θ, φ) gerinim-yer değiştirme denklemleri [14]:

$$\varepsilon_r = \frac{du}{dr} \quad \varepsilon_\theta = \varepsilon_\phi = \frac{u}{r} \quad (4)$$

ile gerilme-gerinim denklemleri [14],

$$\sigma_r = C_{11}(r)\varepsilon_r + C_{12}(r)\varepsilon_\theta + C_{12}(r)\varepsilon_\phi \quad (5a)$$

$$\sigma_\theta = \sigma_\phi = C_{12}(r)\varepsilon_r + C_{11}(r)\varepsilon_\theta + C_{12}(r)\varepsilon_\phi \quad (5b)$$

ve C_{11} ve C_{12} katsayıları,

$$C_{11}(r) = \frac{E(r)(1-\nu(r))}{(1+\nu(r))(1-2\nu(r))} \quad C_{12}(r) = \frac{E(r)\nu(r)}{(1+\nu(r))(1-2\nu(r))} \quad (6)$$

şeklinde. Sabit bir dönüş altında küresel basınçlı kabın denge denklemi şu şekildedir:

$$\frac{d\sigma_r}{dr} + \frac{2(\sigma_r - \sigma_\theta)}{r} + \rho w^2 r = 0 \quad (7)$$

Gerilme-yer değiştirme (4) ve gerilme-gerinim denklemlerini (5) gerilme denge denkleminde (7) yerine koyarak, yer değiştirmelere bağlı değişken katsayılarla sahip homojen olmayan ikinci dereceden adi diferansiyel denklem aşağıdaki gibi elde edilir:

$$u'' + \left[\frac{C'_{11}}{C_{11}} + \frac{2}{r} \right] u' + \left[\frac{C'_{12}}{C_{11}} \frac{2}{r} - \frac{2}{r^2} \right] u = -\frac{\rho w^2 r}{C_{11}} \quad (8)$$

Radyal gerilmeye bağlı sınır koşulları (3) ve gerilme-gerinim denklemi (5a) kullanılarak, yer değiştirmeler cinsinden sınır koşulu denklemleri aşağıdaki gibi yazılabilir:

$$[C_{11}(r)u' + 2C_{12}(r)u/r]_{r=a} = -P \quad (9a)$$

$$[C_{11}(r)u' + 2C_{12}(r)u/r]_{r=b} = 0. \quad (9b)$$

3. Pseudospektral Chebyshev Yöntemi (Pseudospectral Chebyshev Method)

Tanımlanan problemin çözümü, birinci tip Chebyshev polinom yaklaşımına dayanan pseudospektral Chebyshev yöntemi ile gerçekleştirilmiştir. Periyodik olmayan aralıklar için tercih edilen bu yöntemde örgü (kollokasyon) noktalarında interpolasyonu sağlamak için ayrık fonksiyon yaklaşımı kullanılır. Bu tür yaklaşımlar, interpolasyonda eşit aralıklı noktalar kullanıldığında ve trigonometrik polinom yerine cebirsel polinom tercih edildiğinde, yakınsama kötüleşir ve yeterinde hassas sonuçlar veremezler. Bu nedenle, hatayı en aza indirecek bir nokta dağılımına ihtiyaç duyulmaktadır. Chebyshev-Gauss-Lobatto noktaları, sınıra yakın yerlerde daha sık, sınırın uzağında nispeten daha seyrek nokta dağılımı yaparak bu ihtiyaca cevap verebilmektedir.

$$r_j = \cos(j\pi/N), \quad j = 0, 1, \dots, N \quad (10)$$

Chebyshev-Gauss-Lobatto bu özelliğini, noktaları eşit aralıklı olarak yarım çember üzerinde yerleştirmesinden ve bu noktaların yatay ekseninde gerçekleşen izdüşümlerinden almaktadır. Tayin edilen bu noktalar Lagrange interpolasyon polinomunda $[-1, 1]$ aralığında $(N + 1) \times (N + 1)$ boyutunda bir Diferansiyel Matris (D_N) oluşturmak için kullanılırlar. Chebyshev diferansiyel matrisinin oluşturulma aşamaları Trefethen'de ayrıntılı olarak açıklanmıştır [26].

Chebyshev diferansiyel matrisi, vektörlerin türevlerine yüksek hassasiyetli yaklaşımlar sunar. Öyleki, yer değiştirme vektörünün (u) sol taraftan diferansiyel matris ile bir kere çarpılması birinci türevi ($u' = D_N u$), iki kere çarpılması ikinci türeve ($u'' = D_N^2 u$), üç kere çarpılması üçüncüye ($u''' = D_N^3 u$) karşılık gelmektedir. Chebyshev diferansiyel matrisinin kurulum adımları ve Matlab paket program kodları için bkz. [26]. Bu hesaplama işleminde Chebyshev polinomları $[-1, 1]$ aralığında tanımlandığı için oluşturulan örgü noktaları ve diferansiyel matris bu aralıkta elde edilmektedir. Basit bir değişken ikamesi ile $[-1, 1]$ aralığı, keyfi bir $[a, b]$ aralığına dönüştürülebilir.

Sabit açılma hızla (w) dönen, fonksiyonel dereceli kalın cidarlı kürenin elastik analizinde elde edilen ikinci dereceden adi diferansiyel denklemdeki (8) türevler, Chebyshev diferansiyel matrisi yardımıyla (D_N), matris vektör çarpımı olarak $u' = D_N u$ ve $u'' = D_N^2 u$ şeklinde ifade edilir. Bu ifadeler (8) denkleminde yerine yazılarak aşağıdaki gibi bir doğrusal denklem sistemi elde edilir.

$$L_N u = R_N \quad (11)$$

Burada, doğrusal operatör matrisi L_N ve sağ taraf vektörü R_N ,

$$L_N = D_N^2 + P(r)D_N + Q(r), \quad R_N = -\frac{\rho w^2 r}{c_{11}} \quad (12)$$

olup, elde edilen doğrusal denklem sisteminde radyal doğrultuya bağlı değişken katsayılar aşağıdaki şekildedir.

$$Q(r) = \left[\frac{D_N c_{11}}{c_{11}} + \frac{2}{r} \right], \quad P(r) = \left[\frac{D_N c_{12}}{c_{11}} \frac{2}{r} - \frac{2}{r^2} \right]. \quad (13)$$

Doğrusal denklemler sisteminde (11) sınır koşulları (9) uygulandıktan sonra, herhangi bir ayırıştırma yöntemiyle çözümlenerek aşikâr olmayan bir çözüm elde edilir. Doğrusal denklem sisteminde sınır koşullarını yerleştirme işlemlerinin ayrıntısı için [29]'e başvurulabilir. Metal ve alüminyum ile kürenin radyal doğrultuda derecelendirilmesi ve malzeme özelliklerinin tayini Halpin-Tsai homojenleştirme şeması kullanılarak yapılmaktadır. Bu koşullar, geleneksel analitik yöntemlerle çözülmesi zor, değişken katsayılı bir sınır değer problemi ortaya çıkarmaktadır.

4. Sayısal Sonuçlar (Numerical Results)

Bu çalışmada, kalın cidarlı küresel basınçlı kapların sabit/değişken açılma hız ve iç basınç altında elastik olarak ele alınmıştır. Paslanmaz çelik ve alüminyum karışımından radyal yönde fonksiyonel olarak oluşturulan kürenin malzeme özelliklerinin tayininde Halpin-Tsai homojenleştirme şeması kullanılmıştır. Probleme ait homojen olmayan değişken katsayılı sınır değer problemi, pseudospektral Chebyshev yöntemi (PCY) ile sayısal olarak çözülmüştür. Kalın cidarlı kürenin iç yarıçapı $a = 0.6$ ve dış yarıçapı $b = 1$ olarak alınmıştır. Kürenin homojen (paslanmaz çelik) olması durumuna göre daha hafif bir yapı elde etmek üzere tasarlanan metal-metal karışımının malzeme özellikleri Tablo 1'de verilmiştir.

Tablo 1. Derecelendirmede kullanılan malzemelerin özellikleri (Properties of materials used in grading) [30]

Malzeme	E (GPa)	ρ (kg/m ³)	ν
Paslanmaz Çelik (SUS 304)	207.899	8166	0.318
Alüminyum (Al)	70	2702	0.3

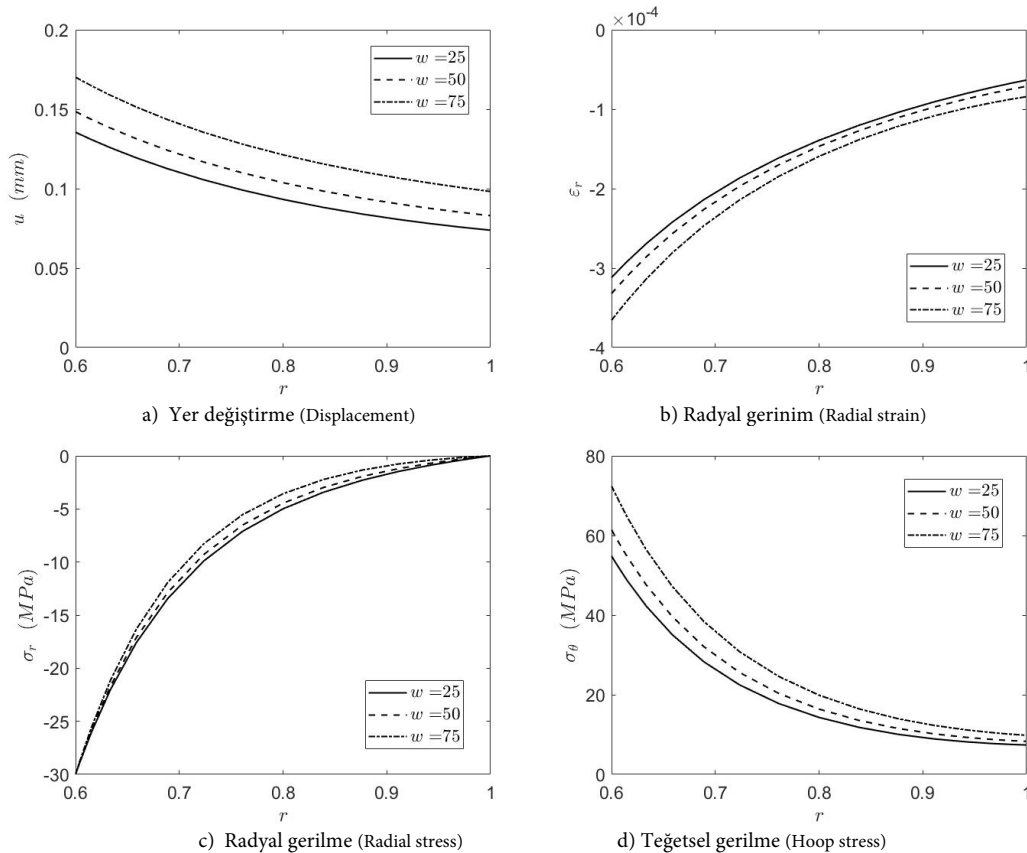
Çalışmada kullanılan sayısal yöntemin hassasiyetini test edebilmek için Kaçar'ın [14] küresel basınçlı kaplar için yaptığı analitik çalışma çözülmüş ve sonuçlar karşılaştırılmıştır. Referans çalışmada, sonuçlara etkisi çok az olduğunu düşünülen Poisson oranı sabit alınmış ve diğer malzeme özellikleri (elastik modül ve yoğunluk gibi) belirli matematiksel modellere göre (üssel değişim gibi) derecelendirilerek analitik çözüm elde edilmiştir. Ancak kullanılan bu modellere dayanan tasarımlar, dereceli malzemeyi fiziksel gerçeklikten uzaklaştırmaktadır. Bu sebeple, deneye dayalı verilere uyumlu olduğu gösterilen Halpin-Tsai modeli [21], [23] ile kürenin tüm malzeme özelliklerinin derecelendirilmesi bu çalışmayı literatürdeki çalışmalardan farklılaştırmaktadır.

Kaçar'ın [14] çalışmasında, kürenin iç ve dış yarıçapları sırasıyla $a = 0,5$ m ve $b = 1$ m, seramik iç duvardaki malzeme özellikleri $E_a = 116,4$ GPa ve $\rho_a = 3657$ kg/m³ ve açılma hızı $w = 100$ rad/s olarak alınmıştır. Küre, basınçsız ve iç/dış cidarlarda basınçlı halde olmak üzere ayrı ayrı durumlar için ele alınmıştır. Pseudospektral Chebyshev yönteminin Kaçar'ın [14] analitik çözümü ile mukayesesi Tablo 2'de verilmiştir. Dokuz (9) örgü noktası kullanılarak elde edilen PCY çözümünün, analitik çözümle uyum içinde olduğu ve en az altı haneli hassasiyete sahip olduğu gözlemlenmiştir.

Tablo 2. Sabit açılmal hızla dönen fonksiyonel dereceli basınçlı küresel bir kabın yer değiştirme, radyal ve teğetsel gerilmelerinin Kaçar [14] ile mukayesesi (Comparison of displacement, radial and tangential stresses of a functionally graded pressurized spherical vessel rotating with constant angular velocity with Kaçar [14]) ($P = 0$)

r	u		$\sigma_r \times 10^{-9}$		$\sigma_\theta \times 10^{-9}$	
	PÇY	Kaçar [14]	PÇY	Kaçar [14]	PÇY	Kaçar [14]
0.5000	0.000073650	0.000073651	0.000000000	0.000000000	0.024961145	0.024961325
0.5190	0.000071268	0.000071269	0.001432483	0.001435149	0.024616438	0.024617898
0.5732	0.000066008	0.000066009	0.004443375	0.004443312	0.023758554	0.023758852
0.6543	0.000060819	0.000060821	0.006768036	0.006770463	0.022556911	0.022558464
0.7500	0.000056735	0.000056736	0.007198739	0.007198661	0.020928513	0.020929006
0.8457	0.000053399	0.000053401	0.005735368	0.005737665	0.018807212	0.018808853
0.9268	0.000050513	0.000050515	0.003223546	0.003223519	0.016493159	0.016493788
0.9810	0.000048374	0.000048377	0.000921854	0.000924116	0.014635950	0.014637639
1.0000	0.000047566	0.000047568	0.000000000	0.000000000	0.013921446	0.013922122

Fonksiyonel dereceli kürenin sabit iç basınç ($P = 30 \text{ MPa}$) etkisi altında farklı açılmal hızlarda ($\omega = 25, 50, 75$) döndürülmesi esnasında gerçekleşen yer değiştirme, gerinim, radyal ve teğetsel gerilme dağılımları Şekil 2'de gösterilmiştir. Açılmal hız arttıkça yer değiştirmenin (Şekil 2(a)) ve buna bağlı olarak radyal gerinimin (yer değiştirmedeki değişim) (Şekil 2(b)) arttığı gözlenmiştir. Yer değiştirmedeki değişimin iç cidardaki etkisinin dış cidardakine göre daha fazla olmasının nedeni iç cidarda etkin olan basınçtır. Oransal olarak bakıldığında, ω değerinin 50 ile 75 olması halinde yer değiştirme ve gerinim sonuçları arasındaki fark, 25 ile 50 olması durumuna göre daha büyük olmaktadır. Bu durum, artan açılmal hızın sonuçlar üzerindeki etkisini göstermektedir. Radyal gerilmeler (Şekil 2(c)) iç basınç sebebiyle cidar boyunca basma yönünde olup, sınır koşullarına uygun şekilde basıncın etki ettiği iç cidarda en büyük değerde, dış cidarda ise sıfır olarak gerçekleşmektedir. Şekil 2(d)'de teğetsel gerilmeler basma yönünde ve tüm hızlar için iç cidarda en büyük değerlerindedir. İç cidardan dış cidara doğru teğetsel gerilmeler hem büyüklük olarak azalmakta hem de farklı hız değerleri arasındaki farklar azalmaktadır. Artan açılmal hızın, her iki gerilmelerde de büyüklükleri arttırdığı görülmektedir (Şekil 2(c)-2(d)).

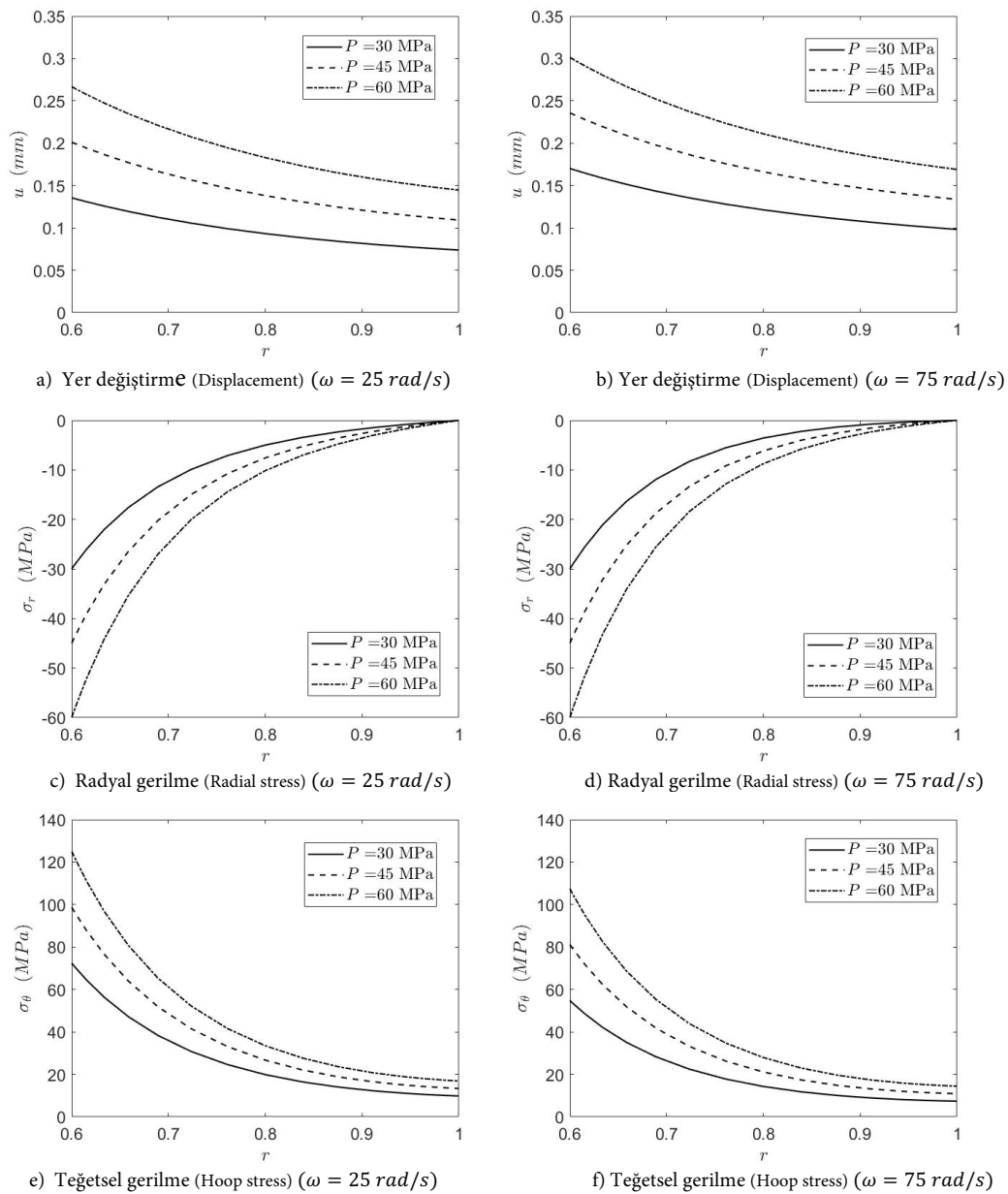


Şekil 2. Farklı açılmal hızların fonksiyonel dereceli kürenin yer değiştirme, gerinim ve gerilmelerine etkisi (Effect of different angular velocities on displacement, strain and stress of a functionally graded sphere) ($P = 30 \text{ MPa}$)

Fonksiyonel dereceli kürenin farklı iç basınç değerlerinde ($P = 30, 45, 60 \text{ MPa}$) iki farklı sabit açılmal hızda

($\omega = 25, 75 \text{ rad/s}$) dönmesi durumunda meydana gelen yer değiştirme, radyal ve teğetsel gerilme dağılımları Şekil 3'te verilmiştir. Düşük ve sabit bir açısal hızda ($\omega = 25 \text{ rad/s}$), artan iç basınç, yer değiştirmede (Şekil 3(a)) radyal (Şekil 3(c)) ve teğetsel gerilme (Şekil 3(e)) değerlerinde artış sebep olmakta ve bu artış iç cidarda daha yüksek değerlerde gerçekleşmektedir. Açısal hız $\omega = 75 \text{ rad/s}$ değerine yükseltildiğinde özellikle yer değiştirme ve teğetsel gerilme büyüklüklerinde önemli artışlar gerçekleştiği gözlenmektedir. Düşük açısal hızda ($\omega = 25 \text{ rad/s}$), iç ve dış cidar arasındaki radyal yöndeki ortalama (üç basınç durumu için) yer değiştirme değişimi yaklaşık 1.84 birim (Şekil 3(a)) iken, bu oran $\omega = 75 \text{ rad/s}$ açısal hızında (Şekil 3(b)) yaklaşık 1.75 birime gerilemektedir.

Artan iç basınç değerlerinin, küre cidarının her noktasında basma yönündeki radyal gerilme değerlerini (Şekil 3(c)-3(d)) önemli ölçüde arttırdığı gözlemlense de, bu değerlerin açısal hız artışından benzer oranda etkilenmediği görülmektedir. Şekil 3(e)-3(f)'de iki koşulda, iç cidarda en büyük değerlerinde olan teğetsel gerilmeler (çekme yönünde), iç cidardan dış cidara gidildikçe azalmaktadır. Bununla beraber, açısal hız ve iç basınç büyüklüğü arttıkça, teğetsel gerilme değerlerinin arttığı ancak grafiklerin genel eğiliminin bozulmadığı sonucuna varılmaktadır.



Şekil 3. Farklı iç basınçların, iki farklı sabit açısal hızla dönen fonksiyonel dereceli kürenin yer değiştirme, gerinim ve gerilmelerine etkisi (Effect of different internal pressures on the displacement, strain and stress of a functionally graded sphere rotating at two different constant angular velocities) ($\omega = 25, 75 \text{ rad/s}$)

Bu analizlere ek olarak, kürenin iç ve dış cidarları arasındaki radyal gerinim ve teğetsel gerilme oranları

incelenmiş ve Tablo 3’de sunulmuştur. Açısal hız arttıkça, iç ve dış cidarlar arasındaki radyal gerinim ve teğetsel gerilme oranlarının azalma eğiliminde olduğu görülmüştür. Radyal gerinime kıyasla, teğetsel gerilmelerdeki değişim oranları arasında daha az fark olduğu gözlenmektedir.

Tablo 3. Artan açısal hızlar için fonksiyonel dereceli sabit basınçlı kürenin iç ve dış cidarı arasındaki radyal gerinim ve teğetsel gerilmelerin değişim oranı (Rate of change of radial strain and tangential stresses between the inner and outer wall of a functionally graded constant pressure sphere for increasing angular velocities) ($P = 30 \text{ MPa}$)

Açısal Hız (rad/s)	Radyal Gerinim	Teğetsel Gerilme
25	4.9274	7.4266
50	4.6686	7.4043
75	4.3441	7.3763

5. Bulgular ve Tartışma (Conclusion and Discussion)

Bu çalışmada, sabit açısal hız ve iç basınç altında kalın cidarlı küresel basınçlı kap problemi elastik olarak çözülmüştür. Kürenin radyal doğrultudaki derecelendirilmesi Halpin-Tsai şeması yardımıyla paslanmaz çelik ve alüminyum karışımı ile yapılmıştır. Probleme ait bünye denklemi pseudospektral Chebyshev yöntemi ile sayısal olarak çözülmüştür. Yöntemin doğruluğu, literatürde analitik çözümü mevcut, Poisson oranı sabit olan ve kuvvet kuralı ile derecelendirilen bir küre çalışmasıyla doğrulanmıştır. Bu varsayımlar matematiksel olarak uygun olsa da, tasarlanan malzemeyi gerçeklikten uzaklaştırmaktadır. Bu çalışmanın özgünlüğü, deneysel verilerle uyumlu olduğu gösterilen Halpin-Tsai modelinin kullanılması ve PCY kullanımının yüksek hassasiyetli çözümler sağlamasına dayanmaktadır. Kürenin mekanik davranışı, sabit basınç altında farklı açısal hızlarda ve sabit açısal hızda farklı basınçlar altında ayrı ayrı incelenmiştir. Son olarak, çalışma aşağıdaki gibi bazı önemli bulguları ortaya koymaktadır:

- Sabit iç basınç altında, açısal hızdaki artış küre cidarındaki yer değiştirmeleri ve gerinimleri arttırmaktadır. Bu koşulda yer değiştirmeler ve gerinimler iç cidarda en büyük değerlerindedir.
- Radyal gerilmeler her durumda basma yönünde olup artan iç basınç ve açısal hızla artmaktadır. Bu artış açısal hız değişimi için görece azdır.
- Teğetsel gerilmeler çekme yönünde olup her iki koşulda iç cidardan dış cidara azalan bir eğri oluşturmaktadır. Açısal hız ve iç basıncın artması teğetsel gerilme büyüklüklerini arttırmaktadır.
- Sabit açısal hız durumunda, iç basınç arttıkça yer değiştirme, radyal ve teğetsel gerilme değerlerinde artış olmakta ve bu artış iç cidarda daha fazla görülmektedir. Aynı koşullarda açısal hız arttırıldığında ise sonuçlar benzer eğilimde elde edilmekle birlikte sayısal büyüklük olarak artmaktadır. Bu durum iç cidar cidarında daha belirgin olarak gerçekleşmektedir.

Çıkar Çatışması Beyanı (Conflict of Interest Statement)

Yazarlar tarafından herhangi bir çıkar çatışması bildirilmemiştir.

Kaynaklar (References)

- [1] F. Erdogan, "Fracture mechanics of functionally graded materials," *Composites Engineering*, vol. 5, no. 7, 1995, doi:10.1016/0961-9526(95)00029-M
- [2] M. Koizumi, "FGM activities in Japan," *Composite Part:B Engineering*, vol. 28, no. 1–2, pp. 1–4, Jan. 1997, doi:10.1016/S1359-8368(96)00016-9
- [3] Y. Miyamoto, W.A. Kaysser, B.H. Rabin, A. Kawasaki, and R.G. Ford, *Functionally graded materials design, process, and applications*, USA: Springer, 1999. doi:10.1007/978-1-4615-5301-4
- [4] A. S. Kaddour and M. J. Hinton, "Maturity of 3D failure criteria for fibre-reinforced composites: Comparison between theories and experiments: Part B of WWFE-II," *Journal of Composite materials*, vol. 47, no. 6–7, pp. 925–966, Mar. 2013, doi:10.1177/0021998313478710
- [5] L. L. Vignoli, M. A. Savi, P. M. C. L. Pacheco, and A. L. Kalamkarov, "Comparative analysis of micromechanical models for the elastic composite laminae," *Composite Part:B Engineering*, vol. 174, Oct. 2019, doi:10.1016/j.compositesb.2019.106961

- [6] R. Madan and S. Bhowmick, "Modeling of functionally graded materials to estimate effective thermo-mechanical properties," *World Journal of Engineering*, vol. 19, no. 3, pp. 291–301, 2022. doi:10.1108/WJE-09-2020-0445
- [7] E. Arslan, "Analysis on multi-layered and functionally graded spherical pressure vessels," *Pamukkale University Journal of Engineering Sciences*, vol. 23, no. 1, pp. 24–35, 2017, doi:10.5505/pajes.2016.56688
- [8] A. N. Eraslan and T. Akis, "Analytical Solutions To Elastic Functionally Graded Cylindrical And Spherical Pressure Vessels," *Journal of Multidisciplinary Engineering Science and Technology*, vol. 2, no. 10, pp. 2687–2693, 2015.
- [9] M. R. Eslami, M. H. Babaei, and R. Poultangari, "Thermal and mechanical stresses in a functionally graded thick sphere," *International Journal of Pressure Vessels and Piping*, vol. 82, no. 7, pp. 522–527, Jul. 2005, doi:10.1016/J.IJPVP.2005.01.002
- [10] M. Z. Nejad, M. Abedi, M. H. Lotfian, and M. Ghannad, "An exact solution for stresses and displacements of pressurized FGM thick-walled spherical shells with exponential-varying properties," *Journal of Mechanical Science and Technology*, vol. 26, no. 12, pp. 4081–4087, Dec. 2012, doi:10.1007/s12206-012-0908-3
- [11] N. Tutuncu and M. Ozturk, "Exact solutions for stresses in functionally graded pressure vessels," *Composite Part:B Engineering*, vol. 32, no. 8, pp. 683–686, Dec. 2001, doi:10.1016/S1359-8368(01)00041-5
- [12] L. H. You, J. J. Zhang, and X. Y. You, "Elastic analysis of internally pressurized thick-walled spherical pressure vessels of functionally graded materials," *International Journal of Pressure Vessels and Piping*, vol. 82, no. 5, pp. 347–354, May 2005, doi:10.1016/J.IJPVP.2004.11.001
- [13] K. Celebi, D. Yarimpabuc, and I. Keles, "A unified method for stresses in FGM sphere with exponentially-varying properties," *Structural Engineering and Mechanics*, vol. 57, no. 5, pp. 823–835, 2016, doi:10.12989/sem.2016.57.5.823
- [14] İ. Kacar, "Exact elasticity solutions to rotating pressurized axisymmetric vessels made of functionally graded materials (FGM)," *Materwiss Werksttech*, vol. 51, no. 11, pp. 1481–1492, Nov. 2020, doi:10.1002/mawe.202000148
- [15] D. Yarimpabuc and A. Temo, "The Effect of Uniform Magnetic Field on Pressurized FG Cylindrical and Spherical Vessels," *European Mechanical Science*, vol. 3, no. 4, pp. 133–141, Dec. 2019, doi:10.26701/ems.585130
- [16] M. A. Nematollahi, A. Dini, and M. Hosseini, "Thermo-magnetic analysis of thick-walled spherical pressure vessels made of functionally graded materials," *Applied Mathematics and Mechanics (English Edition)*, vol. 40, no. 6, pp. 751–766, Jun. 2019, doi:10.1007/s10483-019-2489-9
- [17] Y. Z. Chen and X. Y. Lin, "An alternative numerical solution of thick-walled cylinders and spheres made of functionally graded materials," *Computational Materials Science*, vol. 48, no. 3, pp. 640–647, May 2010, doi:10.1016/J.COMMATSCI.2010.02.033
- [18] Y. Z. Chen and X. Y. Lin, "Elastic analysis for thick cylinders and spherical pressure vessels made of functionally graded materials," *Computational Materials Science*, vol. 44, no. 2, pp. 581–587, 2008, doi:10.1016/J.COMMATSCI.2008.04.018
- [19] N. Tutuncu and B. Temel, "A novel approach to stress analysis of pressurized FGM cylinders, disks and spheres," *Composite Structures*, vol. 91, no. 3, pp. 385–390, Dec. 2009, doi:10.1016/J.COMPSTRUCT.2009.06.009
- [20] S. Kumar Shrivastava, L. Sondhi, and J. Kumar Tiwari, "Elastic Analysis of Rotating Spherical Pressure Vessel of Functionally Graded Material Modeled by Mori-Tanaka Scheme," *International Journal of Engineering Research & Industrial Applications*, vol. 9, no. 3, pp. 1–12, 2016.
- [21] E. Arslan, W. Mack, and T. Apatay, "Thermo-mechanically loaded steel/aluminum functionally graded spherical containers and pressure vessels," *International Journal of Pressure Vessels and Piping*, vol. 191, 2021, doi:10.1016/j.ijpvp.2021.104334
- [22] A. Yıldırım, D. Yarimpabuc, V. Arikan, M. Eker, and K. Celebi, "Nonlinear thermal stress analysis of functionally graded spherical pressure vessels," *International Journal of Pressure Vessels and Piping*, vol. 200, p. 104830, Dec. 2022, doi:10.1016/J.IJPVP.2022.104830
- [23] J. C. Halpin Affdl and J. L. Kardos, "The Halpin-Tsai equations: A review," *Polymer Engineering & Science*, vol. 16, no. 5, pp. 344–352, 1976. doi: 10.1002/pen.760160512
- [24] Y. Fukui, H. Okada, N. Kumazawa, Y. Watanabe, N. Yamanaka, and Y. Oya-Seimiya, "Manufacturing of Al-Al3Fe functionally graded material using the vacuum centrifugal method and measurements of its mechanical properties," *Journal of Japan Institute of Light Metals*, vol. 49, no. 1, pp. 35–40, 1999.
- [25] J. M. Lee, S. B. Kang, T. Sato, H. Tezuka, and A. Kamio, "Microstructures and Mechanical Properties of Al3Fe Reinforced Aluminum Matrix Composites Fabricated by a Plasma Synthesis Method," *Materials Transactions*, vol. 43, no.10, pp. 2487–2493, 2002.
- [26] L. N. Trefethen, *Spectral Methods in Matlab*. Philadelphia: SIAM, 2000.
- [27] M. Eker, D. Yarimpabuc, and K. Celebi, "Thermal stress analysis of functionally graded solid and hollow thick-walled structures with heat generation," *Engineering Computations (Swansea, Wales)*, vol. 38, no. 1, pp. 371–391, Jan. 2021, doi:10.1108/EC-02-2020-0120
- [28] D. Yarimpabuc, "A Unified Approach to Hyperbolic Heat Conduction of the Semi-infinite Functionally Graded Body with a Time-Dependent Laser Heat Source," *Iranian Journal of Science and Technology- Transactions of Mechanical Engineering*, vol. 43, no. 4, 2019, doi:10.1007/s40997-019-00312-0

[29] A. Çalışkan, "Fonksiyonel Derecelenmiş Dönen Basınçlı Kapların Elastik Analizi," Yüksek Lisans Tezi, Osmaniye Korkut Ata Üniversitesi, Fen Bilimleri Enstitüsü, Osmaniye, Türkiye, 2021.

[30] C. Boğa, "Elastic Analysis of an Hollow Cylinder Made from Functionally Graded Material Exposed to Internal Pressure," *ISVOS Journal*, vol. 2, no. 2, pp. 56-66, 2018

This is an open access article under the CC-BY license

