BOĞAZİÇİ ÜNİVERSİTESİ EĞİTİM DERGİSİ
2023, CİLT 40-2, SAYI 2
https://doi.org/10.52597/buje.1289328

Matematik Öğretmen Adaylarının İspat Sürecinin İleri-Geri Tekniğini Kullanma Durumlarının İncelenmesi

Neslihan Sönmez [a], Tuğba Öztürk[b] ve Bülent Güven[c]

Öz

Çalışmanın amacı, matematik öğretmen adaylarının ispatlama sürecindeki zihinsel eylemlerini ileri-geri tekniği aracılığıyla resmedebilmektir. Bu amaçla akademik başarı düzeyi iyi, orta ve düşük olarak belirlenen üç matematik öğretmeni adayıyla geometri ve cebir alanından toplam iki soru üzerinden klinik mülakatlar gerçekleştirilmiştir. Öğretmen adaylarının ispat süreci analiz edilerek ileri-geri yöndeki zihinsel eylem haritaları oluşturulmuş ve bu haritaların ispatı tamamlamadaki rolü tartışılmıştır. Araştırma sonucunda öğretmen adaylarının akademik başarı düzeyi ve sorunun alanı fark etmeksizin ispat sürecinde ileri-geri hamlelerini bilinçli olmasa da yoğun bir şekilde gerçekleştirdiği belirlenmiştir. Adayların akademik başarısı arttıkça ispat sürecindeki ileri ve geri hamle sayılarının arttığı belirlenmiştir. Bu bakımdan öğretim üyelerinin ispat yaparken bu teknik aracılığıyla düşüncelerini sesli olarak ifade etmeleri, öğretmen adayları için ispatı yaratıcı bir inşa sürecine dönüştürme imkânı sunabilir.

Makale Hakkında

Gönderim tarihi: 28.04.2023

Düzeltme tarihi: 03.07.2023

Kabul tarihi: 11.08.2023

Elektronik Yayın Tarihi: 23.11.2023

Anahtar Kelimeler: ispat, ileri-geri tekniği, öğretmen adayı, matematik öğretmen adayı

Giriş

İspatlama; problem çözme, varsayımda bulunma, genelleme, ilişkilendirme kavramsal hale getirme, hatırlama, sınıflama, planlama gibi birçok zihinsel etkinliği içinde barındırır (Siegler ve Wagner-Alibali, 2005). Birçok araştırmacıya göre matematiğin kalbi sayılan ispat, matematiksel bir ilişkiye ulaşabilmek için atılacak adımların öncesi ve sonrası arasında karşılaştırmalar yapmayı gerektiren bilimsel bir süreçtir. Bu bakımdan ispat süreci, varsayımda bulunmayı destekleyen eylemler ile birlikte ispat

[a]*Trabzon Üniversitesi, Fatih Eğitim Fakültesi, Matematik ve Fen Bilimleri Eğitimi Bölümü, nsonmez@trabzon.edu.tr, ORCID: 0000-0003-1631-9510*
[b]*Sorumlu yazar, Trabzon Üniversitesi, Fatih Eğitim Fakültesi, Matematik ve Fen Bilimleri Eğitimi Bölümü, tugbaozturk@trabzon.edu.tr, ORCID: 0000-0003-1599-8574*
[c]*Trabzon Üniversitesi, Fatih Eğitim Fakültesi, Matematik ve Fen Bilimleri Eğitimi Bölümü, bguven@trabzon.edu.tr, ORCID: 0000-0001-8767-6051*

Alıntılamak için: Sönmez, N., Öztürk, T., & Güven, B. (2023). Matematik öğretmen adaylarının ispat sürecinin ileri-geri tekniğini kullanma durumlarının incelenmesi. *Boğaziçi Üniversitesi Eğitim Dergisi*, *40-2*(2), 227-260, https://doi.org/10.52597/buje.1289328

adımlarını belirleme ve bu adımları düzenleme gibi eylemleri kapsayan bir yapıya sahiptir (Perry vd., 2011). Bu kapsamlı süreç içinde ispatı tamamlamak için izlenen adımları kontrol etmeye, farklı durumları test etmeye ve ispat adımlarını belirlemeye olanak sağlayan çeşitli ileri-geri geçişler söz konusudur (Miyazaki vd., 2017; Öztürk, 2016). Bu süreçte ileri-geri geçişler sonucunda yapılan düzenlemeler ispata yönelik bir planlamaya işaret etmektedir.

Muhakeme türleri olan tümdengelim, tümevarım ve geri-çıkarımda (abduction) öncüller ile sonuç arasında ne tür bağlantılar kurulacağına ilişkin arayış, ispatın nasıl yapılacağına yönelik planlama yapmanın ilk adımıdır (Tsujiyama, 2011). Bu tür bir planlama sürecinde gerek öncüllerden sonuca doğru ileri yönde bir düşünme gerekse sonuçtan öncüllere doğru geri yönde bir düşünme söz konusudur (Remillard, 2014). Bu tür düşünmelerin gerçekleşmesini sağlayan ispat planlama etkinliklerine farklı öğretim kademelerinde yer verilmesi ise ispat yapmaya yönelik başarının artmasında etkili bir unsurdur (Miyazaki vd., 2016). Bu bakımdan bireylerin ispat sürecindeki zihinsel eylemlerinin ortaya çıkarılması noktasında ispata nasıl başlandığı, ispat adımlarının uygunluğu ve birbiriyle ilişkisi gibi konular üzerine tartışmalar yapılması önemli bir rol oynamaktadır.

İleri-Geri Tekniği

İspata başlama, uygun ispat adımlarını oluşturma ve ispatı tamamlama öncesinde ilgili matematiksel ifadenin hipotez ve hükmünü belirleme, ispat sürecine önemli katkılar sağlayan bir eylemdir (Heinze ve Reiss, 2004). Bu anlamda ispat sürecinde ileri-geri geçişlere zemin hazırlayan en temel eylemlerden biri hipotez ve hüküm bilgilerini belirleyebilmektir. Bu bilgilerin belirlenmesi ise ispat yaparken kullanılan ileri-geri tekniğinde kilit rol oynayan bir unsurdur (Heinze vd., 2008; Matsuda ve VanLehn, 2004; Yang ve Lin, 2012). İleri-geri tekniği, ispat sürecinde hipotez ve hüküm arasında yapılan gelgitlerdir. Bu doğrultuda ileri-geri tekniğinin öne sürdüğü düşünme yapısı, matematiksel ispat yöntemlerinin de temelini oluşturmaktadır (Solow, 2014). Dolayısıyla bir önermenin ispatında hangi ispat yönteminin kullanıldığı fark edilmeksizin ileri-geri tekniğine başvurulur. İleri-geri tekniğinde, hüküm ifadesi irdelenip uygun sorularla olası ispat adımlarının zihinsel olarak düzenlenmesi şeklinde geri yönde bir düşünme ya da hipotezin doğru olduğu kabulünden hareketle bununla bağlantılı alt ifadeler üretilerek sonuca ulaşmaya çalışma şeklinde ileri yönde bir düşünme söz konusudur (Miyazaki vd., 2016; Solow 2014; Yang ve Lin, 2012). Başka bir ifadeyle $X \Rightarrow Y$ şeklindeki bir önerme için ileri-geri tekniği uygulandığında Y'nin doğru olduğu sonucuna ulaşmak amacıyla neler yapılabileceğini düşünme geri yönde bir süreç iken özellikle X'de yer alan bilgileri kullanarak neler yapılabileceğini düşünme ise ileri yönde bir süreçtir. Geri yönde bir düşünmeye "Y ifadesinin doğru olduğuna nasıl ulaşabilirim?" şeklinde bir soru ile başlanır ve Y ifadesinden elde edilen anahtar sorular üretilir. Bu sorular, geri yönlü düşünmeye başlanan ilk sorunun cevabına bağlı olarak üretilen alt sorular şeklinde nitelendirilebilir. Geri yöndeki düşünme esnasında anahtar sorunun bariz bir cevabının olmaması gibi bir durumla karşılaşılabilir. Böyle bir durumun oluşması, X'in doğru olduğunu varsayma işlemine geçilebileceğine başka bir ifadeyle ileri yöndeki düşünmeye başlanabileceğine işaret etmektedir. İleri-geri tekniğinin kullanımı esnasında iki farklı yöndeki düşünmenin nasıl gerçekleştiğini gösteren bir önermenin ispatına yönelik analiz aşağıdaki gibidir (Solow, 2014).

Önerme: Kenar uzunlukları a ve b olan ve hipotenüsü c olan ABC dik üçgeninin alanı $\frac{c^2}{4}$ ise ABC üçgeni ikizkenardır.

İspatın Analizi: Önermeyi $X \Rightarrow Y$ şeklinde ele alalım.

X: Kenar uzunlukları a ve b olan ve hipotenüsü c olan ABC dik üçgeninin alanı $\frac{c^2}{4}$'dir.

Y: ABC üçgeni ikizkenardır.

İleri-geri tekniği uygulandığında Tablo 1 ve Tablo 2'deki gibi bir süreç gerçekleşmektedir.

Tablo 1
Geri Yönde Düşünme Süreci

Soru-Cevap	Örnek
Anahtar Soru 1	Üçgenin (ABC üçgeni) ikizkenar üçgen olduğunu nasıl gösterebilirim?
Cevap 1	$\boldsymbol{Y_1}: a = b$
Anahtar Soru 2	İki reel sayının (a ve b kenar uzunlukları) eşit olduğunu nasıl gösterebilirim?
Cevap 2	$\boldsymbol{Y_2}: a - b = 0$
Anahtar Soru 3	İki reel sayının farkının 0 olduğunu nasıl gösterebilirim?

Bu anahtar soruya doğrudan bir cevap bulunmayabilir ve geri yöndeki düşünmeden ileri yöndeki düşünmeye doğru bir geçiş olur. Matematiksel muhakemenin varsayımlardan sonuçlara ilerleyen doğrusal bir yapıya sahip olmasının aksine ispat varsayımları tekrar gözden geçirme, tanımları yeniden düzenleme, sonuçlara uyacak şekilde önermelerde değişiklik yapma gibi çeşitli ileri-geri geçişleri içinde barındırmaktadır (Lakatos, 1976). Bu bakımdan ispat yapma, önermeler ve kabul edilebilir matematiksel argümanlar aracılığıyla hipotez ile hüküm arasında bir köprü oluşturabilmektir (Heinze vd., 2008). İspat sürecinde bireyler farkında olarak ya da olmayarak bu tekniğin gerektirdiği zihinsel süreci yaşamaktadır. Dolayısıyla ispat yaparken yaşanan bu zihinsel süreci resmetmek, matematiksel bir ifadenin doğruluğunu gösterirken bir bireyin nasıl bir düşünme sürecine girdiğini ayrıntılı olarak ortaya çıkarabilmek açısından önemlidir.

Matematiksel ispat ile ilgili yapılan çalışmalar incelendiğinde ileri-geri tekniğinin çalışmaların doğrudan odak noktası olmadığı dikkat çekmektedir. Bu incelemeler doğrultusunda matematik alanındaki çalışmalarda bu tekniğin bir problemin çözümünü detaylandırma amaçlı bir araç niteliğinde kullanıldığı görülmüştür (ör., Attouch ve Peypouquet, 2016; Chang vd., 2017; Kankam vd., 2019). Matematik eğitimindeki çalışmalarda ise yapılan ispatların analizi sürecinde kullanılan ya da ispat planlama ile ilgili çalışmaların temelinde yer alan bir teknik olduğu fark edilmiştir (ör., Miyazaki vd., 2016; Remillard, 2014; Tsujiyama, 2011; Yang ve Lin, 2012). Bu doğrultuda yapılan bu çalışma ile öğretmen adaylarının ispat sürecinde ileri-geri tekniğini kullanma durumlarının incelenmesi, matematik eğitimi alanında bu tekniğin odak noktası olarak ele alınmasına katkıda bulunacaktır. Böylece birçok öğretmen adayının zorluk yaşadığı ispat yapma eylemine başlama ve bu süreci yapılandırmada ileri-geri tekniğinin kullanımı onların matematiksel düşünmelerini destekleyebilir. Ayrıca ispat sürecinde hipotez-hüküm arasında yapılan gidiş ve gelişlerle, adımların sürekli olarak nasıl ve ne sıklıkta yapılandırıldığı öğretmen adayları aracılığıyla incelenerek bir anlamda ispat sürecinin dinamik doğası yansıtılabilecektir.

Tablo 2
İleri Yönde Düşünme Süreci

Süreç	Örnek
Geri yönde düşünmenin sonundaki ifadeye ulaşma üzerine çalışma	$\boldsymbol{Y_2}: a - b = 0$ ifadesini bulmak için hipotezin nasıl kullanılabileceği üzerine düşünülür.
Hipotezi doğru varsayma	"$\boldsymbol{X}$**:** Kenar uzunlukları a ve b olan ve hipotenüsü c olan ABC dik üçgeni $\frac{c^2}{4}$ alana sahiptir." hipotezi doğru kabul edilir.
Hipotez ile ilişkili alternatif matematiksel ifadeler yazma	$\boldsymbol{X_1}: ab\,/\,2 = c^2\,/\,4$ $\boldsymbol{X_2}: a^2 + b^2 = c^2$ $\boldsymbol{X_3}: ab\,/\,2 = (a^2 + b^2)\,/\,4$ $\boldsymbol{X_4}: a^2 - 2ab + b^2 = 0$ $\boldsymbol{X_5}: (a - b)^2 = 0$
İspatı tamamlama	$\boldsymbol{X_5}$ 'e uygulanan cebirsel işlemle $\boldsymbol{Y_2}$ ifadesi elde edilir ve ispat sona erer.

Genelde matematik özelde ise matematiksel ispat odaklı derslerde öğrencilerin başarılı olabilmeleri farklı ispatlama tekniklerini ustalıkla kullanabilmeleri ile ilişkilidir. Çoğu zaman öğrencilerin bu tür derslerdeki başarıları, onların ispatlamadaki başarısı ve uygun teknikleri kullanabilmesi ile açıklanabilir. İspata başlama, uygun adımları belirleme, ispat adımları arasında geçiş yapma ve ispatı tamamlama gibi eylemleri gerçekleştirirken yapılan ileri-geri hamleler ispatlama başarısı için hayati önem taşımaktadır. Her bir bireye göre bu hamlelerin farklılık göstermesi de olası bir durumdur. Dolayısıyla bireylerin ispat sürecinin doğal akışı içerisinde ileri-geri hamleleri nasıl gerçekleştirdiğinin ortaya çıkarılması araştırılmaya değerdir. Bu bakımdan mevcut çalışmada bireylerin ispata yönelik zihinsel eylemlerinin resmedilmesi, düşünme sürecinde doğal olarak gerçekleşen ileriye ve geriye doğru düşünce akışının ispat sürecine transfer edilebilmesi esnasında eksik kalan adımların belirlenmesi açısından önemli bir katkı sunacaktır. Bu bağlamda araştırmanın amacı, üç matematik öğretmeni adayının ispat sürecindeki zihinsel eylemlerini ileri-geri tekniği aracılığıyla resmetmektir.

Yöntem

Araştırmanın Tasarımı

Tüm ispatlama eylemlerinde bilinçli ya da bilinçsiz bir şekilde ileri-geri tekniği yoğun olarak kullanılır (Heinze vd., 2008; Solow, 2014). Bilinçli ifadesi ile bireyin hipotezden veya hükümden yola çıkarak eylemler gerçekleştirirken ileri veya geri yönde hamleler aracılığıyla bu tekniği kullandığına yönelik farkındalığa sahip olması kastedilmektedir. Bu çalışma ile öğretmen adaylarının ispatlama sürecindeki zihinsel eylemleri, ileri-geri tekniği perspektifinden anlaşılmaya çalışılmıştır. Öğretmen adaylarının hamlelerini ve niyetini ileri-geri tekniğinin nasıl şekillendirdiğinin tespiti, ispatta başarıya ulaşmak için oldukça önemli görülmektedir. Özellikle hipotezle hüküm arasında bağlantı kurmak için birden fazla adım oluşturmayı gerektiren ispatlar, karmaşık türde çeşitli zihinsel eylemler içerir (Heinze vd., 2008). Bu ara eylemler, tümdengelime dayalı argüman üretme sürecini koordine etmek suretiyle adımlar arasında bağlantı kurma potansiyeli barındırırlar. Örneğin ispat adımları için gerekli olan unsurları belirleyebilme ve değerlendirmeyi etkileyen bilişsel eylemlerden biri olan çıkarım yapma, ispatı yapılandırmada oldukça önemli bir işlev görür.

Bu çalışmada öğretmen adaylarının ispat yapma sürecinde ileri-geri tekniğini kullanma durumları derinlemesine incelendiğinden nitel araştırma yaklaşımı benimsenmiştir. Dolayısıyla araştırma özel durum çalışması olarak tasarlanmıştır. Bu kapsamda öğretmen adayları ile klinik mülakatlar yapılarak ispat sürecindeki zihinsel eylemleri ve ileri-geri tekniğinin bu eylemleri nasıl şekillendirdiği belirlenmeye çalışılmıştır. Katılımcı olan öğretmen adaylarının her biri ile klinik mülakatlar gerçekleştirilmiştir. Klinik mülakatlarla elde edilen veriler, öğretmen adaylarının ispat sürecindeki zihinsel eylemlerinin yönünü (ileri-geri) ve türünü (basit çıkarım, çıkarım, yorum vb.) belirleyecek şekilde analiz edilmiştir. Ayrıca bu analiz sürecinde eylemlerin gerçekleşme sırası gözetilmiştir. Bunun sonucunda her bir öğretmen adayının ispat sürecini yansıtmak amacıyla ileri-geri yöndeki zihinsel eylemleri içeren haritalar oluşturulmuştur.

Katılımcılar

Araştırmanın katılımcıları, matematik öğretmenliği programı ikinci sınıfta öğrenim gören üç öğretmen adayıdır. Öğretmen adaylarının tercih edilmesinin iki nedeni vardır. Birincisi üniversite matematiğinin ispat yapma eylemini sıklıkla içermesi nedeniyle öğretmen adaylarının bu eyleme dahil olmalarıdır. İkincisi ise bu adayların mezun olduktan sonra ileri-geri tekniğine yönelik düşünme alışkanlığının lise düzeyindeki öğrencilerine aktaracak potansiyele sahip olmasıdır. Bu adaylar; başarı düzeyi olarak iyi, orta ve düşük olmak üzere üç düzeyi temsil etmektedir. Öğretmen adaylarının farklı akademik başarı düzeylerine sahip olması verilerin çeşitliliğini artırıcı temel faktör olarak düşünülmüştür. Öğretmen adaylarının belirlenmesinde üç adım izlenmiştir. İlk adım olarak matematik öğretmenliği lisans programı öğrencilerinin akademik ortalamaları incelenmiş ve ortalamalara göre öğrenciler iyi, orta, düşük olmak üzere üç gruba ayrılmıştır. Akademik ortalamaları inceleme sürecinde öğrencilerin genel not ortalamalarına ek olarak ispat yapmayı gerektiren Analiz I-II-III ve Soyut Matematik I-II gibi alan derslerinde aldıkları notlar dikkate alınmıştır. İkinci adımda çalışmanın amacına yönelik bilgi vererek çalışmaya katılmaya gönüllü öğretmen adaylarını belirlemek üzere her düzeyden üçer öğretmen adayı belirlenmiştir. Bu adaylar içerisinde iş birliği yapmaya açık ve düşüncelerini ifade etmekte zorluk yaşamayan birer aday belirlemek üzere adayların matematik alan derslerini yürüten bir öğretim üyesinin önerisi dikkate alınmıştır. Üçüncü adımda ise öğretim üyesinin önerisiyle her başarı düzeyinden birer aday tespit edilmiştir. Bu adaylara çalışmanın amacına yönelik bilgi verilmesi sonrasında çalışmaya gönüllü olarak katılmaya yönelik onay vermeleriyle asıl katılımcılar belirlenmiştir. Katılımcılar Ali, Naz ve Can sırasıyla iyi, orta ve düşük düzeydeki grubu temsil etmektedir.

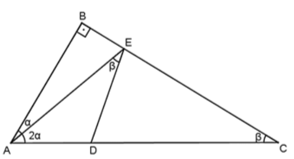
Birinci sınıfta öğrenim gören öğretmen adaylarının henüz ispat yapmaya yönelik yeterli deneyime sahip olmamaları, dördüncü sınıfta öğrenim gören öğretmen adaylarının ise alan öğretiminde uygulamaya yönelik dersler (ör., Öğretmenlik Uygulaması) içeren yoğun programlarının olması sebebiyle bu araştırmanın katılımcıları olarak tercih edilmemiştir. Bu doğrultuda matematik öğretmenliği programının ikinci veya üçüncü sınıfında öğrenim gören öğretmen adaylarıyla çalışmaya karar verilmiştir. Katılımcıların matematik öğretmenliği programı ikinci sınıf öğrencileri arasından belirlenme sebebi ise daha önce Soyut Matematik, Analiz I-II ve Lineer Cebir gibi dersleri alarak ispat yapma deneyimine sahip olmalarıdır.

Veri Toplama Araçları

Çalışmada akademik başarı bakımından farklı düzeydeki öğrencilerin ispat yapma sürecinde ileri-geri yöndeki zihinsel eylemlerini resmetmek amacıyla biri geometri diğeri ise sayılar teorisi ile ilgili toplam iki soru üzerinden klinik mülakatlar gerçekleştirilmiştir. Klinik mülakat sürecinde kullanılan sorular Tablo 3'te verilmiştir.

Tablo 3

Klinik Mülakat Sürecinde Kullanılan Sorular

Soru No	İlişkili Olduğu Alan	Soru
1	Geometri	 ABC dik üçgen, $m(\widehat{EAD}) = 2.m(\widehat{BAE}) = 2a$, $m(\widehat{AED}) = m(\widehat{ECA}) = \beta$ olarak veriliyor. Buna göre $\lvert DE \rvert = 2\lvert BE \rvert$ olduğunu gösteriniz.
2	Cebir	$a + b \geq 0$ şartını sağlayan a, b reel sayıları için $a^3 + b^3 \geq a^2b + ab^2$ olduğunu gösteriniz.

Matematiğin "iki temel direği" olarak nitelendirilen geometri ve cebir, tarihleri çok eski zamanlara kadar uzanan alanlardır (Atiyah, 2001). Nesnelerin bir bütün olarak özelliklerine odaklanmanın söz konusu olduğu geometrinin doğası ile semboller içeren nesneler üzerinde eylemlerin yürütüldüğü cebirin doğası birbirinden oldukça farklıdır (Tall, 1995). İspat sürecini, ileri geri tekniği ile farklı akademik başarı düzeyine ek olarak doğaları birbirinden farklı olan bu iki alan çerçevesinde incelemenin veri çeşitliliğini artıracağı düşünülmüştür. Bu nedenle öğretmen adaylarıyla yürütülen klinik mülakat sürecinde bir geometri ve bir sayılar teorisi sorusu kullanılmıştır. Geometri sorusu, bir dik üçgende açı ölçüleri verilerek kenar uzunlukları arasındaki orana ulaşılmasını gerektiren bir sorudur. Sayılar teorisi sorusu ise belirli bir şartı sağlayan reel sayılar arasındaki eşitsizliğe dayalı ilişkinin gösterilmesini gerektiren bir sorudur. Soruları belirleme sürecinde özellikle dikkat edilen husus, ileri-geri tekniğini kullanmaya uygun aday sorulara karar vermek olmuştur. Bu aday sorular arasından hipotez ve hüküm arasında bağlantı kurmayı her iki yönde (ileri ve geri yönde) yapılandırmayı gerektiren ve dolayısıyla ileri-geri tekniğinin yoğun bir şekilde kullanımına uygun potansiyele sahip sorular seçilmiştir. Seçilen soruların amaca uygunluğu hususunda matematiksel ispat konusunda ve geometri alanında doktora derecelerine sahip iki matematik eğitimcisinin görüşleri ve önerileri dikkate alınmıştır. Uzmanlar, seçilen aday sorular içerisinden Tablo 3'te yer verilen önermeler ispatlanırken daha fazla adım gerektirme potansiyeli olduğunu belirtmiştir. Böylece öğretmen adaylarının ispat adımlarındaki ileri ve geri hamlelerinin daha net bir şekilde tespit edilebileceğine karar verilmiştir.

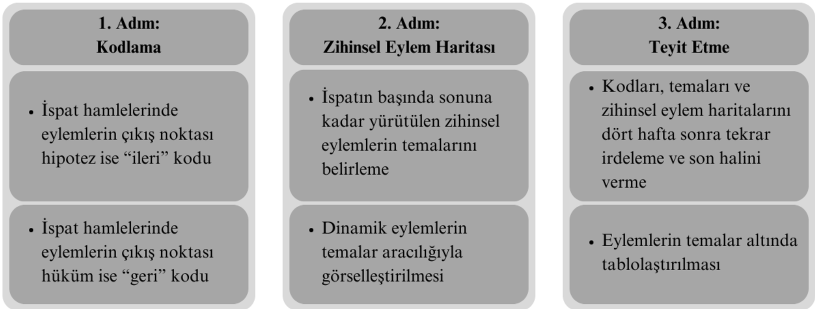
İspat yapma sürecindeki düşüncelerini ortaya çıkarmak için öğretmen adaylarına iki araştırmacı tarafından bazı sorular yöneltilmiştir. Bu sorular; yapılan bir eylemin gerekçesini ("Neden böyle yaptın?"), hangi bilgiyi/bilgileri kullanarak bu eylemi gerçekleştirdiğini ("Bunu neye dayanarak yaptın?") ve bu eylemle neyi amaçladığını ("Bunu yapmaktaki amacın nedir?") belirlemeye yöneliktir. Böylece ispat yapma sürecindeki zihinsel eylemlerini resmetme amacı doğrultusunda öğretmen adaylarının düşünceleri derinlemesine irdelenmiştir. Geometri ve sayılar teorisi soruları her bir adaya art arda verilmiştir. Adaylarla yapılan klinik mülakatlar aynı gün içinde farklı saatlerde yapılmıştır ve bu mülakatlar yaklaşık 60-70 dakika sürmüştür.

Veri Analizi

Araştırmanın amacı doğrultusunda her bir aday ile yürütülen klinik mülakatlar transkript edilerek içerik analizi yapılmıştır. Bu bağlamda analiz üç adımda gerçekleştirilmiştir (bkz. Şekil 1). Birinci adımda, transkript metinleri ayrıntılı bir şekilde incelenerek adayların eylemlerinin çıkış noktası (hipotez veya hüküm) tespit edilmeye çalışılmıştır. Bu süreçte adayın eylemlerinin çıkış noktası hipotez ise metin bölümü ileri, eylemlerinin çıkış noktası hüküm ise metin bölümü geri olarak kodlanmıştır. Böylece ileri ve geri hamlelerin yön değiştirdiği kritik noktalar da belirlenmiştir. İkinci adımda öncelikle adayların her bir soru için ileri ve geri hamlelerinin ilgili olduğu temalar belirlenmiştir. Geometri ve sayılar teorisi sorusu için ortak temalar olarak hipotez, hüküm, fikir, çıkarım ve yorum ifadeleri belirlenmiştir. Geometri sorusunda çizim yapma teması; sayılar teorisi sorusunda ise varsayım teması ilgili soruya özgü temalar olarak ortaya çıkmıştır. Bu temaların içeriğine dair açıklamalar aşağıda verilmiştir. Temaların belirlenmesinin ardından adayların her bir hamlesinin zihinsel eylemler bütünü içerisinde birbiriyle ilişkisi tüm ayrıntılarıyla harita şeklinde resmedilmiştir. Böylece yalnızca ileri ve geri hamlelerin sayısı ve yön değiştirdiği kritik noktalar değil; aynı zamanda adayların ispat yapma sürecindeki zihinsel eylemleri dinamik olarak görselleştirilmiştir (bkz. Şekil 2).

Şekil 1

Analiz Sürecinde Takip Edilen Adımlar



Ortak olan temalardan *hipotez*, öğrencinin hipotezi dikkate alarak (ör. $a, b \in R, a + b \geq 0$) sonraki adımları yapılandırma girişimini ifade etmektedir. Benzer şekilde *hüküm* teması, öğrencinin hükmü dikkate alarak (ör. $|DE| = 2.|BE|$) sonraki adımları yapılandırma girişimidir. *Fikir* teması, eylemleri yapılandırma sürecinde sözel olarak ifade edilen potansiyel bir girişimin ifadesidir (ör. $|BE|$ ile $|DE|$'yi doğrusal hale getirmeliyim.). Bu potansiyel girişimin eyleme dönüşme ve dönüşmeme ihtimali eşittir. Öğrenci dile getirdiği fikri uygulamışsa, fikrin eyleme dönüştürüldüğünü belirtmek için "+" işareti; fikri uygulamamışsa yani eyleme dönüştürülmemişse "-" işareti ile bu ayrım belirtilmiştir (bkz. Tablo 2). *Çıkarım* teması öğrencinin mevcut bilgileri arasında ilişkilendirme yaparak yeni bir bilgiye ulaşmasını ifade etmektedir. Bu temada yer alan kategorilerden biri olan *basit çıkarım*, yeni bir bilgi üretimini ifade ederken (ör. $a + b \geq 0$ ise $(a + b)^2 \geq 0$ olur.); *çıkarım* daha derin bir kavrayış gerektiren yeni bir bilgi üretimini (ör. $a + b \geq 0$ ise $(a - b)^2 \geq 0$ olur.) ifade etmektedir. Bir diğer kategori olan *yanlış çıkarım* ise öğrencinin çıkarım yaparken yanlış akıl yürütme sonucunda geçersiz bir bilgi üretmesini ifade etmektedir. Ortak olan son tema *yorum* ise öğretmen adaylarının yaptığı veya yapmayı planladığı herhangi bir eyleme dair düşüncelerini sesli olarak ifade etmesidir. *Yorum* teması, ispat sürecinde yapılan eylemlerin adaylar tarafından sübjektif olarak değerlendirilmelerini içeren ifadelerdir. Yorumlar; yapılan eylemin gerekçesini (ör. *"Elde etmek istediğimiz sonuçta* $(a^3 + b^3)$ *var. Onları yalnız bırakmak istedim."*), eylemin sonraki adımlar için uygun olup olmadığını (ör. *"Buradan bir şey gelmeyecek gibi."* ya da *"Bulduğum benzerlik oranında* $|DE|$ *ile* $|BE|$ *hiç yok."*) veya eylemlerin ardından bir neticeye varılamadığını ifade ederek (ör. *"Çok fazla bilinmeyen olduğundan ilerleyemiyorum."*) eylemin değerlendirilmesine yardımcı olmuştur.

Sorulara özgü olan temalardan *çizim yapma*, geometri sorusu ile ilgili temadır. Çizim yapma temasında öğretmen adayları genellikle diledikleri açı değerlerini oluşturmayı amaçlamıştır. Örneğin adaylar açıortay teoremini kullanabilmek için açıyı ikiye bölerek veya Pisagor teoremini kullanmak için dik üçgen oluşturarak ispat süreçlerini yapılandırmışlardır (ör. $[ED]$ uzatılarak ASD dik üçgeninin oluşturulması). Ayrıca benzer üçgen oluşturmak veya hükümde yer alan köşeleri birleştirmek için de doğru parçası çizmişlerdir (ör. B ile D köşelerini birleştiren doğru parçasının çizilmesi). Sayılar teorisi sorusuna özgü *varsayım* temasında ise soruda verilen eşitsizlik dikkate alınarak ispatın farklı adımlarında varsayımda bulunulmuştur. Soruda verilen eşitsizliği durumlara ayırarak inceleyen adaylar (ör. $a^2 + b^2 = 2ab$ veya $a^2 + b^2 > 2ab$ olsun.) bu varsayımları ile ispatlarını yapılandırarak yeni eylemler (ör. çıkarım, basit çıkarım, yorum vb.) gerçekleştirmiştir.

Analizin üçüncü adımı, ikinci adımdan dört hafta sonra yapılmıştır. Bu adımda transkriptler tekrar incelenerek hamlelerin *hipotez* ve *hüküm* ile bağlantısı bir kez daha teyit edilmiştir. Ayrıca adayların her bir soru için ileri ve geri hamlelerinin bağlantılı olduğu temalar gözden geçirilerek eylemlerin gerçekleşme sırası dikkate alınmış ve tablolar aracılığıyla ifade edilmiştir (bkz. Tablo 2).

Veri analizinde birinci adım olarak nitelendirilen kodlama, iki araştırmacı tarafından ayrı ayrı yapılmıştır. İlk adımın tamamlanmasının ardından bir araya gelen araştırmacılar tarafından “ileri” ve “geri” olarak belirlenen kodlar karşılaştırılmıştır. Kodların uyumluluğunun teyit edilmesinin ardından ikinci adıma geçilmiştir. İkinci adımda her bir araştırmacı tarafından adayların ispat sürecindeki zihinsel eylemlerinin ilgili olduğu tema belirlenmiş ve zihinsel eylemlerin bütününü temsil eden taslaklar oluşturulmuştur. Bu adımın ardından tekrar bir araya gelen araştırmacılar tarafından adayların ileri ve geri hamlelerinin bağlantılı olduğu temalar üzerinde tartışmalar yürütülerek fikir birliğine varılmış, böylece temalara son hali verilmiştir. Buna ek olarak, oluşturulan taslaklardan yola çıkarak öğretmen adaylarının düşünce ağını en yalın ve doğru şekilde yansıtan bilişsel eylem haritalarına son hali verilmiştir. Bu iki adımda izlenen yolda araştırmanın iç tutarlılığını sağlamak hedeflenmiştir. Analizin üçüncü adımı olan son adım için dört hafta sonra bir araya gelen araştırmacılar, analizin önceki iki adımını irdelemişlerdir. Bu süreçte ileri ve geri tema tabloları hazırlanmıştır. Araştırmacılar ayrıca adayların zihinsel süreçlerini ayrıntılarıyla betimleyebilmek amacıyla doğrudan alıntı yapılacak kesitleri belirlemişlerdir. Böylece analizle ulaşılan sonuçlara nasıl varıldığını gösterebilmek için doğrudan alıntılara yer verilmiştir.

Bulgular

Matematik öğretmen adaylarının ispat sürecindeki zihinsel eylemlerini ileri-geri tekniği aracılığıyla resmetmeyi amaçlayan bu çalışmanın verileri her bir soru için ayrı ayrı ele alınmıştır.

İleri-Geri Tekniğinin Geometri Sorusunda Kullanımına Yönelik Bulgular

Öğretmen adaylarının her birinin hamlesi ileri geri tekniği bağlamında ele alınmıştır. İnceleme sürecinde öğretmen adaylarının yaptıkları ispatlar ve bu ispatları yaparken dile getirdikleri ifadeler dikkate alınmıştır. Buna bağlı olarak her bir öğretmen adayının ispat sürecindeki ileri-geri hamleleri resmedilmiştir.

Ali'nin geometri sorusunun ispatını yapma sürecindeki ileri-geri hamlelerini ayrıntılı bir şekilde gösteren zihinsel eylem haritaları Ek 1'de yer alan Şekil 4'te verilmiştir. Ali'nin bu ispat sürecinde gerçekleştirdiği ileri-geri hamleler kapsamındaki zihinsel eylemlere ilişkin ayrıntılar ise Tablo 4'te yer almaktadır.

Tablo 4

Ali'nin Geometri Sorusunu İspatlama Sürecindeki İleri-Geri Hamleleri

Hamle	Hipotez	Hüküm	Fikir		Çizim Yapma	Çıkarım			Yorum
			-	+		YÇ	BÇ	Ç	
İleri 1	✓							✓	
			✓				✓		
							✓		
					✓	✓			
Geri 1		✓							✓
							✓		✓
					✓	✓			
İleri 2	✓			✓	✓			✓	
								✓	
Geri 2		✓	✓		✓				
İleri 3	✓				✓		✓	✓	
			✓		✓				
Geri 3		✓		✓					
İleri 4	✓		✓						
Geri 4		✓							✓
İleri 5	✓		✓						
Geri 5		✓	✓						
		✓	✓						
İleri 6	✓							✓	
								✓	
				✓				✓	
								✓	

Tablo 4'ten görüldüğü üzere Ali, geometri sorusunun ispatında toplam 6 ileri, 6 geri hamle yapmıştır. Ali, ispatı yapmaya hipotezi kullanarak başlamıştır. Ali'nin başlangıç hamlesi olarak hipotezi kullanması, ispat sürecini ileri yönde yapılandırdığına işaret etmektedir. Başlangıç hamlesinde, hipotezde yer alan açı ölçülerini dikkate alarak iki üçgenin benzer olduğu çıkarımında bulunmuştur. Bu çıkarımın ardından hipotezdeki aynı bilgilere dayanarak üçgenin bir köşesinden dışa doğru belirli bir açı ölçüsü oluşturarak bir üçgen çizme fikrini öne sürmüştür. Ancak bu fikri mevcut hamle içerisinde uygulayamayıp daha sonraki ileri hamlesinde (İleri 2) uygulamıştır. Bu hamlesinde Ali'nin zihnindeki fikirlerini uygulayamadığına yönelik ifadeleri şu şekildedir:

> ***Ali:*** *Şurada α, 2α olarak ayrılmış. Belki A köşesinden bir α daha açabiliriz diye düşünüyorum.*
>
> ***Araştırmacı 1:*** *Yani şu EAD açısını bir α kadar daha açmayı mı düşünüyorsun?*
>
> ***Ali:*** *Evet. (Herhangi bir girişimde bulunmadan düşünmektedir.)*
>
> ***Araştırmacı 2****: Şu an henüz emin değilsin sanırım, değil mi?*
>
> ***Ali:*** *Aynen öyle.*

Ali, eyleme geçirmediği bu düşüncesinin ardından basit çıkarımlarda bulunmuş ve benzer üçgenler oluşturmak amacıyla üçgenin bir kenarına dik doğru parçası çizmiştir. Çizdiği doğru parçasıyla benzer üçgenler oluşturduğunu düşünmüş ve bir benzerlik oranı yazarak yanlış bir çıkarımda bulunduğunu fark etmiştir. Bu yanlış çıkarımını fark etmesinin ardından hükümde verilen ifadelere odaklanarak ispat sürecini geri yönde yapılandırdığını şu sözlerle ifade etmiştir:

> ***Ali:*** *E köşesinden $[AC]$' ye bir dik indirdiğimizde β'ları ortak olan iki tane dik üçgen benzerliği oluşur.*
>
> ***Araştırmacı 1:*** *Peki.*
>
> ***Ali:*** *(Benzerlik oranlarını yazarak) $\frac{|EC|}{|AE|} = \frac{|EM|}{|AE|}$ birbirine eşit gelir. Hatta şu bile benzer oluyor.*
>
> ***Araştırmacı 1:*** *Peki… Hangi şu benzer?*
>
> ***Ali:*** *EAM üçgeni ile$\cdots$ Yok, onda olmuyor; 2α imiş orası pardon. EAM üçgeni diğerlerine benzer olmuyor çünkü açılar farklı. Bizden isteneni de dikkate almalıyız. Hükümde $|DE| = 2x$, $|BE| = x$ demiş.*
>
> ***Araştırmacı 2:*** *$|DE| = 2x$ yazdın. $|BE| = x$ yazdın.*
>
> ***Ali:*** *Buradakilerin ($[DE]$ ile $[BE]$) birbiriyle ortak bir yere gelmesi lazım.*

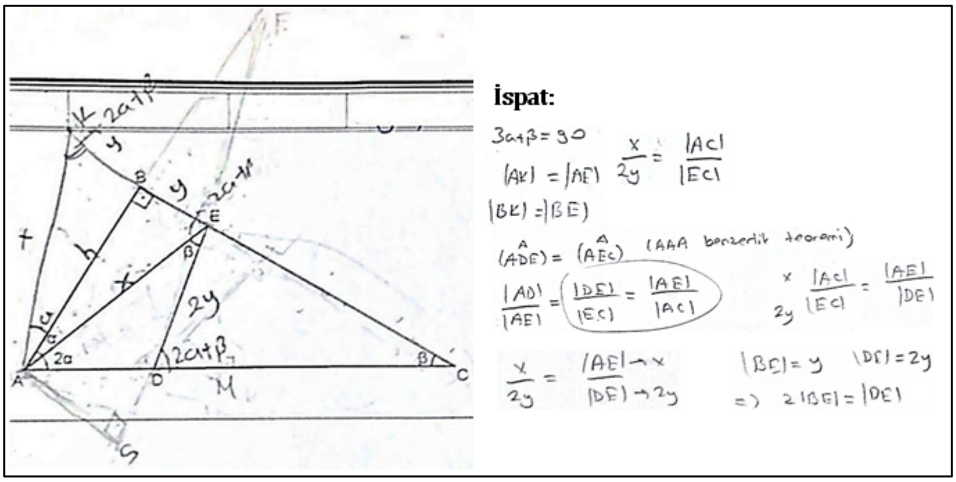
Hükümde verilen doğru parçaları arasında bir bağlantı kurmaya çalışan Ali, bu girişiminden olumlu sonuç alamayarak ispat sürecini ileri yönde yapılandırmaya geçiş yapmıştır. Böylece hüküm üzerinden fikir üretirken bunu bir kenara bırakıp daha önce eyleme geçmeyen düşüncesine yönelik çizim yapmıştır. Bu çizimi yaparak geri yöndeki yapılandırmalarını ileri yöne taşımıştır. İspat sürecini yapılandırmada Ali'nin amacı, ispatı yapabilmek için gerek duyduğu bilgileri hipotez ile hüküm arasında yön değiştirerek toplamaktır. Bu amaç doğrultusunda hem hipotezi hem de hükmü dikkate alarak benzer üçgenler bulma, ek çizimler yapma, teoremler kullanma gibi çeşitli girişimlerle ileri ve geri hamleler arasında gelgit yapmıştır. Hipotez ve hüküm arasında gel-gitler yapan Ali, topladığı bilgilerle sürecin başında yaptığı çizimi birleştirerek ispatı tamamlamıştır. Ali'nin ispat sürecini değerlendirirken, yaptığı ek çizimi süreçteki en önemli hamle olarak nitelendirdiği sözler aşağıda verilmiştir:

> ***Araştırmacı 2:*** *Şimdi kafandaki o süreci kâğıda yansıttın. Biraz da bana sözlü olarak tekrar yansıtmanı istiyorum.*
>
> ***Ali:*** *Bizi burada sona ulaştıran ilk adım yaptığım çizim oldu bence. BC'yi doğrusal bir şekilde uzattık. A'dan alfa açısı yapacak kadar BC'ye bir doğru parçası indirdik. (...) Bu sorunun çözümü şu AK'yı çizmekten geçiyormuş. Yani çizim, görme geometrinin özeti diyebiliriz.*

Ali'nin geometri sorusuna yönelik ispatının tamamı Şekil 2'de gösterilmiştir.

Şekil 2

Ali'nin Geometri Sorusuna İlişkin İspatı



Naz'ın ve Can'ın geometri sorusunun ispatını yapma sürecindeki ileri-geri hamlelerini ayrıntılı bir şekilde gösteren zihinsel eylem haritaları Ek 1'de yer alan Şekil 5'te ve Şekil 6'da verilmiştir. Naz'ın ve Can'ın bu ispat sürecinde gerçekleştirdiği ileri-geri hamleler kapsamındaki zihinsel eylemlere ilişkin ayrıntılar ise Tablo 5'te yer almaktadır.

Tablo 5

Naz ve Can'ın Geometri Sorusunu İspatlama Sürecindeki İleri-Geri Hamleleri

Hamle	Öğretmen Adayı	Hipotez	Hüküm	Fikir		Çizim Yapma	Çıkarım			Yorum
				-	+		YÇ	BÇ	Ç	
İleri 1	Naz	✓		✓						
		✓						✓		
		✓				✓		✓	✓	
	Can	✓						✓		
		✓		✓						
Geri 1	Naz		✓							✓
				✓						
					✓			✓	✓	
			✓	✓						
	Can		✓	✓						
			✓			✓				✓
İleri 2	Naz	✓		✓						✓
	Can	✓		✓						
		✓			✓					
		✓		✓						
		✓		✓						
					✓	✓				
								✓		
									✓	
Geri 2	Naz		✓	✓						✓
					✓	✓			✓	
									✓	
								✓	✓	
				✓						✓
									✓	
	Can		✓	✓				✓		
				✓					✓	
										✓
								✓		
					✓			✓		
				✓			✓			
										✓
								✓		
										✓
İleri 3	Naz	✓						✓	✓	
Geri 3	Naz		✓						✓	✓

Tablo 5'ten görüldüğü üzere Naz, geometri sorusunun ispatında toplam 3 ileri, 3 geri hamle yapmıştır. Hipotezi ele alarak ispat sürecine başlayan Naz, verilen açılar üzerinden basit çıkarımlar yaparak çizim yapma gereği duymuştur. Bu durum, Naz'ın ispat sürecine ileri yönde başladığını göstermektedir. İleri hamlede üçgenlerin benzerlik oranı ile ilgili bir çıkarımda bulunan Naz, bu oran içerisinde hükümde yer alan kenar uzunluklarını aramıştır. Bunun üzerine farklı bir üçgende benzerlik oranı arayışına girerek ispatını geri yönde şekillendirmeye başlamıştır. Naz, iki ileri ve iki geri hamle daha yaparak ispatını tamamlamıştır. Bu süreçte Naz'ın fikirler öne sürdüğü ancak yalnızca birini eyleme geçirdiği görülmektedir. Ayrıca, ilk iki hamlesi ile kıyaslandığında son dört hamlesinde çok sayıda çıkarım yaptığı dikkat çekmektedir.

Tablo 5'ten görüldüğü gibi Can, geometri sorusunda yer alan matematiksel ilişkinin ispatını yaparken toplam 2 ileri, 2 geri hamlede bulunmuştur. Hipotezde yer alan bilgileri kullanarak basit çıkarım yapan Can, ispatını ileri yönde yapılandırmak için hamle yapmıştır. Hipotezde belirtilen dik üçgen, Can'ı geometrik şekil üzerinde yeni bir dik üçgen oluşturma fikrine yöneltmiştir. Ancak Can, bu fikrini uygulamayarak hükümde yer alan kenar uzunlukları ilişkisine odaklanmıştır. Kenar uzunlukları arasındaki ilişkiye ulaşabilmek için benzer ya da eş üçgen arayışına girmiştir. Böylece ispatında geri yönde bir hamlede bulunmuştur. Can, ispatını bir ileri ve bir geri hamle daha yaparak sonlandırmıştır; ancak ispatını tamamlayamamıştır. Bu süreçte fikirler öne sürerek bunların bir kısmını eyleme dönüştüren Can'ın özellikle son iki hamlesinde (İleri 2 ve Geri 2) basit çıkarım ve çıkarım yaptığı dikkat çekmektedir.

İleri-Geri Tekniğinin Cebir Sorusunda Kullanımına Yönelik Bulgular

Bu başlıkta öğretmen adaylarının cebir sorusuna yönelik ispat süreçleri incelenerek ileri-geri hamleleri resmedilmiştir. Öğretmen adaylarının ispat sürecindeki hamleleri, yazdıkları ispatlar ve bu ispatları yaparken dile getirdikleri ifadeler aracılığıyla belirlenmiştir.

Akademik başarısı orta düzeyde olan Naz'ın cebir sorusunun ispatını yapma sürecindeki ileri-geri hamlelerini ayrıntılı bir şekilde gösteren zihinsel eylem haritaları Ek 2'de yer alan Şekil 8'de verilmiştir. Naz'ın bu ispat sürecinde gerçekleştirdiği ileri-geri hamleler kapsamındaki zihinsel eylemlere ilişkin ayrıntılar ise Tablo 6'te yer almaktadır. Tablo 6'dan görüldüğü gibi Naz, cebir sorusunun ispatında toplam 2 ileri 2 geri hamle yapmıştır. İspat yapmaya hipotezi kullanarak başlayan Naz, ispatını ileri yönde yapılandırmıştır. Bu hamlesinde hipotezde verilen eşitsizliği dikkate alarak yapabileceklerini düşünmüş ve olası hamlelerini dile getirmiştir. Bu olası hamlelerin cebir alanındaki ispatlarda kullanılan genel yaklaşım olduğu yorumunu yaparak ispat sürecinde deneyimlerinden yararlandığına işaret etmiştir. Ardından hipotezde verilen ifadenin küpünü almayı düşünmüş ve bu düşünceyi eyleme geçirerek geri hamlesine geçmiştir. Naz'ın bu süreçteki düşünceleri ileri ve geri hamleler arasındaki geçişin ne kadar esnek olabildiğini ve aynı zamanda ne kadar iç içe olduğunu göstermektedir.

Tablo 6

Naz'ın Cebir Sorusunu İspatlama Sürecindeki İleri-Geri Hamleleri

Hamle	Hipotez	Hüküm	Fikir		Varsayım	Çıkarım		Yorum
			-	+		BÇ	Ç	
İleri 1	✓		✓					
								✓
Geri 2		✓	✓					
				✓			✓	
								✓
İleri 2	✓					✓	✓	
			✓					
				✓			✓	
								✓
Geri 2	✓		✓					
				✓			✓	
			✓					
				✓			✓	
			✓					✓
				✓			✓	
						✓		

Naz'ın ileri hamleden geri hamleye geçişini yansıtan kesit aşağıda sunulmuştur:

> ***Naz:*** *$a + b \geq 0$ verilmiş. Şimdi benim aklıma böyle sorularda direkt yani cebirsel sorularda $x^2 + y^2$'nin sıfırdan büyük olduğunu kullanmak gelir ya da toplamın karesini alıp sıfırdan büyük olması gibi şeyler gelir.*
>
> ***Araştırmacı 1:*** *Neden onlar gelir?*
>
> ***Naz:*** *Çünkü böyle sorularda hep böyle bir çıkış noktası oluyor. (Bir süre düşünür.). Şimdi $a + b > 0$ verilmiş.*
>
> ***Araştırmacı 1:*** *Evet ve eşit verilmiş.*
>
> ***Naz:*** *a+b'nin küpünü de alsam yine sıfırdan büyük olacak.*
>
> ***Araştırmacı 1:*** *Onun küpünü alma düşüncesi aklına nereden geldi?*
>
> ***Naz:*** *Burada sonuç yani hükümde a^3, b^3 olduğu için.*

Hükümde reel sayıların küpü mevcut olduğundan hipotezde verilen ifadenin küpünü alan Naz, bu süre boyunca geri hamlesini yapılandırmıştır. Küp alma ve değişkenleri ortak çarpan parantezine alma gibi eylemlerde bulunan Naz, yaptığı eylemlerden bir yere ulaşamayacağı yorumuyla ileri yönde bir hamleye geçiş yapmıştır. Naz'ın geri hamleden ileri hamleye geçişini yansıtan sözler şu şekildedir:

Araştırmacı 1: *Şu an yazdığından vaz mı geçtin? Neden vazgeçtin?*

Naz: *Çünkü böyle bir şey [hükümdeki ifade] gelmeyecek gibi buradan. (Bir süre düşünür.).* $(a+b)^2$ *büyüktür sıfırdan. Burada zaten sıfırdan büyük toplamları dediği için hani. Demeseydi de yine aynısı olurdu.*

Araştırmacı 2: *Yani farklarının karesini mi demek istiyorsun?*

Naz: *Evet, yine pozitif olur.*

Araştırmacı 2: *İki reel sayının toplamının veya farkının karesini aldığımızda sıfırdan büyük olduğunu söyledin.*

Naz: *Şimdi şunu... Beni bunlara ulaştırabilecek burada ne olabilir diye düşünüyorum.*

Araştırmacı 1: $a^2\,b + ab^2$*'ye nasıl ulaşırım acaba diye mi düşünüyorsun?*

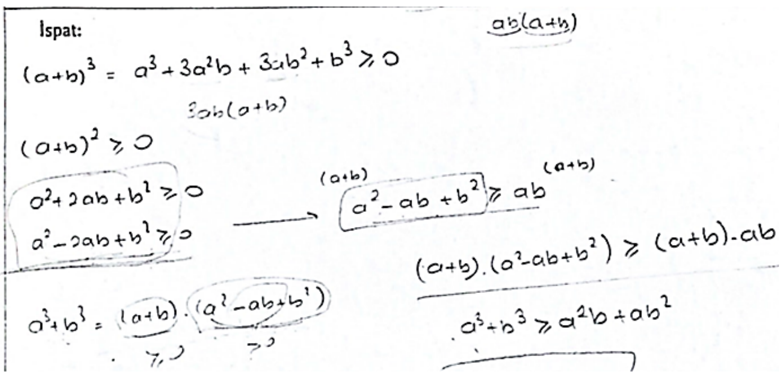
Naz: *Aynen. Şey düşündüm mesela bunları paranteze falan alsam acaba bir şey olur mu? (Bir süre düşünür). Şu an birbirine benzer o kadar şey var ki. Ama ne yapacağımı bilmiyorum.*

Naz, yaptığı eylemlerin kendisini hükümdeki ifadeye ulaştırmayacağını dile getirmesinin ardından hipotezde verilen eşitsizliğe odaklanarak basit bir çıkarımda bulunmuştur. Böylece hipotezi dikkate alarak yaptığı basit çıkarımla ispatını ileri yönde yapılandırmaya geçiş yapmıştır. Önceki hamlelerinde elde ettiği eşitsizlikleri de dikkate alarak derin bir düşünme sürecine giren Naz, elinde çok fazla eşitsizlik olmasının bir sonraki adıma karar vermesini güçleştirdiğini belirterek, ileri yöndeki hamlesini sonlandırmıştır. Bu aşamada dikkatini tekrar hükümdeki ifadeye yönlendiren Naz, ispatını geri yönde uygun eylemlerle yapılandırarak tamamlamıştır.

Naz'ın sayıları teorisi sorusuna yönelik ispatının tamamı Şekil 3'te gösterilmiştir.

Şekil 3

Naz'ın Sayılar Teorisi Sorusuna İlişkin İspatı



Ali'nin ve Can'ın cebir sorusunun ispatını yapma sürecindeki ileri-geri hamlelerini ayrıntılı bir şekilde gösteren zihinsel eylem haritaları Ek 2'de yer alan Şekil 7'de ve Şekil 9'da verilmiştir. Ali'nin ve Can'ın bu ispat sürecinde gerçekleştirdiği ileri-geri hamleler kapsamındaki zihinsel eylemlere ilişkin ayrıntılar ise Tablo 7'de yer almaktadır.

Tablo 7

Ali ve Can'ın Cebir Sorusunu İspatlama Sürecindeki İleri-Geri Hamleleri

Hamle	Öğretmen Adayı	Hipotez	Hüküm	Fikir		Varsayım	Çıkarım		Yorum
				-	+		BÇ	Ç	
Geri	Ali		✓	✓					
İleri	Ali	✓					✓		
					✓			✓	
	Can	✓		✓					
Geri	Ali		✓		✓			✓	
							✓		
	Can		✓	✓					
					✓			✓	
							✓		✓
								✓	
İleri	Ali	✓							✓
	Can	✓						✓	✓
							✓		
						✓			
							✓	✓	
							✓		
Geri	Ali		✓	✓					
					✓		✓		
									✓
İleri	Ali	✓		✓					
					✓		✓		
								✓	
							✓		
									✓
						✓			
									✓
					✓			✓	
							✓		

Tablo 7’de görüldüğü üzere Ali, cebir sorusunda yer alan matematiksel ilişkinin ispatını yaparken toplamda 3 geri, 3 ileri hamlede bulunmuştur. Ali, geometri sorusundan farklı olarak bu ispat sürecine geri bir hamleyle başlangıç yapmıştır. Başka bir ifadeyle ispat sürecine hüküm ifadesine odaklanarak başlamıştır. Bu odaklanmanın sonucunda ise bir düşünce ortaya atarak eyleme geçirmemiştir. Ancak hipotez bilgilerini gözden geçirerek ispatını ileri yönde yapılandırma girişiminde bulunduğunda bu düşüncesini eyleme geçirmiştir. Böylece Ali, ispat sürecini geri yönden ileri yöne doğru yapılandırarak ispatını tamamlamıştır. Ali’nin son hamlelerinde ilk hamlelerine göre yorum yapma ve fikir öne sürme bakımından daha aktif olduğu görülmektedir.

Tablo 7’de görüldüğü gibi Can, cebir sorusunun ispatında toplam 2 ileri 1 geri hamle yapmıştır. İspatını ileri yönde yapılandıran Can’ın bu hamlesine yönelik dile getirdiği düşünce, hipotezde verilen ifadenin karesini almaktır. Bu hamlesinin gerekçesi sorulduğunda ise hükümde yer alan ifadeye ulaşmasını sağlayacak yardımcı ifadelere ulaşmayı hedeflediğini dile getirmiştir. Böylece Can, hükmü dikkate aldığına işaret ederek ispatına geri yönde hamlelerle devam etmiştir. Can’ın son hamlesinde (İleri 2) çıkarımlar yaparak ispatını tamamladığı dikkat çekmektedir.

Tartışma, Sonuç ve Öneriler

Araştırma sonucunda öğretmen adaylarının akademik başarı düzeyi fark etmeksizin gerek geometri gerekse cebir sorularına yönelik ispat sürecinde ileri-geri hamlelerini bilinçli olmasa da yoğun bir şekilde gerçekleştirdiği görülmüştür. Hipotezin hükmü gerektirdiğini gösterme eğilimine sahip olan ispat, özellikle üniversite müfredatının temel bir bileşenidir (Jones, 2000). Üniversite düzeyinde farklı derslerde bu gerektirmeyi gösterme eğilimi esnasında ikna edici bir argüman dizisi oluşturulur. Bu derslerde yapılan ispatlar, her ne kadar hüküm ifadesinin hipotezin doğru olduğu varsayımıyla ulaşılan mantıksal bir sonuç olduğunu gösterme çabası olsa da bu süreçte hüküm ve hipotez arasında gelgitler yapmak kaçınılmazdır. Solow (2014) ispatı, başlangıç noktası ‘hipotez’ ve bitiş noktası ‘hüküm’ olmak üzere bir labirent içerisinde çıkış yolu bulmaya benzetmiştir. Sadece başlangıç noktasını dikkate alarak ilerlerken yanlış yola girmek mümkün olabileceğinden bitiş noktasından başlangıç noktasına doğru geri yönde takip edilmesi gereken yolları da göz ardı etmemek gerekir (Solow, 2014). Dolayısıyla bir ispat sürecini tek yönlü olarak yapılandırmak, farklı yönleri göz ardı ederek ispat adımlarını belirleme noktasında çeşitli engeller oluşturabilir. Bu doğrultuda ispat sürecinde hem hipotezden başlayarak ileri yönde bir düşünce yapılandırması hem de hükümden başlayarak geri yönde bir düşünce yapılandırması söz konusudur. Manin (1992) ise aksiyom, tanım ve teoremleri bir yol üzerindeki önemli duraklara, yolun kendisini ise ispata benzeterek yoldaki her bir güzergahtaki duraklara uğrama sırasının ispatın gerektirdiği esneklikte olabileceğini ifade etmiştir. Böylece önermenin ispatında esnek yollar inşa edilebileceğini vurgulamıştır. Yapılan bu benzetmeler, bir önermenin hipotezi ve hükmü arasında ‘yol veya yollar’ inşa etme sürecinde iki yönlü (ileri ve geri) dinamik eylemler gerçekleştirildiğini göstermektedir. Bu çalışmada da adayların tamamı, ispat için bir yol inşa etme sürecinde bir yandan çıkış noktası olarak hipotezi dikkate alırken diğer yandan varılacak nokta olarak hükmü dikkate almayı ihmal etmemiştir.

Araştırmada akademik başarısı yüksek olan öğretmen adayının ispat sürecindeki ileri ve geri hamle sayılarının diğer öğretmen adaylarına göre fazla olduğu görülmüştür. Ayrıca akademik başarısı yüksek ve orta düzeyde olan öğretmen adaylarının her iki önermenin de ispatını tamamlayabildiği; ancak akademik başarısı düşük düzeyde olan öğretmen adayının yalnızca sayılar teorisine yönelik önermenin ispatını tamamlayabildiği belirlenmiştir. Akademik başarı düzeyi düşük aday tarafından tamamlanan ispat incelendiğinde ise ileri ve geri yöndeki hamle sayısının diğer adaylara göre daha az sayıda olduğu dikkat çekmektedir. Bu durum akademik başarı ile ispatı tamamlayabilme becerisi arasında ileri ve geri hamle sayısı bakımından dolaylı bir ilişki olabileceği fikrini gündeme getirmektedir İspat sürecinde hamle sayısında bir artışın meydana gelmesi, farklı durumların ele alınabildiği anlamına gelmektedir. Akademik başarısı yüksek olan aday, tutarlı argümanlar üretmek için hem ileri hem de geri yönde yeni hamleler yapmaktan çekinmemiştir. Özellikle, bir yönde ilerleme sağlayamadığı durumda diğer yöne geçiş yapan aday, tümdengelimsel argüman üretme mücadelesinde hipotez ve hükümde yer alan ifadeleri her defasında farklı bir yönüyle kullanma çabasında olmuştur. Akademik başarısı yüksek olan adayın ileri ve geri yönde yeni hamleler yapmaktan çekinmemesi, farklı bilgileri (hipotez, hüküm, tanım, teorem vb.) dikkate alarak düşünsel ve eylemsel girişimde bulunduğunu göstermektedir. Bu durum özellikle ispatı tamamlamak için düşüncede esnekliğin önemini göstermektedir. Krutetskii (1969) esnek düşünmeyi bir düşüncenin tersine çevrilebilirliği olarak nitelendirmektedir. Spiro ve Jehng (1990) ise esnekliği bireyin bilgilerini durumun gerektirdiği taleplere uygun olarak yeniden yapılandırabilme becerisi olarak tanımlamıştır. İleri ve geri yönde fazla sayıda hamle yapan adayın diğer adaylara göre hipotez ve hüküm arasında esnek bir şekilde yön değiştirmesinin ilgili durumun gerektirdiği 'düşünceyi tersine çevirme' eylemini gerçekleştirme bakımından daha üst düzey bir beceriye sahip olduğunu göstermektedir. Bu adayın her iki sorudaki ispatı tamamladığı da göz önüne alınırsa ispatı tamamlamanın düşüncedeki esneklikle ilişkisinin dolaylı da olsa mevcut olduğu ihtimali akla gelmektedir. Problem çözme olarak nitelendirilebilen ispat yapmanın (Weber, 2005) en önemli bileşenlerinden biri ise öğrencilerin mevcut bilgilerini yeni bağlamlarda kullanabilme esnekliğine sahip olmasıdır (Warner vd., 2003). Bu noktada sorulabilecek dikkate değer sorulardan biri "Öğrencilerin mevcut bilgilerini ispat yaparken yeni bağlamlarda kullanabilmeleri ve esnek düşünebilme becerisi kazanmaları için neler yapılabilir?" sorusudur. Bu doğrultuda öğretmen adaylarının ispat yapma deneyimi kazanabilmeleri ve esnek düşünme becerisi edinebilmeleri için uygun bir ispat öğretim sürecinin tasarlanması önemlidir. 'Bir önermenin ispatını nasıl gösterebilirim?', 'İspatta hangi durumlarda ne gibi argümanlar kabul edilebilirdir?', 'Bu argümanlar ispat zincirinde nasıl kullanılabilir?' gibi çeşitli sorulara verilen yanıtlarla elde edilen bilgiler arasında bağlantı kurma fırsatı, öğrencilerin düşünme esnekliğine katkıda bulunmayı amaçlar (Dreyfus ve Eisenberg, 1996). Bu sorulara yanıt bulma süreci bireyi düşünmeye teşvik etmekle birlikte farklı bilgileri uygun ilişkilendirmeler yaparak kullanma fırsatı sunar. Diğer taraftan matematikçilerin ispat yapma süreçlerinin yapısının pedagojik bir perspektifle ispat öğretimine yansıtılması da önemlidir. Moore (1994) matematikçilerin akademik çalışmalarında genellikle “sezgi-deneme-hata yapma-varsayımda bulunma-ispat” şeklinde bir ilerleme gösterdiklerini ancak lisans derslerinde öğrencilere “tanım-teorem-ispat” şeklinde bir ispat öğretim yaklaşımı sergilediklerini belirtmiştir. Bu iki durum arasındaki tutarsızlık, öğrencilerin ispatı yaratıcı bir inşa sürecine dönüştürmesini sağlamaktan ziyade inşa edilmiş hazır bir ürün olarak öğrenmesine neden olmaktadır (Tall, 2002). Bu doğrultuda gerek öğretmenler gerekse öğretim elemanlarının ispat öğretiminde ileri-geri tekniğini benimsemesi etkili öğrenmelerin önünü açabilir.

Öğretmen adaylarının ispat sürecindeki ileri ve geri hamle sayısı birbirinden ayrı olarak değerlendirildiğinde ise akademik yönden daha başarılı olan öğretmen adaylarının geri hamle sayısının daha fazla olduğu dikkat çekmektedir. Bu durum, akademik başarısı daha yüksek olan öğrencinin ispatını yapılandırma sürecinde sık sık ulaşmaya çalıştığı sonuca dönüş yaptığını göstermektedir. Solow (2014) ileri-geri tekniğinde hükmü dikkate alarak “Bu ifadenin doğru olduğunu nasıl gösterebilirim?” sorusuna yanıt verebilmenin ispatın en önemli noktalarından biri olduğunu belirtmiştir. Bu soruyu anahtar soru olarak nitelendiren Solow (2014), anahtar soruya yanıt verebilmenin belirli miktarda yaratıcılık, sezgi ve deneyim kullanmayı gerektirdiğini vurgulamıştır. Benzer şekilde Moore (1994) ispatın sezgi, inanç, bilgi ve bilişsel beceriler gibi birçok faktörden doğrudan etkilendiğini belirtmiştir. Bu bakımdan geri hamle sayısı fazla olan öğretmen adayının daha fazla bilgiye ve deneyime sahip olduğu yorumu yapılabilir. Hüküm ifadesinin birkaç kez sorgulanması gerek hipotez bilgilerinin nasıl kullanılacağı gerekse ispatta gelinen noktadan sonra nasıl ilerleneceği yönünde önemli bir katkı sunmaktadır. Bu bakımdan ispat sürecinde hüküm ifadesine ulaşmak için neler yapılacağı üzerine birçok kez düşünülmesi ispatın tamamlanmasında önemli bir rol oynamaktadır. Diğer taraftan, ispatı yapılandırma sürecinde hükmün dikkate alınmasını gerektiren ispat yöntemlerinin yoğun kullanımı özellikle geri hamlelerin sayısını ve niteliğini destekleyebilir. Bu doğrultuda öğretmen adaylarının bir önermenin hükmünü de dikkate alarak düşüncelerini yapılandırmalarına yardımcı olmak için alan derslerinde ispat yöntemlerinden biri olan çelişki ile ispat örneklerine daha sık yer verilmesi etkili olabilir. Çelişki yöntemi ile ispat, bir önermenin yanlış olduğu varsayımının çelişkiye neden olacağını göstermeyi amaçlar (Hine ve McNab, 2014). Daha açık bir ifade ile çelişki yöntemiyle ispat, bir önermenin öncülü olarak verilen hipotezden önermenin hükmünü doğrudan türetmenin zor olduğu durumlarda yaygın olarak kullanılan bir yöntemdir (Otani, 2019). Çelişki ile ispat yönteminde $p \Rightarrow q$ şeklinde verilen bir önerme ispatlanırken $p \wedge \bar{q}$ önermesinde bir çelişki aranır. Dolayısıyla bu yöntemde hipotez ve hükmün değili varsayımı üzerinden ispat yapılandırılır. Bu yöntemin kullanılması, ispat yapma sürecinde yalnızca hipotezi dikkate almanın yeterli olmayacağını öğrencilere göstermesi bakımından önemlidir. Nitekim Polya (1957) dolaylı ispat yönteminin öğrencilerin düşüncelerini daha üst seviyelere çıkarabilmesine imkân sağladığını iddia ederek bu yöntemin kullanımının teşvik edilmesinin temel düşünmeden ileri düşünmeye geçişe katkısına vurgu yapmıştır. Benzer şekilde olmayana ergi yöntemi, hükmün değilini dikkate almayı gerektirdiğinden derslerde bu yöntemin kullanımını teşvik edecek türde önermelere yer verilmesi öğrencilerin geri hamlelerini yapılandırmasına imkân tanıyabilir.

Geometri ve cebir soruları ayrı ayrı değerlendirildiğinde ise geometri sorusuna ilişkin ispat sürecinde akademik yönden başarı arttıkça ileri hamle sayısının arttığı görülmüştür. Cebir sorusunda ise akademik anlamda orta düzeyde başarıya sahip öğretmen adayı ile düşük düzeyde başarıya sahip öğretmen adayının ileri hamle sayılarının eşit olduğu fark edilmiştir. Bu açıdan dikkat çeken bir diğer sonuç, adayların tamamının geometri sorusundaki ileri ve geri hamle sayılarının toplamının cebir sorusundaki ileri ve geri hamle sayılarının toplamından fazla olmasıdır. Bu durum, geometri sorusunun hipotez ve hüküm arasında daha esnek gelgitler yapma potansiyeli olduğunu ve uzamsal olarak sunduğu görsellikle adayların hipotez ve hüküm arasında ilişki kurma girişimlerine daha dinamik bir ivme kazandırmış olabileceği ihtimalini akla getirmektedir. Atiyah (2001) geometrinin "uzay" ile cebirin ise "zaman" ile ilişkili olduğu vurgusuyla statik bir evrende manipülatif eylemler yürütülemeyeceğinden cebirin doğası gereği statik olmadığını; buna karşın geometrinin statik olduğunu vurgulamıştır. Bu perspektiften incelendiğinde cebir sorusunun ispat süreci, sayılar ve değişkenler üzerinde birbiri ardına hesaplamalar ve algoritmik eylemler yürütmeyi gerektirmesi nedeniyle dinamik bir doğaya sahiptir. Dolayısıyla adayların cebir sorusunda hipotez ve hüküm arasında yapacağı gelgitlerin sayısının geometri sorusuna göre daha yoğun olacağı varsayımında bulunulabilir. Ancak bu çalışmadan elde edilen sonuç, cebir sorusunun ispatında adayların ileri ve geri hamle sayısının daha fazla olacağı varsayımının tam tersidir. Bu sonucun ortaya çıkmasında etkili olan bir etken, öğretmen adaylarının üniversiteye geometrik ispat deneyimleri ile gelmelerinden kaynaklanıyor olma ihtimalidir. Ball vd. (2002), öğrencilerin lisede kendilerini genellikle temel düzeyde geometrik ispat yapma etkinlikleri içerisinde bulduklarını ifade etmiştir. Benzer şekilde De Guzman vd. (1998) lisans düzeyindeki öğrencilerin yaklaşık üçte birinin geometrik ispatlara aşina olarak üniversiteye geldiklerini belirtmiştir. Bu bakımdan öğretmen adaylarının geometri sorusunun ispatında hamle sayılarının daha fazla olmasında geometrik ispatlara liseden aşina olmalarının doğrudan ya da dolaylı bir etkisi olabilir. Nitekim ülkemizde uygulanan lise öğretim programında (Milli Eğitim Bakanlığı [MEB], 2018) geometri problemlerinde kullanılan teoremlerin elde edilmesine ilişkin kazanımlara yer verilmesinin öğrencileri geometrik ispat yapma deneyimine yönlendirdiği söylenebilir.

Çalışma sonucunda öğretmen adaylarının bir matematiksel ilişkinin ispatına ileri yönde bir hamleyle başlama eğilimlerinin daha fazla olduğu dikkat çekmektedir. Ancak akademik başarısı iyi düzeyde olan öğretmen adayı cebir sorusuna ilişkin ispat sürecine geri yönde bir hamleyle başlaması bu sonuçla ilişkili istisnai bir durumdur. Bu istisnai durum, geometrik ispatların oluşturulmasında hüküm bilgisinin hipotez bilgilerini kullanma anlamında yön verici bir rol oynamasına bağlı olarak ortaya çıkmış olabilir. Lin ve Yang'ın (2007), geometrik ispatların anlaşılmasında mevcut geometri bilgilerinin ispat sürecini başlatma işlevi gördüğünü ifade etmesi bu durumu destekler niteliktedir.

İspat sürecini ileri ya da geri yönde yapılandırırken farklı eylem türlerinin ortaya çıktığı görülmüştür. Bu bakımdan ispat sürecinin şekillenmesinde ileri ve geri yöndeki hamlelerde ifade edilen fikirler (eyleme geçen ya da geçmeyen), varsayımlar, basit ya da daha kapsamlı çıkarımlar, yapılan çizimler ve yorumlar da incelenmelidir.

Matematiksel ispat yaparken öne sürülen fikirlerin, kullanılan örnek ya da karşıt örneklerin, yapılan çıkarımların incelenmesi; bireylerin ispat yapma yeterliliğine yönelik ipuçları barındırmaktadır (Lee, 2016). Dolayısıyla öğretmen adaylarının ileri ve geri yöndeki hamle sayılarının yanı sıra bu süreç içinde gerçekleşen zihinsel eylemlerin de karşılaştırılması önemlidir. Öğretmen adaylarının ispat sürecindeki ürettikleri fikir sayıları incelendiğinde akademik başarılarına bağlı olarak bir değişim olduğu gözlenmiştir. Bu değişim, akademik başarı düzeyi yükseldikçe ortaya atılan fikir sayısının artması şeklindedir. Akademik başarının belirlenmesi, bireyin kendisinde var olan potansiyeli gösterebilme yeteneğine bağlıdır (Buluş vd., 2011). Bu noktada akademik başarısı yüksek olan öğrenciler hedef belirleme, sorgulama, planlama, inceleme gibi eylemleri gerçekleştirmede daha etkin bireylerdir (Garavalia ve Gredler, 2002). Dolayısıyla bu tür öğrenciler öğrendiklerini nerede, nasıl ve neden kullanacaklarına ilişkin bir farkındalığa sahiptirler. Bu doğrultuda öğrencilerin akademik başarılarıyla doğru orantılı olarak sorulara daha farklı bakış açısı geliştirebilmeleri mümkün olup belirtilen sonuç üzerinde etkili olabilir. Gerek geometri gerekse cebir sorusuna ilişkin ispat süreçlerinde fikir sayılarının benzer şekilde gerçekleştiği fark edilmiştir. Ancak ispat sürecinde ileri sürülen fikirlerin büyük çoğunluğunun cebir sorusuna yönelik ispatı oluştururken eyleme geçmesi dikkat çeken durumlar arasındadır. İspat sürecindeki çıkarımlar basit ya da kapsamlı olarak ayırt edilmeksizin incelendiğinde akademik başarısı düşük düzeyde olan öğretmen adayının özellikle de geometri sorusu ile ilgili çıkarımda bulunma eğiliminin daha az olduğu dikkat çekmektedir. Buna karşın ispat sürecinde öğretmen adaylarının yaptıkları ile ilgili yorumlarda bulunma bakımından akademik başarı düzeyleri anlamında kayda değer bir farklılığın oluşmadığı gözlenmiştir. Bu durum, bir kişinin kendi yaptıkları üzerine açıklamalarda bulunmasının daha kolay olmasından kaynaklanabilir. Ayrıca yorumların kişiye özgü olmasına bağlı olarak doğruluğu ya da yanlışlığının aranmaması bu durum üzerinde etkili olabilir.

İspat sürecinde ortaya çıkan eylemlerin geometri ve cebir alanlarına bağlı olarak değişim gösterdiği fark edilmiştir. Bu doğrultuda geometri ve cebir alanına özgü sırasıyla çizim yapma ve varsayımda bulunma şeklinde zihinsel eylemler ortaya çıkmıştır. Geometri alanına özgü olan çizim yapma eylemi dikkate alındığında akademik başarısı iyi düzeyde öğretmen adayının orta ve düşük düzeyde akademik başarıya sahip öğretmen adaylarına göre daha fazla çizim hamlesinde bulunduğu dikkat çekmektedir. Bu durum, akademik başarısı iyi düzeyde olan öğretmen adayının ispat sürecinde daha fazla ek çizim yaparak akıl yürütme girişimi anlamında diğer adaylardan bir adım önde olduğuna işaret etmektedir. Çizim yapma eylemi doğası gereği yeni hamle girişimlerini beraberinde getirmektedir. Başka bir ifadeyle yapılan çizimler üzerinden çeşitli fikirler yürüterek ardından gelebilecek ispat adımlar üzerine düşünme fırsatı sağlamaktadır. Dolayısıyla çizimler çeşitli bilgilerin kullanımına (ör., teorem kullanımı, benzer veya eş üçgenler belirleme, cebirsel işlemler yürütme) zemin hazırlamaktadır. Palatnik ve Dreyfus (2019) ek çizimlerin yapılmasının kuralların, formüllerin ve tanımların hatırlanmasına ya da manipüle edilen şekil üzerinden daha farklı bilgiler edinilmesine katkı sağladığını belirterek bu durumu desteklemektedir. Çizim yapma sıklığı ise ispat sürecinde düşüncelerin daha zengin ve esnek olduğunun bir göstergesidir. Bu doğrultuda akademik başarısı iyi düzeyde olan öğretmen adayının çizim yapma açısından diğer adaylara göre daha ön planda olduğu fark edilmektedir. Bu bakımdan ispat sürecinde akademik başarısı iyi düzeyde olan öğretmen adayının diğer adaylara göre daha cesaret isteyen girişimlerde bulunma eğilimde olduğu söylenebilir. Cebir alanına özgü olan bir eylem türü olarak belirlenen varsayım açısından değerlendirildiğinde ise akademik başarı bakımından herhangi bir değişimin mevcut olmadığı dikkat çekmektedir. Bununla birlikte geometri ve cebir alanlarına bağlı olarak iki farklı tema altında zihinsel eylemler ortaya çıksa da çizim yapma ve varsayım temelde aynı çatı altında değerlendirilebilir. Bir başka ifadeyle alanlardaki farklılık doğrultusunda tema isimlerinde bir değişim olsa da bu temalar altında gerçekleşen eylemlerin anlamları bakımından bir kesişim olduğundan söz edilebilir. Her iki eylemin gerçekleştirilme amacının sonraki ispat adımlarının şekillenmesini sağlaması bu durumu açıklar niteliktedir.

Bu araştırma kapsamında geometri ve cebir alanından birer soruya yer verilmesi, elde edilen sonuçlar bakımından araştırmanın bir sınırlılığı olarak değerlendirilebilir. Buna karşın bu araştırmada öğretmen adaylarının ileri-geri tekniğini kullanma durumlarının derinlemesine incelenmesinin amaçlanması, soru sayısının kısıtlı olmasını gerektirmiştir. Bu bakımdan ileride yapılacak ve öğretmen adaylarının ileri-geri tekniğini kullanmasını incelemeyi gerektirecek araştırmalarda soru sayısı arttırılabilir. Böylece ispatlanacak önerme sayısının arttırılmasının öğretmen adaylarının ileri-geri hamle sayısının ve bu hamlelerdeki eylemlerinin niteliğini nasıl etkilediği incelenebilir.

Eğitimsel Yansımalar

1. İspat yapma bir problem çözme sürecidir. Bu süreçte yeni yollar bulmanın en önemli adımlarından biri hipotez ve hüküm arasında ileri ve geri yönde çalışarak tutarlı argümanlar üretebilmektir. Özellikle üniversite düzeyinde sunulan matematiğin ispat yapabilme becerisi gerektirmesi, öğrencilere bu düzeyde bir ispat öğretiminin nasıl yapılması gerektiği sorusunu gündeme getirmektedir. Öğrencilere ispatın hazır bir ürün olmaktan ziyade zihinsel bir mücadele neticesinde inşa edildiğini deneyimleme fırsatı verilmesi büyük önem taşımaktadır. Bu noktada üniversite düzeyindeki matematik derslerinde öğretim üyeleri tarafından ileri-geri tekniğinin kullanılması yararlı olabilir. Öğretim üyelerinin bir ispatı yaparken bu teknik aracılığıyla düşüncelerini sesli olarak ifade etmeleri, öğretmen adayları için ispatı yaratıcı bir inşa sürecine dönüştürme imkânı sunabilir.

2. Öğrencilerin ispata genellikle hipotezden yola çıkarak ileri yönde hamlelerle başladıkları görülmektedir. Ancak ispatın tamamlanabilmesi için ileri yöndeki hamleler kadar geri yöndeki hamlelerin de önemli olduğu göz ardı edilmemelidir. İleri ve geri hamle sayısında belirli bir ahengin olduğu ispatlama süreçlerinin çıkarım, varsayımda bulunma, fikir öne sürme gibi eylem türleri açısından daha zengin olduğu açıktır. Bu nedenle ispatın başarılı bir şekilde tamamlanabilmesi için ileri ve geri yönde esnek çalışmaya imkân

tanıyan doğrudan ve dolaylı ispat yöntemlerine derslerde daha sık yer verilmesi faydalı olabilir.

3. Akademik başarı ile düşüncedeki esneklik arasındaki ilişki göz önünde bulundurularak ispat öğretiminde (ve ispat uygulamalarında) her düzeyden öğrenciyi teşvik edecek pedagojik girişimlerin desteklenmesi oldukça önemlidir. İspat öğretiminde teorem ispatlarını hazır bir ürün olarak sunmak yerine hükmü dikkate alarak "Bu ifadenin doğruluğunu nasıl gösterebilirim?" sorusuna önerilen fikirlerin uygun olup olmadığının tartışılması fikirler açısından zengin bir tartışma ortamı oluşturmak için oldukça faydalı olabilir. İspat yaparken -özellikle geri yönde çalışırken- bu soruya verilen yanıtlar kadar bu yanıtlarda yaratıcılık, sezgi ve deneyimlerin nasıl kullanıldığına öğrencilerin bizzat şahit olmaları onların kendi ispatlarını oluşturma girişimlerine katkı sunacaktır. Bu girişim öğrencilerin özellikle ileri ve geri yönde esnek çalışabilme becerisi kazanabilmeleri için mevcut bilgilerini nasıl kullanmaları gerektiğine dair bir öngörü kazanmalarına da destek olabilir.

4. İspat sürecinde ileri ya da geri hamle sayısı kadar bu hamleler sonucunda oluşan düşünceler ağının bir bütün halinde değerlendirilerek ispatın tamamlanması oldukça önemlidir. Akademik başarının yüksek düzeyde olması ile ileri ve geri hamle sayısının fazla olması arasında dolaylı da olsa bir ilişki olduğu söylenebilir. Bu bakımdan, öğretmen adaylarının ispat sürecinde ileri ve geri hamle sayısını artıracak eylemlerin desteklenmesinin hem akademik başarılarını hem de ispatı tamamlayabilme becerilerinin gelişmesine destek olması bakımından önemli olduğu iddia edilebilir.

Araştırma Etiği

Araştırma için etik kurul onay belgesi, Trabzon Üniversitesi Sosyal ve Beşerî Bilimler Bilimsel Araştırma ve Yayın Etiği Kurulu aracılığıyla alınmıştır (Ref. No: E-81614018-000-2200021536). Öğretmen adayları araştırma ile ilgili bilgilendirilmiş olup bu araştırmaya katılıp katılmama kararı kendilerine bırakılmıştır. Ayrıca öğretmen adaylarının kimlik bilgilerini ortaya çıkaracak herhangi bir bilgiye yer verilmemiştir.

Yazar Notu

Bu çalışma, 26-28 Eylül 2019 tarihinde düzenlenen "4. Türk Bilgisayar ve Matematik Eğitimi Sempozyumu'nda (4th Turkish Computer and Mathematics Education Symposium)" sunulan sözlü bildirinin genişletilmiş halidir. "

Kaynakça

Atiyah, M. (2001). Mathematics in the 20th century: Geometry versus algebra. *Mathematics Today, 37*(2), 46–53.

Attouch, H., & Peypouquet, J. (2016). The rate of convergence of nesterov's accelerated forward-backward method is actually faster than $1/k^2$. *SIAM Journal on Optimization, 26*(3), 1824–1834. https://doi.org/10.48550/arXiv.1510.08740

Ball, D. L., Hoyles, C., Jahnke, H. N., & Movshovitz-Hadar, N. (2002). The teaching proof. L. I. Tatsien (Haz.), *Proceedings of the International Congress of Mathematicians* içinde (Cilt. III, s. 907–920). Higher Education Press.

Buluş, M., Duru, E., Balkıs, M., & Duru, S. (2011). Öğretmen adaylarında öğrenme stratejilerinin ve bireysel özelliklerin akademik başarıyı yordamadaki rolü. *Eğitim ve Bilim, 36*(161), 186–197.

Chang, S. S., Wen, C. F., Yao, J. C., & Zhang, J. Q. (2017). A generalized forward-backward method for solving split equality quasi inclusion problems in Banach spaces. *Journal of Nonlinear Sciences and Application, 10*, 4890–4900. http://dx.doi.org/10.22436/jnsa.010.09.29

De Guzman, M., Hodgson, B. R., Robert, A., & Villani, V. (1998, August). *Difficulties in the passage from secondary to tertiary education.* Paper presented at the International Congress of Mathematicians, Berlin.

Dreyfus, T. ve Eisenberg, T. (1996). On different facets of mathematical thinking. R. J. Sternberg, & T. Ben-Zeev (Haz.), *The nature of mathematical thinking* içinde (s. 253-284). Lawrence Erlbaum Associates.

Garavalia, L. S. ve Gredler, M. E. (2002). Prior achievement, aptitude, and use of learning strategies as predictors of college student achievement. *College Student Journal, 36*(4), 616–641.

Heinze, A. ve Reiss, K. (2004). The teaching of proof at the lower secondary level – a video study. *ZDM Mathematics Education, 36*(3), 98–104. https://doi.org/10.1007/BF02652777

Heinze, A., Cheng, Y. H., Ufer, S., Lin, F. L., & Reiss, K. (2008). Strategies to foster students' competencies in constructing multi-steps geometric proofs: teaching experiments in Taiwan and Germany. *ZDM Mathematics Education, 40*, 443–453. https://doi.org/10.1007/s11858-008-0092-1

Hine, G., & McNab, N. (2014). *Mathematics specialist: Year 11 ATAR course-Units 1 ve 2 (Australian curriculum)*. Academic Associates.

Jones, K. (2000). The student experience of mathematical proof at university level. *International Journal of Mathematical Education in Science and Technology, 31*(1), 53-60. https://doi.org/10.1080/002073900287381

Kankam, K., Pholasa, N., & Cholamjiak, P. (2019). On convergence and complexity of the modified forward-backward method involving new linesearches for convex minimization. *Mathematical Methods in Applied Sciences, 42*(5), 1352–1362. https://doi.org/10.1002/mma.5420

Krutetskii, V. A. (1969). An investigation of mathematical abilities in school children. J. Kilpatrick, ve I. Wirszup (Haz.), *Soviet studies in the psychology of learning and teaching mathematics* içinde (s. 5–57). University of Chicago Press.

Lakatos, I. (1976). *Proofs and refutations: The logic of mathematical discovery*. Cambridge University Press.

Lee, K. (2016). Students' proof schemes for mathematical proving and disproving of propositions. *Journal of Mathematical Behavior, 41*, 26–44. https://doi.org/10.1016/j.jmathb.2015.11.005

Lin, F. L., & Yang, K. L. (2007). The reading comprehension of geometric proofs: The contribution of knowledge and reasoning. *International Journal of Science and Mathematics Education, 5*(4), 729–754. https://doi.org/10.1007/s10763-007-9095-6

Manin, Y. (1992, August). Contribution in panel discussion on "*The theory and practice of proof*". Paper presented at the 7th International Congress on Mathematical Education (ICME-7), Quebec, Canada.

Matsuda, N., & VanLehn, K. (2004). GRAMY: A geometry theorem prover capable of construction. *Journal of Automated Reasoning, 32*, 3–33. https://doi.org/10.1023/B:JARS.0000021960.39761

Milli Eğitim Bakanlığı [MEB]. (2018). O*rtaöğretim matematik dersi (9, 10, 11 ve 12. sınıflar) öğretim programı*. MEB Yayınları.

Miyazaki, M., Fujita, T., Jones, K., & Iwanaga, Y. (2017). Designing a web-based learning support system for flow-chart proving in school geometry. *Digital Experiences in Mathematics Education, 3*, 233–256. https://doi.org/10.1007/s40751-017-0034-z

Miyazaki, M., Nagata, J., Chino, K., Fujita, T., Ichikawa, D., Shimizu, S., & Iwanaga, Y. (2016,). Developing a curriculum for explorative proving in lower secondary school geometry. G. Kaiser (Haz.), *Proceedings of the 13th International Congress on Mathematical Education* içinde (s. 1–4). Springer.

Moore, R. C. (1994). Making the transition to formal proof. *Educational Studies in Mathematics*, *27*, 249–266. https://doi.org/10.1007/BF01273731

Otani, H. (2019). Comparing structures of statistical hypothesis testing with proof by contradiction: In terms of argument. *Hiroshima Journal of Mathematics Education, 2*, 1–12.

Öztürk, T. (2016). *Matematik öğretmeni adaylarının ispatlama becerilerini geliştirmeye yönelik tasarlanan öğrenme ortamının değerlendirilmesi* [Yayınlanmamış doktora tezi]. Karadeniz Teknik Üniversitesi.

Palatnik, A., & Dreyfus, T. (2019). Students' reasons for introducing auxiliary lines in proving situations. *The Journal of Mathematical Behavior, 55*. https://doi.org/10.1016/j.jmathb.2018.10.004

Perry, P., Molina, Ó., Camargo, L., & Samper, C. (2011, February). *Analyzing the proving activity of a group of three students.* Paper presented at Congress of the European Society for Research in Mathematics Education (CERME 7), Poland.

Polya, G. (1957). *How to solve it* (2. baskı). Princeton University Press.

Remillard, K. (2014). Identifying discursive entry points in paired-novice discourse as a first step in penetrating the paradox of learning mathematical proof. *Journal of Mathematical Behavior, 34*, 99–113. https://doi.org/10.1016/j.jmathb.2014.02.002

Siegler, R. S., & Wagner Alibali, M. (2005). *Children's thinking* (4. baskı). Pearson Prentice Hall.

Solow, D. (2014). *How to read and do proofs: An introduction to mathematical thought processes* (6. baskı). John Wiley ve Sons.

Spiro, R. J., & Jehng, J. (1990). Cognitive flexibility and hypertext: Theory and technology for the non-linear and multidimensional traversal of complex subject matter. D. Nix, ve R. Spiro (Haz.), *Cognition, education, and multimedia* içinde (s. 163–205). Erlbaum.

Tall, D. (2002). The psychology of advanced mathematical thinking. D. Tall (Haz.), *Advanced mathematical thinking* içinde (s. 3–21). Springer.

Tall, D. (1995). Cognitive growth in elementary and advanced mathematical thinking. L. Meira, ve D. Carraher (Haz.), *Proceedings of the 19th Meeting of the International Group for the Psychology of Mathematics Education* içinde (Cilt. I., s. 61–75). Universidade Federal de Pernambuco.

Tsujiyama, Y. (2011). On the role of looking back at proving processes in school mathematics: Focusing on argumentation. M. Pytlak, T. Rowland & E. Swoboda (Haz.), *Proceedings of the 7th Congress of the European Society for Research in Mathematics Education* içinde (s. 161–171). University of Rzeszów.

Warner, L. B., Alcock, L. J., Coppolo Jr., J., & Davis, G. E. (2003). How does flexible mathematical thinking contribute to the growth of understanding? N. A. Pateman, B. J. Dougherty, & J. Zillox (Haz.), *Proceedings of the Twenty-Seventh Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education* içinde (Cilt. IV., s. 371–378). PME.

Yang, K. L., & Lin, F. L. (2012). Effects of reading-oriented tasks on students' reading comprehension of geometry proof. *Mathematics Education Research Journal, 24*, 215–238. https://doi.org/10.1007/s13394-012-0039-2

Weber, K. (2005). Problem-solving, proving, and learning: The relationship between problem solving processes and learning opportunities in the activity of proof construction. *Journal of Mathematical Behavior, 24*, 351–360. https://doi.org/10.1016/j.jmathb.2005.09.005

The Analysis of the Employment of the Forward-Backward Technique by Mathematics Pre-service Teachers

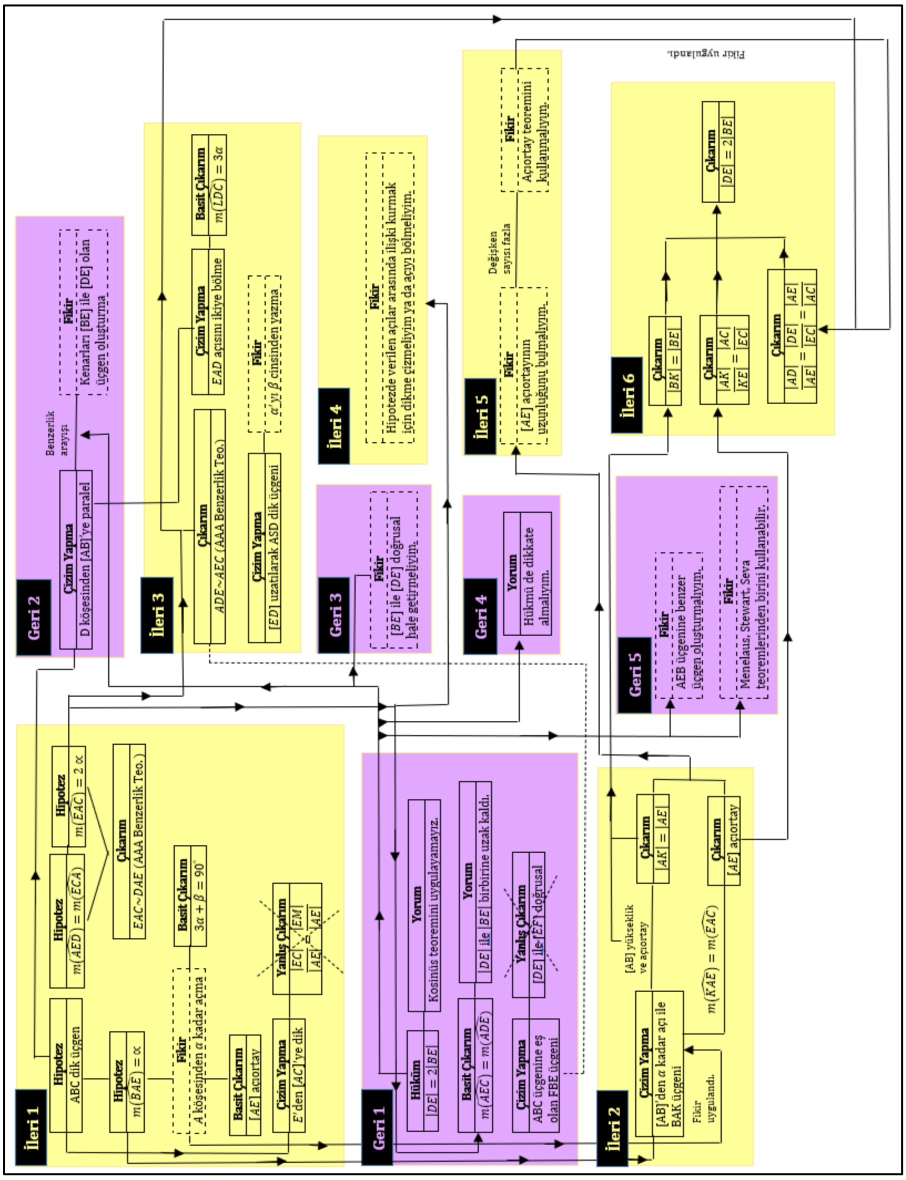
Abstract
The study aims to depict the mental actions of mathematics pre-service teachers during the process of proof, with the employment of the forward-backward method. Clinical interviews were conducted with three pre-service mathematics teachers, whose academic achievements were good, moderate and low, based on one geometry and one algebra questions. Mental maps for the forward-backward technique were developed based on the analysis of the proof processes adopted by each pre-service teacher, and the role of these maps in the achievement of the proof was discussed. The results demonstrated that three pre-service teachers intensively employed the forward-backward technique in proof, albeit not always consciously, regardless of their academic achievement levels and the field of the question. It was determined that the number of forward-backward steps increased with the increase in academic achievements of the pre-service teachers. Since the technique allows the faculty members to express their ideas verbally, this could provide the opportunity to turn proof into a creative construction process for the pre-service teachers.

Keywords: proof, forward-backward technique, pre-service mathematics teacher

Ek 1- Geometri Sorusunun İspatı İle İlgili Zihinsel Eylem Haritaları

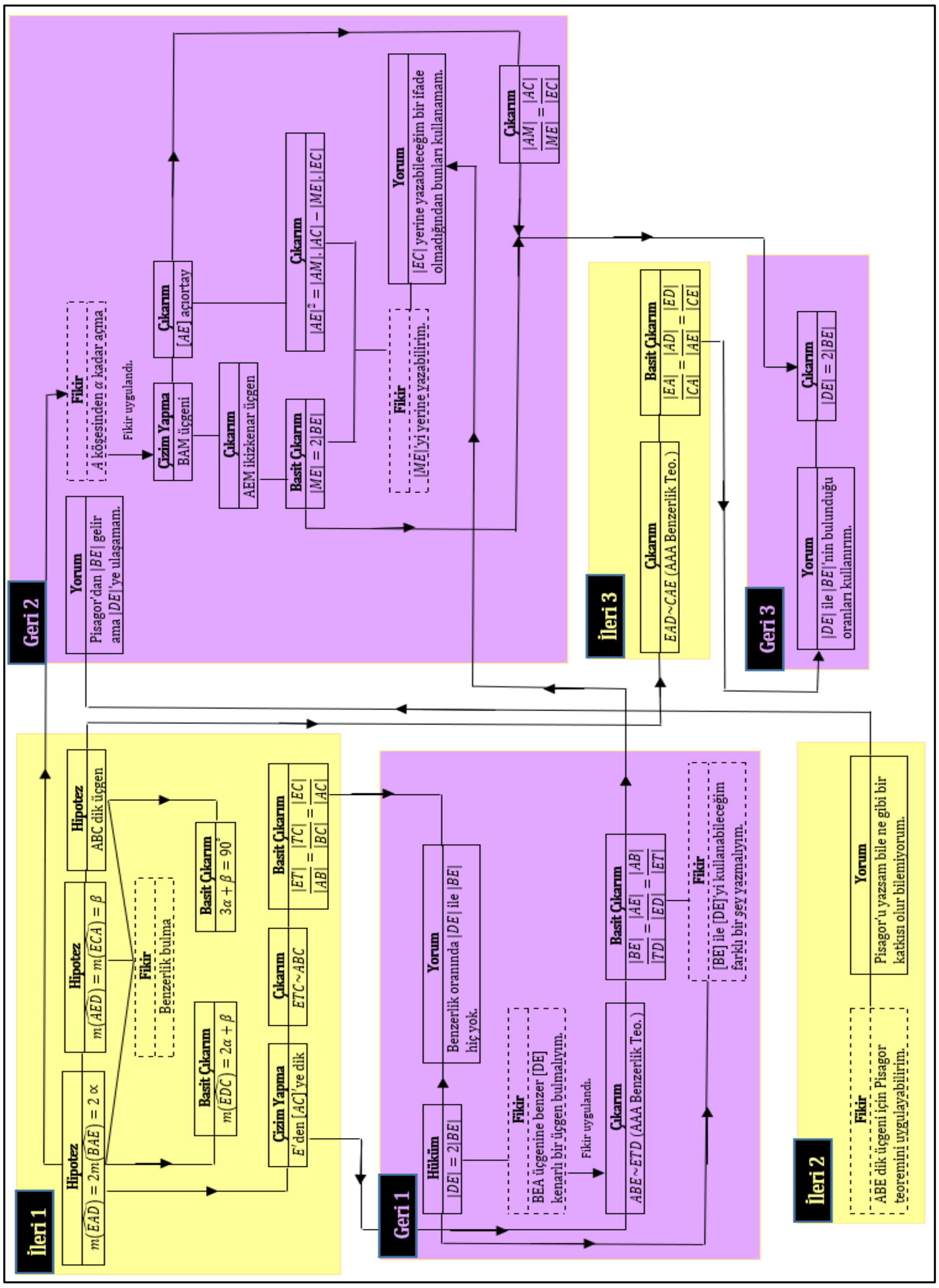
Şekil 4

Geometri Sorusunun İspatına Yönelik Ali'nin Zihinsel Eylem Haritası



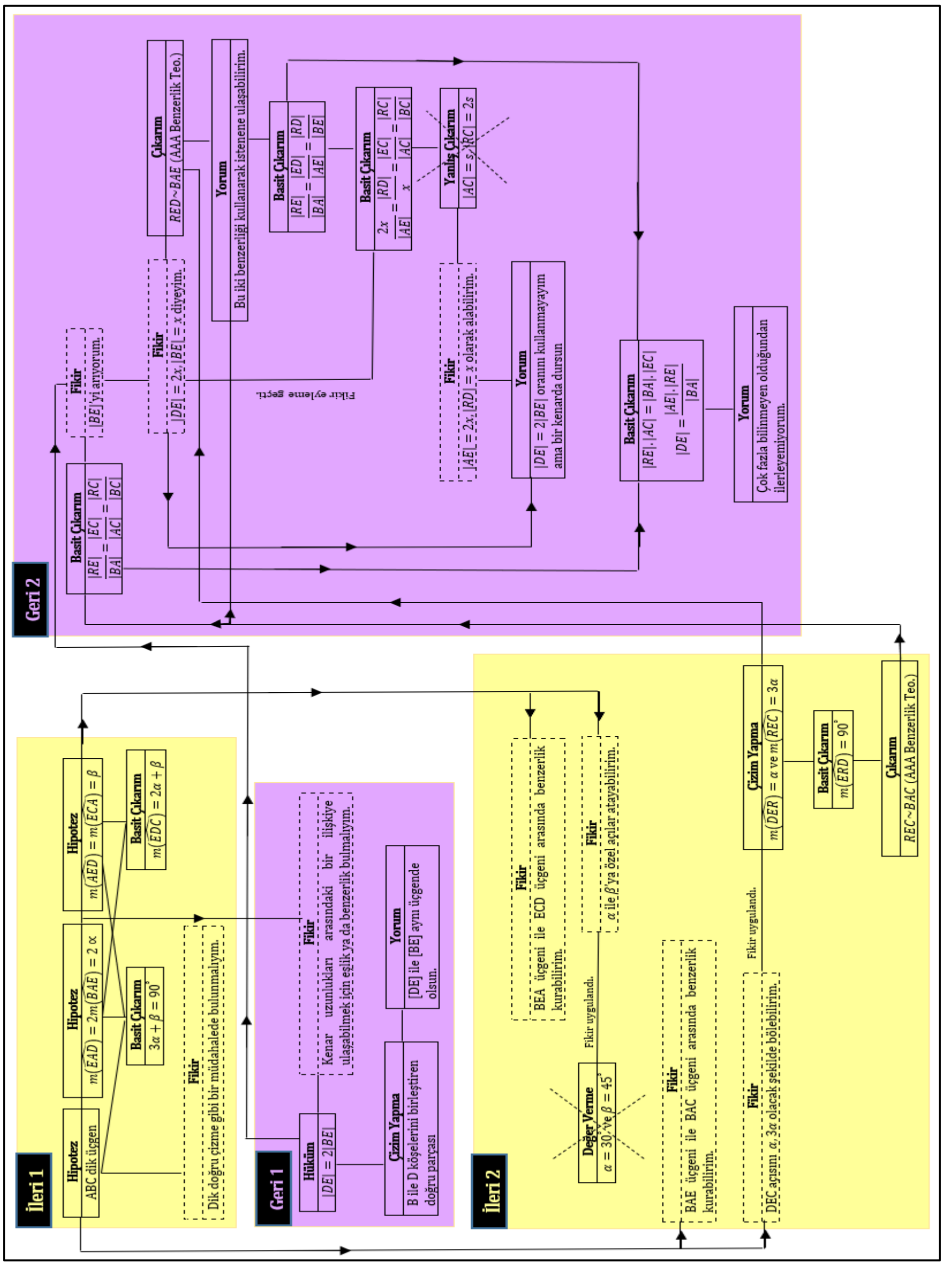
Şekil 5

Geometri Sorusunun İspatına Yönelik Naz'ın Zihinsel Eylem Haritası



Şekil 6

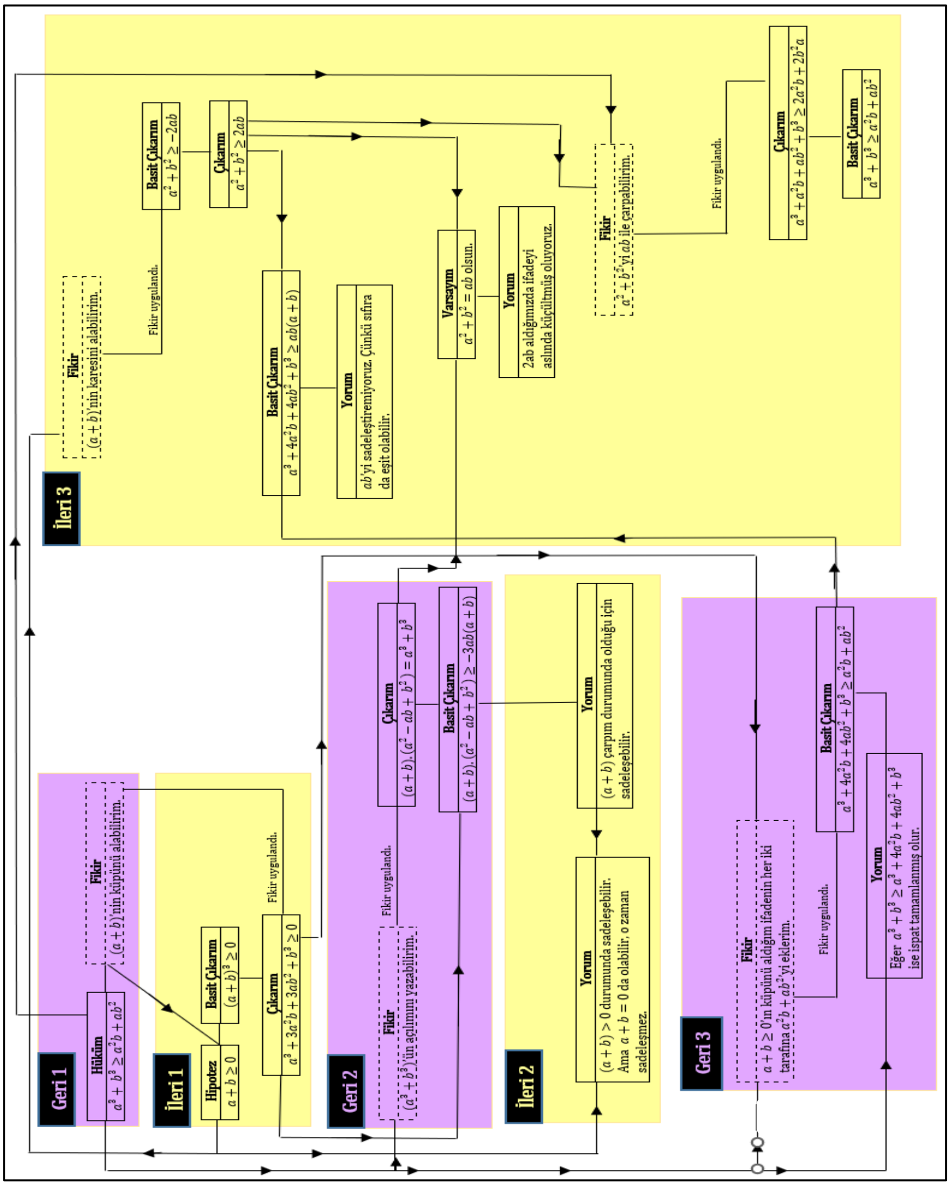
Geometri Sorusunun İspatına Yönelik Can'ın Zihinsel Eylem Haritası



Ek 2- Sayılar Teorisi Sorusunun İspatı İle İlgili Zihinsel Eylem Haritaları

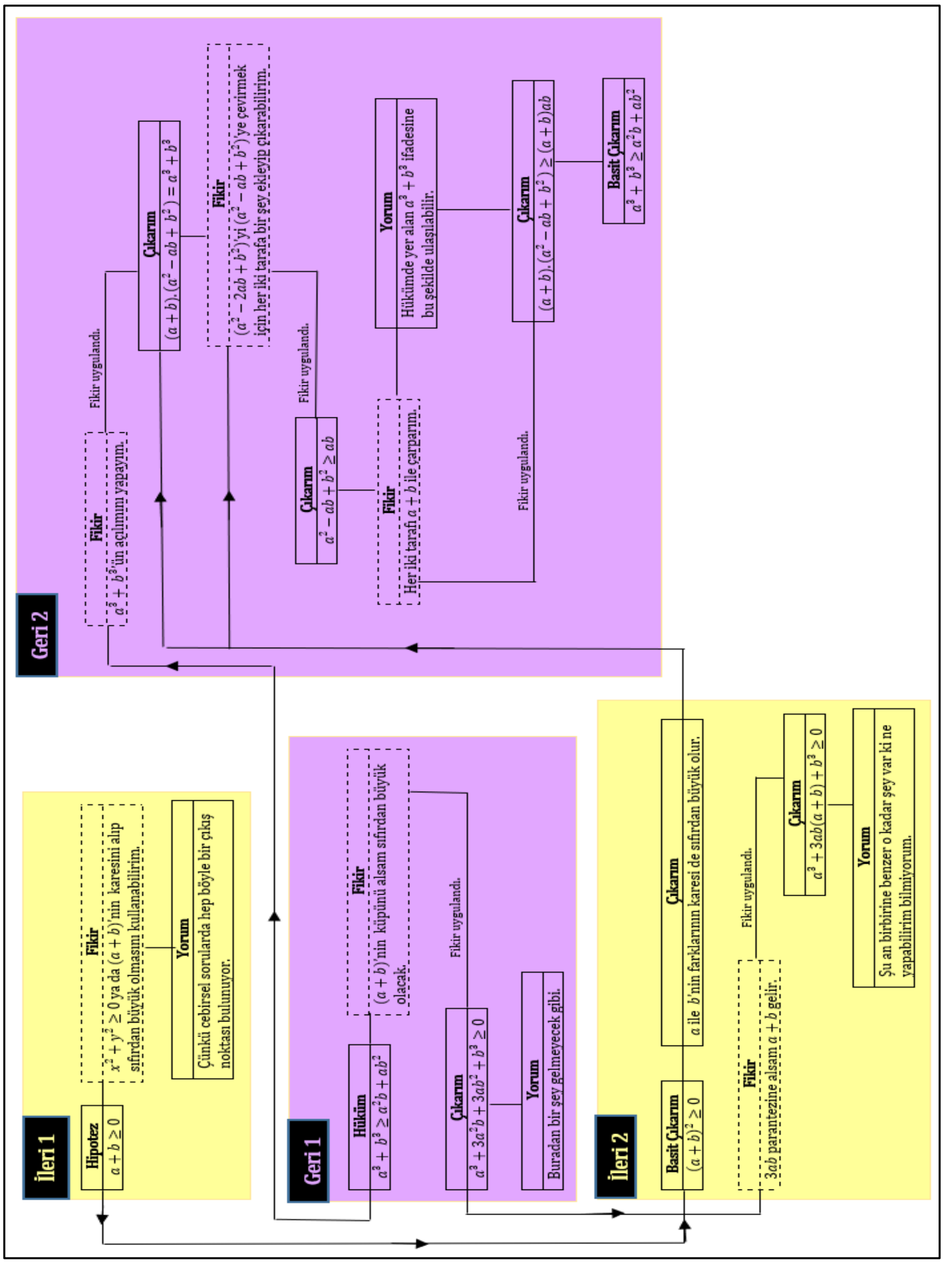
Şekil 7

Sayılar Teorisi Sorusunun İspatına Yönelik Ali'nin Zihinsel Eylem Haritası



Şekil 8

Sayılar Teorisi Sorusunun İspatına Yönelik Naz'ın Zihinsel Eylem Haritası



Şekil 9

Sayılar Teorisi Sorusunun İspatına Yönelik Can'ın Zihinsel Eylem Haritası